

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
N° :PhTh 04/2019



DOMAINE : SCIENCE DE MATIERE
FILIERE : PHYSIQUE
OPTION : PHYSIQUE THEORIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par : Guerna Rebiha Souhila

Et

Belagraa Messkia

Intitulé

Oscillateur de Dirac en présence des
longueurs minimales

Soutenu devant le jury composé de :

RADOUANE Asma	MCA	Université de M'SILA	Président
SABRI Youcef	Prof	Université de M'SILA	Encadreur
BOUSSAHEL Mounir	Prof	Université de M'SILA	Examineur 1
DABBABI Mourad	MAA	Université de M'SILA	Examineur 2

Année universitaire : 2018 /2019

REMERCIEMENTS

Au nom d'Allah, le tout Miséricordieux, le très miséricordieux

*Nous remercions tout d'abord **Allah de** nous avoir donné la
volonté, la santé et le courage pour mener*

à déterminer ce mémoire.

*Un remerciement particulier à monsieur **SABRI Youcef** pour
son aide, aussi pour ses conseils et ses encouragements*

le long de cette période

*Nous remercions les membres du jury qui ont accepté de juger
ce travail*

*Nous remercions aussi tous ceux qui me sont venus en aide au
cours d'élaboration de ce mémoire, tout particulièrement : tout
notre enseignants de primaire jusqu'à*

l'université.

*Pour tous nos collègues de promotion 2019 pour les bons
moments que nous avons passés ensemble et*

nous les souhaitons le bonheur

et réussite dans la vie.

DÉDICACE

Je dédie ce travail :

*A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie, et bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi **PAPA**.*

*A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, **maman** que j'adore.*

*Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, mes frères **Farouk** et **Omar**, sans oubliés mes sœurs : **Sabah, Sarah, Dallel** et **Nour elhouda**, et toute ma petite famille*

*Je dédie mon collègue à la mémoire **Souhila**, je te remercie pour les beaux moments*

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, mes aimables amis.

Meskia

Table des matières

1	Introduction	4
2	Oscillateur de Dirac ordinaire	6
2.1	Notation :	6
2.2	Equation de Dirac	8
2.3	Solution de l'équation de Dirac pour une particule libre	10
2.4	Solution de l'oscillateur de Dirac	12
3	Mécanique quantique basée sur un GUP	15
3.1	Principe d'incertitude généralisé (GUP)	15
3.2	Représentation dans l'espace des impulsions	17
3.2.1	Produit scalaire et relation de fermeture	18
3.3	Généralisation à N dimensions	19
3.3.1	Relation d'incertitude généralisée à N dimensions	19
3.3.2	Représentation du groupe des rotations	21
4	Oscillateur de Dirac en présence des longueurs minimales :	22
4.1	Fonctions d'ondes	23
4.2	Spectre d'énergie	29
	Conclusion	31

Chapitre 1

Introduction

L'oscillateur du Dirac joue un rôle important dans la description des problèmes des plusieurs particules relativistes et aussi dans mécanique quantique relativiste super-symétrique [1] – [5]. La représentation de l'oscillateur Dirac est également proposée en chromodynamique quantique, en particulier, en relation avec les modèles de confinement des quarks en mésons et baryons [6].

Le concept de longueur élémentaire n'est pas nouveau en physique. Il a été introduit en particulier en relation avec le problème fondamental de la physique moderne, à savoir l'unification des interactions gravitationnelles et des interactions fortes, électromagnétiques et faibles. En effet, l'introduction des forces gravitationnelles dans la théorie des champs quantiques fait apparaître des divergences qui rendent la théorie renormalisable. Plusieurs scénarios ont été proposés pour résoudre ce problème, En effet dans le contexte de la théorie des cordes [7] – [11], de la gravité quantique à boucles [12], de la relativité restreinte double [13] – [19], et de la physique des trous noirs [2] et [20] – [22]. Les physiciens ont proposés plusieurs approches pour introduire les distances minimales de façon naturelle dans la physique. et approches se résument essentiellement à la mécanique quantique basée sur un principe d'incertitudes généralisé (GUP), où des relations de dispersion modifiées (MDR), la relativité restreinte déformée, ainsi que la géométrie non commutative. Dans ce travail, on s'intéressera au GUP.

La forme la plus célèbre du principe d'incertitude généralisée (GUP) est celle proposée par G. Veneziano et al. [7] – [11] lors de leurs travaux sur la diffusion des cordes à haute énergie, et elle s'exprime : $(\Delta X)(\Delta P) \geq (\hbar/2)[1 + \beta(\Delta P)^2 + \dots]$. La mécanique quantique basée sur ce type de GUP a été reformulée par Kempf et al. [26] – [30]. Dans le but de voir l'incidence du GUP sur les problèmes de la mécanique quantique, plusieurs travaux ont été effectués durant les dernières années notamment, l'oscillateur harmonique [26], [27] et [31], le potentiel de Coulomb [32] – [34], l'effet casimir [35] – [37]. Le résultat le plus important que l'on a pu déduire de ces travaux est que le principe d'incertitude généralisée (GUP) conduit à des incertitudes sur la position et l'impulsion finies

Dans ce mémoire, nous allons attaquer la formulation mathématique du problème de l'oscillateur de Dirac et ses conséquences en résolvant des équations fondamentales dans le cadre

de la mécanique quantique relativiste en présence des longueurs minimales. Ce mémoire se décompose à une introduction , où on parle sur l'oscillateur de Dirac et le principe d'incertitude généralisé, et trois autres chapitres .

Dans le deuxième chapitre nous allons donner un rappel sur l'équation de Dirac et sa solution pour une particule libre et aussi pour l'oscillateur de Dirac ordinaire.

Dans le troisième chapitre, nous allons formuler la mécanique quantique basée sur un principe d'incertitude généralisé.

Dans le chapitre 4 nous allons chercher les solutions des fonctions d'ondes et le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac en présence des distances minimales dans l'équation de Dirac correspondante.

Chapitre 2

Oscillateur de Dirac ordinaire

2.1 Notation :

Pour passer de la mécanique quantique habituelle à la mécanique quantique relativiste, il suffit de remplacer la géométrie euclidienne par celle de Minkowski, ou bien on remplace la métrique par (celle de Lorentz)définie par :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

En utilisant cette métrique, on peut définir la longueur du vecteur $dx = \{dx^\mu\}$ par $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Cette relation est souvent considérée comme la relation de définition du tenseur métrique. La forme contra-variante $g^{\mu\nu}$ du tenseur métrique est

$$g^{\mu\sigma} = (g^{-1})_{\mu\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

On remarque que, le tenseur métrique contra-variant et le tenseur métrique covariant sont identiques :

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (\text{ Pour Lorentz métrique }). \quad (2.3)$$

À partir de maintenant, nous utiliserons le quadrivecteur contra-variantes

$$x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \equiv \{ct, x, y, z\}. \quad (2.4)$$

Pour décrire les coordonnées de l'espace-temps. Le quadrivecteur covariants est donnée par

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \equiv \{ct, -x, -y, -z\}. \quad (2.5)$$

En utilisant la convention de sommation d'Einstein , nous obtenons le carré de la longueur de vecteur x^μ donné par

$$\begin{aligned} x \cdot x &= x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Même chose pour la définition du 4-vecteur de moment , c-à-d :

$$p^\mu = \{E/c, p_x, p_y, p_z\}. \quad (2.7)$$

Et nous écrivons le produit scalaire en quatre dimensions (espace-temps) comme :

$$p_1 \cdot p_2 = p_1^\mu p_{2\mu} = \frac{E_1 E_2}{c^2} - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2. \quad (2.8)$$

Ou également

$$x \cdot p = x^\mu p_\mu = x_\mu p^\mu = Et - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}. \quad (2.9)$$

Par analogie avec mécanique quantique habituelle, on peut écrire le 4-opérateur de moment par

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} \\ &= i\hbar \nabla^\mu = \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right\} \\ &= i\hbar \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il se transforme en un 4-vecteur contra-variant, de sorte que

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu &= -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) \\ &\equiv -\hbar^2 \square = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec $\Delta = \nabla^2$ et $\square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta$ représentent respectivement le Laplacien et le D'alembectien. En utilisant (2.4) et (2.10) on obtient la relation de commutation suivante :

$$[\hat{p}^\mu, x^\nu] = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}, g^{\nu\sigma} x_\sigma \right] = i\hbar g^{\nu\sigma} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\mu} = i\hbar g^{\nu\sigma} \delta_\sigma^\mu = i\hbar g^{\nu\mu} = i\hbar g^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Le 4-potentiel du champ électromagnétique est donné par :

$$A^\mu = \{A_0, A\} = \{A_0, A_x, A_y, A_z\} = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (\text{contravariant}) \quad (2.13)$$

$$A_\mu = \{A_0, -A_x, -A_y, -A_z\} \quad (\text{covariant}) \quad (2.14)$$

A partir de A^μ , le tenseur de champ électromagnétique suit de la manière bien connue :

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

2.2 Equation de Dirac

En 1928, Dirac a trouvé une équation d'onde relativiste covariante, de la forme de Schrödinger et avec une densité de probabilité positive, donnée par :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi. \quad (2.16)$$

À cette époque, il existait des doutes sur l'équation de Klein-Gordon, qui donnait des énergies négatives. Et comme l'interprétation de la densité de charge n'était pas connue à ce moment-là et aussi les mésons π^+ et π^- sous forme de particules de spin 0 chargées n'avaient pas encore été découverts, les énergies négative représente un grand problème.

