UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉM ATIQUES ET INFORMATIQUES

Département de Mathématiques

Mémoire de Fin D'etude

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine :Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Spécialité :ANAFLYSE FONCTIONNELLE

Par

DEHOUM Essaddiq

sujet

Existence et unicité de la solution pour un problème aux limites associé aux équations de Lamé

Président

Promotion:2014/2015

Remerciements

Louanges à ALLAH. . . Qui m'a appris ce que j'ignorais.

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **Benabderrahmanne Benyattou**, Professeur à l'université Mohamed Boudiaf de M'Sila, mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé, pour son aide ; sa patience, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur **Sengouga Abdelmohcene,** Maître de Conférences "B" à l'université Mohamed Boudiaf de M'Sila, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.

Je remercie vivement Monsieur **Memou Ameur,** Maître de Conférences "B" à l'université Mohamed Boudiaf de M'Sila, pour m'avoir fait l'honneur d'être examinateur dans le jury.

Je voudrais également remercier tous les membres du département de mathématique et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour achever ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, surtout mon père et ma mère et mon frère et soeurs pour leurs soutient tout au long de mes études.

Résumé

Dans ce travail, on considère un problème aux limites mixtes Dirichlet-Neumann pour les équations de l'élasticité. Sous certaines conditions sur les données initiales, le théorème de Lax-Milgram en se basant sur la méthode variationnelle nous permet de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle.

Notations :

Si Ω est un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$ on a

- $\overline{\Omega}$: L'adhérence de Ω.
- Γ : La frontière de Ω supposée souvent régulière.
- $\Gamma_i \left(i = \overline{1,2}\right)$: Une partie de la frontière Γ.
- $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$: L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
- $H^{\pm\frac{1}{2}}(\Gamma)$: L'espace de Sobolev d'ordre $\pm\frac{1}{2}$ sur Γ.
- H : Espace de Hilbert.
- $\langle\ ,\ \rangle$: produit scalaire de X.
- $\|\cdot\|_X$: La norme de X.
- $\partial_i f$: La dérivées partielles de f par rapport à la i éme composante x_i.
- $\bigtriangledown f$: Le gradient de f, $\left(\text{i.e } \bigtriangledown f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\right)$.
- $\operatorname{div} f$: La divergence de f (i.e $\operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j})$).
- C : Une constant générique strictement positif.
- $\operatorname{div} f$: $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} +, ..., + \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.
- $d\Gamma$: La mesure superficielle sur Γ, induite par dx.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites pour les équations de l'élasticité. Avec des conditions aux limites mixtes (Dirichlet-Neumann). Notre objectif dans ce travail est, sous certaines hypothèses conditions sur les données, de démontrer un résultat sur l'existence et l'unicité d'une solution faible, via le théorème de Lax-Milgram en se basant sur la méthode variationnelle.

Ce travail se décompose de trois chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre on donne quelques rappels sur les espaces de Lebesgues, ainsi que leurs propriétés les plus importantes. Aussi nous allons démontrer quelques inégalités telles que l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Young et l'inégalité de Minkowski.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse beaucoup aux espaces de Sobolev que jouent un rôle très important dans l'étude des problèmes liés aux équations aux dérivées partielles. On commence par donner quelques rappels sur la théorie élémentaire des distributions, puis on présente un rappel sur les espaces de Sobolev ainsi que leurs propriétés. Ensuite, nous allons donner quelques notions sur le théorème de trace, la formule de Green, l'inégalité de Korn et celle de Poincaré.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites mixtes, Dirichlet-Neumann, associé aux équations de l'élasticité. Sous certaines hypothèses sur les données, et après avoir introduit la formulation variationnelle du problème considéré, le théorème de Lax-Milgram. nous permet de prouver l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Ce mémoire se terminer par une conclusion générale.

Chapitre 1

Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Résumé. Dans ce chapitre nous allons présenter quelques rappels sur les espaces de Lebesgue ainsi que leurs propriétés les plus importantes. Aussi nous allons démontrer quelques inégalités telles que l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Young et celle de Minkowski.

Continu :

1.1 Quelques définitions

Définition 1.1.1 *(Fonction mesurable) [8] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$F_\alpha = \{x \in \Omega : \; f(x) \geqslant \alpha\}.$$

est mesurable au sens de Lebesgue.

Définition 1.1.2 *(Fonction intégrable) [8] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si*

$$\int_\Omega |f(x)| \, dx < \infty.$$

Définition 1.1.3 *(Egalité p.p) Soient f, g deux fonctions mesurables, on dit que f et g sont égaux presque pour tout et l'on note $f = g$ p.p. Si l'ensemble*

$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Définition 1.1.4 *(Support d'une fonction continue) [8] Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle support de f l'ensemble*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.1.5 *(L'espace $C_c(\Omega)$) [8] On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact. C'est-à-dire :*

$$C_c(\Omega) = \{f : \operatorname{supp}(f) \subset \Omega\}.$$

Définition 1.1.6 *(Norme) [6] Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$. Une norme dans X est une application $f : X \to \mathbb{R}^+$qui satisfait aux conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \forall x \in X, \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ \forall c \in \mathbb{k}, \forall x \in X, \quad f(cx) = |c| \; f(x), \\ \forall x, y \in X^2, \quad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y). \end{cases}$$

On note la norme dans X par $\|\cdot\|_X$ et le couple $(X, \|\cdot\|_X)$ est appelé un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.7 *(Suit de Cauchy) [11] Soit* $(X,\ \|\cdot\|_X)$ *un espace vectoriel normé. Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X *est de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^* :\ \forall n,\ m \geqslant N \Longrightarrow\ \|x_n - x_m\|_X < \epsilon.$$

On dit que $(X,\ \|\cdot\|_X)$ *est complet si toute suit de Cauchy de* X *est convergente.*

Définition 1.1.8 *(Espace de Banach) [11] Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.*

Définition 1.1.9 *(Dual topologique) [6] Soit* X *un* $\Bbbk$*-espace normé. L'espace des formes linéaires continues, noté* $\mathcal{L}(X, \Bbbk)$*, est appelé le dual topologique de* X*, sera noté* X'*. C'est donc l'ensemble des formes linéaires continues sur* X *ou encore l'ensemble des formes linéaires* f *sur* X *telles que :*

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in X,\ |f(x)| \leqslant \alpha \|x\|_X .$$

Muni de la norme duale définie par

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leqslant 1}} |f(x)| .$$

Définition 1.1.10 *(Espace réflexif) [3] Soit* X *espace de Banach et soit* J *l'injection canonique de* X *dans* X''*. On dit que* X *est réflexif si* $J(X) = X''$ *(*J *est bijective).*

Définition 1.1.11 *(daule de* X'*) [3] Soit* X *un espace de Banach,* X' *son dual muni de sa norme et soit* X''*son bidual, c'est à dire le dual de* X'*, muni de la norme*

$$\|\xi\|_{X''} = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leqslant 1}} |\langle \xi, f\rangle| ,\ \forall \xi \in X''.$$

Définition 1.1.12 *(Injection canonique) [3] On a une injection canonique* $J : X \to X''$ *définie comme suit, soit* $x \in X$ *fixé, l'application* $f \longmapsto \langle f, x\rangle$ *de* X' *dans* $\mathbb{R}$ *constitue une forme linéaire continue sur* X'*, c'est-à-dire un élément de* X'' *noté* J_x *tel que*

$$\langle J_x, f\rangle_{X'',X'} = \langle f, x\rangle_{X',X}\ ,\ \forall x \in X, \forall f \in X'.$$

Il est clair que J_x est linéaire et isométrie ($\|J_x\|_{X''} = \|x\|_X$ pour tout $x \in X$). En effet

$$\|J_x\|_{X''} = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle J_x, f\rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_X \,.$$

Définition 1.1.13 *(Adhérence) Soit A une partie de X. On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à A.*

Définition 1.1.14 *(Dense) Une partie A de X est dite dense dans X si $\overline{A} = X$.*

Définition 1.1.15 *(Espace métrique) Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout x, y, $z \in X$:*

$$\begin{cases} (d(x,y)) = 0 \Longleftrightarrow (x = y)\,; \\ d(x,y) = d(y,x) \quad \text{(symétrie)}; \\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \quad \text{(inégalité triangulaire)}. \end{cases}$$

Le couple (X, d) est dit espace métrique.

