

# *Remerciements*

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon promoteur : Mr. Sengouga pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience. Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers ; ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Merci

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Equations différentielles ordinaires . . . . .	3
1.2 Equations aux dérivées partielles . . . . .	4
1.2.1 Classification des EDP du second ordre . . . . .	4
1.2.2 Equation d'onde linéaire . . . . .	5
1.3 Rappels d'analyse asymptotique . . . . .	7
1.3.1 Symboles d'ordre . . . . .	8
1.3.2 Méthode des développements asymptotiques raccordés . . . . .	8
1.4 Quelques inégalités et formules . . . . .	14
<b>2 Approximation formelle</b>	<b>16</b>
2.1 Caractéristique et sous-caractéristiques . . . . .	17
2.2 Approximation formelle . . . . .	19
2.2.1 Première approximation . . . . .	20
2.2.2 Fonction de correction . . . . .	20
2.2.3 Estimation du reste . . . . .	22
<b>3 Justification de l'approximation</b>	<b>24</b>
3.1 Estimations à priori . . . . .	24
3.2 Estimation du reste de l'approximation et taux de convergences . . . . .	37
3.3 Résultats finals . . . . .	39

<b>Conclusion</b>	<b>40</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>

# Introduction

Les problèmes mathématiques modélisant des phénomènes physiques sont, le plus souvent, difficiles sinon impossibles à résoudre directement. Mais il peut y avoir des simplifications dans le modèle mathématique lorsqu'il contient un ou plusieurs "petits" paramètres, signifiant que la contribution de certains facteurs peuvent être négligeables par rapport à d'autres.

On s'intéresse dans ce travail à un modèle décrit par une équation aux dérivée partielle de type hyperbolique

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + d u_\varepsilon = f(x, t) \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(x, 0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = h(x) \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (P_\varepsilon)$$

Ce problème contient un petit paramètre  $\varepsilon > 0$ , multiplié par les dérivées de deuxième ordre. Pour des valeurs très petites de  $\varepsilon$ , on aimerait, au lieu de résoudre un problème de deuxième ordre, se contenter de résoudre un problème réduit et plus simple de premier ordre, c.-à-d. en prenant  $\varepsilon = 0$ ,

$$a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial t} + d w = f(x, t) \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

Comme c'est un problème de premier ordre, sa solution  $w$  ne peut pas vérifier, en générale, les deux conditions initiales en même temps.

Pour résoudre cette question, on reprend en détail l'approche utilisée De Jager et al. [1, 2]. On introduit une fonction de correction  $v$  au voisinage de  $t = 0$ , dans le but que la somme  $w + v$  soit une bonne approximation de  $u_\varepsilon$ . Pour calculer  $w$  et  $v$ , on utilise la *méthode des développements asymptotiques raccordés*<sup>1</sup> En suite, en appliquant la méthode

---

1. Method of matched asymptotic expansions

des intégrales d'énergies, on donne une estimation du reste

$$R_\varepsilon = u_\varepsilon - w + v$$

et une justification de la méthode utilisé.

Ce mémoire est décomposé en trois chapitres. Le premier chapitre contient quelque rappels et notions utilisé le long des chapitre suivants. En particulier, la méthode asymptotiques utilisé est illustré sur une équation différentielle ordinaire. Dans le deuxième chapitre, on donne une condition nécessaire pour que  $w$  peut être une bonne approximation de  $u_\varepsilon$ , ensuite on applique la méthode des développements asymptotiques raccordés sur le problème  $(P_\varepsilon)$ . La justification de la méthode et l'estimation du reste  $R_\varepsilon$  sont donnés au dernier chapitre. La conclusion est quelques références pour les lecteurs intéressés sont donnés à la fin de ce travail.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Equations différentielles ordinaires

Soit l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (1.1)$$

On cherche à résoudre cet équation, où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes réelles. On associe à (1.1) l'équation caractéristique suivante, dite *équation caractéristique*.

$$ar^2 + br + c = 0.$$

et on note  $\Delta = b^2 - 4ac$  son discriminant.

