

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et**  
**de la Recherche Scientifique**

**Université Mohamed Boudiaf - M'sila**

**Faculté des Sciences**

**Département de Physique**

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

**MASTER**

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

**DEFFAF ABLA**

**THEME**

---

**Solution de l'équation de Schrödinger dans l'espace non  
commutative avec plusieurs types d'interactions**

---

Soutenue le : 08 / 06 / 2016

Devant le jury composé de :

A. MAIRECHE	Prof Univ. de M'sila	Président
M.DEBABI	M.A.A Univ. de M'sila	Rapporteur
A.BOUFERRACHE	M,A,B Univ. de M'sila	Examinateur

Promotion Juin 2016

## **Remerciements :**

*Avant tout je remercie dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la santé, la patience jusqu'à L'achèvement de ce mémoire.*

*J'exprime toute ma reconnaissance à monsieur M, DEBBABI, Professeur à l'université de Mohammed Boudiaf M'sila, pour avoir assuré l'encadrement de ce travail. Je le remercie pour son Soutien, son orientation et ses conseils.*

*Je tiens aussi à remercier vivement l'ensemble des membres de jury : Monsieur A.MAIRECHE qui m'a fait L'honneur de présider le jury de soutenance, et Monsieur A.BOUFERRACHE d'avoir accepté de faire partie du jury et de Juger ce travail.*

*Je tiens à remercier mes parents qui sont fatigués à cause de moi.*

*Je tiens à remercier mon époux ABD ELMOUMN qui m'a aidé à accomplir ce travail.*

*Finalement je tiens à remercier mon collègue F .AMEL qui m'a aidé à accomplir ce travail.*

## Dédicace

*A mon père AMEUR*

*A ma mère KELTHOUM*

*A mon époux ABD ELMOUMN et ses parents TAYEB,  
ZOHRA*

*A mes sœurs*

*A mes frères*

*A tous mes collègues KHADIDJA, SOUHILA, ASMA,  
IMAN, MOUNA, ASIA, SORIYA*

*Je dédie ce modeste travail...*

**Table des matières**

Introduction générale.....1  
Le but principal de travail.....2

**Chapitre I : mécanique quantique et équation de Schrödinger en espace ordinaire**

1-1-Introduction.....4  
1-2-le système de Landau.....4  
1-3-histoire de la mécanique quantique.....6  
1-4-L'équation de Schrödinger.....7  
1-4-1-propriétés de l'équation de Schrödinger.....7  
1-4-2-La fonction d'onde.....8  
1-4-3-La solution de l'équation de Schrödinger à 3 dimensions.....9  
1-4-3-a- L'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension.....9  
1-4-3-b- L'équation de Schrödinger à trois dimensions.....9

**Chapitre II : formalisme mathématique de l'espace**

**Non commutatif**

2-1-l'espace non commutatif.....12  
2-1-1-Introduction.....12  
2-2-Algèbre non commutative.....13  
2-2-1- Algèbre non commutative en dimension 2.....15  
2-3-potentiel scalaire.....18  
2-4-le système de Landau.....19  
2-4-1- le système de Landau avec potentiel harmonique.....20  
2-4-2- le système de Landau avec potentiel central.....20

2-5- La quantification de Weyl – Le produit de Moyal.....	22
2-5-1- La quantification de Weyl.....	22
2-5-2-le produit star.....	22
2-5-3-Les propriétés du produit star (produit de Moyal).....	24

## **Chapitre III : La mécanique quantique non commutative NCQM L'atome d'hydrogène Comme exemple**

3-1-Introduction.....	27
3-2-la mécanique quantique non commutative.....	27
3-2-1-Les espace non commutatifs.....	27
3-2-2-L'équation de Schrödinger sur un espace –temps NC.....	27
3-3-Atome d'hydrogène sur un espace temps non commutatif.....	28
3-3-1-Spectre classique pour l'atome d'hydrogène dans la théorie NC.....	31
3-3-1-1Théorie des perturbations.....	31
3-3-1-2-La relation entre les bases.....	34
3-4- Effet Stark.....	39
3-4-1-Définition.....	39
3-4-2-Introduction.....	39
3-4-3-L'effet Stark pour l'atome d'hydrogène.....	39
3-4-4-Effet Stark non commutatif.....	40
<b>Conclusion</b> .....	44
<b>Bibliographie</b> .....	46

## Introduction

---

# *Introduction*

### **-Introduction générale**

Au début du XXème siècle, la physique a subi deux révolutions majeures et pourtant incompatibles : la théorie de la relativité générale et la théorie quantique. Si la première est l'œuvre d'Albert Einstein, la deuxième a connu son essor grâce aux travaux de Planck, Bohr, Schrödinger, Heisenberg et bon nombre d'autres. Ces deux théories ont profondément changé notre manière d'appréhender le monde qui nous entoure.

La mécanique quantique est la science la plus mystérieuse. Elle traite du niveau le plus fondamental de la réalité, celui des particules (atomes, électrons, photons, . . .). La mécanique quantique a fait entrer dans la physique des concepts radicalement nouveaux : dualité onde-corpuscule, superposition d'états, effet de l'observateur, probabilités, etc...

Le changement radical entre la mécanique quantique et la mécanique classique est essentiellement que en mécanique classique une particule est un objet ponctuel décrit par un point  $(x, p)$  dans l'espace des phases (position - vitesse), alors que en mécanique quantique, une particule est un objet étendu, décrit par une fonction d'onde  $\psi(\vec{x})$ . Une conséquence est la possibilité d'interférences. Le rôle de la mécanique est de donner les lois qui gouvernent l'évolution de ces objets. Ce sont les équations de Hamilton (ou Newton) dans le cas classique et l'équation de Schrödinger dans le cas quantique.

La mécanique quantique sur espace non-commutatif (MQNC) , dans un premier temps, été proposée par Heisenberg dans les années 30 puis développée par H.Snyder à la fin des années 40, dans l'espoir que les propriétés de non-localisabilité induite par la non-commutativité des coordonnées d'espace permettraient de résoudre le problème des divergences à courte distance (ultra violette) de la théorie des champs. Mais les succès de la renormalisation rendirent cette piste caduque et elle fut abandonnée. Récemment, certains développements de la théorie des cordes l'ont sortie de l'oubli.

La géométrie non commutative est devenue en quelques années un sujet de recherche très actif, aussi bien en physique théorique qu'en mathématiques. Cette dénomination couvre en réalité un vaste domaine de recherches motivées par la

constatation mathématique. La géométrie non commutative se donne pour but de trouver une version non commutative de ces espaces en considérant des algèbres non commutatives ayant de bonnes propriétés, en remplacement de ces algèbres de fonctions. Les propriétés choisies sur ces algèbres non commutatives doivent caractériser complètement le type d'espace non commutatif qu'elles représentent. En particulier, dans le cas où une de ces algèbres est commutative, elle doit coïncider exactement avec la bonne algèbre de fonctions sur l'un des espaces du type considéré.

Avec la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg, l'espace géométrique des états d'un système microscopique, un atome par exemple, s'est enrichi de nouvelles propriétés de ses coordonnées, comme le moment et la position, qui ne commutent plus.

La mécanique quantique en espace non-commutatif correspond à l'étude de Hamiltonien dépendant des opérateurs de position et d'impulsion qui satisfont une algèbre de commutateurs non canonique. L'étude de modèles exactement solubles en mécanique quantique peut nous permettre d'avoir une meilleure compréhension de certains phénomènes survenant en théorie quantique des champs non-commutative.

### **Le but principal de ce travail**

L'objectif de ce travail est donner une solution de l'équation de Schrödinger dans l'espace non commutative avec plusieurs types d'interaction.

Dans notre mémoire de master, il nous a semblé utile d'exposer d'abord, au chapitre I, qui comporte des rappels sur le système de Landau en mécanique quantique ordinaire et en va présenter l'équation de Schrödinger en espace ordinaire à 3 dimensions, dans le 2<sup>ème</sup> chapitre on va étudier le système de Landau du différentes formules mathématiques dans l'espace non commutatif, au dernier chapitre on résoudre l'équation de Schrödinger pour un potentiel de Coulomb à D dimensions, et on va déduire les spectres d'énergies. Je souhaite donc bonne lecture à toute personne, initié ou non, qui aura le courage de se lancer dans les 3 chapitres qui suivent...

## Chapitre I

---

# *Mécanique quantique et équation de Schrödinger en espace ordinaire*

Dans ce chapitre on a traité les différents formalismes mathématiques de l'espace ordinaire (commutatif) et on voit aussi le système de Landau en mécanique quantique ordinaire, on étudie l'équation de Schrödinger à trois dimensions l'atome d'hydrogène comme exemple.

## 1-1-Introduction

La géométrie ordinaire ne s'arrête cependant pas à la topologie et à la théorie de la mesure. En effet, nous ne pouvons ignorer une de ses branches les plus importantes, la géométrie différentielle et tout ce qu'elle introduit comme structures : variétés différentiables, groupes de Lie, fibrés différentiables, connexions, métriques... Aussi bien du point de vue des mathématiques que de la physique, ces structures sont d'une très grande utilité aujourd'hui. Il est donc naturel de vouloir considérer son équivalent non commutatif, qui devrait alors s'appeler plus correctement géométrie différentielle non commutative.

La dualité onde corpuscule qui incitera certains physiciens à rechercher une description ondulatoire de la matière. Parmi ceux-ci, Erwin Schrödinger parvient et obtient une équation différentielle, portant désormais son nom, qui permet de décrire précisément l'évolution quantique d'une particule. Cette équation prouva rapidement sa pertinence dans sa description du modèle de l'atome d'hydrogène.

## 1-2-le système de Landau

En mécanique quantique ordinaire, les relations de commutation canoniques dans l'espace de phase prennent la forme :

$$[x_i, x_j] = 0$$

$$[p_i, p_j] = 0$$

$$[x_i, p_j] = i \hbar \delta_{ij} \mathbb{1}. \quad (1, 1)$$

Avec  $i, j=1, \dots, d$  ( $d$  est la dimension de l'espace).

Considérons le cas d'une particule chargée électriquement (de charge  $e$ ) se propageant dans un espace tridimensionnel soumis à un champ magnétique constant  $\vec{B}$  décrit par un potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  [1].