Définition 1.1.16 *(Séparabilité) [3] On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset X$ dénombrable et dense.*

Définition 1.1.17 *(Uniformément convexes) [3] On dit qu'un espace de Banach X est uniformément convexe si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$*

tel que :

$$(x, y \in X,\ \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1 \text{ et } \|x - y\| > \epsilon) \Longrightarrow \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta\right).$$

1.2 L'espace $L^p(\Omega)$

Définition 1.2.1 *(Espace de Lebesgue) [8] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

De plus, pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ muni de la mesure dx, on pose :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $\|\cdot\|_{L^\infty}$

$$\|f\|_{L^\infty} = Supess(f) = \inf \{\alpha : |f(x)| \leqslant \alpha \ p.p.\}.$$

Définition 1.2.2 *(Exposant conjugué) [8] Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on désigne par $p' = q$ l'exposant conjugué de p qui vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Théorème 1.2.1 *(Inégalité de Young) [8] Soit $1 < p < \infty$ et q son exposant conjugué. Alors pour tout $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ on a*

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Démonstration. [3] soit $a, b \geqslant 0$. La fonction log étant concave sur $]0, \infty[$ on a

$$\log(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q) \geqslant \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log ab.$$

■

1.2.1 Inégalité de Hölder

Théorème 1.2.2 *[8] Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors*

$$fg \in L^1(\Omega),$$

et

$$\int_{\Omega} |f(x)\, g(x)| \, dx \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Pour $p = 2 = q$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Démonstration. [3] Pour $p = 1$ et si $p = \infty$ est évidente.

Supposons donc que $1 < p < \infty$, d'après le théorème 1.2.1 on pose :

$$a = |f(x)| \quad \text{et} \quad b = |g(x)|\,,$$

donc

$$|f(x)|\,|g(x)| \leqslant \frac{1}{p}\,|f(x)|^p + \frac{1}{q}\,|g(x)|^q \quad \text{p.p.sur } \Omega.$$

Il en résulte que $fg \in L^1(\Omega)$ et que:

$$\int_{\Omega} |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{p}\,\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q}\,\|g\|_{L^q}^q\,. \tag{1.1}$$

Remplaçant dans (1.1) f par λf ($\lambda > 0$) il vient :

$$\int_{\Omega} |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \frac{\lambda^{p-1}}{p}\,\|f\|_{L^p}^p + \frac{\lambda^{-1}}{q}\,\|g\|_{L^q}^q\,. \tag{1.2}$$

On choisit $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1}\,\|g\|_{L^q}^{\frac{q}{p}}$ donc de (1.2)

$$\int_{\Omega} |f(x)\,g(x)|\,dx \quad \leqslant \quad \frac{(\|f\|_{L^p}^{-1}\,\|g\|_{L^q}^{\frac{q}{p}})^{p-1}}{p}\,\|f\|_{L^p}^p + \frac{(\|f\|_{L^p}^{-1}\,\|g\|_{L^q}^{\frac{q}{p}})^{-1}}{q}\,\|g\|_{L^q}^q\,,$$

$$\text{où} \qquad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad = \quad 1,\ p = q(p-1) \text{ et } \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}),$$

$$\int_{\Omega} |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \frac{\|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}}{p} + \frac{\|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}}{q},$$

implique

$$\int_{\Omega} |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant (\frac{1}{p} + \frac{1}{q})\,\|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}\,.$$

Donc

$$\int_{\Omega} |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}\,.$$

■

Corollaire 1.2.1 *[1] Si $p > 0$, $q > 0$ et $r > 0$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$,$\forall f \in L^p(\Omega)$ et $\forall g \in L^q(\Omega)$ alors*

$$fg \in L^r(\Omega),$$

et

$$\|fg\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Preuve. [5] Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$; On a

$$\begin{cases} \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{r} \Longrightarrow 1 \leqslant \frac{p}{r} = \overline{p} \\ \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{r} \Longrightarrow 1 \leqslant \frac{q}{r} = \overline{q}. \end{cases}$$

Ce qui donne $\frac{1}{\overline{p}} + \frac{1}{\overline{q}} = \frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = 1$. D'autre part, on a

$$\int_{\Omega} |f(x) g(x)|^r \, dx = \int_{\Omega} |f(x)|^r |g(x)|^r \, dx \leqslant \||f|^r\|_{L^{\overline{p}}} \||g|^r\|_{L^{\overline{q}}}.$$

On a

$$\||f|^r\|_{L^{\overline{p}}} \||g|^r\|_{L^{\overline{q}}} = \||f|^r\|_{L^{\frac{p}{r}}} \||g|^r\|_{L^{\frac{q}{r}}},$$

égale à

$$\left(\left(\int_{\Omega} |f(x)|^r \, dx\right)^{\frac{p}{r}}\right)^{\frac{r}{p}} \left(\left(\int_{\Omega} |g(x)|^r \, dx\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{r}{q}},$$

et égale à

$$\left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q \, dx\right)^{\frac{r}{q}}.$$

Donc

$$\left(\int_{\Omega} |f(x) g(x)|^r \, dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

et par conséquent

$$\|fg\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

■

Corollaire 1.2.2 *[3] Soient $f_1, \cdots, f_k$ des fonctions telles que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ $1 \leqslant i \leqslant k$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leqslant 1$.*

Alors le produit $f = f_1, \cdots, f_k \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L^{p_i}}$$

Théorème 1.2.3 *(I'inégalité d'interpolation) [1] Soit* $1 \leqslant p < q < r$ *telle que* $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}$ *pour tout* θ, $0 < \theta < 1$.

Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, *alors* $f \in L^q(\Omega)$ *et*

$$\|f\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^r}^{1-\theta}$$

Preuve. [1] Soit $s = \frac{p}{(\theta q)}$ telle que $s \geqslant 1$ et $s' = \frac{s}{s-1} = \frac{r}{(1-\theta)q}$ si $r < \infty$, d'après le théorème 1.2.2,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q}^q &= \int_\Omega |f(x)|^q \, dx \\
&= \int_\Omega |f(x)|^{\theta q} |f(x)|^{(1-\theta)q} \, dx \\
&\leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^{\theta q s} \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_\Omega |f(x)|^{(1-\theta)q s'} \, dx \right)^{\frac{1}{s'}},
\end{aligned}$$

donc

$$\|f\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^r}^{1-\theta}.$$

De même pour $r = \infty$. ■

1.2.2 Inégalité de Minkowski

Théorème 1.2.4 *(Inégalité de Minkowski)[1] Soient* $f, g \in L^p(\Omega)$ *.Si* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *alors*

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Preuve. [3] Soient f, $g \in L^p(\Omega)$. Si $p = 1$ et $p = \infty$, alors l'inégalité

$$\int_\Omega |f(x) + g(x)| \, dx \leqslant \int_\Omega |f(x)| \, dx + \int_\Omega |g(x)| \, dx,$$

est évidente.

Supposons que $1 < p < \infty$ et soient f, $g \in L^p(\Omega)$ On a

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant (|f(x)| + |g(x)|)^p \leqslant 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Par conséquent $f+g \in L^p(\Omega)$. D'autre part on a

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^p}^p &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\ &\leqslant \int_\Omega |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_\Omega |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx.\end{aligned}$$

Or $|f+g|^{p-1} \in L^q(\Omega)$ et grâce à l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\begin{aligned}\left\||f+g|^{p-1}\right\|_{L^q} &= \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1},\end{aligned}$$

donc

$$\left\||f+g|^{p-1}\right\|_{L^q} = \|f+g\|_{L^p}^{p-1}.$$

D'où il vient

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leqslant \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\|f\|_{L^p} + \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\|g\|_{L^p}.$$

C'est à dire :

$$\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

■

Théorème 1.2.5 *[3] $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Démonstration. Soient $f, g \in L^p(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{k}$.

a) Supposons que $\|f\|_{L^p} = 0$, alors $\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \int_\Omega |f(x)|^p\,dx = 0$

et par conséquent $f = 0$,

b) on a $\|\alpha f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\,\|f\|_{L^p}$.

c) $\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ (d'après de inégalité Minkowski). ■

Théorème 1.2.6 *(Fischer-Riesz) [3] $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Démonstration. [3] 1) Supposons d'abord que $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$. Etant donné un entier $k \geqslant 1$, $\exists\ N_k$ tel que

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{k}, pour\ m, n \geqslant N_k.$$

Donc il existe E_k négligeable tel que :

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \backslash E_k \quad m, n \geqslant N_k. \tag{1.3}$$

En fin, posant $E = \bigcup\limits_k E_k$ (E est négligeable), on voit que pour tout $x \in \Omega \backslash E$ la suite (f_n) est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$). Soit $f_n(x) \to f(x)$, pour $x \in \Omega \backslash E$.En passant à la limite dans (1.3), il vient

$$\lim_{m \to \infty} |f_m(x) - f_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \backslash E \quad , \forall n \geqslant N_k.$$

Donc $f \in L^\infty(\Omega)$ et $\|f - f_n\| \leqslant \frac{1}{k}$, $\forall n \geqslant N_k$, et par conséquent $\|f - f_n\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$.