Puisque l'équation (2.16) est linéaire dans la dérivée temporelle, il est naturel d'essayer de construire un Hamiltonien également linéaire par rapport aux dérivées spatiales. Par conséquent, l'équation (2.16) doit prendre la forme suivante

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i} \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \psi \equiv \hat{H}_f \psi. \quad (2.17)$$

Ou ψ est un vecteur donné par

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}, t) \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) \\ \vdots \\ \psi_N(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Les $\hat{\alpha}_i$ et $\hat{\beta}$ sont des matrices de dimensions $N \times N$ et

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

où $\hat{\sigma}_i$ sont les matrices 2×2 de Pauli et I est la matrice d'unités 2×2 . Donc on écrit ces matrices en détail comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\alpha}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pour trouver l'équation de la continuité, il suffit de multiplier (2.17) par la gauche par $\psi^\dagger$ et obtenir :

$$i\hbar\psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \psi^\dagger \hat{\alpha}_k \frac{\partial}{\partial x^k} \psi + m_0 c^2 \psi^\dagger \hat{\beta} \psi \quad (2.21)$$

D'autre la multiplication de l'équation conjuguée de (2.17) par ψ à droite nous donne

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \hat{\alpha}_k \psi + m_0 c^2 \psi^\dagger \hat{\beta} \psi \quad (2.22)$$

En faisant la soustraction de (2.22) de (2.21) donne :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} (\psi^\dagger \hat{\alpha}_k \psi) \quad (2.23)$$

Cette équation appelée l'équation de continuité et s'écrit comme suit

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div } j = 0 \quad (2.24)$$

avec

$$\varrho = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 \psi_i^* \psi_i \quad (2.25)$$

est la densité définie positive

$$j^k = c\psi^\dagger \hat{\alpha}^k \psi \quad \text{ou} \quad j = c\psi^\dagger \hat{\alpha} \psi \quad (2.26)$$

est la densité de courant.

2.3 Solution de l'équation de Dirac pour une particule libre

Pour une particule libre ($V = 0$) l'équation de Dirac (2.17) s'écrit sous la forme

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_f \Psi = (c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m_0 c^2 \hat{\beta}) \Psi. \quad (2.27)$$

En introduisant, l'équation de Dirac pour le cas stationnaire

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) \exp[-(i/\hbar)\varepsilon t] \quad (2.28)$$

Dans l'équation (2.27), on obtient

$$\varepsilon \Psi(\mathbf{x}) = \hat{H}_f \Psi(\mathbf{x}). \quad (2.29)$$

Maintenant nous allons chercher la solution de (2.29) en mettant

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \text{ avec } \varphi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \text{ et } \chi = \begin{pmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

en utilisant la forme explicites des matrices $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ (2.19), l'équation (2.29) peut être écrite comme

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{P} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Où bien

$$\varepsilon \varphi = c \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi + m_0 c^2 \varphi,$$

$$\varepsilon \chi = c \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \varphi - m_0 c^2 \chi. \quad (2.32)$$

Pour un moment $\mathbf{p}$, on définit les états :

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}\right). \quad (2.33)$$

En remplaçant ces quantités dans l'équations (2.32) les équations de φ_0 et χ_0 . Mais en remplaçant l'opérateur $\hat{\mathbf{p}}$ par ces valeurs propres $\mathbf{p}$

$$(\varepsilon - m_0 c^2) \varphi_0 - c \hat{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_0 = 0, \quad (2.34)$$

$$-c \hat{\sigma} \cdot \mathbf{p} \varphi_0 + (\varepsilon + m_0 c^2) \chi_0 = 0. \quad (2.35)$$

Ce système d'équations n'a pas de solution sauf pour que le déterminant s'annule. Ou bien

$$\det = \left| \begin{pmatrix} (\varepsilon - m_0 c^2)I & -c\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -c\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p} & (\varepsilon + m_0 c^2)I \end{pmatrix} \right| = 0. \quad (2.36)$$

En utilisant la relation

$$(\hat{\sigma} \cdot A)(\hat{\sigma} \cdot B) = A \cdot B I + i\hat{\sigma} \cdot (A \times B), \quad (2.37)$$

L'expression (2.36) devient

$$\begin{aligned} \det &= (\varepsilon^2 - m_0^2 c^4)I - c^2(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \\ &= (\varepsilon^2 - m_0^2 c^4 - c^2 \mathbf{p}^2)I = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon = \pm E_p, \quad E_p = +c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}. \quad (2.39)$$

Les deux signes, plus et moins, correspondent aux deux types de solutions de l'équation de Dirac et on dit la solution positive et la solution négative. De l'équation (2.35), pour ε fixé, on obtient

$$\chi_0 = \frac{c(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m_0 c^2 + \varepsilon} \varphi_0. \quad (2.40)$$

Soit la notation suivante

$$\varphi_0 = U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Avec U normalisé, ou bien

$$U^\dagger U = U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1, \quad (2.42)$$

et aussi U_1 et U_2 sont des complexes. En utilisant (2.28) et (2.33), on obtient les deux solutions de Dirac, positive et négative pour une particule libre sous la forme

$$\Psi_{p\lambda}(x, t) = N \left(\frac{U}{\frac{c(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m_0 c^2 + \lambda E_p} U} \right) \frac{\exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \varepsilon t)/\hbar]}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \quad (2.43)$$

avec $\varepsilon = \lambda E_p$ et $\lambda = \pm 1$. Pour déterminer N , on applique la condition de normalisation suivante

$$\int \Psi_{\lambda p}^*(x, t) \Psi_{\lambda' p'}(x, t) d^3x = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(p - p'). \quad (2.44)$$

Ce qui donne

$$N^2 \left(U^\dagger U + U^\dagger \frac{c^2(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2} U \right) = 1. \quad (2.45)$$

En utilisant (2.37), on obtient

$$N^2 \left(1 + \frac{c^2 \hat{\sigma}^2 \cdot \mathbf{p}^2}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2} \right) = 1 \quad (2.46)$$

Ou bien

$$\begin{aligned} \Rightarrow N &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2 + c^2 p^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{(m_0^2 c^4 + c^2 p^2) + 2m_0 c^2 \lambda E_p + E_p^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{2(m_0 c^2 + \lambda E_p) \lambda E_p}} = \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)}{2 \lambda E_p}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

2.4 Solution de l'oscillateur de Dirac

Pour obtenir l'oscillateur de Dirac où le potentiel ϕ a la forme

$$\phi(r) = \frac{1}{2} m w^2 r^2 \quad (2.48)$$

ou w représente la fréquence, il suffit d'appliquer le principe de couplage minimale qui stipule a remplacer le moment p par $p - A(t, \mathbf{r})$ dans de Dirac pour une particule libre (2.27), avec $A(t, \mathbf{r})$ est le champ extérieur. Dans notre cas $A(t, \mathbf{r}) = \phi(r)$, ce qui donne

$$i\hbar \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = [c\alpha \cdot (\mathbf{p} - imw\mathbf{r}\beta) + mc^2\beta] \psi \quad (2.49)$$

En introduisant l'ansatz (2.28) et (2.30), on obtient les équations de cas stationnaire

$$E \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c\alpha \cdot (\mathbf{p} + imw\mathbf{r}\beta) \\ c\alpha \cdot (\mathbf{p} - imw\mathbf{r}\beta) & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 II & 0 \\ 0 & -mc^2 II \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne

$$(E - mc^2) \varphi_0 = c\sigma \cdot (\mathbf{p} + imw\mathbf{r}) \chi_0, \quad (2.50)$$

$$(E + mc^2) \chi_0 = c\sigma \cdot (\mathbf{p} - imw\mathbf{r}) \varphi_0. \quad (2.51)$$

Multiplions (2.50) par $E + mc^2$ et (2.51) par $E - mc^2$, on obtient

$$(E^2 - m^2 c^4) \varphi_0 = c\sigma \cdot (\mathbf{p} + imw\mathbf{r}) (E + mc^2) \chi_0, \quad (2.52)$$

$$(E^2 - m^2 c^4) \chi_0 = c\sigma \cdot (\mathbf{p} - imw\mathbf{r}) (E - mc^2) \varphi_0. \quad (2.53)$$