Le Hamiltonien d'un tel système est donné par :

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \quad (1, 2)$$

C'est-à-dire que l'on modifie l'impulsion canonique usuelle  $\vec{P}$  en définissant une impulsion  $\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ . Or, étant données les relations (1,1) les composantes de cette impulsion  $\vec{\Pi}$  ne commutent plus entre elles.

$$[\Pi_i, \Pi_j] = -i\hbar \frac{e}{c} B_{ij} \mathbb{1}. \quad (1, 3)$$

Avec  $B_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ , ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ).

Dans le cas où le champ magnétique est constant suivant  $\vec{e}_3$ ,  $\vec{B} = B \vec{e}_3$ , on peut utiliser les jauge suivantes pour le potentiel vecteur  $\vec{A} = (A_1, A_2, 0)$  :

- Jauge symétrique :  $\vec{A} = -\frac{1}{2} \vec{x} \wedge \vec{B}$ .

- jauge de Landau :  $\vec{A} = (0, Bx_1, 0)$  ou  $\vec{A} = (-Bx_2, 0, 0)$ .

Le Hamiltonien du système prend la forme  $H = \frac{1}{2m} (\Pi_1^2 + \Pi_2^2)$  où nous avons omis le terme  $\frac{1}{2m} p_3^2$  décrivant le mouvement libre le long de la direction  $x_3$ . On a la relation de commutation  $[\Pi_1, \Pi_2] = i\hbar \frac{e}{c} B \mathbb{1}$ . Or, si l'on définit un nouvel opérateur  $X = \frac{e}{cB} \Pi_1$ , la relation de commutation et le Hamiltonien deviennent :

$$[X, \Pi_2] = i\hbar \mathbb{1}. \quad H = \frac{1}{2m} \Pi_2^2 + \frac{1}{2} m \omega_B^2 X^2 \quad \text{avec} \quad \omega_B = \frac{|eB|}{mc}, \quad (1, 4)$$

Autrement dit, les opérateurs  $X$  et  $\Pi_2$  sont des variables canoniquement conjuguées pour lesquelles le Hamiltonien prend la forme de l'oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_B$ . Grâce à cette remarque, on en déduit directement le spectre d'énergie :

$$E_n = \hbar \frac{|eB|}{mc} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1, 5)$$

**Résumé :** le Hamiltonien du système de Landau (c'est-à-dire une particule dans un plan soumis à un champ magnétique externe constant perpendiculaire au plan), peut s'écrire sous la forme d'un Hamiltonien pour une particule libre dans un espace où les opérateurs de moment ne commutent plus entre eux.

Dans le cas où la particule possède un spin, il faut rajouter à ce Hamiltonien un terme supplémentaire d'interaction spin-champ magnétique.

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\Pi}^2 - \frac{e\hbar}{2mc} B \sigma_3. \quad (1, 6)$$

Où  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  est la troisième matrice de Pauli.

### 1-3-Histoire de la mécanique quantique :

Les exposés usuels d'histoire de la physique du XXe siècle indiquent que la physique a connu une double révolution au début de ce siècle. La première est l'avènement de la théorie de la relativité et la seconde celle de la théorie quantique. Il a été beaucoup question, à juste raison, des bouleversements conceptuels introduits par ces deux théories, et notamment par la mécanique quantique. Ainsi, Jammer indique : « Never in the history of science has there been a theory which has had such a profound impact on human thinking as quantum mechanics. » [2].

La naissance de la physique quantique date d'un siècle et cette description des phénomènes physiques, qui a transformé notre vision du monde, n'est toujours pas remise en cause, ce qui est exceptionnel pour une théorie scientifique. Ses prédictions ont toujours été vérifiées par l'expérience avec une précision impressionnante. Les concepts fondamentaux, comme les amplitudes de probabilité, les superpositions

Linéaires d'états, qui semblent si étranges pour notre intuition lorsqu'on les rencontre pour la première fois, restent toujours essentiels. Une évolution importante s'est cependant manifestée au cours des dernières décennies. Les progrès spectaculaires des techniques d'observation, des méthodes de manipulation des atomes, permettent maintenant de réaliser des expériences si délicates qu'elles n'étaient considérées que comme des « expériences de pensée » par les pères fondateurs de la mécanique quantique.

### 1-4-L'équation de Schrödinger :

L'équation de Schrödinger a été proposée de façon inductive par Erwin Schrödinger en 1925, et été publiée dans quatre article en 1926 un peu après la mécanique des matrices de Heisenberg(1925) et s'est développée d'abord dans le but de décrire les petits objets (atomes) constitués d'une seule particule située dans un certain champ de force (l'électron au sein de l'atome d'hydrogène ,par exemple). L'objet central de la théorie de Schrödinger, nommée aussi mécanique ondulatoire, est une fonction  $\psi(r, t)$  à valeurs complexes, appelée fonction d'onde. Cette fonction satisfait :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + v(r) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (1, 7)$$

Ce dernier [3] est une équation aux dérivées partielle du premier ordre par rapport au temps et second ordre par rapport aux coordonnées de l'espace ordinaire, cette équation joue un rôle fondateur en mécanique quantique par analogue à l'équation de Newton en mécanique classique et les équations de Maxwell en électromagnétisme.

#### 1-4-1- propriétés de l'équation de Schrödinger :

En mécanique quantique, l'évolution au cours du temps de l'état d'un système quantique (atome, photon) est d'écrite par l'équation de Schrödinger. Comme les équations de la mécanique classique, l'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles déterministe. Parfois, En mécanique classique.

- cette équation est postulée (tout comme, par exemple l'équation de Schrödinger).sa validité est prouvée par les conséquences que l'on peut en tirer.

- l'équation de Schrödinger est une équation au premier ordre par rapport au temps.la connaissance de  $\psi(r, t = 0)$  suffit pour déterminer l'évolution de  $\psi(r, t)$  . En effet, dans l'approche probabiliste de Born,  $\psi$  permet de trouver la probabilité de trouver la particule aueur de  $r$  en tout temps. La connaissance seule de  $\psi(r, t = 0)$  doit donc suffire pour déterminer l'évolution.

- les équations de Schrödinger dépend du temps sont des équations différentielles Du premier ordre

- L'équation de Schrödinger est homogène et linéaire. Si  $\psi_1$  et  $\psi_2$  en sont des solutions, alors

$$\psi_3(r, t) = \alpha \psi_1(r, t) + \beta \psi_2(r, t) \quad (1, 8)$$

$\psi_3(r, t)$  Est aussi solution de l'équation de Schrödinger.

-La fonction d'onde est dite normalisée si :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3r \psi^* \psi = 1 \quad (1, 9)$$

### 1-4-2-La fonction d'onde :

Les solutions de l'équation de Schrödinger d'un système quantique sont appelées les fonctions d'ondes, elles peuvent être considéré comme un postulat quantique qui décrit l'état quantique d'une particule et contient tous les informations qu'on veut connaitre du système. Cette fonction satisfaire les conditions suivantes :

- Elle doit être normalisée. Cela implique que la fonction d'onde en approche à zéro comme  $r$  approche à l'infinie c'est-à-dire :

$$\int \psi^* \psi d^3r = \int |\psi|^2 d^3r = 1 \quad (1, 10)$$

C'est la condition de normalisation, cette relation montre que  $\psi(\vec{r}, t)$ est interprétée comme une amplitude de probabilité de présence d'une particule à la position  $\vec{r}$  à l'instant  $t$ . la probabilité de trouver la particule dans tout l'espace, à l'instant  $t$ , est égale à l'unité.

$$p = \int |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = 1. \quad (1, 11)$$

Avec  $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  est la densité de probabilité.

- La fonction d'onde et sa dérivée doivent être continues dans tout l'espace.

### 1-4-3-solution de l'équation Schrödinger :

#### 1-4-3-a- l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension :

Cette équation décrit comment la fonction d'onde se transforme au cours du temps. Si l'Hamiltonien du système physique ne dépend pas d'explicitement du temps, l'énergie totale  $E$  est conservée, donc l'équation de Schrödinger admet des solutions particulières sous forme [4] :

$$\varphi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\vec{r}). \quad (1, 12)$$

Où  $E$  l'énergie, et  $\psi(\vec{r})$  satisfait l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + v(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (1, 13)$$

Avec  $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ , où  $\vec{\nabla}$  l'opérateur de dérivés partielles, on coordonnées cartésiennes est définit par :  $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ .  $r$  Est le rayon-vecteur repérant la particule dans l'espace ;  $v(r)$  est l'énergie de potentielle de la particule ;  $i$  désigne le nombre imaginaire pur fondamental ;  $m$  est la masse de la particule. Ceci étant admis, il apparait que la mécanique quantique n'est formulable que pour des forces dérivant d'un potentiel ; dès lors, admettre que cette théorie s'applique à toute la physique à l'échelle atomique ou subatomique, c'est admettre que toutes les interactions « fondamentales » dérivent d'un potentiel, au sens usuel ou en un sens généralisé.

#### 1-4-3-b- l'équation de Schrödinger stationnaire à trois dimensions :

L'atome d'hydrogène est le plus simple des atomes. La résolution de l'équation de Schrödinger pour des atomes et des molécules plus complexes devient rapidement très difficile (pratiquement impossible).

L'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène sera écrite en faisant l'approximation que le noyau (dont la masse est 1836 fois celle de l'électron) constitue le centre de gravité du système où il est immobile, ce qui revient à négliger son énergie cinétique. L'énergie cinétique de l'atome se réduit donc à celle de l'électron ; il lui est associé l'opérateur :  $\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta$ .

Dans le cas où la particule se déplace dans un champ central (potentiel central), c'est un potentiel de symétrie sphérique, ces mieux d'utilises l'équation de Schrödinger en coordonnées sphérique [3] :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \right] + V(r, \theta, \varphi) \right\} \psi(r, \theta, \varphi) = E \psi(r, \theta, \varphi) \quad (1, 14)$$

Où  $L^2$  est l'opérateur carré du moment cinétique tell que :

$$L^2 = -\hbar^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1, 15)$$

Où  $0 < r < +\infty$ , Et  $\theta, \varphi$  les angles polaire  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

La séparation des variables, permet nous d'écrire la fonction d'onde comme :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} R_{n,l}(r) y_l^m(\theta, \varphi) \quad , \text{ avec } R_{n,l}(r) \text{ la partie radiale, et } y_l^m(\theta, \varphi) \text{ est la}$$

partie angulaire de la fonction d'onde.