2) Supposons maintenant que $1 \leqslant p < \infty$ et soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Pour conclure il suffIt de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans $L^p(\Omega)$. On extrait une sous-suite (f_{n_k}) telle que :

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^k}, \forall k \geqslant 1.$$

(on procède comme suit: il existe n_1 tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2}$ pour $m, n \geqslant n_1$;on prend ensuite $n_2 \geqslant n_1$ tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^2}$ pour $m, n \geqslant n_2, \cdots$etc). On va montrer que f_{n_k} converge dans $L^p(\Omega)$. Pour simplifier les notations on écrit f_k au lieu de f_{n_k}, de sorte que l'on a

$$\left\|f_{k+1} - f_k\right\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geqslant 1. \tag{1.4}$$

Posant

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

Il vient

$$\|g_n\|_{L^p} \leqslant 1.$$

On déduit du théorème de convergence monotone que p.p.sur Ω ,$g_n(x)$ converge vers une limite finie notée $g(x)$ avec $g \in L^p(\Omega)$. D'autre part, on a pour $m \geqslant n \geqslant 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant g(x) - g_{n-1}(x).$$

Il en résulte que p.p. sur Ω , $(f_n(x))$ est de Cauchy et converge vers une limite notée $f(x)$. On a

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant g(x), \text{ p.p.sur } \Omega \text{ pour } n \geqslant 2.$$

Il en résulte que $f \in L^p(\Omega)$. En fin

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0;$$

en effet on a

$$|f_n - f|^p \to 0 \text{ p.p.}$$

Et

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leqslant g^p(x).$$

Majorant intégrable. On conclut grâce au théorème de Lebesgue. ■

Théorème 1.2.7 *[3] Soient (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ pour n tend vers ∞ alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) telle que :*

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω.

b) $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$ $\forall k$ et p.p.sur Ω,avec $h \in L^p(\Omega)$.

1.2.3 La réflexivité dans les espaces de Lebesgue

Définition 1.2.3 *Soit $J : X \to X''$tel que $J(x) = f \longmapsto \langle f, x \rangle$ Un espace X est dit réflexif si J est bijective de X dans X''.*

Lemme 1.2.1 *(Milman-Pettis) Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Théorème 1.2.8 *$L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Démonstration. [3] La démonstration est décomposée en trois étapes.

Preuve. 1) Étape 1:(Inégalité de Clarkson) Soit $2 \leqslant p < \infty$;on a

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \text{ pour tout } f,\, g \in L^p(\Omega)\,. \tag{1.5}$$

Il suffit de montrer que $\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

On a

$$\alpha^p + \beta^p \leqslant \left(\alpha^2 + \beta^2\right)^{\frac{p}{2}} \quad \forall \alpha, \beta \geqslant 0.$$

Si $\beta = 1$ et la fonction $(x^2+1)^{\frac{p}{2}} - x^p - 1$ est croissante sur $[0, +\infty[$. On pose $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ et $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$ donc

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\,|a|^p + \frac{1}{2}\,|b|^p\,.$$

2) Étape 2:L^p est uniformément convexe, et donc réflexif pour $2 \leqslant p < \infty$. En effet, soit $\epsilon > 0$ fixé. On suppose que

$$\|f\|_{L^p} \leqslant 1,\ \|g\|_{L^p} \leqslant 1 \text{ et } \|f-g\|_{L^p} > \epsilon.$$

On déduit de (1.5) que:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \text{ et donc } \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} < 1 - \delta,$$

avec

$$\delta = \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0.$$

Par conséquent $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe, et donc d'après le théorème 1.2.8, $L^p(\Omega)$ est réflexif .

Lemme 1.2.2 *Soit X un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si X' est réflexif.*

Lemme 1.2.3 *Soit X un espace de Banach réflexif et soit $M \subset X$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors M est réflexif .*

3) Étape 3:L^pest réflexif pour $1 < p \leqslant 2$. Soit $1 < p \leqslant 2$. On considère l'opérateur $T : L^p(\Omega) \to (L^q(\Omega))'$défini comme suit :

Soit $u \in L^p(\Omega)$ fixé; l'application $f \in L^q(\Omega) \mapsto \int\limits_\Omega u(x) f(x)\, dx$ est une forme linéaire et continue sur $L^q(\Omega)$, notée Tu de sorte que$\langle Tu, f\rangle = \int\limits_\Omega u(x) f(x)\, dx$ pour tout $f \in L^q(\Omega)$. On a (d'après l'inégalité de Hölder)

$$|\langle Tu, f\rangle| \leqslant \|u\|_{L^p} \|f\|_{L^q}.$$

Et par suite

$$\|Tu\|_{(L^q)'} \leqslant \|u\|_{L^p}. \tag{1.6}$$

D'autre part, posons

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2} u(x) \quad (f_0(x) = 0 \text{ si } u(x) = 0).$$

On a

$$f_0 \in L^q, \| f_0\|_{L^q} = \|u\|_{L^p}^{p-1} \text{ et } \langle Tu, f_0\rangle = \|u\|_{L^p}^p,$$

donc

$$\|Tu\|_{(L^q)'} \geqslant \frac{\langle Tu, f_0\rangle}{\|f_0\|} = \|u\|_{L^p}, \tag{1.7}$$

de (1.6) et (1.7) on obtient $\|Tu\|_{(L^q)'} = \|u\|_{L^p}$ alors T est une isométrie de $L^p(\Omega)$ dans$(L^q(\Omega))'$. d'après étape 2 $L^q(\Omega)$ est réflexif et d'après le lemme 1.2.2. $(L^q(\Omega))'$ est réflexif. Et d'après le lemme 1.2.3 si $T(L^p(\Omega))$ est réflexif alors $L^p(\Omega)$. ■ ■

Remarque 1.2.1 *$L^p(\Omega)$ est uniformément convexe pour $1 < p \leqslant 2$.*

1.2.4 Dual dans les espaces de Lebesgue

Théorème 1.2.9 *(Représentation de Riesz) [3] Soit $1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Alors il existe $u \in L^q(\Omega)$ unique tel que*

$$\langle \varphi, f\rangle = \int\limits_\Omega u(x) f(x)\, dx \qquad \forall f \in L^p(\Omega).$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^q} = \|f\|_{(L^p)'}.$$

Remarque 1.2.2 *Obtenu grâce à ce résultat théorique est : $(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$.*

1.2.5 Séparable dans les espaces de Lebesgue

Théorème 1.2.10 *[3] L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.*

Théorème 1.2.11 *[3] $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.*

Démonstration. [3] On désigne par $(R_i)_{i\in I}$ la famille (dénombrable) des pavés R de la forme $R = \prod_{k=1}^{N}]a_k, b_k[$ avec $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ et $R \subset \Omega$. On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les fonctions 1_{R_i},de sorte que E dénombrable.Montrons que E est dense dans $L^p(\Omega)$. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et soit $\epsilon > 0$ fixés. Soit $f_1 \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\| < \epsilon$, Soit Ω' un ouvert borné tel que supp $f_1 \subset \Omega' \subset \Omega$ .Comme $f_1 \subset C_c(\Omega)$ on construit aisément une fonction $f_2 \in E$,telle que supp $f_2 \subset \Omega'$et que $|f_2(x) - f_1(x)| \leqslant \frac{1}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}}$ p.p. sur Ω'.

Il en résulte que $\|f_2 - f_1\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \epsilon$. et donc

$$\|f - f_2\|_{L^p} \leqslant 2\epsilon.$$

■

Théorème 1.2.12 *[3] Soit $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. Alors il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ unique tel que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x)\, dx \qquad \forall f \in L^1(\Omega).$$

On a de plus

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}.$$

Remarque 1.2.3 *Obtenu grâce à ce résultat théorique est :$(L^1)' = L^\infty$.*

Proposition 1.2.1 *[3] L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs.*

Proposition 1.2.2 *[3] L^∞ n'est pas séparable.*

Conclusion 1.2.1 *Le tableau suivant récapitule les principales propriétés des espaces L^p :*

Espace	*réflexif*	*Séparable*	*Espace dual*
L^p $1 < p < \infty$	*Oui*	*Oui*	L^q
L^1	*Non*	*Oui*	L^∞
L^∞	*Non*	*Non*	*contient strictement* L^1

Chapitre 2

Les espaces de Sobolev

Résumé. Dans ce chapitre, après avoir donné quelques rappels sur la théorie élémentaire des distributions, nous allons présenter un rappel sur les espaces de Sobolev ainsi que leurs propriétés. Ensuite, nous allons donner quelques notions sur le théorème de trace, la formule de Green, les inégalités de Korn et de Poincaré.