En remplaçant (2.50) en (2.53), on obtient

$$(E^2 - m^2 c^4) \chi_0 = c^2 [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} + imw [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}] + m^2 w^2 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{r} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{r}] \chi_0 \quad (2.54)$$

En introduisant la relation (2.37) dans cette dernière équation, on obtient

$$(E^2 - m^2 c^4) \chi_0 = c^2 [\mathbf{p}^2 + i\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) + imw [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}] + m^2 w^2 \mathbf{r}^2 + im^2 w^2 \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{r})] \chi_0 \quad (2.55)$$

$$= \left[c^2 (\mathbf{p}^2 + (mw\mathbf{r})^2) - 3\hbar w m c^2 - 4m c^2 \frac{w}{\hbar} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \right] \chi_0 \quad (2.56)$$

Sachant que

$$L = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}, \quad \mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{et} \quad [\sigma_i x_i, \sigma_j p_j] = i\hbar \left(2 \frac{\sigma_i L_i}{\hbar} + 3 \right) \quad (2.57)$$

Maintenant on passe à la limite relativiste, c-à-d on pose que $E = mc^2 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll mc^2$. Dans ce cas l'équation (2.56) devient

$$E \chi_0 = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{mw^2}{2} \mathbf{r}^2 - \frac{3\hbar}{2m} w^2 - 2 \frac{w}{\hbar} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \right] \chi_0 \quad (2.58)$$

On remarque que le terme de droite représente un Hamiltonien d'un oscillateur harmonique de fréquence w associé à un terme de couplage spin-moment angulaire avec une constante de couplage égale à $-2 \frac{w}{\hbar}$.

On remarque que le terme à droite de l'équation (2.56) commute avec le moment totale

$$J = L + S. \quad (2.59)$$

et la solution dans les coordonnées sphérique (r, θ, ϕ) sont donnée par

$$\left| N \left(l \frac{1}{2} \right) jm \right\rangle = \sum_{\mu, \sigma} \langle l\mu, \frac{1}{2}\sigma | jm \rangle R_{Nl}(r) Y_{l\mu}(\theta, \phi) \chi_\sigma \quad (2.60)$$

avec $\langle l\mu, \frac{1}{2}\sigma | jm \rangle$ sont les de coefficient Clebsch-Gordan, $R_{Nl}(r)$ la partie radiale de la fonction d'onde à trois dimensions d'oxillateur, $Y_{l\mu}(\theta, \phi)$ est la partie sphérique pour un oscillateur harmonique, et χ_σ est la parité spinoriel du deux projections $\sigma = \pm \frac{1}{2}$.

$$\chi_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \chi_{-1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

Comme

$$2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2 \quad (2.62)$$

Les valeurs propres de l'opérateur du coté doite (2.56) correspondantes aux fonctions propres (2.60) sont données par

$$(mc^2)^{-1}(E_{Nlj}^2 - m^2c^4) = \begin{cases} \hbar\omega(2(N-j)+1) & \text{if } l=j-\frac{1}{2} \\ \hbar\omega(2(N+j)+3) & \text{if } l=j+\frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.63)$$

On voit l'existence de dégénérescence infinie pour $l = j - \frac{1}{2}$. Ou, on remarque que toutes les paires

$$(N \pm 1, j \pm 1), (N \pm 2, j \pm 2), \dots \quad (2.64)$$

ont la même énergie et la série n'est pas bornée au-dessus

D'autre part si $l = j + \frac{1}{2}$ on a la même énergie pour tous les paires

$$(N \pm 1, j \mp 1), (N \pm 2, j \mp 2), \dots$$

et la série est bornées par le pair $J = \frac{1}{2}$ et $N = 0$, donc la dégénérescence est finie.

Chapitre 3

Mécanique quantique basée sur un GUP

3.1 Principe d'incertitude généralisé (GUP)

Pour montrer comment incorporer la notion de la longueur minimale l_m en mécanique quantique, nous allons suivre l'approche du principe d'incertitude généralisé. Dans ce contexte, on postule que lorsque l'on augmente arbitrairement l'impulsion p de la particule, le vecteur d'onde k ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale de l'ordre de $1/l_m$. En conséquence, on aura des déviations par rapport à la dépendance linéaire, $(\vec{p} = \hbar \vec{k})$ lorsque p approche l'échelle $\frac{\hbar}{l_m}$. Ceci s'interprète physiquement par le fait que les particules ne peuvent pas posséder des longueurs d'onde $(\frac{2\pi}{k})$ arbitrairement petites et que des échelles de distances arbitrairement petites ne peuvent plus être explorées.

On suppose une relation $p = f(k)$ entre p et k . Cette fonction doit être impaire, du fait de la parité et la fonction inverse doit approcher asymptotiquement une valeur de l'ordre $\frac{1}{l_m}$ lorsque p tend vers l'infini. Plusieurs formes de la fonction f peuvent être trouvées par exemple on prend le choix

$$p = \frac{\hbar}{l_m} \tan(l_m k). \quad (3.1)$$

En utilisant le développement :

$$\tan(y) = y + \frac{y^3}{3} + \dots$$

au deuxième ordre en l_m , p s'écrit :

$$p = \hbar(k + \frac{l_m^2}{3} k^3 + \dots) \quad (3.2)$$

Supposant que le commutateur entre $\hat{X}$ et $\hat{P}$ garde la forme standard, c'est-à-dire $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$, et utilisant la relation générale :

$$[\hat{X}, A(\hat{K})] = i \frac{\partial A}{\partial K} \quad (3.3)$$

on obtient la relation de commutation définissant l'algèbre de Heisenberg modifiée :

$$[\hat{X}, \hat{P}(K)] = i \frac{\partial P}{\partial K} \quad (3.4)$$

La relation (3.2) donne :

$$i \frac{\partial \hat{P}}{\partial K} = i\hbar(1 + l_m^2 \hat{k}^2 + \dots) \quad (3.5)$$

et puisque on a :

$$l_m^2 \hat{k}^2 \sim \frac{l_m^2 \hat{P}^2}{\hbar^2} + O(l_m^4) \quad (3.6)$$

on trouve :

$$[\hat{X}, \hat{P}(K)] = i\hbar(1 + (\frac{l_m}{\hbar})^2 \hat{P}^2 + \dots) \quad (3.7)$$

En introduisant un paramètre β , relié à la longueur minimale par :

$$\beta = (\frac{l_m}{\hbar})^2, \text{ soit } l_m = \hbar\sqrt{\beta} \quad (3.8)$$

On aboutit à la relation de commutation suivante :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta \hat{P}^2 + \dots) \quad (3.9)$$

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude à travers la formule :

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle \right| \quad (3.10)$$

Ce qui donne :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \frac{\partial \hat{P}}{\partial k} \right\rangle \right| \quad (3.11)$$

Au premier ordre du paramètre β , la relation d'incertitude modifiée aura la forme suivante :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 + \beta \left\langle \hat{P}^2 \right\rangle \right). \quad (3.12)$$

En utilisant la définition de l'écart quadratique moyen $(\Delta P)^2 = \langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2$ on peut écrire :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \{1 + \beta(\Delta P)^2 + \gamma\} \quad (3.13)$$

avec

$$\gamma = \beta \langle \hat{P} \rangle^2 \quad (3.14)$$

La relation d'incertitude (3.13) implique une incertitude minimale non nulle sur la position ; elle a été étudiée rigoureusement par Kempf et ses collaborateurs. Dans la section qui suit, nous allons nous baser essentiellement, pour présenter le formalisme de la mécanique quantique découlant de cette algèbre modifiée.

3.2 Représentation dans l'espace des impulsions

Considérons l'algèbre de Heisenberg associative générée par les opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ satisfaisant à la relation de commutation (3.9). Comme on a vu, la relation d'incertitude correspondante est (3.13). Pour un (ΔX) fixe, l'inégalité (3.13) est satisfaite dans l'intervalle : $[\Delta P_-, \Delta P_+]$, telle que :

$$\frac{2(\Delta X)(\Delta P)_\pm}{\hbar\beta} - \frac{1+\gamma}{\beta} = (\Delta P)_\pm^2. \quad (3.15)$$

Ce qui donne

$$\Delta P_\pm = \frac{\Delta X}{\beta\hbar} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\beta\hbar}\right)^2 - \frac{1+\gamma}{\beta}}. \quad (3.16)$$

La plus petite valeur de ΔX est celle qui correspond à une racine double, c.-à-d., $\Delta P_- = \Delta P_+$, soit :

$$(\Delta X)_0 = \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{\gamma+1}. \quad (3.17)$$

La valeur minimale $(\Delta X)_{\min}$, correspond à $\gamma = 0$

$$(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}. \quad (3.18)$$

Dans l'espace des impulsions, où $\hat{X}$ et $\hat{P}$ agissent sur les fonctions $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$, ces opérateurs peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$, satisfaisant la relation de commutation canonique : $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, alors on peut trouver une représentation de $\hat{X}$ et $\hat{P}$ qui vérifie la relation de commutation modifiée (2.9). la réalisation la plus simple s'écrit [27] :

$$\hat{X} = (1 + \beta \hat{p}^2) \hat{x}, \quad \hat{P} = \hat{p} \quad (3.19)$$

où on a :

$$\hat{p}\psi(p) = p\psi(p) \quad (3.20)$$

$$\hat{x}\psi(p) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) \quad (3.21)$$

Alors

$$\hat{X} = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p}, \quad \hat{P} = p \quad (3.22)$$

Il est facile de s'assurer que cette réalisation vérifie bien la relation de commutation (3.9).