Par cette considération de la fonction d'onde on obtient l'équation de Schrödinger radiale :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{l(l+1)}{2mr^2} \right] R(r) = 0 \quad (1, 16)$$

Où  $l$  : le nombre quantique orbitale.

## Chapitre II

---

*Formalisme mathématique de l'espace*

*Non commutatif*

Dans ce chapitre on va étudier les différentes formules mathématiques dans l'espace non Commutatif. On voit le système de Landau en espace non commutatif. Et on va étudier l'algèbre de l'espace non commutatif (le produit star, propriétés de produit star...).

### **2-1-L'espace non commutatif :**

#### **2-1-1-Introduction :**

Avec la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg, l'espace géométrique des états d'un système microscopique, un atome par exemple, s'est enrichi de nouvelles propriétés de ses coordonnées, comme le moment et la position qui ne commutent plus.

La première apparition de la notion de l'espace-temps non-commutatif en physique des particules remonte aux travaux de Snyder en 1947. Le but était de pouvoir se débarrasser des divergences ultraviolettes de la théorie quantique des champs tout en conservant la covariance de Lorentz. Mais, comme parallèlement à cela, la théorie de la renormalisation produisait des résultats remarquables.

La mécanique quantique en espace non-commutatif correspond à l'étude de Hamiltonien dépendant des opérateurs de position et d'impulsion qui satisfont une algèbre de commutateurs non canonique. L'étude de modèles exactement solubles en mécanique quantique peut nous permettre d'avoir une meilleure compréhension de certains phénomènes survenant en théorie quantique des champs non-commutative.

- Il est très important de noter que, les relations de commutation dans l'espace non commutatif, satisfait par le nouveau produit connu par le produit star.
- Dans l'espace non commutatif la construction des théories de jauge se fait de la même manière qu'en théorie de jauge sur un espace ordinaire.
- Les champs classiques remplacés par les champs non commutatifs.

- Le produit ordinaire commutatif remplacé par le produit de Moyal-Weyl (produit star).

## 2-2-Algèbre non commutative

Dorénavant, on se place dans un système d'unités où  $\hbar = C = e = 1$ .

La géométrie espace-temps non-commutative est une géométrie où les coordonnées de l'espace et de temps ne commutent pas. Probablement, elle est une géométrie microscopique qui se manifeste à très haute énergies. Elle est en quelque sorte la généralisation de la géométrie classique (macroscopique) qu'on connaît (Euclidienne, Minkowskienne, Riemannienne etc..).

L'espace non commutatif les relations de commutation au chapitre I (1, 1) devraient être changées comme suivant [1] ( $x_i \rightarrow \hat{x}_i$  et  $p_i \rightarrow \hat{p}_i$ ). En toute généralité on a :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\theta_{ij}\mathbb{1} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= i B_{ij}\mathbb{1} \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i \delta_{ij} \mathbb{1} + i(1 - \delta_{ij})C_{ij}\mathbb{1} \end{aligned} \quad (2, 1)$$

Avec  $i, j=1, \dots, d$  ( $d$  est la dimension de l'espace)

Le paramètre  $\theta_{ij}$  représente un élément antisymétrique d'une matrice carré d'ordre  $(d \times d)$  avec  $(\theta_{ij} = -\theta_{ji})$  qui représente la non-commutativité de l'espace-temps. Les paramètres  $B_{ij}$  et  $C_{ij}$  sont les éléments de matrice pouvant dépendre des opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  et satisfaisant :

$$(\theta_{ij})^t = -\theta_{ij} \quad (B_{ij})^t = -B_{ij} \quad (C_{ij})^t = C_{ij} \quad C_{11} = \dots = C_{dd} = 0 \quad (2, 2)$$

Dans la suite, on adoptera la notation suivante : les opérateurs comportant un chapeau  $\hat{\phantom{x}}$  caractériseront les générateurs de l'algèbre de Heisenberg déformée par opposition aux quantités  $x$  et  $p$  de la mécanique quantique ordinaire satisfaisant l'algèbre de Heisenberg :

$$\begin{aligned}
 [x_i, x_j] &= 0. \\
 [p_i, p_j] &= 0. \\
 [x_i, p_j] &= i\delta_{ij}\mathbb{1}.
 \end{aligned}
 \tag{2, 3}$$

Non seulement, nous faisons intervenir des commutateurs position-position et impulsion-impulsion non nuls mais nous introduisons par ailleurs des relations de commutation non triviales entre  $\hat{x}_i$  et  $\hat{p}_j$  pour  $i, j$  différents. Les termes  $C_{ij}$  dans le commutateur position-impulsion sont imposés par l'identité de Jacobi. En effet, si l'on considère par exemple l'opérateur  $\hat{p}_1$  et  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{x}_j$  ( $i \neq j$ ), l'identité de Jacobi se met sous la forme :

$$\begin{aligned}
 0 &= [\hat{x}_i, [\hat{x}_j, \hat{p}_1]] + [\hat{x}_j, [\hat{p}_1, \hat{x}_i]] + [\hat{p}_1, [\hat{x}_i, \hat{x}_j]] \\
 &= [\hat{x}_i, [\hat{x}_j, \hat{p}_1]] + [\hat{x}_j, [\hat{p}_1, \hat{x}_i]] + i[\hat{p}_1, \theta_{ij}]
 \end{aligned}
 \tag{2, 4}$$

Ainsi, si les  $\theta_{ij}$  ne commutent pas avec  $\hat{p}_1$ , il est impossible que  $\hat{p}_1$  commutent simultanément avec  $\hat{x}_i$  et  $\hat{x}_j$ . par conséquent, il est obligatoire de tenir compte de terme non diagonaux (i.e. proportionnels à  $(1-\delta)$  dans les commutateurs position-impulsion). Par ailleurs, les opérateurs  $C_{ij}$  ne peuvent pas non plus appartenir au centre de l'algèbre générée par  $\mathbb{1}$  et  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ , c'est-à-dire commuter avec tous les opérateurs position [6].

Dans la suite, on supposera que les opérateurs  $\theta_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $C_{ij}$  sont constants, c'est-à-dire que les  $\theta_{ij}$  et  $B_{ij}$  sont des éléments de matrices antisymétrique réelles et que les  $C_{ij}$  sont des éléments d'une matrice réelle de diagonale nulle. Les opérateurs « déformés » peuvent alors être vus comme fonction des opérateurs ordinaires et des paramètres  $\theta_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $C_{ij}$ . Dans cette optique, il est naturel qu'en prenant la limite commutative, à savoir  $(\theta, B, C) \rightarrow 0$ , l'algèbre déformée (2, 1) redonne l'algèbre canonique de Heisenberg (2, 3). On reviendra par la suite sur cette limite commutative en étudiant des exemples. Le paramètre  $B_{ij}$  est naturellement assimilable

physiquement à un champ magnétique (cf. le système de Landau) de la même façon, le paramètre  $\theta_{ij}$  a un rôle très similaire à  $B_{ij}$  [7, 8].

### 2-2-1-Algèbre non-commutative en dimension 2

Dans cette section, on se restreint au cas où la dimension d'espace est  $d=2$ . Par conséquent, les matrices antisymétrique  $\theta_{ij}$  et  $B_{ij}$  sont proportionnelles au tenseur antisymétrique  $e_{ij}$  (normalisée par  $e_{12} = 1$ ).

$$\theta_{ij} = e_{ij}\theta \quad \text{et} \quad B_{ij} = e_{ij}B. \quad (2, 5)$$

L'algèbre des commutateurs (2,1) se réécrit alors :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= ie_{ij}\theta \mathbb{1}. \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= i e_{ij}B \mathbb{1}. \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i \delta_{ij} \mathbb{1} + i(1 - \delta_{ij})C_{ij} \mathbb{1} \end{aligned} \quad (2, 6)$$

Par ailleurs,  $(C_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$  est une matrice  $2 \times 2$  à coefficients diagonaux nuls qu'on note par la suite :  $C = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 \\ -\phi_2 & 0 \end{pmatrix}$ . comme souligné plus haut. on assimilera les coefficients  $\theta, B, \phi_1, \phi_2$  à des constantes réelles afin de simplifier l'approche.

Nous allons commencer par regarder des cas particuliers de l'algèbre bidimensionnelle.

$$(*) \quad \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0$$

Cette situation correspond au système de Landau évoqué précédemment.

L'algèbre (2. 6) se réécrit donc :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= 0 \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= iB \mathbb{1}. \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i \delta_{ij} \mathbb{1} \end{aligned} \quad (2, 7)$$

Différentes représentations sont données par différents choix de jauge  $(A_1(\vec{x}), A_2(\vec{x}))$  satisfaisant  $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$  et sont toutes de la forme :

$$\hat{x}_i = x_i \quad \text{Et} \quad \hat{p}_i = \Pi_i \equiv p_i - A_i(\vec{x}) \quad (2, 8)$$

Si l'on définit de nouveaux opérateurs

$$\hat{q}_i = B \hat{x}_i + e_{ij} \hat{p}_j \quad (i, j \in \{1, 2\}) \quad (2, 9)$$

L'algèbre (2.7) se transforme en une algèbre où les opérateurs  $\vec{q}$  et  $\vec{p}$  sont découplés :

$$\begin{aligned} [\hat{q}_1, \hat{q}_2] &= -iB\mathbb{1}. \\ [\hat{p}_1, \hat{p}_2] &= iB\mathbb{1}. \\ [\hat{q}_i, \hat{p}_j] &= 0 \end{aligned} \quad (2, 10)$$

On arrive ainsi à deux algèbres sensiblement identiques. De manière plus générale, si l'on définit un changement d'opérateurs  $\vec{x} \rightarrow \vec{q}$  de la forme  $\hat{q}_1 = \alpha \hat{x}_1 + \beta \hat{p}_2$ ,  $\hat{q}_2 = \gamma \hat{x}_2 + \delta \hat{p}_1$ , alors la condition  $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = 0$  (pour  $i$  et  $j$  quelconques) équivaut à une algèbre du type (2.10) dans laquelle  $[\hat{q}_1, \hat{p}_2] \propto i\mathbb{1}$ .

$$(**) \quad B = \phi_1 = \phi_2 = 0$$

La situation est analogue au cas précédent, les rôles de  $\vec{x}$  et  $\vec{p}$  étant simplement inversés. C'est l'algèbre la plus fréquemment rencontrée dans la littérature :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_1, \hat{x}_2] &= i\theta\mathbb{1}. \\ [\hat{p}_1, \hat{p}_2] &= 0 \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i \delta_{ij} \mathbb{1} \end{aligned} \quad (2, 11)$$

On peut définir la représentation :

$$\hat{p}_i = p_i \quad \text{Et} \quad \hat{x}_i = x_i - \tilde{A}_i(\vec{p}) \quad (2, 12)$$

Où les fonctions  $\tilde{A}_i(\vec{p})$  satisfont  $\frac{\partial \tilde{A}_1}{\partial p_2} - \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial p_1} = \theta$ . Le vecteur  $(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$  joue en quelque sorte le rôle de « potentiel vecteur » et  $\theta$  le rôle d'un champ magnétique. Par analogie avec le cas précédent.