Continu :

2.1 Rappels sur les distributions

Définition 2.1.1 *(Fonctions test) [16] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $D(\Omega)$ ou $C_c^{\infty}(\Omega)$, l'espace vectoriel des fonctions de classe C^{∞} à support compact dans Ω.Un compact K de Ω étant donné, on note D_kl'espace des éléments de $D(\Omega)$, dont le support est inclus dans K, i.e.*

$$D_k(\Omega) = \{\varphi \in D(\Omega), \operatorname{supp} \varphi \subset K\}.$$

Définition 2.1.2 *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(\Omega)$, on dit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers $\varphi \in D(\Omega)$, et on note $\varphi_n \to \varphi$ dans $D(\Omega)$, si et seulement si :*

1. *$\exists K$ compact $\subset \Omega$ tel que $\forall \varphi_n \in D(\Omega) : \operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a $\partial^{\alpha}\varphi_n \to \partial^{\alpha}\varphi$ uniformément dans Ω i.e. :$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n > m$*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x_1,\cdots x_n)\in K} \|\partial^{\alpha}\varphi_n(x_1,\cdots,x_n) - \partial^{\alpha}\varphi(x_1,\cdots,x_n)\| = 0.$$

Tel que :

$$\partial^{\alpha}\varphi_n(x_1,\cdots,x_n) \overset{déf}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x_1,\cdots,x_n) \quad , |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Proposition 2.1.1 *$D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, i.e, pour tout $f \in L^2(\Omega)$,$\forall \epsilon > 0$ il existe $\varphi \in D(\Omega)$, $\|\varphi - f\|_{L^2} < \epsilon$.*

Exemple 2.1.1 *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, l'application :*

$$\begin{cases} T_f : D(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \varphi \longmapsto \displaystyle\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,dx, \end{cases}$$

définit une distribution sur Ω. L'application de $L^1_{loc}(\Omega) \to D'(\Omega)$ définie par $f \longmapsto T_f$ est injective. On dira par la suite qu'une distribution T est régulière s'il existe $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $T_f = T$.

Définition 2.1.3 *(masse de Dirac) Soit $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. L'évaluation $\varphi \longmapsto \varphi(a)$ définit bien une distribution, et noté par δ_a, i.e. $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ $\forall \varphi \in D(\Omega)$ est linéaire et continue.*

Définition 2.1.4 *Toute distribution de type T_f est une distribution régulière.*

Proposition 2.1.2 *δ_a n'est pas une distribution régulière.*

Définition 2.1.5 *(Distributions) [15] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle distribution une forme linéaire sur $D(\Omega)$, $T : D(\Omega) \to \mathbb{k}$ vérifiant la propriété caractéristique suivante : $\forall$ compact $K \subset \Omega$, il existe $C_k > 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$, pour tout $\varphi \in D_K(\Omega)$.*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C_k \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| .$$

On note $D'(\Omega)$ dual topologique de $D(\Omega)$ est l'espace de distribution.

Remarque 2.1.1 *$T \in D'(\Omega)$ si $T : D(\Omega) \to \mathbb{k}$ est linéaire et continue.*

Définition 2.1.6 *(Dérivation des distributions) Soit $T \in D'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. L'opérateur de dérivation d'ordre α est défini sur $D'(\Omega)$ de la manière suivante : $\partial^\alpha T$ est une distribution, définie par :*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \text{ pour tout } \varphi \in D(\Omega) .$$

Remarque 2.1.2 *Dans le cas $|\alpha| = 1$, cette formule devient donc :*

$$\langle T'_f \ , \varphi \rangle = -\langle T_f \ , \varphi' \rangle.$$

Théorème 2.1.1 *Une forme linéaire $T : D(\Omega) \to \mathbb{k}$ est une distribution sur Ω si et seulement si,$\forall (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\Omega)$ tendant vers 0 dans $D(\Omega)$, on a :*

$$\lim_{n \to \infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0.$$

Définition 2.1.7 *(Transformation de Fourier) [15] Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformation de Fourier de f la fonction, notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, définie par :*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix \cdot \xi) f(x)\, dx, \text{ pour tout } \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En notant $x \cdot \xi$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.8 *(Espace de Schwartz) On dit qu'une fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{k}$ *est dite à décroissance rapide si pour tout* $m \geqslant 0$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *on a :*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^m \, \partial^\alpha f = 0.$$

L'ensemble des fonctions à décroissance rapide est l'espace de Schwartz, noté $S(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.1.9 *(Distributions tempérées) Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur* $S(\mathbb{R}^n)$ *, c'est- à-dire une forme linéaire* T *sur* $S(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $\exists m \geqslant 0$, $C > 0$ *pour lesquels :*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|,|\beta|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| < \infty, \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \text{ et pour tout } \varphi \in D(\Omega).$$

On note par l'ensemble de distribution tempérée par $S'(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.1.2 *L'espace* $D(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $S(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. *Pour la démonstration de ce le théorème voir [15].* ■

Remarque 2.1.3

1. $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ *et* $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, *pour* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

2. $S'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.1.10 *(Convergence dans* $S'(\mathbb{R}^n)$*) [15] Soit* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite des éléments de* $S'(\mathbb{R}^n)$ *converge vers* T, *si on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Définition 2.1.11 *[15] Soit* $T \in S'(\mathbb{R}^n)$. *La transformée de Fourier de* T *est la distribution tempérée notée* $\hat{T}$ *ou* $\mathcal{F}T$ *définie par :*

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \text{ pour tout } \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

La conjugée $\overline{\mathcal{F}}$ *de* $\mathcal{F}$ *est définie par :*

$$\langle \overline{\mathcal{F}} T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}} \varphi \rangle, \text{ pour tout } \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

2.2 L'espace $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 2.2.1 *(Espaces de Sobolev) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, un entier $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1,+\infty]$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) \,|\, D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leqslant m \}.$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{si } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{si } p = \infty.$$

Preuve. de $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$

Soient $f, g \in W^{m,p}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{k}$, alors on a

i) $\|\lambda f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \lambda f\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} |\lambda| \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} = |\lambda| \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$. D'autre part,

ii) $\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$ alors $\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ donc $\|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} = 0$, et par conséquent

$$f = 0.$$

iii) $\|f+g\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha (f+g)\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f + D^\alpha g)\|_{L^p(\Omega)}$

$\leqslant \sum_{|\alpha|\leq m} \left(\|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha g\|_{L^p(\Omega)} \right)$, donc

$$\|f+g\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} + \|g\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

■

Remarque 2.2.1

1. *Si $m = 0$ alors $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.*

2. *Pour $p = 2$ l'espace $W^{m,p}(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ et on noté par $H^m(\Omega)$.*

Proposition 2.2.1 *Soit Ω un ouvert quelconque de. Alors le sous-espace $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Pour la preuve de ce proposition voire [6].

Lemme 2.2.1 *Soit X un espace métrique séparable et soit Y un sous-ensemble de X. Alors Y est séparable.*

Proposition 2.2.2 *[3]*

a) L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

b) L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

c) L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.

Preuve. *a) Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $W^{m,p}(\Omega)$. Pour tout multi-indice α avec $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, $(\partial^\alpha f_n)$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ donc converge vers f^α dans $L^p(\Omega)$. Soit $\varphi \in D(\Omega)$, on a :*

$$\int_\Omega \partial^\alpha f_n(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_n(x)\,\partial^\alpha \varphi(x)\,dx,$$

et par convergence dans L^p :

$$\int_\Omega f^\alpha(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f^0(x)\,\partial^\alpha \varphi(x)\,dx.$$

Donc $f^\alpha = \partial^\alpha f^0$ et (f_n) converge vers $f = f^0$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

b) $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$. En effet l'espace produit $E = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ est réflexif. L'opérateur $T : W^{m,p}(\Omega) \to E$ défini par $Tu = [u, u']$ est une isométrie de $W^{m,p}(\Omega)$ dans E ; donc $T(W^{m,p}(\Omega))$ est un sous-espace fermé de E. d'après le lemme(1.2.3) $T(W^{m,p}(\Omega))$ est réflexif et par suite $W^{m,p}(\Omega)$ aussi .

c) $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$. En effet l'espace produit $E = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ est séparable, d'après le lemme(2.2.1) $T(W^{m,p}(\Omega))$est séparable. Par conséquent $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable ■

Définition 2.2.2 *[6] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné ou non. On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ au sens de la norme $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.*

Remarque 2.2.2 *Pour $p = 2$ on remplacer $W_0^{m,p}(\Omega)$ par H_0^m .*

Proposition 2.2.3 *L'espace $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, donc:*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. *Soit $\zeta \in C(\mathbb{R}_+)$ telle que $0 \leqslant \zeta(t) \leqslant 1$:*

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & si \quad t \geqslant 2. \end{cases}$$

Soit $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Nous mettons $u_n(x) = u(x)\,\zeta\left(\frac{|x|}{n}\right)$, donc :

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & si \quad |x| \leqslant n \\ 0 & si \quad |x| \geqslant 2n. \end{cases}$$

On notera que les dérivés $\partial_x^\beta \zeta\left(\frac{|x|}{n}\right)$ sont uniformément bornée par rapport à $R \geqslant 1$. d'après le dérivée $u_n(x)$, et nous obtenons l'inégalité :

$$|\partial^\alpha u_n(x)| \leqslant c \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \left|\partial^\beta u(x)\right|, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors pour $|\alpha| \leqslant m$ on a :

