UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Fondamentales et Appliquées

Par

FENDA ISMAHAN

Sujet

Théorie de fourier pour les EDP du second ordre

Soutenu le: 28/05/2013 devant le jury composé de

Promoteur : pr. Moussai Madani M'sila

Président : Djeriuo Aissa M'sila

Examinateurs : Mazouz Ahmed M'sila

Promotion: 2012/2013

Remerciements

﴿وما توفيقي إلا بالله عليه توكلت و إليه أنيب﴾

الحمد لله الذي وفقني لهذا .

أكبر شكر وأعظم تقدير إلى أسمى من في الوجود **أبي**، جازاك الله عنا كل خير أيها **الفاضل**.

Je tien à remercier mon directeur de mémoire le Pr : Moussai Madani qui m'a propose ce sujet et qui m'a beaucoup aide durant la préparation de ce mémoire.

Je remercie aussi Mr: A. maazeuz et A. djrio.

Je tiens aussi à remercier tout personne ayant participé de prés ou de lieu à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une **équation aux dérivées partielles** (EDP) est une équation dont les **solutions** sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.

Les équations aux dérivées partielles linéaire du seconde ordre jouent un rôle considérable en mécanique et en physique .elles sont omniprésentes dans les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des **EDP**.

Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les problèmes incluent souvent des conditions aux limites supplémentaires qui restreignent l'**ensemble des solutions**. telle que les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme des fonctions

La méthode la plus utilisant pour la construction des solutions d'une équation linéaires aux dérivées partielles est fondée sur la technique de séparation des variables, Nous avons besoin tout d'abord les étapes principales de cette technique et recherche des solutions homogènes de l'EDP, qui sont appelées solutions de produit (ou solutions élémentaire), Ces solutions sont de la forme

$$u(x,y) = f(x)g(y)$$

et en général, elles doivent satisfaire certaines conditions supplémentaires. Dans des nombreux cas, ces conditions supplémentaires sont des conditions aux limites homogènes. Il s'avère que f et g sont des solutions des EDO linéaire(à une seul variable). Dans la deuxième étape, nous utilisons une généralisation du principe de superposition Et écrivons la solution sous forme d'une série de fourier, cette méthode sera appliquée à l'équations des ondes, Laplace et chaleur.

CHAPITRE (01)

classification des EDP

Dans ce chapitre on donne une classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre.

Les équations aux dérivées partielles sont classées en trois catégories: ***elliptique, parabolique*** et ***hyperbolique*** .elles ont des propriétés mathématiques différentes

1. Rappel sur les dérivées partielles:

Soit f une fonction réelle dans.$\mathbb{R}^n$.

Définition (1-1):

La $i^{éme}$ dérivée partielle de f ou point $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ est définie par:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, x, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_N) - f(x_1, x_2, \ldots; x_{i-i}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)}{h}$$

lorsque cette limite existe.

Définition (1-2):

Si toutes les dérivées partielle d'une fonction f sont définies en un point de l'espace $\mathbb{R}^n$ alors on appelle gradient de f au point $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ le vecteur

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right)$$

Définition (1-3):

La dérivée partielle de la fonction f d'ordre j par rapport aux variable $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ est définie par:

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_2 \partial x_3 \ldots \partial x_j}\right)$$

Proposition (01):

Les dérivées partielle d'ordre 2vérifient:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Définition (1-4):

La Laplacien d'une fonction f de n variables est:

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

2. Notions fondamentaux sur Les EDP

Définition:(2-1):

Une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre deux définie dans un ouvert $\Omega \subseteq R^n$ est de la forme:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j}(x) = F(x, u, \nabla u) \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

où $a_{i,j}$ et F sont des fonctions données.

Définition:(2-2):

L'ordre d'une équation à la dérivée partielle est l'ordre de la dérivée partielle le plus élevé intervenant dans l'équation.

Définition:(2-3):

On dit que une équation aux ***dérivée partielle linéaire*** d'ordre deux***, si*** elle est linéaire par rapport à la fonction u et toute ses dérivées partielles d'ordre deux

Définition:(2-4):

Une équation aux dérivée partielle linéaire ***homogène*** est vérifie pour $u=0$ **(**s'elle écrite de façon usuelle, le seconde membre ne contenant ni u ni ses dérivée partielle, est identiquement nulle**)**.

Les solutions de l'équation aux dérivée partielle sont les fonctions qui vérifiant cette équation dans Ω.

On pratique parmi toutes les solutions possibles on cherchent une qui vérifie des conditions supplémentaires sur les bord du domaine Ω et s'appellent ***condition aux bord,*** on utilise aussi le terme de ***condition ou limite*** (regardes chapitre (02) paragraphe (2-2).

3. Classification des équations aux dérivés partiels:

3.1 Classification dans $\mathbb{R}^2$:

3-1-1 Les caractéristique:

Une ***EDP*** du deuxième ordre à deux variables sur un domaine Ω est de la forme:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

où u est une fonction de (x,y) , $(x,y)\in\Omega$.

$$p=\frac{\partial u}{\partial x} \quad ,q=\frac{\partial u}{\partial y} \quad ,r=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ,t=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ,s=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Il vient que:

$$\begin{cases} dp=\dfrac{\partial p}{\partial x}dx+\dfrac{\partial p}{\partial y}dy=rdx+sdy \\ dq=\dfrac{\partial q}{\partial x}dx+\dfrac{\partial q}{\partial y}=sdx+tdy \end{cases} \qquad (1\text{-}2\text{-}2)$$

Ce que donné trois équations du première dégrée on r, s, t:

$$\begin{cases} rdx+sdy \quad =dp \\ \quad sdx+tdy=dq \\ ar+bs+ct=f \end{cases} \qquad (1\text{-}2\text{-}3)$$

Le système (1-2-3) admet une solution par r,s,t si et seulement si leur

Détèrminant est nulle, c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ a & b & c \end{vmatrix} = a(dy)^2 - b(dxdy) + c(dx)^2 = 0 \qquad (1\text{-}2\text{-}4)$$

D'où

Définition:(3-1):

Si $\boldsymbol{a \neq 0}$, On peut écrire l'équation (1-2-4) sous la forme :

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + c(x,y) = 0 \qquad (1\text{-}2\text{-}5)$$

S'appelle l'équation canonique de (1-2-4).