1. Si  $\Delta > 0$  : L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et la solution générale de (1.1) est

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Si  $\Delta = 0$  : L'équation caractéristique admet une racine réelle double  $r = \frac{-b}{2a}$  et la solution générale de (1.1) est

$$y(x) = e^{rx}(C_1 x + C_2), (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si  $\Delta < 0$  : L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées. On posant

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

alors  $r_1 = \alpha + i\beta$ ,  $r_2 = \alpha - i\beta$  et la solution générale de (1.1) est

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

## 1.2 Equations aux dérivées partielles

Une *équations aux dérivées partielles* est une équation dont les solutions sont des fonctions inconnues (à plusieurs variables) vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. Les modèles de la physique étant le plus souvent constitués d'EDP, nous allons nous intéresser à celles qui sont hyperboliques. Nous rappelons ensuite la classification adoptée aux EDP linéaires à deux variables qui peuvent être, selon le cas, deux coordonnées d'espace ou une coordonnée d'espace et le temps.

### 1.2.1 Classification des EDP du second ordre

Une EDP linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre, qui décrit le comportement de la grandeur inconnue  $u$  par rapport aux variables  $x$  et  $y$  :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g.$$

où  $a, b, c, d, e, f$  et  $g$  sont des fonction de  $x$  et  $y$ . Si  $a, b, c, d, e$  et  $f$  sont des constants, c.-à-d. ne dépend pas des variables  $x$  et  $y$ , l'EDP est dite à coefficients constants ce qui est le cas dans ce mémoire. Le caractère de ses solutions dépend fortement du signe de  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Selon que les racines sont réelles, complexes ou doubles, l'EDP est :

1. Hyperbolique, si  $\Delta > 0$ .
2. Parabolique, si  $\Delta = 0$ .
3. Elliptique, si  $\Delta < 0$ .

### 1.2.2 Equation d'onde linéaire

On appelle équation des ondes (linéaire) l'équation aux dérivées partielles d'évolution du second ordre en temps  $t$  et en espace  $x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

où  $c$  est un nombre réel positif donné, représentant la vitesse de propagation de l'onde.

Cette équation c'est le prototype des équations *hyperbolique*, linéaire et homogène.

Soit  $\phi$  et  $\psi$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\phi \in C^2$  et  $\psi \in C^1$ . Alors le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.2)$$

admet une unique solution  $u$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ , qui peut être obtenu par la méthode de d'Alembert.

#### La formule de D'Alembert

**Théorème 1.1** *La solution  $u$  du problème (1.2) est donnée par la formule de d'Alembert :*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{ \phi(x + ct) + \phi(x - ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

**Démonstration.** Nous utiliserons le changement de variable :

$$\eta = x - ct, \quad \xi = x + ct. \quad (1.3)$$

Et introduisons la fonction :

$$U(\xi, \eta) = u(x, t).$$

Dont il est facile de vérifier qu'elle satisfait

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Nous en déduisons qu'il existe deux fonctions d'une variable  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  telles que :

$$U(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

En revenant à l'inconnue originale  $u$ , nous obtenons :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Pour obtenir  $f$  et  $g$  nous utilisons les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = \phi(x) \implies f(x) + g(x) = \phi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \implies c\{f'(x) - g'(x)\} = \psi(x). \end{cases}$$

Nous en déduisons qu'il existe une constante  $A$  telle que :

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \psi(t) dt + A, \\ f(x) + g(x) = \phi(x). \end{cases}$$

D'où nous tirons les identités :