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha u_n - \partial u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u_n(x) - \partial^\alpha u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{|x| \leq n} |\partial^\alpha u_n(x) - \partial^\alpha u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{|x| > n} |\partial^\alpha u_n(x) - \partial^\alpha u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 0 + \left(\int_{|x| > n} |\partial^\alpha u_n(x) - \partial^\alpha u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \left(\int_{|x| > n} \left|\partial^\beta u(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\to 0 \text{ quand } n \to \infty. \end{aligned}$$

Cette expression tend vers zéro lorsque quand $n \to \infty$, puisque $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, et donc, $\left|\partial^\beta u\right|^p \in L^1$. Ainsi, $u_n \to u$ quand $n \to \infty$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Maintenant, nous considérons une sous suite u_n^ρ de u_n. Alors $u_n^\rho \in D(\Omega)$ et $u_n^\rho \to u_n$ quand $\rho \to 0$ en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Il se ensuit que $D(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. En effet, soit $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\epsilon > 0$. Nous trouvons n si grand que $\|u_n - u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Ensuite, nous trouvons ρ si petit que $\|u_n^\rho - u_n\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Alors $\|u_n^\rho - u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$. ■

2.2.1 Injections de Sobolev

Définition 2.2.3 *[6] Soit $j \geqslant 0$, on définit la famille des espaces $C_b^j(\mathbb{R}^n)$ par :*

$$C_b^j(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^j(\mathbb{R}^n) \, | \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant j, \exists K_\alpha, \ \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leqslant K_\alpha \right\}.$$

Leurs sous-espaces $C_b^{j,\lambda}(\mathbb{R}^n)$,où $\lambda > 0$ sont constitués des fonctions $C_b^j(\mathbb{R}^n)$ telle que, si $|\alpha| \leqslant j$ alors :

$$\exists C_{\alpha,\lambda}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leqslant C_{\alpha,\lambda} |x-y|^\lambda.$$

Définition 2.2.4 *Soient X et Y deux espaces vectorielles normées. On dit que X s'injecte continûment dans Y s'il existe une injection continue i de X dans Y, c'est-à-dire une injection i et une constante $c > 0$, telle que : $\forall x \in X$, $\|i(x)\|_Y \leqslant \|x\|_X$. On note alors :*

$$X \hookrightarrow Y.$$

Définition 2.2.5 *On désigne l'injection de manière compacte de X dans Y par $X \hookrightarrow_c Y$.*

Théorème 2.2.1 *(Injection de Sobolev) [6] On suppose $p \geqslant 1$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors :*

1. *Si $n > mp$, pour tout q tel que $p \leqslant q \leqslant np \,/\, (n - mp)$, on a la propriété :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n),$$

c'est-à-dire, il existe une constante c telle que :

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}, \text{ pour tout } \varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

2. *Pour $p = 1$, on a :*

$$W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^n).$$

3. *Si $n = mp$ et $p > 1$, alors pour tout q tel que $p \leqslant q \leqslant \infty$, on a la propriété :*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

4. *Si $p > n$, alors :*

$$0 < \lambda \leqslant 1 - n \,/\, p \implies W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{0,\lambda}(\mathbb{R}^n).$$

5. *Si* $mp > n$ *lorsque* $n \,/\, p \notin \mathbb{N}$ *et soit* j *tel que* $(j-1)\,p < n < jp$ *alors :*

$$0 < \lambda \leqslant j - n/p \implies W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Si $n \,/\, p \in \mathbb{N}$ *et* $m \geqslant j = n \,/\, p + 1$ *alors*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{m-n/p-1,\lambda}(\mathbb{R}^n) \ \textit{pour tout}\ \lambda < 1.$$

2.2.2 Traces

On notera

$$\mathbb{R}^n_+ = \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ;\ x_n > 0\right\}.$$

Théorème 2.2.2 *Soient* $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ *ou* $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ *un ouvert borné de classe* C^1*, et soit* $1 \leqslant p < \infty$*. Il existe un opérateur linéaire borné* $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ *tel que :*

$$Tu = u/\partial\Omega \quad si \quad u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right).$$

La fonction Tu *s'appelle la trace de* u *sur* $\partial\Omega$ *et se note tr* u*.*

Théorème 2.2.3 *Soit* Ω *un ouvert de classe* C^1*, alors il existe un opérateur linéaire continu, appelé opérateur trace et noté* γ_0 *de* $W^{1,p}(\Omega)$ *dans* $L^p(\partial\Omega)$ *qui coïncide avec l'opérateur de restriction usuel pour les fonctions continues. Son noyau est*

$$\ker(\gamma_0) = H^1_0(\Omega)\,.$$

Définition 2.2.6 *Soit* Ω *un ouvert de classe* C^m*, avec* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* γ_0 *l'opérateur d'écrit dans le théorème précédent. On définit alors, par analogie avec le cas* $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ *:*

$$\gamma_0\left(W^{m,p}(\Omega)\right) = W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega\ )\,,$$

que l'on munit de la norme:

$$\|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega\ )} = \inf_{v \in \gamma_0^{-1}(\{u\})} \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}\,.$$

Remarque 2.2.3

1. $\gamma_0 \left(H^1(\Omega)\right) = H^{1-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

2. *On définit l'opérateur* $\gamma_j : H^m(\Omega) \to H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ *se prolonger le théorème de trace. Si* $m, j = 1$ *alors* $\gamma_1 : H^1(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Lemme 2.2.2 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1, $p \in [1, +\infty[$. *Si* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *il existe une suite de fonctions* $(u_j)_{j\geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $u_j \to u$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. On ne fera cette preuve que dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, le cas Ω borné s'en déduisant par une partition de l'unité. D'après le lemme (2.2.2), il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que : pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)|^p \, dx_1 \cdots dx_{n-1} \leqslant C \|u\|^p_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}.$$

On pose pour cela $G(t) = |t|^{p-1} t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} G(u(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)) &= -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial (G \circ u)}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)\, dx_n \\ &= -\int\limits_0^{+\infty} G'(u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n)\, dx_n, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} |G(u(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0))| &\leqslant p \int\limits_0^{+\infty} |u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)|^{p-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \right| dx_n \\ &\leqslant C \left(\int\limits_0^{+\infty} |u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)|^p \, dx_n + \int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \right|^p dx_n \right). \end{aligned}$$

On obtient la conclusion voulue en intégrant en $x_1, \cdots, x_{n-1}$. ■

Théorème 2.2.4 *On suppose* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert borné de classe* C^1. *Alors, pour tout* $1 \leqslant p < +\infty$ *et pour toute* $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow tr\ u = 0 \ sur\ \partial\Omega.$$

Preuve. *On suppose d'abord que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *Par définition, il existe une suite* $(u_j)_{j\geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *qui converge vers* u *dans* $W^{1,p}(\Omega)$. *Par continuité de la trace, tr* $u_j \to$ *tr*

u dans $L^p(\partial\Omega)$, et comme tr $u_j = 0$ pour tout j, on obtient bien que tr $u = 0$. Pour la réciproque, en utilisant des partitions de l'unité et des troncatures, on voitqu'il suffit de montrer que,si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ est à support compact dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ et est de trace nulle, alors $u \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n_+)$. Par le lemme 2.2.2 il existe une suite $(u_j)_{j\geq 1} \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$,et on a donc tr $u_j \to$ tr $u = 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. Si $y = (x_1, \cdots, x_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, $dy = dx_1 \cdots dx_{n-1}$ et $x_n \geqslant 0$, on a pour tout j

$$|u_j(y, x_n)| \leqslant |u_j(y, 0)| + \int_0^{x_n} \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_n}(y, t)\right| dt.$$

On en déduit que, pour tout $x_n \geqslant 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_j(y, x_n)|^p dy \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_j(y, 0)|^p dy + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u_j(y, t)|^p dydt\right). \tag{2.1}$$

Faisant tendre j vers $+\infty$, on obtient donc, pour presque tout $x_n > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_j(y, x_n)|^p dy \leqslant Cx_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u_j(y, t)|^p dydt).$$

On fixe maintenant une fonction $\zeta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ à support dans $[0, 2]$, valant 1 sur $[0, 1]$ et compris entre 0 et 1. Pour tous $j \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}^n_+$, soit $\zeta_j(x) = \zeta(jx_n)$ et $\omega_j(x) = u(x)\left(1 - \zeta_j(x)\right)$. On a donc :

$$\frac{\partial\ \omega_j}{\partial x_n}(x) = \frac{\partial\ u}{\partial x_n}(x)\left(1 - \zeta_j(x)\right) - ju(x)\zeta'(jx_n)$$

et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n - 1$,

$$\frac{\partial\ \omega_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial\ u}{\partial x_n}(x)\left(1 - \zeta_j(x)\right).$$

Il vient que :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla\omega_j(x) - \nabla u(x)|^p dx &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n_+} \left|\zeta_j(x)\right|^p |\nabla u(x)|^p + Cj^p \int_0^{\frac{2}{j}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(y, t)|^p dydt \\ &= A_j + B_j.\end{aligned}$$