3.2.1 Produit scalaire et relation de fermeture

La condition la plus importante que doit satisfaire la représentation (3.22), est la préservation de la symétrie des opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$, pour que leurs valeurs propres soient réelles. Du moment que $\hat{P}$ n'est pas modifié, alors sa symétrie est évidente; il n'en est pas le cas pour l'opérateur $\hat{X}$. En effet, la condition de symétrie s'écrit :

$$\left(\langle \psi | \hat{X} \right) | \varphi \rangle = \langle \psi | \left(\hat{X} | \varphi \rangle \right). \quad (3.23)$$

Cette condition n'est pas satisfaite par rapport au produit scalaire ordinaire :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \varphi(p). \quad (3.24)$$

Pour que l'opérateur $\hat{X}$ soit symétrique, il faut modifier le produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p) \quad (3.25)$$

Le facteur $\frac{1}{1+\beta p^2}$ est nécessaire pour éliminer le facteur correspondant de l'opérateur $\hat{X}$.

La modification du produit scalaire implique une nouvelle relation de fermeture; celle-ci devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle p | p \rangle = 1. \quad (3.26)$$

En insérant cette dernière relation dans le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur impulsion, on obtient :

$$\langle p'' | p' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle p'' | p \rangle \langle p | p' \rangle. \quad (3.27)$$

On en déduit, immédiatement, la nouvelle relation d'orthonormalisation :

$$\langle p | p' \rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p'). \quad (3.28)$$

3.3 Généralisation à N dimensions

Maintenant nous allons étendre le formalisme étudié au cas à plusieurs dimensions ; le principe étant le même que dans le cas à une dimension, nous allons présenter les outils nécessaires sans démonstration.

3.3.1 Relation d'incertitude généralisée à N dimensions

Une généralisation naturelle de la relation de commutation (3.9), préservant la symétrie rotationnelle, s'écrit [27] :

$$[\widehat{X}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar \delta_{ij} (1 + \beta \widehat{P}^2) \quad (3.29)$$

avec

$$\widehat{P}^2 = \sum_{i=1}^N \widehat{P}_i^2 \quad (3.30)$$

Si on pose :

$$[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] = 0, \quad (3.31)$$

l'identité de Jacobi donne :

$$[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j] = \frac{2\beta i\hbar}{(1 + \beta \widehat{P}^2)} (\widehat{P}_i \widehat{X}_j - \widehat{P}_j \widehat{X}_i), \quad (3.32)$$

ce qui mène naturellement à une algèbre de Heisenberg non commutative.

La relation d'incertitude impliquée par (3.29) s'écrit :

$$(\Delta X_i)(\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left(1 + \beta \sum_{k=1}^N [(\Delta P_k)^2 + \langle p_k \rangle^2] \right) \quad (3.33)$$

N étant la dimension de l'espace. Cette relation d'incertitude implique des incertitudes minimales non nulles sur toutes les composantes de vecteur position.

On peut déduire facilement, comme dans le cas à une dimension :

$$(\Delta X_i)_{\min} = \hbar \sqrt{N\beta}, \quad \forall i \quad (3.34)$$

Dans l'espace des impulsions, la représentation la plus simple, satisfaisant à la relation (2.28) à la forme ([27]) :

$$\hat{X}_i = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad \hat{P}_i = p_i \quad (3.35)$$

Les opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_j$ sont symétriques par rapport au produit scalaire :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N p}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p) \quad (3.36)$$

Il est important de noter, que la relation de commutation (3.29) a été généralisée pour avoir non seulement une incertitude minimale non nulle sur la position, mais aussi, pour assurer que les opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_i$ soient auto-adjoints [28]. La relation de commutation la plus générale s'écrit [28], [26], [31] et [33] :

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar [\delta_{ij}(1 + \beta \hat{P}^2) + \beta' \hat{P}_i \hat{P}_j], \quad (\beta, \beta' > 0) \quad (3.37)$$

alors, l'identité de Jacobi implique l'algèbre "non commutative" suivante :

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = i\hbar \frac{(2\beta - \beta') + \beta(2\beta + \beta') \hat{P}^2}{1 + \beta \hat{P}^2} (\hat{P}_i \hat{X}_j - \hat{P}_j \hat{X}_i). \quad (3.38)$$

En supposant que ΔP_j ne dépend pas de j , on peut déduire facilement la relation d'incertitude correspondant à la relation de commutation (3.37) :

$$(\Delta X_i)(\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left[1 + (N\beta + \beta') (\Delta P_j)^2 + \gamma \right] \quad (3.39)$$

Avec

$$\gamma = \beta \sum_{k=1}^N \langle P_k \rangle^2 + \beta \langle P_i \rangle^2 \quad (3.40)$$

La minimisation de cette dernière relation par rapport à ΔP_j donne :

$$(\Delta X_i)_{\min} = \hbar \sqrt{(N\beta + \beta')}, \quad \forall i \quad (3.41)$$

Dans la littérature, plusieurs représentations des opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_j$ ont été utilisées. Le choix de la représentation se fait toujours en supposant que $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_j$ comme des fonctions

des opérateurs $\hat{x}_i$ et $\hat{p}_j$ satisfaisant les relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire.

Une de ces représentations et celle utilisée en [28] :

$$\hat{X}_i = i\hbar \left[(1 + \beta \hat{p}^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta \hat{p}_i \hat{p}_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma \hat{p}_i \right], \quad \hat{P}_i = p_i. \quad (3.42)$$

Ou bien

$$\hat{X}_i = (1 + \beta \hat{p}^2) \hat{x}_i + \beta \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{x}_j + \gamma \hat{p}_i \quad \hat{P}_i = \hat{p}_i. \quad (3.43)$$

3.3.2 Représentation du groupe des rotations

Les relations de commutation (3.31), (3.37) et (3.38) ne brisent pas la symétrie par rapport aux rotations. En effet, les générateurs de rotations peuvent encore s'exprimer en fonction des opérateurs de position et d'impulsion comme :

$$\hat{L}_{ij} = \frac{\hat{X}_i \hat{P}_j - \hat{X}_j \hat{P}_i}{1 + \beta \hat{P}^2}. \quad (3.44)$$

Ainsi, il satisfaisant les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [\hat{X}_i, \hat{L}_{jk}] &= i\hbar (\delta_{ik} \hat{X}_j - \delta_{ij} \hat{X}_k), \\ [\hat{P}_i, \hat{L}_{jk}] &= i\hbar (\delta_{ik} \hat{P}_j - \delta_{ij} \hat{P}_k), \\ [\hat{L}_{ij}, \hat{L}_{kl}] &= i\hbar (\delta_{ik} \hat{L}_{jl} + \delta_{jl} \hat{L}_{ik} - \delta_{il} \hat{L}_{jk} - \delta_{jk} \hat{L}_{il}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Dans le cas particulier à trois dimensions, l'opérateur de moment angulaire modifié s'écrit :

$$\hat{L}_i = \frac{1}{1 + \beta \hat{P}^2} \varepsilon_{ijk} \hat{X}_j \hat{P}_k. \quad (3.46)$$

Les relations de commutation habituelles entre les opérateurs de position, d'impulsion et de moment angulaire restent valables :

$$\begin{aligned} [\hat{X}_i, \hat{L}_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{X}_k, \\ [\hat{P}_i, \hat{L}_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{P}_k, \\ [\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k. \end{aligned} \quad (3.47)$$

La relation de commutation (3.38) peut s'écrire comme :

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = -i\hbar (2\beta - \beta' + \beta (2\beta + \beta')) \hat{P}^2 \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k. \quad (3.48)$$

Chapitre 4

Oscillateur de Dirac en présence des longueurs minimales :

Dans ce chapitre nous allons chercher la solution de l'oscillateur du Dirac en présence des distances minimales ou nous allons utiliser l'algèbre (3.37). Comme dans le cas ordinaire, l'équation de Dirac s'obtient en appliquant le changement $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - i\tilde{\beta}mw\mathbf{R}$ dans l'équation d'une particule libre (2.27) tel que

$$\left[c\tilde{\alpha}(\mathbf{p} - i\tilde{\beta}mw\mathbf{R}) + \tilde{\beta}mc^2 \right] \psi = W\psi \quad (4.1)$$

où m est la masse au repos, w est la fréquence du Dirac oscillateur, $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont les matrices de Dirac et $\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$ est un spineur à deux composants.