Le Hamiltonien d'un système évoluant dans un espace non-commutatif est obtenu en remplaçant dans l'expression du Hamiltonien ordinaire les opérateurs canoniques  $x$  et  $p$  par leurs équivalents non-commutatifs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$ . Le spectre du Hamiltonien pouvant être déterminé d'une manière purement algébrique.

Concernant le paramètre  $B$  de non-commutativité des opérateurs d'impulsion  $\hat{p}_i$  suivant les remarques faites précédemment, celui-ci est assimilable à un champ magnétique. C'est pourquoi, dans le cas où  $B \neq 0$  n'est pas nécessaire d'introduire de potentiel vecteur dans le Hamiltonien (bien que cela ait déjà été fait dans certains travaux).

Indépendamment de la forme générale de l'algèbre satisfaite par  $(\hat{x}, \hat{p})$  pour, le générateur infinitésimal des rotations agit comme :

$$\begin{aligned} [\hat{L}, \hat{x}_i] &= ie_{ij}\hat{x}_j. \\ [\hat{L}, \hat{p}_i] &= ie_{ij}\hat{p}_j. \end{aligned} \quad (2,13)$$

Pour  $i, j = 1, 2$ . Par conséquent, les termes quadratiques  $\hat{x}^2$  et  $\hat{p}^2$  sont invariants sous les rotations.

$$(***) B_{ij}=C_{ij}=0$$

Reprenons le cas particulier où les opérateurs d'impulsion commutent entre eux,

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\theta_{ij}\mathbb{1}. \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0 \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\delta_{ij}\mathbb{1} \end{aligned} \quad (2, 14)$$

Avec  $i, j \in \{1, \dots, d\}$

Une représentation analogue à celle donnée en (2.12) existe sous la forme [9, 10]

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{1}{2} \theta_{ij} p_j \quad \hat{p}_i = p_i \quad (2,15)$$

Dans toute la suite, on se place dans un système d'unités où  $\hbar = c = e = 1$  et on considère un système de masse unité  $m=1$ .

### 2-3- Potentiel scalaire :

On se place dans le cas de l'algèbre (2.14) en dimension  $d=3$ . On peut regrouper tous les termes  $\theta_{ij}$  indépendants au sein d'un vecteur  $\vec{\theta} = (\theta_K)$  tel que  $\theta_{ij} = e_{ij} \theta_K$ . la représentation (2.15) se met alors sous la forme :

$$\hat{\vec{x}} = \vec{x} + \frac{1}{4} \vec{\theta} \times \vec{p}, \quad \hat{\vec{p}} = \vec{p}, \quad (2, 16)$$

Le Hamiltonien  $H = \frac{1}{2} \hat{\vec{p}}^2 + V(\hat{\vec{x}})$  s'écrit, dans cette représentation :

$$H = \frac{1}{2} \vec{p}^2 + V(\vec{x} + \frac{1}{4} \vec{\theta} \times \vec{p})$$

$$H = \frac{1}{2} \vec{p}^2 + V(\vec{x}) + \frac{1}{4} (\vec{\theta} \times \vec{p}) \cdot \vec{\nabla} V(\vec{x}) + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (2, 17)$$

Le potentiel  $V$  décrit une interaction non locale mais qui peut être traitée en théorie des perturbations si l'on considère que le paramètre  $\theta$  est suffisamment petit devant les longueurs caractéristiques du système [10].

Pour un potentiel central  $V(r)$ , on a  $\vec{\nabla} V(r) = V' \frac{\vec{x}}{r}$  et alors :

$$(\vec{\theta} \times \vec{p}) \cdot \vec{\nabla} V \propto (\vec{\theta} \times \vec{p}) \cdot \vec{x} = (\vec{p} \times \vec{x}) \cdot \vec{\theta} \equiv -\vec{L} \cdot \vec{\theta}. \quad (2, 18)$$

Ainsi, le Hamiltonien (2, 17) prend la forme :

$$H = \frac{1}{2} \vec{p}^2 + V(r) - \frac{1}{4} \frac{V'(r)}{r} \vec{L} \cdot \vec{\theta} + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (2, 19)$$

Le dernier terme est similaire à un terme d'interaction spin-orbite du type  $\vec{L} \cdot \vec{S}$ .

Il faut noter que le changement de variables  $(\vec{x}, \vec{p}) \rightarrow (\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}})$  n'est pas unitaire car il ne

préserve pas l'algèbre des commutateurs. En conséquence de quoi, le Hamiltonien (2.17) n'est pas unitairement équivalent au Hamiltonien ordinaire  $H = \frac{1}{2}\vec{p}^2 + V(\vec{x})$ .

En mécanique quantique ordinaire, le potentiel  $V$  agit sur la fonction d'onde  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Comme un opérateur de multiplication, à savoir  $\psi \rightarrow V \cdot \psi$ . En mécanique quantique non-commutative, le potentiel  $V$  agit sur  $\psi$  au moyen du produit-étoile,  $\psi \rightarrow V * \psi$ . Si l'on calcule la transformée de Fourier de cette relation, on se rend compte que l'action du potentiel au moyen du produit-étoile est identique à l'action du potentiel dépendant des coordonnées  $\hat{x}$  et non plus des  $x$  ordinaires [9] :

$$(V * \psi)(\vec{x}) = V(\hat{\vec{x}}) \psi(\vec{x}) \quad \text{Avec } \hat{x}_i \equiv x_i - \frac{1}{2} \theta^{ij} p_j. \quad (2,20)$$

Enfin, suite à la remarque (2.20), le remplacement du produit ordinaire par le produit-étoile, en lieu et place de l'utilisation des opérateurs « non-commutatifs », conduit au même Hamiltonien.

### 2-4-Le système de Landau :

Le problème de Landau en espace non-commutatif [11, 12,13] peut être traité de la même façon que le modèle ordinaire (chapitre 1). On considère donc le Hamiltonien de la particule libre  $H = \frac{1}{2} \hat{\vec{p}}^2$ , écrit avec des opérateurs impulsion satisfaisant l'algèbre ([1] chapitre 2(1.21)), Le spectre en énergie est calculé en utilisant la même méthode que pour les relations (1.4) - (1.5). On remarque que le résultat final :

$$E_n = |B| \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{Avec } n = 0,1,2, \dots \quad (2,21)$$

Est indépendant du paramètre  $\theta$ . Par conséquent, les niveaux d'énergie sont identiques à ceux obtenus en mécanique quantique ordinaire ( $\theta = 0$ ). Cependant, il existe des quantités observables qui diffèrent d'un modèle à l'autre. On peut mentionner, par exemple, la densité d'états par unité de surface [12],  $\rho = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{1-B\theta} \right|$ . Cette dernière expression diverge au point singulier  $B = \frac{1}{\theta}$ .

### 2-4-1-Le système de Landau avec potentiel harmonique :

L'exemple du système de Landau tel qu'il a été décrit à la section précédente peut être étendu à des algèbres de commutateurs et/ou des Hamiltoniens plus généraux. Ainsi nous supposons que les opérateurs  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2)$  satisfont les relations (2.6) et nous considérons une particule en mouvement plan soumise à l'action d'un champ magnétique constant dans la direction perpendiculaire ainsi qu'à une potentielle harmonique centrale fonction des coordonnées non-commutatives  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ :

$$H = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{p}}^2 + \omega^2 \hat{\mathbf{x}}^2) \quad (\omega \geq 0). \quad (2,22)$$

Le spectre de ce système [8, 11,14, 15] peut être déterminé de manière algébrique.

Par conséquent, l'oscillateur harmonique isotrope en espace non-commutatif (2.22) fonction de  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$  satisfaisant l'algèbre(2,6) est équivalent à l'oscillateur anisotrope en espace commutatif de fréquences  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$ . Les valeurs propres de H sont donc caractérisées par deux entiers  $n_+$  et  $n_-$  (positifs) :

$$E = \left(n_+ + \frac{1}{2}\right)\Omega_+ + \left(n_- + \frac{1}{2}\right)|\Omega_-| \quad (2, 23)$$

Avec  $n_+, n_- \in \{0,1,2, \dots\}$ .

$$\text{Avec } \Omega_{\pm} = \sqrt{4\omega^2 + (B - \omega^2\theta)^2 + \omega^2(\varphi_1 + \varphi_2)^2} \pm \sqrt{(B + \omega^2\theta)^2 + \omega^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2}.$$

(2, 24)

### 2-4-2-Le système de Landau avec potentiel central :

Soit l'algèbre avec  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ .

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i \theta \mathbb{1}.$$

$$[\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i B \mathbb{1}.$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i \delta_{ij} \mathbb{1}. \quad (2, 25)$$

Revenons à l'algèbre précédents et remplaçons dans le Hamiltonien (2, 22) le potentiel de l'oscillateur harmonique par un potentiel central arbitraire :

$$H = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + V(\hat{x}^2). \quad (2, 26)$$

Il est difficile d'espérer résoudre complètement ce système bidimensionnel.

Le changement de variables  $\hat{p} \rightarrow \hat{K}$  défini par :  $\hat{k}_i = \hat{p}_i - \frac{1}{\theta} e_{ij} \hat{x}_j$  [1, 11] avec  $i=1,2$ .