Cette équation admet deux solutions du type :

$$\frac{dx}{dy} = \varphi_1(x,y) \qquad , \frac{dy}{dx} = \varphi_2(x,y) \qquad (1\text{-}2\text{-}6)$$

Définition:(3-2)

Les équations (1-2-6) représentent les ***courbes caractéristiques*** de l'équation aux dérive partielle (1-2-2), et il y a trois formes de caractéristique:

a)Réelles:

Si∀(x, y) ∈Ω $b^2 - 4ac \geq 0$, on dit que (1-2-1) est EDP ***hyperbolique*** sur Ω.

Exemple (01):

L'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$$

b) Imaginaire:

Si$\forall$(x, y) $\in\Omega$ $b^2 - 4ac \leq 0$, on dite que (1-2-1) est EDP ***elliptique*** sur Ω.

Exemple(02):

L'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$$

c)Double:

Si$\forall$(x, y) $\in\Omega$ $b^2 - 4ac = 0$, on dite que (1-2-1) est EDP ***parabolique*** sur Ω.

Exemple(03):

L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$$

Il existe naturellement des équations du type mixte par exemple :

Exemple(04):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

-Hyperbolique dans le demi plan R^+($x \geq 0$),

-elliptique dans R^- ($x \leq 0$)

-($x = 1$ équation de l'onde).

Exemple(05):

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Equation canonique :

$$x^2(dy)^2-y^2(dx)^2=0$$

Soit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \qquad ,\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

Donc $y=c_1x \quad ,y=c_2x$ sont deux caractéristiques c'est-à-dire (5) est hyperbolique sur R^2

3.2 Classification des équations aux dérivés partielles de n Variables (dans $\mathbb{R}^n$):

Une équation aux dérivée partielle du seconde ordre à n variable sur un domaine $\Omega\subset R^n$,est de la forme:

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)+F\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},\ldots\ldots\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \qquad \forall x\in\Omega \qquad (1\text{-}2\text{-}7)$$

Où $a_{ij}\in C^\infty(\Omega,R)$ avec $a_{ij}=a_{ji}$.

On écrite la matrice $A_{(x)}=A_{ij}$ **.**

$A_{(x)}$ est symétrique, en effet si $a_{ij}\neq a_{ji}$.

on pose:

$$a'_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) \qquad et \quad a''_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right)$$

et on a **EDP** comme suite:

$$\sum_{ij=1}^{n}\left(a'_{ij} + a''_{ij}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ldots\ldots\frac{\partial}{x_n}\right) = 0 \qquad (1\text{-}2\text{-}8)$$

Définition:(3-3):

Une matrice $\mathrm{A}(x)$ est dite ***symétrique*** si:

$$A \in S_n(R) \Leftrightarrow A^t = A$$

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in R^n \times R^n\ ; \langle Ax, Y\rangle = (Ax)^t y = \langle x, Ay\rangle$$

3-2-1 Polynôme caractéristique et valeurs propres:

Définition:(3-4):

Soit A un matrice symétrique carrée de type $n \times n$

i) on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme X_A définie par la relation

$$X_A(x) = \det\left(A - \lambda I_n\right)$$

ii) on appelle valeurs propres réelles de A les nombres réelles λ racines du polynôme caractéristique de A, autrement dit les solutions de équation polynomiale de dégrée n :

$$\det\left(A - \lambda I_n\right) = 0$$

$A(x)$ est symétrique est toutes les valeurs propre sont réelles pour $\forall x \in \Omega$.

On pose v_+, v_0, v_- le nombre des valeurs propres: *positives, nulles, négatives.*

est o na trois formes de ***EDP*** d'après le nombre des valeurs propres:

Elliptique : si toute les valeurs propres même singes, par exemple l'équation de

Laplace $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots\cdots\cdots 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_i = 1 \geq 0 \quad , \forall i \in N$$

est elliptique sur R^n .

Hyperbolique: si ou mois une valeur propre a un singe différent. , par exemple l'équation de D'Alembert.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & -1 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots\cdots\cdots 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_n = 1 \geq 0, \lambda_j = -1 \quad ,1 \leq j \leq n-1$$

C'est-à-dire $v_+ = 1$, $v_- = n-1$,

Parabolique : si une valeur ou mois est nulle, par exemple l'équation de chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & -1 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots\cdots\cdots 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_n = 0, \lambda_j = -1 \quad ,1 \leq j \leq n-1$$

C'est-à-dire:

ν_+	ν_0	ν_-	**Type de l'EDP**	**exemple**
n	0	0	Elliptique	Laplace
0	n	0		
n-1	1	0	Hyperbolique	D'Alembert, onde
1	n-1	0		
n-1	0	1	parabolique	chaleur
0	n-1	1		

Il existe des équations de type mixte par exemple l'équation de ***tricomi*** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

elle est:

-Elliptique sur $R^+ \times R$.

-hyperbolique sur $R^- \times R$.

-parabolique sur $\{0\} \times R$.

CHAPITRE (02)

La Méthode de fourier pour les EDP du second ordre

Le but de ce chapitre est de mettre en œuvre une méthode particulière

(La méthode de séparation des variable) pour résoudre des équations aux

dérivées partielles (EDP).