En utilisant (2.19), on obtient :

$$W \begin{pmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c\sigma(\mathbf{p} + imw\mathbf{R}) \\ c\sigma(\mathbf{p} - imw\mathbf{R}) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Ou bien

$$(W - mc^2) \psi_a(\mathbf{p}) = c\sigma(\mathbf{p} + imw\mathbf{R})\psi_b(\mathbf{p}), \quad (4.3)$$

$$(W + mc^2) \psi_b(\mathbf{p}) = c\sigma(\mathbf{p} - imw\mathbf{R})\psi_a(\mathbf{p}). \quad (4.4)$$

Multiplions (4.3) par $(W + mc^2)$ et $(W + mc^2)$ par (4.4) et combinons entre les deux résultats, on obtient

$$(W^2 - m^2c^4)\psi_a(\mathbf{p}) = c^2 [\mathbf{p}^2 + (mw\mathbf{R})^2 + imw[\sigma\mathbf{R}, \sigma\mathbf{p}] + im^2w^2\sigma(\mathbf{R} \wedge \mathbf{R})] \psi_a(\mathbf{p}) \quad (4.5)$$

En utilisant (2.37), (3.37) et (3.38), on obtient

$$[\sigma \mathbf{R}, \sigma \mathbf{p}] = -i\hbar \left(1 + (\beta + \beta')p^2\right) \left(\frac{2\sigma \mathbf{L}}{\hbar} + 3\right) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{R} \wedge \mathbf{R} = -i\hbar \left(2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta p^2\right) \mathbf{L} \quad (4.7)$$

En remplaçant des équations ci-dessus dans (3.29) qui donne

$$\begin{aligned} \frac{(W^2 - m^2 c^4)}{c^2} \psi_a(\mathbf{p}) = & \left\{ \left[-2mw(1 + (\beta + \beta')p^2 + (mw)^2 \hbar(2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta p^2)) \right] \sigma \mathbf{L} \right. \\ & \left. - 3mw\hbar \left(1 + (\beta + \beta')p^2\right) + \mathbf{p}^2 + (mw\mathbf{R})^2 \right\} \psi_a(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Les deux derniers termes du côté droit représente le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique à 3 dimensions. Le premier terme est la contribution spin-orbite couple avec un force dépendante du moment. Le deuxième terme est un fonction de décalage dépendant de moment qui affecte à la fois les niveaux d'énergie et les fonctions d'ondes.

4.1 Fonctions d'ondes

Maintenant nous allons chercher les fonctions d'onde du Oscillateur de Dirac dans l'espace des moments en résolvant (4.8). Pour cela nous décomposons la fonction d'onde en une partie radiale et une partie spin-angulaire

$$\psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \psi_a(\mathbf{p}) \\ \psi_b(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p)x_{\kappa}^{mj}(\hat{\mathbf{p}}) \\ G(p)x_{-\kappa}^{mj}(\hat{\mathbf{p}}) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Où $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ est un vecteur unitaire. L'opérateur de position dans la représentation des moments est donnée par :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\hbar^2} \mathbf{R}^2 = & \left[\left(1 + (\beta + \beta')p^2\right) \frac{\partial}{\partial p} \right]^2 \\ & + \left[\frac{2}{p} + 2(\beta + \gamma)p \right] \left[\left(1 + (\beta + \beta')p^2\right) \frac{\partial}{\partial p} \right] \\ & - \frac{L^2}{p^2} - (2\beta L^2 - 3\gamma) + \left[\gamma \left(3\beta + \beta' + \gamma\right) - \beta^2 L^2 \right] p^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

L'opération de (σL) sur la fonction moment angulaire-spin $x_{\kappa}^{mj}(\hat{\mathbf{p}})$ a pour résultat

$$\sigma \mathbf{L} x_{\kappa}^{mj}(\hat{\mathbf{p}}) = \hbar \kappa x_{\kappa}^{mj}(\hat{\mathbf{p}}), \quad (4.11)$$

où le nombre quantique k est égal à $[s(2j + 1) - 1]$.

En substituant (4.10) and (4.11) en (4.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left(w^2 - m^2 c^4 + 2mw\hbar\kappa c^2 - m^2 w^2 \hbar^2 c^2 \kappa (2\beta - \beta') + 3mw\hbar c^2 \right) F(p) = -m^2 w^2 \hbar^2 \\ \left\{ \left[\left(1 + (\beta + \beta') p^2 \right) \frac{\partial}{\partial p} \right]^2 + \left[\frac{2}{p} + 2(\beta + \gamma) p \right] \left[\left(1 + (\beta + \beta') p^2 \right) \frac{\partial}{\partial p} \right] - \frac{L^2}{p^2} - (2\beta L^2 - 3\gamma) \right. \\ \left. + \left[\frac{-1}{m^2 w^2 \hbar^2} + \gamma(3\beta + \beta' + \gamma) - \beta^2 L^2 + \frac{1}{mw\hbar} (2\kappa + 3)(\beta + \beta') - (2\beta + \beta')\beta\kappa \right] p^2 \right\} F(p). \end{aligned} \quad (4.12)$$

En introduisant le changement de variables suivant un paramètre utile ξ sous la forme :

$$\xi = \frac{1}{k} \arctan \left(p \sqrt{\beta + \beta'} \right) \quad (4.13)$$

avec $\xi \in (0, \pi/(2\sqrt{k}))$ où :

$$k = \sqrt{mw\hbar(\beta + \beta')} \quad (4.14)$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned} \left(1 + (\beta + \beta') p^2 \right) \frac{\partial}{\partial p} &= \left(1 + (\beta + \beta') p^2 \right) \frac{\partial \xi}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ &= \frac{\sqrt{\beta + \beta'}}{k} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Et aussi

$$\left[\left(1 + (\beta + \beta') p^2 \right) \frac{\partial}{\partial p} \right]^2 = \frac{\beta + \beta'}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (4.16)$$

En remplaçant (4.13), (4.15) et (4.16) dans (4.12) on obtient

$$\begin{aligned} -\zeta F(p) &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\sqrt{mw\hbar}} \left[\frac{\sqrt{\beta + \beta'}}{\tan(k\xi)} + \frac{(\beta + \gamma)}{\sqrt{\beta + \beta'}} \tan(k\xi) \right] \frac{\partial}{\partial \xi} \right. \\ &\quad - mw\hbar(\beta + \beta') L^2 \cot^2(k\xi) - mw\hbar(2\beta L^2 - 3\gamma) \\ &\quad + \frac{mw\hbar}{(\beta + \beta')} \left[\frac{-1}{m^2 w^2 \hbar^2} + \gamma(3\beta + \beta' + \gamma) - \beta^2 L^2 \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{mw\hbar} (2\kappa + 3)(\beta + \beta') - (2\beta + \beta')\beta\kappa \right] \tan^2(k\xi) \right\} F(p) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Où

$$\zeta = \frac{w^2 - mc^4}{mw\hbar c^2} + 2\kappa + 3 - mw\hbar k(2\beta + \beta') \quad (4.18)$$

Pour plus de simplification, nous mettons

$$F = C^{\lambda+\delta} f(S) \quad (4.19)$$

Où S et C sont donnés par

$$S = \sin(k\xi), \quad C = \cos(k\xi). \quad (4.20)$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = kC^{\lambda+\delta} \left\{ -(\lambda + \delta) \frac{S}{C} f + C \frac{\partial F}{\partial S} \right\} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = k^2 C^{\lambda+\delta} & \left[(1 - S^2) \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} - (2\lambda + 2\delta + 1) S \frac{\partial F}{\partial S} \right. \\ & \left. + \left[(\lambda + \delta)(\lambda + \delta - 1) \frac{S^2}{C^2} - (\lambda + \delta) \right] f \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

En substituant (4.21) et (4.22) dans l'équation (4.17), on trouve

$$\begin{aligned} (1 - S^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \left((2\lambda + 1 + 2(1 - \eta) S - \frac{2}{S}) \frac{\partial F}{\partial \xi} + \left(\frac{\zeta}{k^2} - (2\eta - 1) \times L^2 - 3\lambda \right) - \frac{L^2}{S^2} \right. \\ \left. + \left(\lambda^2 - \lambda(1 + 2\eta) - \eta^2 L^2 + \frac{(2\kappa + 3)}{k^2} - \eta(\eta + 1)\kappa - \frac{1}{k^4} \right) \frac{S^2}{C^2} \right) f = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec λ est une constante qui sera déterminée plus tard, tandis que $\delta = \gamma/(\beta + \beta')$ et $\eta = \beta/(\beta + \beta')$. Maintenant nous éliminons la barrière centrifuge en imposant une condition sur λ qui vérifie l'équation

$$\lambda^2 - \lambda(1 + 2\eta) - \eta^2 L^2 + \frac{(2\kappa + 3)}{k^2} - \eta(\eta + 1)\kappa - \frac{1}{k^4} = 0 \quad (4.24)$$