Permet de découpler l'algèbre (2.25) en la mettant sous la forme :

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i \theta \mathbb{1}.$$

$$[\hat{k}_1, \hat{k}_2] = -i \frac{k}{\theta} \mathbb{1}.$$

$$[\hat{x}_i, \hat{k}_j] = 0. \quad (2, 27)$$

Le Hamiltonien (2.26) peut se réduire de la même façon : ainsi, après changement de variables, on a, pour une valeur quelconque de  $K$  :

$$H = \frac{1}{2} \hat{K}^2 - \frac{1}{\theta} (\hat{x}_1 \hat{k}_2 - \hat{x}_2 \hat{k}_1) + \frac{1}{2\theta^2} \hat{x}^2 + V(\hat{x}^2). \quad (2, 28)$$

Pour  $k = 0$ , les opérateurs  $\hat{k}_1$  et  $\hat{k}_2$  sont nécessairement proportionnels à l'identité. Si l'on impose l'invariance rotationnelle de H, le seul choix possible est  $\hat{k}_1 = 0 = \hat{k}_2$  [15], de telle sorte que le Hamiltonien prend la forme :

$$H = \frac{1}{2\theta^2} \hat{x}^2 + V(\hat{x}^2). \quad (2, 29)$$

On peut réécrire cette expression en fonction des variables canoniquement conjuguées

$\hat{x}_1$  Et  $\hat{\Pi} \equiv \frac{1}{\theta} \hat{x}_2$  :

$$\frac{1}{2\theta^2} \hat{x}^2 = \frac{1}{2} \hat{\Pi}^2 + \frac{1}{2\theta^2} \hat{x}_1^2. \quad (2, 30)$$

Qui correspond au Hamiltonien d'un oscillateur harmonique de fréquence  $\frac{1}{\theta}$  (on suppose  $\theta > 0$ ) Par conséquent, pour  $k = 0$  le système non-commutatif est exactement soluble et son spectre vaut :

$$E_n = \frac{1}{\theta} \left( n + \frac{1}{2} \right) + V(\theta(2n + 1)) \quad \text{Avec } n = 0, 1, \dots \quad (2, 31)$$

## 2-5- La quantification de Weyl – Le produit de Moyal

### 2-5-1-La quantification de Weyl :

La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrire la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique. C'est une prescription qui nous permet d'associer un opérateur quantique à une fonction classique qui dépend des variables de l'espace de phase (variables canoniques).

### 2-5-2-Le produit star :

Le formalisme du produit- star initié par Weyl et Wigner pour permettre une description de la mécanique quantique en termes d'espace des phases, s'articule non pas autour d'opérateurs non commutants, comme dans l'approche opératorielle, mais autour de la déformation du produit entre les variables de l'espace des phases, Nous allons voir comment ce formalisme peut être utilisé dans le cadre de MQNC.

Dans le cadre de la quantification canonique de la mécanique quantique Hermann Weyl a donné une prescription qui permet d'associer des opérateurs à des fonctions

classiques des variables canoniques. La transformé de Fourier de chaque fonction  $f(x)$  ou  $g(x)$ , est note par  $\tilde{f}(K)$  et  $\tilde{g}(K)$  respectivement suivez l'expression suivant [16]:

$$\begin{cases} f(x) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D K e^{-iK_m x^m} \tilde{f}(K) \Leftrightarrow \tilde{f}(K) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D x e^{iK_m x^m} f(x) \\ g(x) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D K e^{-iK_m x^m} \tilde{g}(K) \Leftrightarrow \tilde{g}(K) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D x e^{iK_m x^m} g(x) \end{cases} \quad (2, 32)$$

La quantification de Weyl consiste à faire une correspondance biunivoque entre l'algèbre des fonctions  $f(x)$  définies sur  $\mathcal{R}^D$  et l'algèbre des opérateurs. Nous associons à f et g les opérateurs de Weyl  $W(f)$  et  $W(g)$ :

$$\begin{cases} W(f) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D K e^{iK_m \hat{x}^m} \tilde{f}(K) \\ W(g) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D l e^{iK_m \hat{x}^m} \tilde{g}(l) \end{cases} \quad (2, 33)$$

En suite le produit  $W(f) W(g)$  est définie par :

$$W(f) W(g) = (2\pi)^D \int d^D K d^D l e^{iK_m \hat{x}^m} e^{il_m \hat{x}^m} \tilde{f}(K) \tilde{g}(l). \quad (2, 34)$$

En utilisant la formule de Baker – Campbell – Hausdorff :

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}h[A,B]+\frac{1}{12}h^2[[A,B],B]-\frac{1}{12}h^3[[A,B],A]+\dots} \quad (2, 35)$$

Valable pour les opérateurs A et B tel que :

$$[A,[A, B]] = [B, [A, B]] = 0. \quad (2, 36)$$

En suite le produit  $W(f) W(g)$  prend la forme :

$$W(f) W(g) = (2\pi)^D \int d^D K d^D l e^{i(K_m+l_m)\hat{x}^m - h\frac{i}{2}K_m l_n \theta^{imn}} \tilde{f}(K) \tilde{g}(l) \quad (2,37)$$

Notre but est de trouver un produit (noté produit star \*) pour des fonctions (ordinaires) définies sur un espace de Minkowski qui permet au symbole de Weyl d'être un homomorphisme pour la multiplication.

En d'autres termes on veut trouver un produit star tel que : Le produit de deux opérateurs de Weyl de deux fonctions soit égal à l'opérateur de Weyl associé au produit star de deux fonctions :

$$W(f) W(g) = W(f * g) \quad \text{Et égale à (2, 37).} \quad (2, 38)$$

Où  $(f * g)$  est une nouvelle fonction (fonction de Moyel-Weyl) on peut écrire le second membre de l'équation  $(f * g)(x)$  :

$$(f * g)(x) = e^{\frac{i}{2}h \theta^{mnj} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} [f(x)g(y)]_{y \rightarrow x} . \quad (2, 39)$$

On peut développer le produit star comme suit :

$$(f * g)(x) = f(x)g(x) + \frac{i}{2} \theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} f(x) \frac{\partial}{\partial x^n} g(x) + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (2, 40)$$

### 2-5-3-Les propriétés du produit star (produit de Moyel) :

Dans ce qui va suivre, on va illustrer quelques autres propriétés fondamentales du produit star [17] :

1-Le produit star est non-commutatif :

$$f(x) * g(x) \neq g(x) * f(x). \quad (2, 41)$$

Par contre :  $g(x) * f(x) = f(x) * g(x) |_{\theta \rightarrow -\theta}$ .

2-Lorsque  $\theta = 0$  on trouve :

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x). \quad (2, 42)$$

On retrouve donc le cas commutatif.

3-Le produit star est associatif :

$$(f(x) * g(x)) * h(x) = f(x) * (g(x) * h(x)) = f * g * h. \quad (2, 43)$$

4-La conjugaison complexe :

$$(f(x) * g(x))^* = f(x)^* * g(x)^*. \quad (2, 44)$$

5-produit star sous le signe intégral :

$$\int (f * g)(x) d^4x = \int (g * f)(x) d^4x = \int f(x)g(x) d^4x. \quad (2, 45)$$

En raison de l'antisymétrie de  $\theta$ , l'exposant disparaît ainsi :

$$\begin{aligned} \int (f * g)(x) d^4x &= \int d^4K \tilde{f}(K) \tilde{g}(-K). \\ &= \int (f \cdot g)(x) d^4x. \end{aligned} \quad (2, 46)$$

6-de la propriété (5) nous pouvons déduire la propriété cyclique :

$$\int (f_1 * f_2 * \dots * f_n)(x) d^4x = \int (f_n * f_1 * \dots * f_{n-1})(x) d^4x. \quad (2, 47)$$

7-Règle de Leibniz :

Il est facile vérifier que la dérivée de produit star satisfait à la règle de Leibniz

$$\partial_\mu (f * g) = \partial_\mu f * g + f * \partial_\mu g. \quad (2, 48)$$

## Chapitre III

---

*La mécanique quantique non commutative*

*NCCM L'atome hydrogène Comme*

*exemple*

### 3-1-Introduction :

Dans ce chapitre, on va essayer de résoudre l'équation de Schrödinger pour un potentiel de coulomb à D dimensions, et on va déduire les spectres d'énergies, on verra l'Effet Stark.

### 3-2-la mécanique quantique non commutative :

#### 3-2-1-les espaces non commutatifs :

D'après les relations de commutation canoniques dans le chapitre précédent qui s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\theta_{ij}\mathbb{1}. \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0. \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{3, 1}$$

#### 3-2-2-L'équation de Schrödinger sur un espace –temps NC

Il suffit de remplacer les produits de fonction d'onde (ou les champs) par le produit star où le produit de Moyal, Dans l'espace temps non commutatif à D dimensions, l'équation de Schrödinger est donnée par :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t) = \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \right] * \psi(\vec{x}, t). \tag{3, 2}$$

Le produit star entre l'opérateur du potentiel et la fonction d'onde est défini comme :

$$V(\vec{x})\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \hat{V}(\vec{\hat{x}}) * \psi(\vec{\hat{x}}, t) \tag{3, 3}$$

Mezincescu [18] A démontré la relation suivante :

$$\hat{V}(\vec{\hat{x}}) * \psi(\vec{\hat{x}}, t) = \hat{V}\left(\vec{\hat{x}} - \frac{\vec{\hat{p}}}{2}\right)\psi(\vec{\hat{x}}, t) \tag{3, 4}$$

Avec:  $\tilde{p}^i = \theta^{ij}p_j$ .

Remarque que si on effectue la transformation [18] :

$$\begin{aligned}\vec{x} &\longrightarrow \vec{x}' = \vec{x} - \frac{\vec{p}}{2} \\ x_i &\longrightarrow x'_i = x_i - \frac{\tilde{p}_i}{2} \\ p_i &\longrightarrow p'_i = p_i\end{aligned}\tag{3, 5}$$

Calculons le commutateur :

$$\begin{aligned}[x_i, x_j] &= \left[ x'_i + \frac{\tilde{p}_i}{2}, x'_j + \frac{\tilde{p}_j}{2} \right] \\ &= [x'_i, x'_j] + \frac{1}{2}\theta_{jk}[x'_i, p'^k] - \frac{1}{2}\theta_{ik}[p'^k, x'_j] + \frac{1}{4}\theta_{ik}\theta_{jl}[p'^k, p'^l] \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3, 6}$$

Qu'est la loi de commutation entre les coordonnées d'un espace temps commutatif.