1. le principe de superposition:

Définition (2-1):

On dite qu'une *EDP* linéaire est homogène si elle ne contient pas de terme

Indépendant de *u* et de sa dérivée, elle peut se mettre sous la forme:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)+F\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},........,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \quad \forall x\in\Omega \qquad (2\text{-}1\text{-}1)$$

Définition (2-2):

Soit un *EDP* linéaire homogène *lu=0* pour laquelle *L* est un opérateur

Linéaire

-Si u_1, u_2 sont deux solutions de cette *EDP* et $\alpha, \beta \in R$, Alors: $\alpha u_1 + \beta u_2$ est aussi une

solution, ceci est ***le principe de superposition.***

Le principe de superposition découle directement de la structure linéaire

Du l'équation et de l'homogénéité, il peut s'énoncer ainsi:

Si u_1 et u_2 vérifie (2-1-1) alors:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 \text{ Vérifie (2-1-1) } \forall \alpha, \beta \in R.$$

2. La Méthode de Fourier (Méthode de séparation des variables):

2.1 Solution élémentaire:

Nous considérons ici des équations aux dérivée partielle linéaire de la

Forme:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=0 \qquad \forall x\in\Omega \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

Telle que:

a_{ij} , b_i , c Sont des fonctions réelles de $x_1,\ldots\ldots,x_n$.

Si $u_1,\ldots\ldots,u_n$ sont p solutions de l'équation (2-2), il est même de:

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\ldots\ldots+\lambda_n u_n$$

quelle que soient les constantes $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$ réelle ou complexes.

Comme l'équation est linéaire, toute combinaisons linéaire finies des u_i est

Une solution de l'équation.

Une solution $u(\lambda)$ dépendant d'un paramètre λ, est appelle:

Solution élémentaire de l'équation.

Pour trouver les solutions élémentaires il existe des situations faciles

Construire.

Nous cherchons de la solution de la forme

$u(x) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\cdots\cdots\cdots\varphi_n(x_n)$ pour l'équation (2-2-1).

Bornons nous pour fixer les idées à une équation à deux variables indépendantes x et y.

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

Supposons d'abord que les coefficients soient des constantes et que $a_{12} = 0$

On pose:

$$U(x,y) = f(x)g(y) \qquad (2\text{-}2\text{-}3)$$

Telle que :

$f(x), g(y)$ sont respectivement des fonctions de x, y ; ayant au moins des Dérivées premières et secondes continues.

On doit avoir:

$$a_{11}f''g + a_{22}fg'' + b_1 f'g + b_2 fg' + cfg = 0 \qquad (2\text{-}2\text{-}4)$$

où:

$$a_{11}\frac{f''}{f} + a_{22}\frac{g''}{g} + b_1\frac{f'}{f} + b_2\frac{g'}{g} + c = 0 \qquad (2\text{-}2\text{-}5)$$

On a une somme de deux térme :

$$a_{11}\frac{f''}{f}+b_1\frac{f'}{f} \qquad (2\text{-}2\text{-}6)$$

qu'est fonction de x seul

$$a_{22}\frac{g''}{g}+b_2\frac{g'}{g}+c \qquad (2\text{-}2\text{-}7)$$

que est fonction de y seule.

Donc les deux égales à constante.

Si λ est la valeur du premier terme on doit avoir:

$$a_{11}f''+b_1 f'=\lambda f \qquad (2\text{-}2\text{-}8)$$

$$a_{22}g''+b_2 g'=\lambda g \qquad (2\text{-}2\text{-}9)$$

f, g sont donc les solutions de deux équations différentielles ordinaires linéaires des seconds ordres.

La solution $u(x,y)=f(x)g(y)$ dépendante à la constante λ *appelle constante de séparation.*

2.2 Le différent type de problème à la limite:

La méthode de séparation des variables n'est pas universelle mais elle est Souvent utile, elle fournit des solutions dépendant de constante.

Dans la pratique rencontre très souvent des conditions plus compliquées et l'on Cherche des solutions définies dans un domaine donné d'avance.

L'expression de ces solutions dépend du type d'équation (elliptique, Hyperbolique, parabolique).

i) Problème de Cauchy ***(condition initiale):***

On pose *t=0, pour* l'équation à la dérivée partielle hyperbolique *au parabolique*:

Équation parabolique par exemple l'équation de *chaleur*:

$U(x\ ,0)=\varphi(x) \qquad x\in[0,\ l]$

Équation hyperbolique par exemple l'équation de *onde*:

$$u(x,0)=\varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,o)=\psi(x)$$

φ et ψ étant deux fonctions donnée définies pour $0\le x\le l$.

ii) condition au borde : on le pose pour équations aux dérivées partielles elliptique par exemple "Laplace" c'est-à-dire :

$\Omega \subset R^n$; avec:

$$\partial\Omega = \Gamma$$

Telle que:

u et $\dfrac{\partial u}{\partial v}$ sur Γ sont déterminées.

iii) problème Mixte : on le pose pour EDP parabolique, hyperbolique avec les conditions initiale et aux borde.

Voyons le problème Mixte pour l'équation à la dérivée partiale :

On considère l'équation aux dérivée partiale pour $(x, y) \in [0, l] \times R^+$

On pose Les Conditions initiales comme suite:

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,x) = \psi(x)$$

φ et ψ étant deux fonctions donnée définies pour $0 \le x \le l$.

et les Conditions au bord :

$$u(t,0) = u(t,l) = 0$$

Nous rencontrerons des problèmes des ces type aux chapitre suivante.

CHAPITRE (03)

Quelque Aplication Sur l'EDP

Beaucoup de problème de physique font intervenir la résolution d'EDP Linéaire du second ordre.