Il est clair que $A_j \to 0$ en raison du support de ζ_j. Quant à B_j, on écrit, en utilisant (2.1)

$$\begin{aligned} B_j &\leqslant Cj^p \int_0^{\frac{2}{j}} t^{p-1} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u|^p \, dx \right) dt \\ &\leqslant Cj^p \int_0^{\frac{2}{j}} t^{p-1} dt \int_0^{\frac{2}{j}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u|^p \, dx \\ &\leqslant C \int_0^{\frac{2}{j}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u|^p \, dx \to 0. \end{aligned}$$

On a donc prouvé que $\nabla \omega_j \to \nabla u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n_+)$. Comme on a aussi $\omega_j \to u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n_+)$, il vient que $\omega_j \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. De plus, $\omega_j(x_1, \cdots, x_n)$ est nulle si $0 < x_n < \frac{1}{j}$, de sorte qu'on peut, en régularisant ω_j, obtenir une suite de fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Ainsi, $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, ce qui termine la preuve. ■

2.2.3 Formule de Green

Théorème 2.2.5 *(Formule d'Ostrogradsky) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et Γ son bord. Soit F une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors :*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F(x))\, dx = \int_\Gamma F(x) \cdot \eta(x) d\Gamma.$$

Remarque 2.2.4 *Dans cette formule, $\eta(x)$ est le vecteur unitaire normal à Γ au point x, dirigé vers l'extérieur de Ω.*

Preuve. *Pour la démonstration de ce théorème voir [10].* ■

Théorème 2.2.6 *(Formule de Green) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1.Alors pour toutes fonctions $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et soit $v \in C^1(\overline{\Omega})$ on a :*

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, v(x)\, d\Gamma - \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx,$$

où $\partial u \,/\, \partial \eta(x) = \nabla u(x) \cdot \eta(x)$.

Démonstration. *Il suffit d'appliquer le théorème 2.2.5 avec* $F(x) = v(x)\nabla u(x)$, *alors*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div}(F(x))\,dx &= \int_\Omega \operatorname{div}(v(x)\nabla u(x))\,dx \\ &= \int_\Omega (\Delta u(x)\,v(x) + \nabla u(x)\cdot\nabla v(x))dx \\ &= \int_\Omega \Delta u(x)\,v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx \\ &= \int_\Gamma v(x)\,\nabla u(x)\cdot\eta(x)\,d\Gamma,\end{aligned}$$

alors :

$$\int_\Omega \Delta u(x)\,v(x)\,dx = \int_\Gamma v(x)\,\frac{\partial u}{\partial\eta}(x)d\Gamma - \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx.$$

■

2.2.4 Inégalité de Korn

Théorème 2.2.7 *(Inégalité de Korn dans* $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$*) Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$. *Soit l'espace :*

$$E = \{u \in L^p(\Omega)\,|\forall (i,j) \in [1,n]\,, \epsilon_{ij}(u) = (\partial_j u_i + \partial_i u_j)\ /\ 2 \in L^p(\Omega)\}\,.$$

Si $u \in E$, *alors* $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. *Si de plus* Ω *est borné et de classe* C^2, *l'espace* E *s'identifie à* $W^{1,p}(\Omega)$. *Plus précisément, il existe une constante* C *telle que tout* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *satisfait à:*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega} + \int_\Omega |\epsilon(u)(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. *Soit* $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times]0,\infty[$. *Il s'agit de prolonger la fonction vectorielle* u, *élément de* $E(\mathbb{R}^{n-1} \times]0,\infty[)$ *à support compact dans* $\mathbb{R}^{n-1} \times]0,\infty[$ *en une fonction vectorielle* $\widetilde{u} \in E(\mathbb{R}^n)$. *À cet effet, pour* $x_n < 0$ *et* $i \in [1, n-1]$, *on pose :*

$$u_i(x', x_n) = 2u_i(x', -x_n) - u_i(x', -3x_n)\,,$$

et, pour $x_n < 0$ *et* $i = n$ *:*

$$u_n(x', x_n) = -2u_n(x', -x_n) + 3u_n(x', -3x_n)\,.$$

On obtient ainsi une fonction $\widetilde{u}$ définie sur $\mathbb{R}^n$, dont le support est compact et il est facile de vérifier que $\widetilde{u} \in E(\mathbb{R}^n)$. En effet, pour $x_n < 0$ et $i, j \in [1, n-1]$, on a :

$$2\partial_j u_i(x', x_n) = 2\partial_j u_i(x', -x_n) - \partial_j u_i(x', -3x_n),$$

d'où :

$$2\epsilon_{ij}(u)(x', x_n) = 2\epsilon_{ij}(u)(x', -x_n) - \epsilon_{ij}(x', -3x_n).$$

D'autre part, si l'un des indices est égal à n

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{in}(u)(x', x_n) &= -2\partial_n u_i(x', -x_n) + 3\partial_n u_i(x', -3x_n) - 2\partial_i u_n(x', -x_n) + 3\partial_i u_n(x', -3x_n) \\ &= -4\epsilon_{in}(u)(x', x_n) + 6\epsilon_{in}(u)(x', -3x_n), \end{aligned}$$

et :

$$\epsilon_{nn}(u)(x', x_n) = 2\partial_n u_n(x', -x_n) - 9\partial_n u_n(x', -3x_n).$$

On voit donc que la fonction $\widetilde{u} \in E(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et en revenant à u, on a $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$. ■

2.2.5 Inégalités de Poincaré

Théorème 2.2.8 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $1 \leqslant p < +\infty$. Il existe $C > 0$ tel que, pour toute $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \geq 1} \in C_c^\infty(\Omega)$ une suite qui converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note $\widetilde{u_n}$ l'extension de u_n par 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Si $1 \leqslant p < n$, on a pour tout $n \geqslant 1$,

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = \|\widetilde{u_n}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|\widetilde{u_n}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)},$$

et il suffit de faire tendre n vers $+\infty$. ■

Chapitre 3

Existence et unicité d'une solution faible pour un problème aux limites gouverné par les équations de Lamé

Résumé : Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème aux limites mixtes (**Dirichlet-Neumann**) pour les équations de l'élasticité. Sous certaines hypothèses sur les données, le théorème de Lax-Milgram nous permet de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle.

Continu :

3.1 Position du Problème et Hypothèses

3.1.1 Position du Problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière $\Gamma = \partial\Omega$. Soit $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ une partition de Γ, i.e :

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing, \quad \text{tel que } \mu(\Gamma_1) > 0. \end{cases}$$

Le problème considéré dans ce chapitre est consacré à la recherche d'une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant au problème (P) suivant :

$$(P) : \begin{cases} -\operatorname{div}\sigma(u) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ \sigma(u)\eta = g & \text{sur} \quad \Gamma_2, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\sigma(u) = (\sigma_{i,j}(u))_{i,j=1,\dots,n}$ est le tenseur des contraintes donnée au moyen des coefficients de Lamé par la loi de Hook suivante :

$$\sigma_{i,j}(u) = 2\mu\epsilon_{i,j}(u) + \lambda tr(\epsilon(u))\delta_{i,j},$$

avec $\epsilon_{i,j}(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^t\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ s'appelle le tenseur des déformations linéairisé et :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

est le symbole de Kronecker.

$$\operatorname{div}\sigma(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}.$$

Remarque 3.1.1 *Le problème (P) peut être s'écrit sous la forme:*

$$(P) : \begin{cases} -Lu = f & dans \quad \Omega \\ u = 0 & sur \quad \Gamma_1 \\ \sigma(u)\eta = g & sur \quad \Gamma_2, \end{cases}$$

où L s'appelle l'opérateur de Lamé donné par :

$$Lu = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u.$$

Où μ et λ sont les coefficients de Lamé, $\lambda > 0$ et $\lambda + \mu > 0$.