Les solutions correspondantes sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 + 2\eta}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 + 2\eta)^2}{4} + \eta^2 L^2 - \frac{(2\kappa + 3)}{k^2} + \eta(\eta + 1)\kappa + \frac{1}{k^4}} \quad (4.25)$$

Dans ce cas l'équation (4.23) devient

$$(1 - S^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \left((2\lambda + 1 + 2(1 - \eta) S - \frac{2}{S}) \frac{\partial F}{\partial \xi} + \left(\frac{\zeta}{k^2} - (2\eta - 1) L^2 - 3\lambda \right) - \frac{L^2}{S^2} \right) f = 0 \quad (4.26)$$

En introduisant le changement de fonction $f(S) = S^l g(S)$ puis le changement de variable $z = 2S^2 - 1$ dans l'équation (4.26), on obtient

$$(1 - z^2) \frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} + [(b - a) - (a + b + 2)z] \frac{\partial g(z)}{\partial z} + \frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{k^2} - 2\eta L^2 - (2l + 3)\lambda + l(2\eta - 1) \right] g(z) = 0 \quad (4.27)$$

où les paramètres a et b sont définis par :

$$a = \lambda_+ - \eta - \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} + l \quad (4.28)$$

On remarque que cette équation différentielle est de type Jacobi avec

$$\frac{1}{4} \left[\frac{\zeta}{K^2} - 2\eta L^2 - (2l + 3)\lambda + l(2\eta - 1) \right] = n' (n' + a + b + 1) \quad (4.29)$$

$n' = (n - l)/2$. Dont la solution correspondante est donné par

$$g(z) = N P_n^{(a,b)}(z) \quad (4.30)$$

Avec une constante de normalisation N et $P_n^{(a,b)}(z)$ sont les polynomes de Jacobi. On en déduit que

$$F(z) = N 2^{-(a+b+\eta+\delta)/2} (1 - z)^{(a+\eta+\delta+1/2)/2} (1 + z)^{(b-1/2)/2} P_{n'}^{(a,b)}(z) \quad (4.31)$$

En revenant à l'ancienne variable p

$$z = \frac{(\beta + \beta')p^2 - 1}{(\beta + \beta')p^2 + 1} \Rightarrow 1 + z = \frac{2(\beta + \beta')p^2}{1 + (\beta + \beta')p^2} \quad \text{et} \quad 1 - z = \frac{2}{1 + (\beta + \beta')p^2}$$

(4.31) devient

$$F(p) = N \left[1 + (\beta + \beta')p^2 \right]^{-(a+b+\eta+\delta)/2} \left(\sqrt{\beta + \beta'} p \right)^{b-(1/2)} \times P_{n'}^{(a,b)} \left(\frac{(\beta + \beta')p^2 - 1}{(\beta + \beta')p^2 + 1} \right). \quad (4.32)$$

En remplaçant cette expression dans (4.9), obtient la formule de spineur Ψ_a

$$\Psi_a(\mathbf{p}) = N \left[1 + (\beta + \beta')p^2 \right]^{-(a+b+\eta+\delta)/2} \left(\sqrt{\beta + \beta'} p \right)^{b-(1/2)} \times P_{n'}^{(a,b)} \left(\frac{(\beta + \beta')p^2 - 1}{(\beta + \beta')p^2 + 1} \right) \chi_{\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}). \quad (4.33)$$

Passons maintenant au calcul du spineur $\Psi_b(\mathbf{p})$ défini par

$$\begin{aligned}\Psi_b(\mathbf{p}) &= \frac{c\sigma(\mathbf{P} - imw\mathbf{R})}{W + mc^2} \Psi_a(\mathbf{P}) \\ &= \frac{c\sigma_i p_i + cmw\hbar\sigma_i \left((1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i \right)}{W + mc^2} \Psi_a(\mathbf{P})\end{aligned}\quad (4.34)$$

à l'aide des relations suivantes [19]

$$\sigma_i \frac{\partial}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\sigma \mathbf{L} + 2}{p} \right) \sigma_P = \sigma_P \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sigma \mathbf{L}}{p} \right), \quad (4.35)$$

$$\sigma_i p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} = (\sigma \cdot \mathbf{p}) \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) = \sigma_p p^2 \frac{\partial}{\partial p} = p^2 \frac{\partial}{\partial p} \sigma_p, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \sigma_p = \sigma_p \frac{\partial}{\partial p}. \quad (4.37)$$

où $\sigma_p = (\sigma \cdot \mathbf{p})/p$, et l'utilisation de la relation (4.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}\Psi_b(\mathbf{p}) &= \frac{c\sigma_p}{W + mc^2} [p + mw\hbar \left((1 + (\beta + \beta')p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right) \\ &\quad - \frac{\hbar k}{p} + (\gamma - \beta\hbar k)p] \Psi_a(\mathbf{p})\end{aligned}\quad (4.38)$$

En introduisant les propriétés suivantes

$$\sigma_p \mathcal{K}_\kappa^{m_j}(\hat{\mathbf{p}}) = -\mathcal{K}_{-\kappa}^{m_j}(\hat{\mathbf{p}})$$

nous obtenons la fonction d'onde radiale $G(p)$ correspondante au spineur Ψ_b

$$\begin{aligned}G(p) &= \frac{-mw\hbar c}{W + mc^2} \left[\left(\frac{1}{mw\hbar} + \gamma - \beta\hbar\kappa \right) p - \frac{\hbar\kappa}{p} \right. \\ &\quad \left. + (1 + (\beta + \beta')p^2) \frac{\partial}{\partial p} \right] F(p)\end{aligned}\quad (4.39)$$

dans ce cas, nous utilisons la décomposition suivante, qui sera utile dans le calcul des deux $G(p)$ et de la constante de normalisation

$$F(p) = \frac{1}{p} f^{-(\delta+\eta-1)/2} R_1(p) \quad (4.40)$$

$$G(p) = \frac{1}{p} f^{-(\delta+\eta-1)/2} R_2(p) \quad (4.41)$$

où $f(p) = 1 + (\beta + \beta')p^2$. En comparant (4.40) avec (4.32), on obtient

$$R_1(p) = N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-1/2} p^{b+1/2} f^{-(a+b+1)/2} P_{n'}^{(a,b)}(z) \quad (4.42)$$

Utilisant les propriétés des polynômes de Jacobi données dans [44], nous obtenons les résultats suivantes

a $s = 1/2$

$$\begin{aligned} R_2(p) &= \frac{-m\omega\hbar c N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-1/2}}{W + mc^2} \left[f \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \beta\hbar k \right) p - \frac{\hbar k}{p} \right] p^{b+\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} P_{n'}^{(a,b)}(z) \\ &= \frac{-2m\omega\hbar c N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} \times \left[(1+z) \frac{d}{dz} + b \right] P_{n'}^{(a,b)}(z) \\ &= \frac{-2m\omega\hbar c (\beta + \beta')^{(a+b+n'+1)} N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} p^{b+\frac{3}{2}} f^{-\frac{a+b+3}{2}} P_{n'-1}^{(a+1,b+1)}(z) \end{aligned} \quad (4.43)$$

b $s = -1/2$

$$\begin{aligned} R_2(p) &= \frac{-m\omega\hbar c N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} \left[f \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{m\omega\hbar} - \beta\hbar(k+1) \right) p - \frac{\hbar(k+1)}{p} \right] \times p^{b+\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} P_{n'}^{(a,b)}(z) \\ &= \frac{-2m\omega\hbar c (b + n') N \sqrt{\beta + \beta'}^{b-\frac{1}{2}}}{W + mc^2} p^{b-\frac{1}{2}} f^{-\frac{a+b+1}{2}} P_{n'}^{(a+1,b-1)}(z) \end{aligned} \quad (4.44)$$