L'équation de onde, Laplace, chaleur peut être résolue à l'aide de la Méthode de séparation des variables, ce sera va les travaux dirigé de ce chapitre.

1-Résolutions l'équation des ondes par la méthode de Fourier:

1.1. Le cas de $\mathbb{R}^2$:

O na l'équation de type hyperbolique:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad \text{(3-1-1)}$$

On chercher les solutions de l'équation de onde à variables séparées.

Pour lequel les conditions initiales sont

$$u(0,x)=\varphi(x) \;\; et \;, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\psi(x) \quad pourtout\, x, 0\le x\le l$$

Et les conditions à la frontière sont

$$u(0,t)=0 \;\; et \; u(l,t)=0 \quad pour\ tout\ \ t, t\ge 0$$

On suppose:

$$u(x,t)=f(x)g(t)$$

et calcule les dérivées partiales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x)g(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x)g''(t)$$

on a alors :

$$f^{''}(x)g(y)=f(x)g^{''}(t) \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

Donc :

$$\frac{f^{''}(x)}{f(x)}=\frac{g^{''}(y)}{g(y)}$$

La fonction de gouache dépendent uniquement de x et de droite uniquement de t ,

on peut alors dire qu'il existe réel λ telle que:

$$\frac{f^{''}(x)}{f(x)}=\frac{g^{''}(y)}{g(y)}=\lambda \qquad (3\text{-}1\text{-}3)$$

Ce que donne que f , g sont solutions des équations différentielles de deuxième

ordre:

$$f^{''}(x)-\lambda f(x)=0 \text{ Et } g^{''}(t)-\lambda g(t)=0 \qquad (3\text{-}1\text{-}4)$$

Si $\lambda=0$ on a:

$$f^{''}(x)=g^{''}(t)=0$$

et:

$$f(x)=ax+b$$
$$g(y)=\alpha y+\beta$$

Si $\lambda>0$, on a:

$$f(x)=a\exp\left(\sqrt{\lambda}x\right)+b\exp\left(-\sqrt{\lambda}x\right)$$

$$g(t)=\alpha\exp\left(\sqrt{\lambda}t\right)+\beta\exp\left(-\sqrt{\lambda}t\right)$$

Si $\lambda < 0$, on a:

$$f(x) = a\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + b\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \qquad (3\text{-}1\text{-}5)$$

$$g(y) = \alpha\cos\left(\sqrt{-\lambda}t\right) + \beta\sin\left(\sqrt{-\lambda}t\right) \qquad (3\text{-}1\text{-}6)$$

En prenante compte les conditions initiales et les conditions aux limite, on peut déterminer les solutions.

On pose l'équation (3-1-1) sur $\mathbb{R}^+ \times [0, l]$ muni de problème Mixte comme suit:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \forall x \in [0, l]$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$$

φ Et ψ étant deux fonctions données définies pour $0 \le x \le l$.

Remarque:

On peut choisir λ négative c'est-à-dire:

$$\lambda = -\theta^2$$

Donc les solutions (3-1-5), (3-1-6) comme suit:

$$f(x) = a\cos(\theta x) + b\sin(\theta x) \qquad (3\text{-}1\text{-}7)$$

$$g(y) = \alpha\cos(\theta t) + \beta\sin(\theta t) \qquad (3\text{-}1\text{-}8)$$

a, b, α, β étant quatre constantes.

Exprimons maintenant ***les conditions aux limites*** $u=0$ pour $x=0$ et $x=l$.

Donc $f(0)=f(l)=0$.

On doit avoir :

$$a=0,\quad \sin\theta l=0$$

θ est donc un des nombres de

la suite:

$$\theta_n=\frac{n\pi}{l}$$

On peut naturellement choisir $b=1$ dans (3-1-7) et écrire la solution élémentaire

u_n sous la forme:

$$u_n(x,t)=\left(C_n\cos\frac{n\pi}{l}t+d_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (3\text{-}1\text{-}9)$$

Toute combinaison linéaire de solutions élémentaire u_n est une solution de l'équation des cordes vibrantes (onde), on a alors:

$$\boxed{u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi}{l}t+d_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x} \qquad (3\text{-}1\text{-}10)$$

C'est un série de Fourier par rapport à x (période $2l$) et par rapporte à t (période $2l$).

Pour $t=0$:

$$u(0,x)=\varphi(x)\quad ,\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\psi(x)$$

Nous admettrons que la série (3-1-10) est dérivable terme à terme par rapport a t.

On a donc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x) \qquad (3\text{-}1\text{-}11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \psi(x) \qquad (3\text{-}1\text{-}12)$$

c_n et d_n .sont les coefficients du développement en série de Fourrier de la fonction impaire de période $2l$ égale à φ(x) si $0 \leq x \leq l$ .et d_n sont les coefficient du développement en série de Fourier de la fonction impaire de période $2l$ égale à ψ(x) si $0 \leq x \leq l$ donc:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \qquad (3\text{-}1\text{-}13)$$

$$d_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \qquad (3\text{-}1\text{-}14)$$

1-1-1 Rappelle sur les séries de Fourrier:

Lemme:

Si $f(x)$ est une fonction impaire définie sur l'intervalle $[0,l]$; alors sa série de fourrier est:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

avec:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(nx)dx \qquad , n \geq 1$$

1.2. Unicité de la solution :

Théorème(02):

L'équation des ondes muni d'une condition initiale et une condition aux

Limite admet une solution unique qui peut s'écrire en série de Fourier.

Preuve:

Etant donnée l'équation (3-1-1) sur $\mathcal{R}^+ \times [0, l]$ muni de problème Mixte.