On est maintenant en mesure de formuler d'une façon précise le problème (P), pour l'étudier, on aura besoin des hypothèses suivantes:

3.1.2 Hypothèses

$$f \in L^2(\Omega) \tag{H.1}$$

$$g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{H.2}$$

3.2 Formulation variationnelle

Sous les hypothèses $(H.1) - (H.2)$, le problème (P) est équivalent au problème variationnel, noté $(P.V)$, suivant :

$$(P.V) = \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \quad \text{tel que vérifiant :} \\ a(u, v) = L(v), \text{ pour tout } v \in V. \end{cases}$$

Où :

$$a(u, v) = \int_\Omega \sigma(u)\, \epsilon(u)\, dx,$$

$$L(v) = \int_\Omega f v dx + \langle g, v \rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}, \text{ pour tout } v \in V.$$

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}.$$

Proposition 3.2.1 *V muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.*

Preuve. 1. ($\Longrightarrow$) Soit u une solution du problème (3.1), on a :

$$-\operatorname{div}\sigma(u) = f \ . \tag{3.2}$$

En multipliant (3.2) par un élément $v \in H^1(\Omega)$ et intégrant sur Ω, on trouve :

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}\sigma(u)\, v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

ou sous la forme

$$-\sum_{i,j=1} \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i dx = \int_{\Omega} f v dx \ , \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega).$$

Par la formule de Green il résulte :

$$\sum_{i,j=1} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{i,j=1} \int_{\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2} \sigma_{ij}(u)\, \eta_j v_i d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx \ , \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega).$$

$$\int_{\Omega} \sigma(u)\, \epsilon(v)\, dx - \sum_{i,j=1} \int_{\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2} \sigma_{ij}(u)\, \eta_j v_i = \int_{\Omega} f v dx \ , \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega).$$

Si on pose $v = 0$ sur Γ_1 alors :

$$\int_{\Omega} \sigma(u)\, \epsilon(v)\, dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} (\sigma(u)\, \eta) v d\Gamma, \text{ pour tout } v \in V \ ,$$

donc :

$$\int_{\Omega} \sigma(u)\, \epsilon(v)\, dx = \int_{\Omega} f v dx + \langle g, v \rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}, \text{ pour tout } v \in V,$$

d'où u vérifie $a(u,v) = L(v)$, $\forall v \in V$, où

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \sigma(u)\, \epsilon(v)\, dx,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx + \langle g, v \rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}.$$

2. ($\Longleftarrow$) Soit $u \in V$ une solution de (PV), alors

$$a(u,v) = L(v), \text{ pour tout } v \in V.$$

Ceci est équivalent à

$$\int_{\Omega} \sigma(u)\,\epsilon(v)\,dx = \int_{\Omega} fvdx + \langle g, v\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}, \text{ pour tout } v \in V.$$

En utilisant la formule de Green :

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}\sigma(u)\,vdx + \int_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} \sigma(u)\,\eta v = \int_{\Omega} fvdx + \langle g, v\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}, \quad \forall\, v \in V. \tag{3.3}$$

En utilisant la densité de $D(\Omega)$ dans V, il vient

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}\sigma(u)\,.vdx = \int_{\Omega} fvdx, \text{ pour tout } v \in D(\Omega).$$

Ce qu'implique

$$-\operatorname{div}\sigma(u) = f \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{3.4}$$

Vérification des condition aux limite :

On a $u = 0$ sur Γ_1, car $u \in V$.

D'autre part, en utilisant (3.3) de (3.4) on tire

$$\int_{\Gamma_2} \sigma(u)\,\eta v = \langle g, v\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}, \text{ pour tout } v \in V.$$

alors :

$$\sigma(u)\,\eta = g \text{ sur } \Gamma_2.$$

■

3.3 Existence et unicité

3.3.1 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram apporte une réponse à l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution dans un cadre précis. Soient $a(.,.)$ une forme bilinéaire et L une forme linéaire.

Théorème 3.3.1 *Soit V un espace de Hilbert. On suppose que les formes $a(.,.)$ et L vérifient les hypothèses suivantes :*

1. *Continuité de L :$|L(v)| \leqslant C_L \|v\|_V$, pour tout $v \in V$.*
2. *Continuité de a : $|a(u,v)| \leqslant C_a \|u\|_V \|v\|_V$ pour tout $u, v \in V$.*
3. *Coercivité de a : $a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2$ pour tout $u \in V$, avec $\alpha > 0$.*

Alors il existe un élément unique u tel que :

$$a(u,v) = L(v), \text{ pour tout } v \in V.$$

De plus u vérifie l'estimation a-priori

$$\|u\|_V \leqslant \frac{\|L\|_{V'}}{\alpha},$$

avec

$$\|L\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V = 1} |L(v)|.$$

La norme de L dans le dual V' de V.

Preuve. L'estimation à postériori s'établit en prenant $v = u$ dans $a(u,v) = L(v)$ puis en appliquant la continuité de L et la coercivité de a ce qui donne :

$$\alpha \|u\|_V^2 \leqslant C_L \|u\|_V.$$

Il suffit alors de prendre $C_L = \|L\|_{V'}$. Cette estimation nous donne aussi l'unicité de la solution.

Pour l'existence, considérons d'abord le cas simple où a est une forme symétrique. Dans ce cas, la continuité et la coercivité de a montrent qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $V \times V$ et que la norme $\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_V$.

Puisque L est continue, elle l'est aussi par rapport à $\|\cdot\|_a$ et le théorème de représentation de Riesz nous assure donc l'existence d'un unique $u \in V$ tel que

$$L(v) = a(u,v), \text{ pour tout } v \in V.$$

Dans le cas non-symétrique, on remarque que puisque $v \longmapsto a(u,v)$ et $v \longmapsto L(v)$ sont continues, on peut écrire

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \langle Au, v\rangle, \\ L(v) &= \langle f, v\rangle, \end{aligned}$$

où A est un opérateur continu sur V, $f \in V$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire dans V.

L'´equation $a(u,v) = L(v)$ s'´ecrit donc $Au = f$ dans V. L'hypothèse de coercivité nous permet d'affirmer que :

$$\alpha \|v\|_V \leqslant \|Av\|_V, \text{ pour tout } v \in V,$$

ce qui entraine que $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace fermé de V qui se décompose donc suivant $V = \mathrm{Im}(A) \oplus (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$.

Considérons à présent $w \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$. La coercivité nous montre que

$$\alpha \|w\|_V^2 \leqslant a(w,w) = (Aw, w) = 0.$$

Par conséquent $\mathrm{Im}(A) = V$ ce qui prouve l'existence de la solution u. ■

3.3.2 Existence et unicité

1. **Bilinéarité de a :**

Soient u_1, u_2, v_1, $v_2 \in V$ et soit α, $\beta \in \Bbbk$, en utilisant le fait que σ et ϵ sont linéaires on obtient

$$\begin{aligned} a(\alpha u_1 + \beta u_2, v_1) &= \int_\Omega \sigma(\alpha u_1 + \beta u_2)\, \epsilon(v_1)\, dx \\ &= \int_\Omega (\alpha\sigma(u_1) + \beta\sigma(u_2))\epsilon(v_1)\, dx \\ &= \alpha \int_\Omega \sigma(u_1)\, \epsilon(v_1)\, dx + \beta \int_\Omega \sigma(u_2)\, \epsilon(v_1)\, dx \\ &= \alpha a(u_1, v_1) + \beta a(u_2, v_1). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} a\left(u_1, \alpha v_1 + \beta v_2\right) &= \int\limits_{\Omega} \sigma\left(u_1\right) \epsilon\left(\alpha v_1 + \beta v_2\right) dx \\ &= \int\limits_{\Omega} \sigma\left(u_1\right) \left(\alpha \epsilon\left(u_1\right) + \beta \epsilon\left(u_2\right)\right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha \int\limits_{\Omega} \sigma\left(u_1\right) \epsilon\left(v_1\right) dx + \beta \int\limits_{\Omega} \sigma\left(u_1\right) \epsilon\left(v_2\right) dx \\ &= \alpha a\left(u_1, v_1\right) + \beta a\left(u_1, v_2\right). \end{aligned}$$

2. **Continuité de** a :

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int\limits_{\Omega} \sigma\left(u\right) \epsilon\left(v\right) dx \\ &= \sum_{i,j=1} \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}\left(u\right) \epsilon_{ij}\left(v\right) dx \\ &= \sum_{i,j=1} \int\limits_{\Omega} (2\mu \epsilon_{ij}\left(u\right) + \lambda tr\left(\epsilon\left(u\right)\right) \delta_{i,j}) \epsilon_{ij}\left(v\right) dx \end{aligned}$$

$$= 2\mu \sum_{i,j=1} \int\limits_{\Omega} \epsilon_{ij}\left(u\right) \epsilon_{ij}\left(v\right) dx + \lambda \sum_{i,j=1} \int\limits_{\Omega} tr\left(\epsilon\left(u\right)\right) \delta_{i,j} \epsilon_{ij}\left(v\right) dx = I_1 + I_2.$$

Nous commençons par

$$|I_1| = \left| \sum_{i,j=1} \int\limits_{\Omega} \epsilon_{ij}\left(u\right) \epsilon_{ij}\left(v\right) dx \right|$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1} \int\limits_{\Omega} \left|\epsilon_{ij}\left(u\right)\right| \left|\epsilon_{ij}\left(v\right)\right| dx$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \sum_{i,j=1} \int\limits_{\Omega} \left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right| \right) \left(\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right| \right) dx$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \sum_{i,j=1} \int\limits_{\Omega} \left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right| \right) dx$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \sum_{i,j=1} \left(4 \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

$$= \sum_{i,j=1} \left(\left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \leqslant n^2 \left\| u \right\|_V \left\| v \right\|_V ,$$

et

$$|I_2| = \left| \sum_{k=1} \int_{\Omega} \epsilon_{kk} (u) \, \epsilon_{kk} (v) \, dx \right| \leqslant \sum_{k,k=1} \int_{\Omega} \left| \epsilon_{kk} (u) \right| \left| \epsilon_{kk} (v) \right| dx \leqslant n^2 \left\| u \right\|_V \left\| v \right\|_V .$$

donc

$$|a(u,v)| \leqslant \left(2\mu n^2 + \lambda n^2 \right) \left\| u \right\|_V \left\| v \right\|_V = C \left\| u \right\|_V \left\| v \right\|_V .$$