La constante de normalisation peut être calculée en utilisant la relation de fermeture modifiée

$$\int_0^\infty \frac{dp}{f(p)} (|R_1(p)|^2 + |R_2(p)|^2) = 1 \quad (4.45)$$

En substituant (4.42)-(4.44) dans (4.40) et (4.41), on obtient les expressions finales des fonctions radiales des fonctions d'onde normalisées

$$\begin{aligned} F(p) &= \left(\frac{W + mc^2}{2W} \right)^{1/2} \times A^{n'}(a, b) P^{b-1/2} f^{-(1/2)(a+b+\eta+\delta)} P_{n'}^{(a,b)}(z) , \\ G(p) &= -\varepsilon \left(\frac{W + mc^2}{2W} \right)^{1/2} \times A^{\tilde{n}'}(\tilde{a}, \tilde{b}) P^{\tilde{b}-1/2} \\ &\quad \times f^{-(1/2)(\tilde{a}+\tilde{b}+\eta+\delta)} P_{\tilde{n}'}^{(\tilde{a}, \tilde{b})}(z) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Où

$$A^{n'}(a, b) = \left(\frac{2(\beta + \beta')^{b+1}(a + b + 2n' + 1)n'!\Gamma(a + b + n' + 1)}{\Gamma(a + n' + 1)\Gamma(b + n' + 1)} \right)^{1/2},$$

$$\tilde{a} = a + 1, \quad \tilde{b} = b + 2s, \quad \tilde{n}' = n' - s - \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{W}{|W|} \quad (4.47)$$

et $n' = 0, 1, 2, \dots$, sauf pour le cas ou $s = 1/2$ et $\varepsilon = -1$, ou $n' = 1, 2, 3, \dots$

Pour trouver la limite non relativiste de l'équation d'oscillateur de Dirac avec la longueur minimale, on remplace $W = mc^2 + E$ par $E \ll mc^2$ dans (4.5) puis on divise le résultat sur $2m$. Ce qui donne

$$E\Psi_a(p) = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2\mathbf{R}^2 - \mu_{SL}(p)\sigma\mathbf{L} - \frac{3}{2}\hbar w(1 + (\beta + \beta')p^2) \right] \Psi_a(p) \quad (4.48)$$

où

$$\mu_{SL}(p) = \frac{w}{\hbar} \left(1 + (\beta + \beta')p^2 \right) - \frac{w^2}{4} \left(2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta p^2 \right). \quad (4.49)$$

Nous remarquons que la présence des longueurs minimales, conduit à l'apparition des nouveaux termes d'interaction. Le deuxième terme de (4.48) représente un couplage spin-moment angulaire avec un terme de couplage $\mu_{SL}(p)$ dépendant du mouvement. Comme il est bien connu, l'interaction spin-moment angulaire est générée par le potentiel scalaire dans le cas habituel. Dans notre cas, un tel potentiel scalaire peut être attribué à un champ de type gravitationnel généré par la perturbation de l'espace en présence des longueurs minimales.

4.2 Spectre d'énergie

Pour calculer le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac en présence des longueurs minimales, il suffit de remplacer les expressions de n', a, b, λ_+ et ζ dans (4.29) et résoudre le résultat pour W . Ce qui donne

$$W^2 - m^2c^4 = mw\hbar c^2 \times \left\{ 2 \left(n + \frac{3}{2} \right) \left[1 - \varepsilon_{k1} + (mw\hbar)^2 \left(\frac{(\beta' + 3\beta)^2}{4} + \beta^2 L^2 \right) \right]^{1/2} + mw\hbar \left[(\beta + \beta') \left(n + \frac{3}{2} \right)^2 + (\beta - \beta') \times \left(L^2 + \frac{9}{4} \right) + \frac{3}{2}\beta' \right] - \varepsilon_{k2} \right\} \quad (4.50)$$

Où

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k1} &= 3 \left(1 + \frac{2}{3}k\right) mw\hbar \left(\beta + \beta'\right) - m^2 w^2 \hbar^2 \beta \left(2\beta + \beta'\right) k, \\ \varepsilon_{k2} &= 3 \left(1 + \frac{2}{3}k\right) - mw\hbar k \left(2\beta - \beta'\right)\end{aligned}\quad (4.51)$$

Qui sont les termes exprimant le couplage spin-moment angulaire. On remarque que (4.50) ne dépend pas de paramètre γ . En développant (4.50) au premier ordre en β et β' , nous obtenons

$$\begin{aligned}W^2 &= m^2 c^4 + mw\hbar c^2 \times \left\{ 2 \left(n - j + \frac{1}{2}\right) \left[1 + \frac{mw\hbar\beta}{2} \left(n - j + \frac{1}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{mw\hbar\beta'}{2} \left(n + j + \frac{9}{2}\right) + mw\hbar\beta' (-4n - 2nj - 3) \right\}\end{aligned}\quad (4.52)$$

Pour $j = l + (1/2)$

$$\begin{aligned}W^2 &= m^2 c^4 + mw\hbar c^2 \times \left\{ 2 \left(n + j + \frac{3}{2}\right) \left[1 + \frac{mw\hbar\beta}{2} \left(n + j + \frac{3}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{mw\hbar\beta'}{2} \left(n - j + \frac{7}{2}\right) + mw\hbar\beta' (-2n + 2n - 3) \right\},\end{aligned}\quad (4.53)$$

Pour $j = l - (1/2)$.

Pour $\beta, \beta' \rightarrow 0$ on obtient le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac habituel

$$\begin{aligned}W^2 - m^2 c^4 &= 2mw\hbar c^2 [n - j + 1/2] \quad , \quad j = l + \frac{1}{2} \\ W^2 - m^2 c^4 &= 2mw\hbar c^2 \left[n + j + \frac{3}{2} \right] \quad , \quad j = l - \frac{1}{2}\end{aligned}\quad (4.54)$$

On remarque qu'on a une dégénérescence de tous les états avec $n \pm q$ et $j \pm q$ pour $j = l + \frac{1}{2}$, où q est un entier, et de tous les états avec $n \pm q$ et $j \pm q$ pour $j = l - \frac{1}{2}$. Il est important de noter que le spectre d'énergie contient des termes supplémentaires proportionnels à n^2 , ce qui indique un confinement dur. Ce comportement est similaire au problème de mouvement d'une particule dans le mouvement d'une particule ponctuelle dans un potentiel de puits. Dans notre cas les limites du puits sont localisées à 0 et $\pi / \left(2\sqrt{mw\hbar(\beta + \beta')} \right)$.

En introduisant $W = mc^2 + W_{nr}$ avec $W_{nr} \ll mc^2$ dans (4.50), on obtient la limite non

relativiste du spectre d'énergie en présence des longueurs minimales :

$$W_{nr} = \hbar\omega \left\{ \left[n + \frac{3}{2} \right] \left[1 + (mw\hbar)^2 \left(\frac{(\beta' + 3\beta)^2}{4} + \beta^2 L^2 \right) - \epsilon_{k1} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{mw\hbar}{2} \left[(\beta + \beta') \left(n + \frac{3}{2} \right)^2 + (\beta - \beta') \left(L^2 + \frac{9}{4} \right) + \frac{3}{2}\beta' \right] - \frac{\epsilon_{k2}}{2} \right\}. \quad (4.55)$$

Le développement en séries dans cette formule en terme de β et β' nous donne :

$$W_{nr} = \hbar\omega \left\{ \left(n - j + \frac{1}{2} \right) \left[1 + \frac{mw\hbar\beta}{2} \left(n - j + \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{mw\hbar\beta'}{4} \left(n + j + \frac{9}{2} \right) - mw\hbar\beta \left(2n + nj + \frac{3}{2} \right) \right\} \quad (4.56)$$

pour $j = l + \frac{1}{2}$

$$W_{nr} = \hbar\omega \left\{ \left(n + j + \frac{3}{2} \right) \left[1 + \frac{mw\hbar\beta}{2} \left(n + j + \frac{3}{2} \right) \right] + \frac{mw\hbar\beta'}{4} \left(n - j + \frac{7}{2} \right) - mw\hbar\beta' \left(n - nj + \frac{3}{2} \right) \right\} \quad (4.57)$$

pour $j = l - \frac{1}{2}$

Si on met $\beta' = 0$ et $\beta = 0$ dans les deux formules (4.56) et (4.57), on obtient exactement le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac standard dans la limite non relativiste :

$$\begin{aligned} W_n &= \hbar\omega \left(n - j + \frac{1}{2} \right) & , \quad j = l + \frac{1}{2} \\ W_n &= \hbar\omega \left(n + j + \frac{3}{2} \right) & , \quad j = l - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

En mettant $n = 2n' + l$, nous confirmons que l'énergie moyenne entre les états spin up et spin down est $\widetilde{W}_n = \hbar\omega(2n' + l + (1/2))$ qui est différente que la valeur propre habituelle des oscillateurs harmoniques non relativistes par $\hbar\omega$ et qui représente la contribution de couplage spin-moment angulaire.

Conclusion

L'objet central de ce mémoire était la dérivation des fonctions d'ondes et le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac en présence des distances minimales.

Dans le deuxième chapitre nous avons étudié l'oscillateur de Dirac oscillirac dans le cas standard. On a donné d'abord un rappel sur l'équation de Dirac puis ont dérivé sa solution pour le cas d'une particule libre et aussi pour la cas de l'oscillateur de Dirac standard.