On multiple (3-1-1) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur [0, l],

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \qquad (3\text{-}1\text{-}15)$$

Intègre par partie la seconde membre :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx = \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^l - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (3\text{-}1\text{-}16)$$

Ce qui donnée :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] = \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^l$$

Supposons maintenant que (3-1-1) admet deux solutions u_1, u_2 donc $v = u_1 - u_2$

Est encore une solution de (3-1-1) telle que :

$$v(0,x) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,x) = 0 \qquad v(t,0) = v(t,l) = 0$$

Ce qu'entraine:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,0)=\frac{\partial v}{\partial t}(t,l)=0$$

Il vient donc que (3-1-16) pour v s'écrite :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx=0$$

Ce qu'implique:

$$\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx=c$$

Or pour t=0 on a:

$$v(0,x)=0\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}(0,x)=0,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}(0,x)=0=\frac{\partial v}{\partial x}(0,x)\right)$$

Donc C=0

Par conséquent $\forall(t,x)\in R^+\times[0,l]$ on a:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

D'où:

$$v(t,x)=0$$

On regroupé les formules (3-1-1), (3-1-13), (3-1-14) on a alors:

Théorème(03):

Le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} = 0 & y \in R^+, \mathrm{x} \in [0,1] \\ u\left(0;x\right) = \varphi(x) \quad , \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}(0,\mathrm{x}) = \psi(x) & \\ u(t;0) = u(t,l) = 0 & \end{cases}$$

Admet une solution unique, sous la forme:

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos\frac{n\pi}{l}t + d_n \sin\frac{n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

où:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$d_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

1.3 Le cas de $\mathbb{R}^3$:

Soit le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 & t \in \mathrm{R}^+, (x,y) \in [0,l] \times [0,l] \\ u(0,x,y) = \varphi(x,y) \quad , \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = \psi(x,y) \\ u(t,0,y) = u(t,l,y) = u(t,x,o) = u(t,x,l) = 0 \end{cases} \tag{3-1-17}$$

et cherchons une solution élémentaire de type:

$$u(x,y,t) = f(x,y)g(t)$$

Alors, en remplaçant dans (3-1-17) et on multiple par $\dfrac{1}{f(x)g(y)}$

$$\frac{1}{f(x)}\left(f''_{x^2} + f''_{y^2}\right) = \frac{g''(t)}{g(t)} \tag{3-1-18}$$

Comme dans (3-1-4) l'équation (3-1-18) est égale à une constante ($\lambda = -\theta^2$) on a:

$$\begin{cases} g''(t) + \theta^2 g(t) = 0 \\ f''_{x^2}(x) + f''_{y^2}(y) + \theta^2 f = 0 \end{cases} \tag{3-1-19}$$

Ce qui donne :

$$g(t) = A\cos\theta t + B\sin\theta t \tag{3-1-20}$$

Peur l'équation en $f(x)$ cherche une solution de la forme:

$$f(x,y) = \xi(x)\eta(y)$$

Nous Substituons dans (3-1-19).on a donc comme le paragraphe (2):

$$\eta(y)\xi''(x)+\xi(x)\eta''(y)+\theta^2\xi(x)\eta(y)=0$$

où:

$$\frac{\xi''(x)}{\xi(x)}=-\frac{\eta''(y)}{\eta(y)}-\theta^2=-\beta^2 \qquad ,\theta\geq\beta\geq 0$$

La aussi on a:

$$\xi''(x)+\beta^2\xi(x)=0 \quad et\ \eta''(y)+(\theta^2-\beta^2)\eta(y)=0$$

C'est-à-dire :

$$\xi(x)=c\cos\beta x+d\sin\beta x$$

$$\eta(y)=E\cos\sqrt{\theta^2-\beta^2}\,y+F\sin\sqrt{\theta^2-\beta^2}\,y$$

Voyons maintenant les conditions au bord:

Si $x=0 \quad ,u(t,0,y)=0\Rightarrow f(0,y)=0\Rightarrow c=0$

Si $x=l \quad ,u(t,l,y)=0\Rightarrow f(l,y)=0\Rightarrow \beta=\frac{n\pi}{l}$, $n\in Z$ $et\, d$ quelconque.

Si $y=0 \ ,u(t,x,o)=0\Rightarrow f(x,0)=0\Rightarrow E=0$

Si $y=l \ ,u(t,x,l)=0\Rightarrow f(x;l)=0\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{l}\sqrt{m^2+n^2}$ $m\in Z$ $et\,F$ quelconque.

Choisissons $d = F = 1$

Ce qui donne la solution comme sous forme d'une série de Fourier

$$\boxed{u(t,x,y) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\left(A_{m,n}\cos\sqrt{m^2+n^2}\,\frac{\pi}{l}t + B_{m,n}\sin\sqrt{m^2+n^2}\,\frac{\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}y}$$

avec:

$$\varphi(x,y) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} A_{m,n}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}y$$

$$\psi(x,y) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} B_{m;n}\sqrt{m^2+n^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}y$$

Donc:

$$A_{m,n} = \frac{2}{\pi}\int_0^l\int_0^l \varphi(x,y)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}y\,dxdy$$

$$B_{m,n} = \frac{2}{\pi\sqrt{m^2+n^2}}\int_0^l\int_0^l \psi(x,y)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}y\,dxdy$$

2-résolution de l'équation de laplace par la Méthode de Fourier:

2.1 Fonction harmonique des deux variables:

On appelle fonction harmonique toute solution de l'équation à la dérivée partiale des Laplace

La température u satisfait à l'équation de Laplace dans la plaque ou il n'y a aucune source de chaleur elle de forme:

$$\Delta u = 0 \qquad ou \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

2-2 (E.L) dans un rectangle:

Nous avons écrite le laplacien en coordonnées rectangulaire parce que les limites de la plaque sont rectangulaires.