### -Théorème :

Sur un espace temps non commutatif, on peut utiliser l'équation de Schrödinger avec des fonctions d'onde et une multiplication ordinaire entre potentiel à condition de décaler l'argument du potentiel d'un déplacement égal à  $\frac{\tilde{p}}{2}$  [25].

Avec :  $\tilde{p}^i = \theta^{ij}p_j$ .

Où  $\theta^{ij}$  est le paramètre de la commutativité.

### 3-3-Atome d'hydrogène sur un espace temps non commutatif :

Comme exemple de la mécanique non relativiste non commutative on va traiter le problème de l'atome d'hydrogène et de voir les effets de la non commutativité sur les niveaux d'énergie de cette atome.

On a les relations de commutation suivantes [19]:

$$\begin{aligned}
 [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\theta_{ij}. \\
 [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0. \\
 [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij}.
 \end{aligned}
 \tag{3, 7}$$

L'équation de Schrödinger pour les états stationnaires est donnée par :

$$\begin{aligned}
 H\psi &= E\psi. \\
 \Rightarrow \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right] \psi(\hat{x}) &= E\psi(\hat{x}).
 \end{aligned}
 \tag{3, 8}$$

Avec  $V(\hat{x})$  [20] le potentiel de Coulomb donnée par :

$$V(\hat{x}) = -\frac{Ze^2}{\sqrt{\hat{x}\hat{x}}}.
 \tag{3, 9}$$

Avec  $\hat{p}$  ET  $\hat{x}$  satisfaisant l'équations (3, 7)

Utilisons maintenant le nouveau système des coordonnées  $:x_i$  et  $p_i$

$$\text{Avec:} \quad x_i = \hat{x}_i + \frac{1}{2\hbar}\theta_{ij}\hat{p}_j, \quad p_i = \hat{p}_i.
 \tag{3, 10}$$

Alors on peut montrer que les nouvelles variables vérifient les relations de commutation canoniques :

$$\begin{aligned}
 [x_i, x_j] &= 0 \\
 [p_i, p_j] &= 0 \\
 [x_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij}.
 \end{aligned}
 \tag{3, 11}$$

En effet

$$\begin{aligned}
 1. \quad [x_i, x_j] &= \left[ \hat{x}_i + \frac{1}{2\hbar}\theta_{ik}\hat{p}_k, \hat{x}_j + \frac{1}{2\hbar}\theta_{jl}\hat{p}_l \right] \\
 &= i\theta_{ij} - \frac{i}{2}\theta_{ij} + \frac{i}{2}\theta_{ji} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$2. \quad [x_i, p_j] = [\hat{x}_i + \frac{1}{2\hbar} \theta_{ik} \hat{p}_k, \hat{p}_j] \\ = i\hbar \delta_{ij}.$$

$$3. \quad [p_i, p_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0.$$

Dans le nouveau système de coordonnées  $\frac{\hat{p}^2}{2m}$  l'énergie cinétique reste invariant par contre le potentiel coulombien devient :

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{\sqrt{\hat{x}\hat{x}}}$$

Où  $\hat{x}_i$  est fonction de  $x_i$  et  $p_j$  :

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{\sqrt{(x_i - \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} p_j)(x_i - \frac{1}{2\hbar} \theta_{ik} p_k)}} \\ = -\frac{Ze^2}{\sqrt{r^2 - \frac{x_i}{\hbar} \theta_{ij} p_j - \mathcal{O}(\theta^2)}} \\ = -\frac{Ze^2}{r \sqrt{1 - \frac{x_i}{\hbar r^2} \theta_{ij} p_j - \mathcal{O}(\theta^2)}}$$

On utilise le développement de Taylor :

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$$

On obtient :

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \left( 1 + \frac{1}{2\hbar r^2} x_i \theta_{ij} p_j + \mathcal{O}(\theta^2) \right)$$

Avec [25]:

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \xi_{ijk} \theta_k$$

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\hbar r^3} x_i \xi_{ijk} \theta_k p_j + \mathcal{O}(\theta^2)$$

Pour obtenir  $V(r)$  en fonction de  $\vec{L}$  on pose:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\hbar r^3} (r \times p)_k \theta_k + \mathcal{O}(\theta^2)$$

$$= -\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\hbar r^3} (L \cdot \theta) + \mathcal{O}(\theta^2)$$

On encore :

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\hbar r^3} (\vec{L} \cdot \vec{\theta}) + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (3, 12)$$

D'après cette équation on remarque que le non commutativité de l'espace temps est introduit sous forme d'une perturbation. Pour cette raison on va appliquer la théorie de perturbation indépendante du temps pour trouver les corrections sur les niveaux d'énergies. Le paramètre de perturbation dans notre cas est le  $\theta \ll 1$ .

### 3-3-1-Spectre classique pour l'atome d'hydrogène dans la théorie

**NC :**

#### 3-3-1-1Théorie des perturbations:

On peut appliquer le théorème de perturbation pour obtenir les valeurs propres de l'opérateur hermitique  $H(\lambda)$ .

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) \quad (3, 13)$$

$$= \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\hbar} \frac{(L \times \theta)}{r^3}. \quad (3, 14)$$

Traisons la commutativité comme perturbation pour trouver les corrections sur les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène C'est -à-dire :

$$H = H_0 + W \quad (3, 15)$$

Avec :

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}. \quad (3, 16)$$

$$W = -\frac{Ze^2 (L \cdot \theta)}{4\hbar r^3}. \quad (3, 17)$$

**-Rappel :**

$$H = H_0 + W \rightarrow H(\lambda) = H_0 + \lambda W \quad (3, 18)$$

Avec :

$$\lambda \ll 1$$

L'équation des valeurs propres de  $H(\lambda)$  [21] est définie comme :

$$H(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle \quad (3, 19)$$

Nous admettrons que peuvent être développés en puissance de  $\lambda$  sous la forme :

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \xi_0 + \lambda\xi_1 + \dots + \lambda^q\xi_q + \dots \\ |\psi(\lambda)\rangle &= |0\rangle + \lambda|1\rangle + \dots + \lambda^q|q\rangle + \dots \end{aligned} \quad (3, 20)$$

Donc :

$$\begin{aligned} (H_0 + \lambda\widehat{W})[\sum_{q=0}^{\infty} \lambda^q|q\rangle] &= [\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p\xi_p][\sum_{q=0}^{\infty} \lambda^q|q\rangle] \\ (H_0 + \lambda\widehat{W})(|0\rangle + \lambda|1\rangle + \dots + \lambda^q|q\rangle + \dots) & \\ = (\xi_0 + \lambda\xi_1 + \dots + \lambda^q\xi_q + \dots)(|0\rangle + \lambda|1\rangle + \dots + \lambda^q|q\rangle + \dots). & \end{aligned} \quad (3, 21)$$

-Pour les termes d'ordre 0 :

$$H_0|0\rangle = \xi_0|0\rangle \quad (3, 22)$$

-Pour les termes d'ordre 1 :

$$(H_0 - \xi_0)|1\rangle + (\widehat{W} - \xi_1)|0\rangle = 0 \quad (3, 23)$$

-Pour les termes d'ordre 2 :

$$(H_0 - \xi_0)|2\rangle + (\widehat{W} - \xi_1)|1\rangle - \xi_2|0\rangle = 0. \quad (3, 24)$$

-Pour les termes généraux d'ordre  $q$  :

$$(H_0 - \xi_0)|q\rangle + (\widehat{W} - \xi_1)|q-1\rangle - \xi_2|q-2\rangle + \dots - \xi_q|0\rangle = 0. \quad (3, 25)$$

Nous savons que l'équation aux valeurs propres (3.19) ne définit  $|\psi(\lambda)\rangle$  qu'à un facteur près. Nous pouvons donc choisir la norme de  $|\psi(\lambda)\rangle$  et sa phase : nous imposerons à  $|\psi(\lambda)\rangle$  d'être norme et choisirons sa phase de façon que le produit scalaire  $\langle 0|\psi(\lambda)\rangle$  soit réel.

A l'ordre 0, ceci implique que le vecteur noté  $|0\rangle$  soit normé :

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (3, 26)$$

Et le carré de la norme de  $|\psi(\lambda)\rangle$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \psi(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle &= [\langle 0|+\lambda\langle 1|0\rangle + \lambda|1\rangle] + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= \langle 0|0\rangle + \lambda[\langle 1|0\rangle + \langle 0|1\rangle] + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (3, 27)$$

Compte tenu de (3.26), cette expression est égale à 1 au premier ordre inclus si le terme en  $\lambda$  est nul ; mais le choix de phase indique que le produit scalaire  $\langle 0|1\rangle$  est réel (puisque  $\lambda$  est réel) ; on obtient donc :

$$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0 \quad (3, 28)$$

En projetant l'équation (3.23) sur le vecteur  $|\varphi_n\rangle$  on obtient :

$$\langle \varphi_n|(H_0 - \xi_0)|1\rangle + \langle \varphi_n|(\widehat{W} - \xi_1)|0\rangle \quad (3, 29)$$

On prend :

$$\langle 0| = \langle \varphi_n| \quad (3, 30)$$

Donc le premier terme est nul et les corrections du premier ordre de l'énergie s'écrit :

$$\xi_1 = \langle \varphi_n|\widehat{W}|0\rangle = \langle \varphi_n|\widehat{W}|\varphi_n\rangle \quad (3, 31)$$

Donc :

$$E_n(\lambda) = E_n^0 + \langle \varphi_n|W|\varphi_n\rangle + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (3, 32)$$

Pour l'atome d'hydrogène les vecteurs propres est définie par :  $|nljj_Z\rangle$

$$E_n = E_n^0 + \langle nl'jj'_Z | W | nljj_Z \rangle$$

$$E_n = E_n^0 - \langle nl'jj'_Z | \frac{Ze^2}{4\hbar} \frac{(L \cdot \theta)}{r^3} | nljj_Z \rangle \quad (3, 33)$$

Finalement se trouve :

$$\Delta E_{NC}^{H-atom} = E_n - E_n^0 = - \langle nl'jj'_Z | \frac{Ze^2}{4\hbar} \frac{(L \cdot \theta)}{r^3} | nljj_Z \rangle \quad (3, 34)$$

Nous notons que l'expression ci-dessus est très semblable à celle couplage spin orbite,

Ou le  $\frac{\theta}{\lambda_e^2}$  remplace maintenant le spin, avec le  $\lambda_e$  étant la longueur d'onde de

Compton de l'électron.