3. **Coercivité de** a :

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_{\Omega} \sigma (u) \, \epsilon (u) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} (u) \, \epsilon_{ij} (u) \, dx \\ &= \int_{\Omega} 2\mu \epsilon_{ij} (u) \, \epsilon_{ij} (u) \, dx + \lambda \int_{\Omega} \epsilon_{kk} (u) \, \epsilon_{kk} (u) \, dx \\ &\geqslant 2\mu \int_{\Omega} \epsilon_{ij} (u) \, \epsilon_{ij} (u) \, dx = 2\mu \int_{\Omega} \left| \epsilon_{ij} (u) \right|^2 dx, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de korn

$$a(u,u) \geqslant 2\mu\alpha \left\| u \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \geqslant 2\mu\alpha \left\| u \right\|_V^2 .$$

4. **Linéaire de** L :

Soit $f \in L^2 (\Omega)$, $g \in H^{-\frac{1}{2}} (\Gamma)$, u, $v \in V$ et soit α, $\beta \in \Bbbk$.

$$\begin{aligned} L(\alpha u+\beta v) &= \int_\Omega f(\alpha u+\beta v)\,dx + \langle g, \alpha u+\beta v\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \\ &= \alpha\int_\Omega fudx + \beta\int_\Omega fvdx + \alpha\langle g,u\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}\ \beta\langle g,v\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \\ &= \alpha\left(\int_\Omega fudx + \langle g,u\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}\right) + \beta\left(\int_\Omega fvdx + \langle g,v\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}\right), \end{aligned}$$

alors

$$L(\alpha u+\beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v).$$

5. **Continuité de** L :

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Showarz et celle Young il vient

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left|\int_\Omega fvdx + \langle g,v\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}\right| \\ &\leqslant \int_\Omega |fv|\,dx + \left|\langle g,v\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}\right| \\ &\leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)}\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} = c_1\|v\|_{L^2(\Omega)} + c_2\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}, \end{aligned}$$

alors

$$|L(v)| \leqslant C\|v\|_V.$$

En fine d'après le théorème de Lax-Milgram ,le problème $a(u,v) = L(v)$ et par conséquent le problème (3.1) admet une solution unique $u \in V$.

3.4 Autre formulation

Théorème 3.4.1 *Si $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique, c'est -à-dire pour tout $u, v \in V$: $a(u,v) = a(v,u)$. Alors le problème $a(u,v) = L(v)$ est équivalent au problème de minisation sous* *contraintes, suivant :*

$$\begin{cases} \min \ J(u) \\ \quad u \in V \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \quad \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ J(u) \leqslant J(v)\,, \text{ pour tout } v \in V. \end{cases}$$

Où J est la fonctionnelle d'énergie définie par

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u)\,.$$

Preuve. Symétrique de a : On a

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma_{i,j}(u)\,\epsilon_{i,j}(v)\,dx,$$

Donc

$$\int_\Omega \left(2\mu\epsilon_{i,j}(u) + \lambda tr(\epsilon(u))\,\delta_{i,j}\right)\epsilon_{i,j}(v)\,dx,$$

ce qu'équivalent

$$\int_\Omega \left(2\mu\epsilon_{i,j}(u)\,\epsilon_{i,j}(v) + \lambda\epsilon_{k,k}(u)\,\epsilon_{k,k}(v)\right)dx,$$

ce qu'équivalent

$$\int_\Omega \left(2\mu\epsilon_{i,j}(v)\,\epsilon_{i,j}(u) + \lambda\epsilon_{k,k}(v)\,\epsilon_{k,k}(u)\right)dx,$$

et par conséquent

$$\int_\Omega \left(2\mu\epsilon_{i,j}(v) + \lambda tr(\epsilon(v))\,\delta_{i,j}\right)\epsilon_{i,j}(u)\,dx = \int_\Omega \sigma_{i,j}(v)\,\epsilon_{i,j}(u)\,dx,$$

alors

$$a(u,v) = a(v,u)$$

1) ($\Longrightarrow$) : Soit u une solution de (PV), alors on a

$$a(u,v) = L(v), \text{ pour tout } v \in V.$$

On doit montrer que $J(u) \leqslant J(v)$ pour tout $v \in V$.

On a
$$J(v)-J(u)=\frac{1}{2}a(v,v)-L(v)-\frac{1}{2}a(u,u)+L(u).$$
En utilisant la symétrie de $a(.,.)$ et le fait que $a(u,u)=L(u)$ et $a(u,v)=L(v)$ il en résulte que
$$J(v)-J(u)=\frac{1}{2}a(v-u,v-u).$$
En utilisant la coercivité de a pour déduire que
$$J(v)-J(u)>0,$$
2) ($\Longleftarrow$) On suppose que u est une solution du problème
$$\begin{cases} \min \ J(u) \\ u\in V, \end{cases}$$
et on montrer que
$$a(u,v)=L(v) \text{ pour tout } v\in V.$$
Comme a est coércive et continue on a forcément
$$\nabla J(u)\,v=\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(v)}{t}=0 \text{ pour tout } v\in V.$$
Développant cette expression pour obtenir
$$\lim_{t\to 0}\frac{ta(u,v)+\frac{1}{2}t^2a(v,v)-tL(v)}{t}=0.$$
Alors
$$\frac{J(u+tv)-J(v)}{t}=\frac{t\left(a(u,v)-L(v)+\frac{1}{2}ta(v,v)\right)}{t}.$$
Par passage à la limite on déduit
$$a(u,v)-L(v)=0.$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons considéré un problème aux limites pour les équation de Lamé qui décrivent le comportement des corps élastiques. Les conditions aux bords qu'on a considéré ici sont celles de Dirchlet sur une partie de la frontière et celles de Neumann sur l'autre partie. Sous certaine hypothèses sur les données (densité des forces volumiques et densité des forces surfaciques) nous avons montré que le problème considéré est, formellement, équivalent à un problème variationnel. Nous avons utilisé le théorème de Lax-Milgram et l'inégalité de Korn pour montrer que notre problème possède une solution variationnelle unique.

Bibliographie

[1] R.A.ADAMS, J.J.F.FOURNIER. Sobolev spaces, volume 140 of Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.

[2] B. BENABDERRAHMANE, Forrmulation variationnelle des EDP elliptique, Cours de première année Master, option Analyse Fonctionnelle, Département de mathématiques, Faculté MI, Université M.B. de M'Sila, 2013-2014.

[3] H. BREZIS, Analyse Fonctionnelle –Théorie et Applications, Masson, Paris 1987.

[4] A. COHEN, Approximations variationnelles des EDP, Notes du cours de M2, http://www.ann.jussieu.fr/cohen/CohenM2.pdf.

[5] M. DILMI, Analyse fonctional, Cours de première année Master, option Analyse Fonctionnelle, Département de mathématiques, Faculté MI, Université M.B. de M'Sila, 2013-2014.

[6] F. DEMENGEL ET G. DEMENGEL, Espaces fonctionnels , utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles. **EDP** sciences et **CNRS** Éditions, 2007.

[7] M. DILMI, H. BENSERIDI, B. MEROUANI, Nonlinear and oblique boundary value problems for the Lamé equations. Applied Mathematical sciences, 51(2007) : 2517-2528.

[8] R. JONATHAN, Les espaces de Sobolev, Ecole de Ploytechnique Fédérale de Lausane, SMA, 16 décembre 2009.

[9] P. MOIREAU, S.FLISS, Cours de DEA Analyse Numérique, Sept 2003 - Avr 2004.

[10] A. MUNNIER, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Institut Elie Cartan, université Henri Poincaré, 2007-2008.

[11] S. NICAISE, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris, 2000.

[12] E. RUSS, Espaces de Sobolev, applications aux équations aux dérivées partielles, http://sda.univ-tlemcen.dz/fichiers/Espaces-Sobolev-EDP_2.pdf.

[13] T. SOUMIA, Technique de Faedo-Galerkin pour un problème hyperbolique semi linéaire associé à un opérateur fortement elliptique à coefficients vaiables, Mémoire de Master soutenu le 18-06-2014, Département de Mathématiques, Faculté MI, Université M.B. de M'Sila.

[14] H. TRIEBEL, Distributions, Sobolev Spaces, Elliptic Equations. Jena, Fall 2007.

[15] M. TUCSNAK, Distributions et équations fondamentales de la physique, Cours pour les étudiants en maîtrise de Mathémathiques, http://www.iecn.u-nancy.fr/~tucsnak/coursdibpol.pdf.

[16] C. VILLANI, Analyse II, Cours de deuxième année donné à l'Ecole Normale Supérieure, ENS-Lyon, 2003-2004.