Soit l'équation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 \le x \le a \ \ ,0 \le y \le b$$

Dans Laplace il n'y pas une source de chaleur donc n'existe pas les conditions initiales.

$\Delta u = 0$, muni des conditions limites appropriés sur la frontière Γ de Ω .comme suite:

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = f(x) & ,u(x,b) = 0 & ,0 \le x \le a \\ u(0;y) = 0 & ,u(a,y) = 0 & ,0 \le y \le b \end{array}$$

On Pose:

$$u(x,y) = f(x)g(y) \qquad (3-2-2)$$

Ou comme indiqué f dépendant de x seul et g dépendant de y seul.

En substituant la forme (3-2-2) de *u(x, y)* dans l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ on obtient:

$$\Delta u(x,y) = \Delta\big(f(x)g(y)\big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g(y) + f(x)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

Donc on a:

$$\Delta u(x,y) = f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0 \Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} \qquad (3\text{-}2\text{-}3)$$

Chacune des termes de l'équation (3-2-3) est une constante parce que le première terme est une fonction de *x* seul tandis que le seconde est une fonction de *y* seul, on peut donc écrire

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda$$

C'est-à-dire :

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g''(y) + \lambda g(y) = 0 \qquad (3\text{-}2\text{-}4)$$

La constante $\lambda = -\theta^2$.

Les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ sont les solutions de les équations différentielles du deuxième ordre (3-2-4), donc:

$$f(x) = A\cos\theta x + B\sin\theta x$$
$$g(y) = C\exp(-\theta y) + D\exp(\theta y)$$

En utilisons maintenant les conditions aux bord;

Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = A = o$

Donc:

$$f(x) = B\sin\theta x$$

Si $x = a$

$$f(M) = A\cos(\theta a) + B\sin(\theta a) = 0,$$

Il faut alors que $B\sin(\theta a) = 0$.

Comme nous cherchons à déterminer des solutions non triviales et que $A = 0$,

nous pouvons supposer que $B \neq 0$ donc:

$$\sin(\theta a) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{a}, \lambda = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

et

$$f(x) = B\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad \text{Où} \qquad n \in Z, n \neq 0.$$

Si $y = b$ on a:

$$g(b) = C\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right) + D\exp\left(\frac{-n\pi b}{a}\right) = 0 \Rightarrow D = -C\exp\left(\frac{2n\pi b}{a}\right)$$

En substituant ceci dans la solution g nous obtient

$$\begin{aligned} g(y) &= C\exp\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - C\exp\left(\frac{2n\pi N}{a}\right)\exp\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \\ &= C\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\left[\exp\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)\right] \\ &= 2C\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\sinh\frac{n\pi(y-b)}{a} \end{aligned}$$

Remarque(01):

La fonction "***sinus hyperbolique***" est définie par la relation

$$\forall x \in R \text{ ,sinh=} \frac{\exp(\theta) - \exp(-\theta)}{2}$$

Ce que précèdent, nous avons que:

$$u(x,y) = 2CB\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad (3\text{-}2\text{-}5)$$

On pose

$$\alpha_n = 2BC\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$

alors:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

est aussi une solution de problème(1)

On a la condition au bord non homogène,

$$u(x,0) = f(x) \qquad \forall x \in [0,a]$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x}$$

est développe comme un série de Fourier donc:

$$\alpha_n = \frac{2}{M\sin\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^M f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx \qquad \forall n \in N, n \geq 1$$

2-3 le cas de $\mathbb{R}^3$, solution élémentaire :

2-3-1 Par les coordonnées sphériques:

L'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (3\text{-}2\text{-}6)$$

Telle que:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$z = r\sin\varphi$$

avec:

$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$
$$0 \le r \le \infty$$

Donc:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] \qquad (3\text{-}2\text{-}7)$$

On doit résoudre à l'aide de ces nouvelles variables l'équation

$$\Delta u = 0$$

On cherche des solutions particulières de la forme

$$u(r,\theta,\varphi) = f(r)g(\theta,\varphi).$$

on est conduit aux deux équations

$$r^2 f''(r) + 2rf'(r) - \lambda f(r) = 0 \tag{3-2-8}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} + \lambda g = 0 \tag{3-2-9}$$

Où λ est une constante

$f(x)$ vérifie une équation différentielle d'Euler, dont la solution générale est

$$f(r) = Ar^{\alpha_1} + Br^{\alpha_2}.$$

α_1, α_2 étant les deux racines de l'équation

$$\alpha(\alpha+1) = \lambda$$

ce sont deux nombres liés par la relation

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -1$$

alors:

$$f(r) = Ar^{\alpha} + \frac{B}{r^{\alpha+1}}$$

En ce qui concerne l'équation aux dérivée partielle (3-2-9), on va chercher de solution élémentaire qui soit le produite d'une fonction de θ par une fonction

De φ, en remplace θ par la variable $\xi = \cos\theta$

et de pose

$$g(y) = F(\xi)G(\varphi)$$

L'équation (3-2-9) est alors:

$$G(\varphi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)F'(\xi)\right]+\frac{1}{1-\xi^2}F(\xi)G''(\varphi)+\alpha(\alpha+1)F(\xi)G(\varphi)=0 \qquad (3\text{-}2\text{-}10)$$

Si:

$$\frac{G''(\varphi)}{G(\varphi)}=-m^2$$

où $m \in N$ alors:

$$G(\varphi)= N\cos m\varphi + M\sin m\varphi$$

et $F(\xi)$vérifie:

$$\left(1-\xi^2\right)F''(\xi)-2\xi F'(\xi)+\left[\alpha(\alpha+1)-\frac{m^2}{1-\xi^2}\right]F(\xi)=0 \qquad (3\text{-}2\text{-}11)$$

2 3-2 polynômes de Legendre:

Examinons d'abor le cas $m=0$ dans (3-2-11), $G(\varphi)=N$ est un constante. On obtient donc une fonction harmonique qui dépende de $r et \theta$; mai non de φ , $F(\xi)$ vérifier l'équation différentielle:

$$\left(1-\xi^2\right)F''(\xi)-2\xi F'(\xi)+\alpha(\alpha+1)F(\xi)=0 \qquad (3\text{-}2\text{-}12)$$

Pour $\lambda = n(n+1)$ cette équation admet pour solution le polynôme de Legendre

défini par:

$$P_n(t)=\frac{1}{k!2^k}\frac{d^k}{d\xi^k}\left(\xi^2-1\right)^2 .$$

On posera $\alpha = k$, la solution particulière de l'équation (3-2-12) est donc

$$F(\xi) = P_k(\xi)$$

D'où

$$u(r,\theta,\varphi) = \left(Ar^k + \frac{B}{r^{k+1}} \right) P_k(\cos\theta) \qquad (3\text{-}2\text{-}13)$$

Théorème:

L'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^3$ admet une solution sous la forme:

$$u(r,\theta,\varphi) = \left(Ar^k + \frac{B}{r^{k+1}} \right) P_k(\cos\theta)$$

où $x = r\cos\theta\sin\varphi,\qquad y = r\sin\theta\cos\varphi,\qquad z = r\sin\varphi$

et $P_k(\xi)$ sont les polynômes de Legendre.

2-4 Unicité de la solution:

Soit $u_1,\ u_2$ deux solutions de l'équation de Laplace, alors $v = u_1 - u_2$ est solution du problème:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v = 0 \ \ \textit{sur le frontière} \end{cases}$$

alors :

$$\int_\Omega v.\Delta v = \int_\Omega v \times 0 = 0$$

D'autre part, la formule de Green, on a:

$$\int_\Omega v.\Delta v = -\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_{\partial\Omega} v.\frac{\partial v}{\partial s} ds$$

Comme $v=0$ sur la frontière, donc le terme $\int_{\partial\Omega} v.\frac{\partial v}{\partial s}ds$ est nul.

On obtint

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 = 0 \;\Rightarrow \nabla v = 0 \;\Rightarrow v \equiv c$$

Or $v=0$ sur la frontière, ce que donne $v \equiv 0$ c'est-à-dire $u_1 = u_2$

3- Résolution de l'E.C par la Méthode de Fourier:

3-1 le cas de$\mathbb{R}^2$:

Soit l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (t,x) \in R^+ \times [0,l] \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ u(0,t) = a \qquad ,u(l,t) = b & ;(a,b) \in R^2 \end{cases} \qquad (3\text{-}3\text{-}1)$$

Nous avons besoin de solution élémentaire, ce sont de solution de la forme:

$$u(t,x) = f(x)g(y)$$

On voit que

$$f(x)g'(t) = f''(x)g(t) \qquad (3\text{-}3\text{-}2)$$

alors:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

Donc on a:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = -\theta^2 \tag{3-3-4}$$

C'est-à-dire:

$$f''(x) + \theta^2 f(x) = 0$$
$$g'(y) \ + \theta^2 g(y) = 0$$

On obtient:

$$g(y) = A \exp\left(-\theta^2 t\right)$$
$$f(x) = B \cos \theta x + C \sin \theta x$$

et:

$$u(t,x) = A \exp\left(-\theta^2 t\right)\left[B \cos \theta x + C \sin \theta x\right]$$

maintenant on pose :

$$v(t,x) = u(t,x) + \frac{a-b}{l} x - a$$

est une solution de (3-3-1) avec:

$$v(t,0) = v(t,l) = 0$$

Nous avons alors:

$$v(t,x) = A \exp\left(-\theta^2 t\right)\left[B \cos \theta x + C \sin \theta x\right]$$

où,

$$v(t,0) = 0 \quad \Rightarrow A \exp\left(-\theta^2\right) B = 0 \quad \Rightarrow B = 0$$
$$v(t,l) = 0 \quad \Rightarrow A \exp\left(-\theta^2\right)\left[C \sin \theta l\right] = 0 \quad \theta = \frac{n\pi}{l} \quad ; n \in N \; ; n \neq 0$$

Ce que donne;

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp\left((\frac{n\pi}{l})^2t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

On pose la condition initiale $t=0$

$$v(x,0)=\varphi(x)+\frac{a-b}{l}x-a$$

Donc:

$$\varphi(x)+\frac{a-b}{l}x-a=\sum_{i=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=v$$

En calculera les C_n comme coefficients du développement en série de Fourier de la fonction impaire

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\varphi(x)+\frac{a-b}{l}x-a\right)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

d'où:

$$\boxed{u(t,x)=\frac{b-a}{l}x+a+\sum_{i=1}^{\infty}C_n\exp\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

Exemple(03):

On considère l'exemple suivant

$$\begin{cases} x\in[0,\pi] & ,t\geq 0\\ \varphi(x)=x & \\ a=0 \qquad b=1 & \end{cases}$$

La solution de l'équation (03) donne par:

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\frac{1}{\pi}x)\sin\frac{n\pi}{\pi}xdx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\left(x-\frac{1}{\pi}x\right)\frac{1}{n}\cos n\pi\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}(x-\frac{1}{\pi}x)\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[(\pi-1)(-1)^{n+1}\right]$$

$$C_n = \frac{2(\pi-1)}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

Donc la solution est:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}x + \frac{2(1-\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\exp\left(-n^2t\right)\sin nx$$

3-2 Unicités de la solution :

On multiplie par u et on intègre par rapport à x, on déduit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u^2(t,x)dx = \int_0^l u(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

Par intégration par partie le second membre devient

$$\left[u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^l - \int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

Si $a=b=0$, on a:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u^2(t,x)dx = -\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (3\text{-}3\text{-}5)$$

La fonction $t \to \int_0^l u^2(x,t)dx$ est positive et décroissant.