Dans le troisième chapitre nous avons donné un rappel sur la mécanique quantique basée sur le principe d'incertitude généralisé. Ce principe stipule à utiliser une relation de dispersion modifiée ce qui conduit à une relation de commutation et une relation d'incertitude modifiée et aussi à l'existence d'une longueur minimale non nulle.

Dans le chapitre 4, nous avons résolu exactement l'équation de Dirac pour le cas de l'oscillateur de Dirac en 3 dimensions en présence des longueurs minimales. On remarque que la présence de la longueur minimale conduit à une dépendance quadratique du spectre d'énergie en fonction du nombre quantique n . Cependant pour $\beta' = 0$. Nous voyons que toutes les énergies dégénérées pour $\beta' = 0$ se redoublent en présence de β' , et l'intervalle entre les énergies divisées devient plus large si β' augmente.

Bibliographie

- [1] M. Moshinsky and Y. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood, Amsterdam, 1996.
- [2] R. P. Martinez-y-Romero, H. N. Nunez-Yepez, and A. L. Salas-Brito. *European Journal of Physics*, vol. 16, no. 3, pp. 135–141, 1995.
- [3] J. Benitez, R. P. Martinez y Romero, H. N. Nunez Yepez, and A. L. Salas-Brito, “Solution and hidden supersymmetry of a Dirac oscillator,” *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 14, pp. 1643–1645, 1990.
- [4] J. Benitez, R. P. Martinez y Romero, H. N. Nunez Yepez, and A. L. Salas-Brito, *Physical Review Letters*, vol. 64, pp. 1643–1645, 1990,”
- [5] R. P. Martrinez-y-Romero, M. Moreno, and A. Zentalla, ” *Physical Review D*, vol. 43, no. 6, pp. 2036–2040, 1991.
- [6] F. Dominguez-Adame and M. A. Gonzalez, *Europhysics Letters*, vol. 13, no.3, pp. 193–198, 1990.
- [7] G. Veneziano, A stringy nature needs just two constants, *Europhys. Lett.* 2, 199 (1986).
- [8] D. J. Gross and P. F. Mende, *String theory beyond the Planck scale*, *Nuc. Phys.B303*,407 454 (1988).
- [9] T. Yoneya, On the interpretation of minimal length in string theories, *Mod. Phys. Lett. A4*, 1587 1595 (1989).
- [10] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, Can spacetime be probed below the string size ? *Phys. Lett. B 216*41 47 (1989).
- [11] R. Guida, K. Konishi and P. Provero, On the short distance behavior of string theories, *Mod. Phys. Lett. A 6*, 1487 1503 (1991).
- [12] M. Reuter, Nonperturbative evolution equation for quantum gravity, *Phys. Rev. D 57*, 971 (1998).
- [13] J. Magueijo and L. Smolin, Lorentz invariance with an invariant energy scale, *Phys. Rev. Lett.* 88, 190403 (2002).
- [14] J. Magueijo and L. Smolin, String theories with deformed energy-momentum relations and a possible nontachyonic bosonic string, *Phys. Rev. D 71*, 026010 (2005).

- [15] F. Girelli, E. R. Livine and D. Oriti, Deformed special relativity as an effective at limit of quantum gravity, *Nuc. Phys. B* 708, 411-433 (2005).
- [16] J. L. Cortes and J. Gamboa, Quantum uncertainty in doubly special relativity, *Phys. Rev. D* 71, 065015 (2005).
- [17] S. Ghosh, Lagrangian for doubly special relativity particle and the role of noncommutativity, *Phys. Rev. D* 74, 084019 (2006).
- [18] A. F. Ali, S. Das and E. C. Vagenas, Discreteness of space from the generalized uncertainty principle, *Phys. Lett. B* 678, 497-499 (2009).
- [19] K. Nozari and A. Etemadi, Minimal length, maximal momentum, and Hilbert space representation of quantum mechanics, *Phys. Rev. D* 85, 104029 (2012).
- [20] F. Scardigli, Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment, *Phys. Lett. B* 452, 39-44 (1999).
- [21] Y. J. Ng and H. Van Dam, Spacetime Foam, Holographic Principle and Black Hole Quantum Computers, *Int. J. Mod. Phys. A* 20, 1328-1335 (2005).
- [22] C. A. Mead, Possible connection between gravitation and fundamental length, *Phys. Rev.* 135, B 849 (1964).
- [23] M. Maggiore, *Phys. Rev. D* 49, 5182 (1994).
- [24] C. Rovelli, *Phys. Rev. Lett.* 77, 3288 (1996) .
- [25] F. Scardigli, *Class.Quantum Grav.* 14, 1781 (1997).
- [26] A. Kempf, *J. Math. Phys.* 35, 4483 (1994)
- [27] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, *Phys. Rev. D* 52, 1108 (1995)
- [28] A. Kempf, *J. Phys. A* 30, 2093 (1997)
- [29] A. Kempf and G. Mangano, *Phys. Rev. D* 55, 7909 (1997)
- [30] H. Hinrichsen and A. Kempf, *J. Math. Phys.* 37, 2121 (1996).
- [31] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura and T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 65, 125027 (2002).
- [32] T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk and V. M. Tkachuk, *J. Phys. A :Math. Gen.* 39, 2143 (2006).
- [33] F. Brau, *J. Phys. A* 32, 7691 (1999)
- [34] R. Akhoury and Y. -P. Yao, *Phys. Lett. B* 572, 37 (2003).
- [35] K. Nouicer, *J. Phys. A* 38, 10027 (2005)
- [36] K. Nouicer, *J. Math. Phys.* 47, 122102 (2006)
- [37] K. Nouicer, *J. Phys. A : Math. Theor.* 40, 2125 (2007).

DÉDICACE

Avant toute chose, Je remercie dieu tout puissant de m'avoir donné la santé, courage Et patience tout au long de mes études .C'est avec un grand honneur que je

dédie ce modeste travail aux deux personnes qui se sont sacrifiées

pour que je grandisse avec savoir-faire et qui m'ont

appris à ne jamais baissé les bras

*à **mon père** pour mon soutien morale*

pour tout ce qu'il a fait durant mes années d'étude que j'honneur ce succès.

*À **ma mère**, la lumière de mes yeux l'ombre de mes pas et qui*

m'apporté son appui durant toute mes années d'étude,

pour son sacrifice et soutien qui m'ont

donné confiance, courage

*Je dédie ce travail également à l'âme de ma chère **grand-mère** et **mon cher oncle***

*A mes frères : **Bouزيد, Mohammed***

*et mes sœurs : **khaira, Radia, Hayat, Djahida, Khalisa***

*Et les jeunes garçons : **Jassem, Rahaf, Iman, Amel, Assil, Djouri, Khadija***

*Et pour ma grande famille et mon collègue travail **Meskia***

Pour mon cher qui m'a aidé à tous

A tous ceux qui me sont chers de la spécialité physique théorique (2018/2019)

Je dédie ce travail.

Souhila

المخلص

في هذا المذكرة، سندرس الخصائص الكمومية لهزاز ديراك باستخدام مبدأ عدم اليقين المعمم الذي يؤدي إلى ظهور أطوال دنيا طول بسلم بلانك. يتم حساب دوال الموجة وطيف الطاقة بدقة. يؤدي وجود الأطوال الدنيا إلى ظهور حد جديد في علاقة طيف الطاقة يتمثل في مربع n ، مما يؤدي إلى ظهور خاصية الحبس الصلب للنظام. ليس فقط في النهاية الغير نسبية ولكن أيضاً في الحالة العادية $(\beta = \beta' = 0)$ ، فالنتائج المحصل عليها تؤول إلى نتائج حالة العادية.

Abstrac

We study quantum features of the Dirac oscillator using a generalized uncertainties principal that lead to the appearance of minimal length with the order of the Planck length. Wave functions of the system and the corresponding energy spectrum are derived rigorously. The presence of the minimal length accompanies a quadratic dependence of the energy spectrum on quantum number n , implying the property of hard confinement of the system. Not only in the nonrelativistic limit but also in the limit of the standard case $(\beta = \beta' = 0)$, our results reduce to the results of the standard case.

Resumé

Nous étudions les caractéristiques quantiques de l'oscillateur de Dirac en utilisant un principe d'incertitude généralisé conduisant à l'apparition d'une longueur minimale avec l'ordre de la longueur de Planck. Les fonctions d'onde du système et le spectre d'énergie sont dérivés rigoureusement. La présence de la longueur minimale conduit à une dépendance quadratique du spectre d'énergie en fonction de nombre quantique n , impliquant la propriété de confinement dur du système. Non seulement dans la limite non relativiste mais aussi dans la limite du cas standard $(\beta = \beta' = 0)$, nos résultats se réduisent à résultats de cas standard.