### 3-3-1-2-La relation entre les bases : $|nljj_Z\rangle$ et $|nls_l s_Z\rangle$

Nous trouvons la relation entre les bases précédentes par l'utilisation de coefficient de Clebsch-Gordan [21] qui données par :

$$|j, M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j, M \rangle \quad (3, 35)$$

Mais dans ce cas :

$$|l, j, j_Z\rangle = \sum_{l_Z=-l}^l |l, s, l_Z, s_Z\rangle \langle l, s, l_Z, s_Z | l, j, j_Z \rangle \quad (3, 36)$$

Avec :

$$j_Z = l_Z + s_Z$$

$$|l - s| \leq j \leq |l + s|$$

**-Le sous-espace :  $\xi(j = l + \frac{1}{2})$**

$$j = l + \frac{1}{2} \quad , \quad j_Z = j = l + \frac{1}{2}$$

$$\text{Avec :} \quad |l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\rangle = |l, \frac{1}{2}; l, \frac{1}{2}\rangle \quad (3, 37)$$

Par action de  $J_-$  on obtient :  $|l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}\rangle$

$$\begin{aligned} J_- |l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\rangle &= \hbar \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{1}{2} + 1\right) - \left(l + \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{1}{2} - 1\right)} |l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} - 1\rangle \\ &= \hbar \sqrt{2l + 1} |l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \quad (3, 38)$$

Donc :

$$\begin{aligned} |l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}\rangle &= \left(\frac{1}{\hbar \sqrt{2l + 1}}\right) J_- |l + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\hbar \sqrt{2l + 1}}\right) (L_- + S_-) |l, \frac{1}{2}; l, \frac{1}{2}\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2l}{2l + 1}} |l, \frac{1}{2}; l - 1, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2l + 1}} |l, \frac{1}{2}; l, -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \quad (3, 39)$$

Appliquons une nouvelle fois  $J_-$  , on obtient :  $|l + \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}\rangle$

$$|l + \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l + 1}} [ \sqrt{2l - 1} |l, \frac{1}{2}; l - 2, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2} |l, \frac{1}{2}; l - 1, -\frac{1}{2}\rangle ] \quad (3, 40)$$

De façon plus générale, le vecteur  $|l + \frac{1}{2}, j_Z\rangle$  sera une combinaison linéaire des deux seuls vecteurs de base associés à  $J_Z$  :  $|l, \frac{1}{2}; j_Z + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  et  $|l, \frac{1}{2}; j_Z + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  (bien entendu,  $j_Z$  est demi- entier). En comparant les formules (3. 37), (3. 39) et (3.40), on peut penser que cette combinaison linéaire doit être la suivante :

$$\begin{aligned} |l + \frac{1}{2}, j_Z\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2l + 1}} [ \sqrt{l + j_Z + \frac{1}{2}} |l, \frac{1}{2}; j_Z - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ &\quad + \sqrt{l - j_Z + \frac{1}{2}} |l, \frac{1}{2}; j_Z + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle ] \end{aligned} \quad (3, 41)$$

Avec :

$$j_Z = l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}, \dots, \dots, -\left(l + \frac{1}{2}\right).$$

Un raisonnement par récurrence permet effectivement de le montrer. En effet, l'application de  $J_-$  aux deux membres de (3.41) donne :

$$\begin{aligned}
 |l + \frac{1}{2}, j_Z - 1\rangle &= \frac{1}{\hbar \sqrt{(l+j_Z+\frac{1}{2})(l-j_Z+\frac{3}{2})}} J_- |l + \frac{1}{2}, j_Z\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[ \sqrt{l+j_Z-\frac{1}{2}} |l, \frac{1}{2}; j_Z - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{l-j_Z+\frac{3}{2}} |l, \frac{1}{2}; j_Z - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right] \quad (3, 42)
 \end{aligned}$$

On obtient bien la même expression qu'en (3.41),  $j_Z$  étant changé en  $j_Z - 1$ . Donc :

$$\begin{aligned}
 L_Z |l + \frac{1}{2}, j_Z\rangle &= L_Z \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[ \sqrt{l+j_Z+\frac{1}{2}} |l, \frac{1}{2}; j_Z - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{l-j_Z+\frac{1}{2}} |l, \frac{1}{2}; j_Z + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right]. \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[ \sqrt{l+j_Z+\frac{1}{2}} (j_Z - \frac{1}{2}) \hbar |l, \frac{1}{2}; j_Z - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right. \\
 &\quad \left. + (j_Z + \frac{1}{2}) \hbar |l, \frac{1}{2}; j_Z + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right] \quad (3, 43)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \langle l, l + \frac{1}{2}, j_Z | L_Z |l', l' + \frac{1}{2}, j'_Z\rangle &= j_Z \hbar \left( \frac{2l}{2l+1} \right) \delta_{l'l'} \delta_{j_Z j'_Z} \\
 &= j_Z \hbar \left( 1 - \frac{1}{2l+1} \right) \delta_{l'l'} \delta_{j_Z j'_Z} \quad (3, 44)
 \end{aligned}$$

Avec :

$$j = l + 1/2$$

**-Le sous-espace :  $\xi(j = l - \frac{1}{2})$**

Cherchons maintenant l'expression des  $2l$  vecteurs associés à  $j = l - 1/2$ , celui d'entre eux qui correspond à la valeur maximale de  $l - 1/2$  de  $j_Z$  est une combinaison linéaire normée de  $|l, \frac{1}{2}; l - 1, \frac{1}{2}\rangle$  et  $|l, \frac{1}{2}; l, -\frac{1}{2}\rangle$ , et il doit être orthogonal à  $|l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}\rangle$ , en choisissant le coefficient de  $|l, \frac{1}{2}; l, -\frac{1}{2}\rangle$  réel et positif.

$$|l - \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}\rangle = \alpha |l, \frac{1}{2}; l, -\frac{1}{2}\rangle + \beta |l, \frac{1}{2}; l - 1, \frac{1}{2}\rangle \quad (3, 45)$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\beta \sqrt{\frac{2l}{2l+1}} + \frac{\alpha}{\sqrt{2l+1}} = 0$$

$$|\beta| = \sqrt{1 - |\alpha|^2}$$

Puisque  $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$\Rightarrow \sqrt{2l(1 - \alpha^2)} + \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -\sqrt{\frac{2l}{2l+1}}$$

$$\beta = \frac{-1}{\sqrt{2l+1}}$$

Donc on remplace  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$|l-1, l-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[ \sqrt{2l} |l, \frac{1}{2}; l, -\frac{1}{2}\rangle - |l, \frac{1}{2}; l-1, \frac{1}{2}\rangle \right] \quad (3, 46)$$

L'opérateur  $J_-$  permet d'en déduire successivement tous les autres vecteurs de la famille caractérisée par  $j = l - 1$ . Comme il existe seulement deux vecteurs de base ayant une valeur donnée de  $j_z$  et que  $|l - \frac{1}{2}, j_z\rangle$  est orthogonal à  $|l + \frac{1}{2}, j_z\rangle$ . On s'attend d'après (3.41), à trouver :

$$|l - \frac{1}{2}, j_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[ \sqrt{l + j_z + 1/2} |l, \frac{1}{2}; j_z + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{l - j_z + 1/2} |l, \frac{1}{2}; j_z - \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \right] \quad (3, 47)$$

Avec :

$$j_z = l - \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}, \dots, -(l - \frac{1}{2})$$

$$L_z |l - 1/2, j_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} [\hbar(j_z + 1/2) \sqrt{l + j_z + 1/2} |l, 1/2; j_z + 1/2, -1/2\rangle - \hbar(j_z - 1/2) \sqrt{l - j_z + 1/2} |l, 1/2; j_z - 1/2, 1/2\rangle] \quad (3, 48)$$

Donc :

$$\langle l, l - 1/2, j_z | L_z |l', l' - 1/2, j'_z\rangle = \left( \frac{2l+2}{2l+1} \right) j_z \hbar \delta_{l'l} \delta_{j_z j'_z}$$

$$= j_z \hbar \left( 1 + \frac{1}{2l+1} \right) \delta_{l'l} \delta_{j_z j'_z} \quad (3, 49)$$

Avec :

$$j = l - 1/2$$

A partir à (3.43) et (3.49) se trouve :

$$\langle l, j j_z | L_z | l', j, j'_z \rangle = j_z \hbar \left( 1 \sim \frac{1}{2l+1} \right) \delta l l' \delta j j'_z \quad (3, 50)$$

Avec :

$$j = l \pm 1/2$$

Et [23] :

$$\begin{cases} \langle r^{-3} \rangle = \frac{Z}{a_0^3 n^3} \frac{1}{l(l+1)(l+\frac{1}{2})} \\ \alpha_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{U_e}{\alpha} \end{cases} \quad (3, 51)$$

Où  $a_0$ [23] est le rayon de Bohr, et  $U_e$  est la longueur d'onde de Compton de l'électron, et  $\alpha$  la constante de la structure fine donné par :

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad , \quad U_e = \frac{\hbar}{m_e c}$$

D'où :

$$\langle r^{-3} \rangle = \frac{(Z\alpha)^3}{U_e^3} \frac{1}{n^3} \frac{1}{l(l+1)(l+\frac{1}{2})} \quad (3, 52)$$

Finalement le décalage d'énergie donné par (3.34) devient :

$$\Delta E_{NC} = -\frac{m_e c^2}{4} (Z\alpha)^4 \frac{\theta}{U_e^2} j_z \left( 1 \sim \frac{1}{2l+1} \right) f_{n,l} \delta l l' \delta j_z j'_z \quad (3, 53)$$

Avec :

$$f_{n,l} = \frac{1}{n^3 l(l+1)(l+\frac{1}{2})}$$

### 3-4- Effet Stark

#### 3-4-1-Définition :

Si l'on plonge un atome dans un champ électrique extérieur, ses niveaux d'énergie varient : c'est l'effet Stark (du nom de son découvreur Johannes Stark).

#### 3-4-2-Introduction :

Lorsqu'on plonge un atome d'hydrogène dans un champ électrique extérieur  $\vec{E}$ , celui-ci engendre une levée partielle de la dégénérescence des niveaux d'énergie. On observe l'apparition de nouvelles raies dans le spectre de l'hydrogène par rapport aux raies existantes sans champ électrique extérieur. Chacune des raies du spectre de l'hydrogène est décomposée par le champ en un certain nombre de composantes disposées symétriquement de part et d'autre de sa position initiale [23].