Supposons que l'équation (3-3-1) admet deux solutions u_1 *et* u_2 ; alors $v = u_1 - u_2$ est encore solution avec

$$v(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = 0$$

La fonction $t \to \int_0^l v^2(x,t)dx$ est positive et décroissante, donc:

$$v(x,0) = 0 \quad \Rightarrow v \equiv 0$$

3-3 Le cas de $\mathbb{R}^3$

Soit le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad , t \geq 0, x \in [0,l], y \in [0,M] \quad u \in C^1\left(R^+ \times [0,l] \times [0,M]\right) \\ u(0,x,y) = \varphi(x,y) \\ u(t,0,y) = u(t,l,y) = u(t,x,0) = u(t,x,M) \end{cases} \tag{3-3-6}$$

On pose la solution sous la forme

$$u(t,x,y) = f(x,y)g(t)$$

Il vient alors:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''_{x^2} + f''_{y^2}}{f(x,y)} = K = -\theta^2$$

Donc $g(t)$ est la solution de l'équation différentielle du premier ordre suivant

$$g'(y) + \theta^2 g(y) = 0$$

et $f(x,y)$ est la solution de deuxième équation

$$f''_{x^2} + f''_{y^2} + \theta^2 = 0$$

Nous écrivons $f(x,y)$ sous la forme

$$f(x,y) = \xi(x)\eta(y)$$

Donc on a:

$$\frac{\xi''(x)}{\xi(x)} = -\frac{\eta''(y)}{\eta(y)} - \theta^2 = -\beta^2$$

C'est-à-dire :

$$\xi(x) = c\cos\beta x + d\sin\beta x$$

$$\eta(y) = E\cos\sqrt{\theta^2 - \beta^2}\,y + F\sin\sqrt{\theta^2 - \beta^2}\,y$$

Voyons maintenant les conditions au bord:

Si $x = 0$, $u(t,0,y) = 0 \Rightarrow f(0,y) = 0 \Rightarrow c = 0$

Si $x = l$, $u(t,l,y) = 0 \Rightarrow f(l,y) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{n\pi}{l}$, $n \in Z$ *et d* quelconque.

Si $y = 0$, $u(t,x,o) = 0 \Rightarrow f(x,0) = 0 \Rightarrow E = 0$

Si $y = M$, $u(t,x,M) = 0 \Rightarrow f(x;M) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{M}\sqrt{m^2 + n^2}$ $m \in Z$ *et* F quelconque.

Donc:

$$\xi(x) = d\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\eta(y) = F\sin\frac{m\pi}{M}y$$

Choisissons $d = F = 1$

Ce qui donne la solution comme sous forme d'une série de Fourier

$$\boxed{u(t,x,y) = \sum_{m,n=1}^{+\infty} A_{m,n}\left(\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{M}y\right)\exp\left[-\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{m^2\pi^2}{M^2}\right)t\right]}$$

avec la condition initiale:

$$\varphi(x,y) = \sum_{m,n=1}^{+\infty} A_{m,n}\left(\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{M}y\right) = u(0,x,y)$$

Donc:

$$A_{m,n} = \frac{2}{\pi}\int_0^M\int_0^l \varphi(x,y)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{M}y\,dxdy$$

Conclusion générale:

Le but de ce mémoire est trouvé une solution de l'EDP de seconde ordre par la Méthode de séparation des variables et démonstration l'unicité de cette solution après la classification en trois catégorie.

Bibliographie:

(1) J. Bass, "*Cours de Mathématique*", 5eme édition, Tome 2, Masson paris 1978

(2)R. Blédard, ***"Equations aux dérivées partielles"*** MAT 4112, l'université du Québec à Montréal

(3) P. Ferreira et S. Mas –Gallique, "*équations aux dérivée partiale*"

,11 décembre 2001.

(4) E. Gilberto, ***"introduction to partiale diffirential equation***", septembre 2004.

(5) B. hilffer,***"introduction aux EDP***" .Université paris sud version de janvier – Mai 2007

(6) M. Gisclonumpa,***"L'équation de la chaleur***", CNRS-UMR n°12 Ecole Normale Supérieure de Liyon ,46 allée d'Italie 69364 LIYON CEDEX, 07FRANCE

(7) R. Marchiano,***"transformées de fourrier et de laplace : résolution de problèmes classiques en mécanique***", université pierre et marie curie –paris.

(8) Y. Privat, "***fonction de plusieurs variables et Applications pour l'ingénieur",*** Université Henri Poincaré Nancy 1,2006/2007.

(9) J-F. Remale et G. Winckelmann,"***équations aux dérivées partiels",*** LFSAB1103.

(10) A. Rondepierre & A. Rouchon, "***Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles Étude théorique"***, Département STPI-2èmeannée IC .Année 2012-2013.

(11) G. Winckelmann, ***"classification EDP ; Méthode de caractéristique pour le cas parabolique***" ; 2 octobre 2007.

RÉSUMÉ

L'EDP du second ordre est classé à trois catégorie, si cet Équation muni par une condition supplémentaire elle est admet une solution par la Méthode de séparation des variables (Méthode de fourier) cette solution est unique.

الملخص

المعادلات التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية تصنف في ثلاث مجموعات إذا أرفقنا تلك المعادلات بشروط معينة فأنه يمكن إيجاد حل وحيد لها بطريقة فصل المتغيرات أو ما نسميها بطريقة فوري.

ABSTRACT

The second order PDE is classified in category three, if this Equation provided by an additional condition is has a solution for the separation method variables (Method of Fourier) this solution is unique.