Dans atome plongé dans un champ électrique uniforme extérieur nous avons affaire à un système d'électrons placés dans un champ à symétrie axiale (le champ du noyau avec le champ extérieur). Les états avec des valeurs distinctes de  $M_J$  posséderont des énergies distinctes, c'est-à-dire que le champ électrique lève la dégénérescence dans la direction du moment, mais incomplètement toutefois : les états qui ne se distinguent que par le signe de  $M_J$  restent, comme avant, dégénérés entre eux. [24]. En effet, l'atome dans le champ électrique extérieur uniforme est symétrique par rapport à la réflexion par n'importe quel plan passant par l'axe de symétrie (l'axe des  $z$ ).

#### 3-4-3-Effet Stark pour l'hydrogène :

Les niveaux de l'atome de l'hydrogène subissent dans un champ électrique uniforme, contrairement aux niveaux des autres atomes, une désintégration en raison de la première puissance du champ (effet Stark linéaire). Ceci est dû à la présence d'une dégénérescence accidentelle des termes de l'hydrogène, en vertu de laquelle des états avec différentes valeurs de  $l$  (pour un nombre quantique principal  $n$  donné) possèdent des énergies identiques.

### 3-4-4-Effet Stark non commutatif :

Si on plonge un atome dans un champ électrique il apparaît une énergie potentiel donnée par :

$$\begin{aligned} V_{stark} &= e. \vec{E}. \vec{r} \\ &= e. E_i . x_i. \end{aligned} \quad (3, 54)$$

L'énergie potentiel non commutative donnée par :

$$\begin{aligned} V_{stark}^{NC} &= e. \vec{E}. \vec{\hat{r}} \\ &= e. E_i. \hat{x}_i \end{aligned} \quad (3, 55)$$

Avec :

$$\hat{x}_i = \left( x_i - \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} p_j \right) \quad (3, 56)$$

L'énergie potentielle non commutative devient :

$$\begin{aligned} V_{stark}^{NC} &= e. E_i . x_i - e \frac{E_i}{2\hbar} \theta_{ij} p_j \\ &= e. E_i. \vec{r} - e \frac{E_i}{2\hbar} \frac{1}{2} \xi_{ijk} \theta_k p_j \end{aligned} \quad (3, 57)$$

Puisque :

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \xi_{ijk} \theta_k$$

Alors :

$$V_{stark}^{NC} = V_{stark}^C + \frac{e}{4\hbar} E_i (\vec{\theta} \wedge \vec{P})_i \quad (3, 58)$$

Donc :

$$V_{stark}^{NC} = V_{stark}^C + \frac{e}{4\hbar} (\vec{\theta} \wedge \vec{P}). \vec{E} \quad (3, 59)$$

On applique la théorie de la perturbation se trouve les corrections du premier ordre d'énergie :

$$\Delta E_{stark}^{NC} = \langle nl'jj'_z | \frac{e}{4\hbar} (\vec{\theta} \wedge \vec{P}). \vec{E} | nljj_z \rangle \quad (3, 60)$$

L'Hamiltonien  $H_0$  donné par :

$$H_0 = \frac{1}{2m} p^2 + V(x). \quad (3, 61)$$

Maintenant calculons le commutateur :

$$\begin{aligned} [x_i, H_0] &= \left[ x_i, \frac{1}{2m} p^2 + V(x) \right] \\ &= \frac{1}{2m} \{ [x_i, p_j] p_j + p_j [x_i, p_j] \} \end{aligned} \quad (3, 62)$$

Puisque :

$$[A, B^2] = B[A, B] + [A, B]B$$

Donc :

$$[x_i, H_0] = \frac{1}{2m} \{ i\hbar \delta_{ij} p_j + i\hbar \delta_{ij} p_j \} = \frac{i\hbar}{m} p_i \quad (3, 63)$$

À partir de cette relation, on trouve :

$$p_i = \frac{m}{i\hbar} [x_i, H_0]$$

Les corrections du premier ordre d'énergie deviennent :

$$\begin{aligned} \Delta E_{stark}^{NC} &= \langle nl'jj'_z | \frac{e}{4\hbar} (\vec{\theta} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{E} | nljj_z \rangle \\ &= \frac{e}{4\hbar} \langle nl'jj'_z | \xi_{kji} \theta_k p_j \cdot E_i | nljj_z \rangle \\ \Delta E_{stark}^{NC} &= \frac{em}{i4\hbar^2} \xi_{kji} \theta_k E_i \langle nl'jj'_z | [x_i, H_0] | nljj_z \rangle \end{aligned} \quad (3, 64)$$

Conclusion

---

*Conclusion*

### **Conclusion :**

Dans notre travail sur la résolution de l'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène dans le formalisme de la géométrie de l'espace non commutative, Cette non commutativité a été considéré comme une perturbation indépendante du temps dans l'expression du potentiel coulombien, cette perturbation est émerge par un simple déplacement de vecteur position  $X$  qui écrit par la relation :  $x_i = \hat{x}_i + \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} \hat{p}_j$  qui dépend de paramètre de la non commutativité  $\theta$ .

. On a montré que la correction dépend au nombre quantique orbital.

**Bibliographie**

- [1] M. Lefrançois. Théories des champs topologiques et mécanique quantique en espace non commutatif. Université Claude Bernard - Lyon I, 2005. Français. <tel-00012196>.
- [2] Adrien Vila-Valls .Louis De Broglie et la diffusion de la mécanique quantique en France (1925-1960) université Cloud Bernard.
- [3] Seraiche Farida.la solution de l'équation de Schrödinger stationnaire par la méthode de Nikiforov-Uvarov .université de M'sila.
- [4] Pr.M-Lefdil.Solution de l'équation stationnaire de Schrödinger. Université de Mohamed V-Agdal (2007-2008).
- [5] Médaille D'or (2004) du CNRS Alain Conne mathématicien.la géométrie non commutative.
- [6] J.Madore, An introduction to noncommutative differential geometry and physical applications, Cambridge University Press, (2000).
- [7] Anais Smailagic and Euro Spallucci, « Isotropic representation of the noncommutative 2D harmonic oscillator », Phys. Rev. D65 (2002), hep-th/0108216.
- [8] Anais Smailagic and Euro Spallucci, « Noncommutative 3D harmonic oscillator », J.Phys. A35 (2002), hep-th/0205242.
- [9] Luca Mezincescu, « Star Operation in Quantum Mechanics », (2000), hep-th/0007046.
- [10] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu, « Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED », Phys. Rev. Lett. 86 (2001), hep-th/0010175.
- [11] V. P. Nair and A. P. Polychronakos, « Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere », Phys. Lett. B505 (2001), hep-th/0011172.
- [12] Bogdan Morariu and Alexios P. Polychronakos, « Quantum mechanics on the noncommutative torus », Nucl. Phys. B610 (2001), hep-th/0102157.
- [13] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, and J. C. Rojas, « The Landau problem and noncommutative quantum mechanics », Mod. Phys. Lett. A16 (2001), hep-th/0104224.
- [14] Agapitos Hatzinikitas and Ioannis Smyrnakis, « The noncommutative harmonic oscillator in more than one dimensions », J. Math. Phys. 43 (2002), hep-th/0103074.

- [15] Stefano Bellucci, Armen Nersessian, and Corneliu Sochichiu, « Two phases of the non-commutative quantum mechanics », Phys. Lett. B522 (2001), hep-th/0106138.
- [16] Delaldja Hanane. Les niveaux d'énergie atomique produit par le Mie-type potentiel dans l'espace non commutatif à trois dimensions.
- [17] Menigher Hafid. Au-Dela du modèle standard et applications. Université Mentouri-Constantine.
- [18] L. Mezincescu† Department of Physics, University of Miami, Coral Gables, FL 33124, hep-th/0007046v2.
- [19] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Comments on the Hydrogen Atom Spectrum in the Noncommutative Space, Eur. Phys. J. C 36 (2002)251, hep th/0212259.
- [20] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED, Phys. Rev. Lett. 86(2001) 2716, hep- . th/0010175.
- [21] Mécanique Quantique, édité par C. Tannoudji, F. Laloë, université de paris 6. (1973).
- [22] J. HLADIK, M. CHRYOS, P-E. HLADIK, Mécanique quantique, Atomes et Molécules. Applications technologiques, DUNOD (2002).
- [23] Jean Haldik, Michel Chrysos, Pierre Emmanuel Haldik, Lorenzo Ugo Ancarani. Mécanique quantique-atomes et noyaux applications technologique. Dunod. Paris.
- [24] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Quantum mechanics : non-relativistic theory. Pergamon Press, 1977.
- [25] Nawel Rezaiki. L'Atome d'Hydrogène dans le Formalisme de la Géométrie Non Commutative. Université Mentouri Constantine.

## Résumé

Nous avons agressé dans cette étude physique du mémoire de master en physique des particules à haute énergie d'étudier la solution de l'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène dans le formalisme de la géométrie de l'espace non commutative, Cette non commutativité a été considéré comme une perturbation indépendante du temps dans l'expression du potentiel coulombien. On a montré que la correction dépend au nombre quantique orbital

Mot clés : Géométrie non- commutative, produit star, l'atome d'hydrogène, le produit de Moyal, Effet Stark.

## Abstract

In this work of search we have accomplished this physique study of master theory in physics of particles high energy to study solution of the Schrödinger equation for hydrogen atom the frame work of non commutative geometry, this noncommutativity Consider like perturbation independent of time in the expressions of colombien potetial. We prouve that the correction depend of quantum orbital nember.

Keywords : non commutative geometry, hydrogen atom, Moyal product, star product, Stark effect.

## المخلص

تطرقنا في هذه الدراسة الفيزيائية لمذكرة الماستر الجسميات ذات الطاقة العالية إلى دراسة حلول معادلة شرودنغر من أجل ذرة الهيدروجين في إطار هندسة القضاء اللاتبادلية هذه اللاتبادلية اعتبرناها كارتياح في عبارة الكمون الكولومبي.

الكلمات المفتاحية : ذرة الهيدروجين، جداء مويال، هندسة القضاء الاتبادلي، الجداء النجمي، تأثير ستارك.