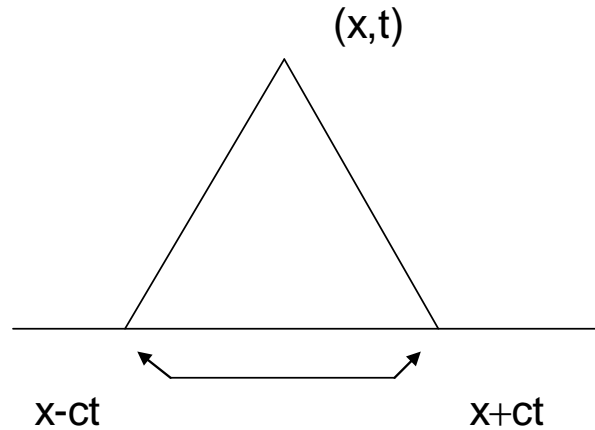
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(t) dt + \frac{A}{2}, \\ g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(t) dt - \frac{A}{2}. \end{cases}$$

L'expressions dont le résultat annoncé se déduit aisément. Le lecteur notera que, contrairement aux fonctions  $f$  et  $g$ , la quantité  $f(x - ct) + g(x + ct)$  est indépendante de  $A$ .

■

**Remarque 1.2** Les droites  $x \pm ct = \text{constante}$  sont appelé les caractéristiques de l'équation (1.2)

De la formule de d'Alembert il en résulte que la valeur de  $u$  au point  $(x, t)$  dépend seulement des valeurs du  $\phi$  sur les deux points  $x \pm ct$ , et il dépend seulement des valeurs du  $\psi$  dans l'intervalle  $[x - ct, x + ct]$ . Nous disons donc que l'intervalle  $(x - ct, x + ct)$  est l'intervalle de la dépendance du point  $(x, t)$  sur  $t = 0$ . Parfois, nous appelons l'ensemble du triangle ombragé le domaine de la dépendance du point  $(x, t)$ . Le domaine de dépendance est délimité par la paire de lignes caractéristiques qui passent par  $(x, t)$ .

FIGURE 1.1 – Domaine de dépendance de  $(x, t)$ 

### 1.3 Rappels d'analyse asymptotique

La *théorie des perturbations* est une méthode mathématique qui permet de trouver une solution approchée d'une équation mathématique ( $P_\varepsilon$ ) dépendante d'un paramètre  $\varepsilon$  lorsque la solution de l'équation ( $P_0$ ), correspondant à la valeur  $\varepsilon = 0$ , est connue exactement où plus facile à résoudre. L'équation mathématique ( $P_\varepsilon$ ) peut être une équation algébrique, une équation différentielle, une équation aux valeurs propres, ... La méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation ( $P_\varepsilon$ ) sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre  $\varepsilon$ , cette solution approchée étant supposé être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte, mais inconnue, que la valeur absolue du paramètre  $\varepsilon$  est plus « petite ».

Un problème de perturbation ( $P_\varepsilon$ ) est appelé régulière si sa solution  $u_\varepsilon$  dépend d'une façon régulière du paramètre. Puisque  $\varepsilon$  représente généralement un paramètre physique significative, laissant  $\varepsilon$  ont tendance à 0 correspond à négliger l'effet de petites perturbations. Une perturbation est appelé singulière si elle est pas régulière. Cette situation est fréquente lorsque le terme de perturbation  $\varepsilon$  est multiplié par le plus grand dérivée dans un équation différentielle.

### 1.3.1 Symboles d'ordre

Pour définir une approximation asymptotique, nous devons d'abord présenter l'ordre, ou le landau, symboles. La raison de ceci est que nous serons intéressés à la façon dont les fonctions se comportent pendant qu'un paramètre, typiquement  $\varepsilon$ , devient petit. Par exemple, la fonction  $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$  ne converge pas vers zéro plus vite que  $f(\varepsilon) = \varepsilon^2$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et nous avons besoin d'une notation pour dénoter ce fait.

**Définition 1.3** 1.  $f = O(\phi)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  signifie qu'il y a les constantes  $k_0$  et  $\varepsilon_1$  (indépendant de  $\varepsilon$ ) de sorte que

$$|f(\varepsilon)| \leq k_0 |\phi(\varepsilon)| \text{ pour } \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1,$$

nous disons que " $f$  est grand  $O$  de  $\phi$ " lorsque  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ .

2.  $f = o(\phi)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  signifie que pour chaque  $\delta$  positif, il y a un  $\varepsilon_2$  (indépendant de  $\varepsilon$ ) de telle sorte que

$$|f(\varepsilon)| \leq \delta |\phi(\varepsilon)| \text{ pour } \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_2,$$

nous disons que " $f$  est petit  $O$  de  $\phi$ " lorsque  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ .

On a le résultat suivant.

**Théorème 1.4** 1. Si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = L \text{ où } -\infty < L < \infty.$$

Alors  $f = O(\phi)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ .

2. Si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 0.$$

Alors  $f = o(\phi)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ .

pour plus de détaille. Voir [1, 3]

### 1.3.2 Méthode des développements asymptotiques raccordés

La meilleure façon d'expliquer la méthode des développements asymptotiques raccordés est de l'utiliser pour résoudre un problème. Considérons l'équation différentiel suivant

$$\varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1.4)$$

avec les conditions initiales suivantes

$$y(0) = 0, \tag{1.5}$$

$$y(1) = 1, \tag{1.6}$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre, destiné à tendre vers 0. Notons que  $\varepsilon$  est multiplié par la plus grande dérivée de  $y$ , et on pose  $\varepsilon = 0$ , le problème devient du premier ordre avec deux conditions c.-à-d. une condition de plus, en générale dans un tel cas la perturbation est singulière.

### Etape 1 : Solution extérieure

Nous allons supposer que la solution peut être étendue en puissances de  $\varepsilon$ . En d'autres termes,

$$y(x) \sim y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \tag{1.7}$$

en substituant ceci dans (1.4), nous obtenons

$$\varepsilon(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \dots) + 2(y_0' + \varepsilon y_1' + \dots) + 2(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) = 0.$$

Nous prenons des termes avec des puissances égales de  $\varepsilon$  simultanément, donc l'équation  $O(1)$  est donné par

$$y_0' + y_0 = 0.$$

et sa solution générale

$$y_0(x) = ae^{-x}, \tag{1.8}$$

où  $a$  est une constante arbitraire. Regardant la solution dans (1.8) nous avons un dilemme parce qu'il y a seulement une constante arbitraire. mais on a deux conditions aux limites (1.5)-(1.6). Ce qui veut dire que la solution en (1.8) et l'expansion de la (1.7) ne sont pas capables de décrire la solution sur la totalité de l'intervalle de  $0 \leq x \leq 1$ .

### Etape 2 : La couche limite

On fait l'hypothèse que la couche limite en  $x = 0$ , justifié par le comportement de la solution au voisinage de 0, (voir la figure 1.2), nous introduisons une nouvelle coordonnée

près de la couche limite donnée par

$$\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (1.9)$$

Après le changement de variables (1.9), nous avons que

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\bar{x}}{dx} \frac{d}{d\bar{x}} = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \frac{d}{d\bar{x}}.$$

Notons  $Y(\bar{x})$  la solution du problème avec l'utilisation de la nouvelle coordonnée, le problème (1.4) se transforme à

$$\begin{cases} \varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2 Y}{d\bar{x}^2} + 2\varepsilon^{-\alpha} \frac{dY}{d\bar{x}} + 2Y = 0, \\ Y(0) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

La condition aux limites en  $x = 0$  a été inclus ici parce que la couche limite est à l'extrémité gauche de l'intervalle.

L'expansion approprié pour la solution de la couche limite est maintenant

$$Y(\bar{x}) \sim Y_0(\bar{x}) + \varepsilon^\beta Y_1(\bar{x}) + \dots, \quad \beta > 0. \quad (1.11)$$

En substituant l'expansion (1.11) dans l'équation du problème (1.10), nous obtenons que

$$\underbrace{\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2}{d\bar{x}^2} (Y_0 + \dots)}_{(1)} + \underbrace{2\varepsilon^{-\alpha} \frac{d}{d\bar{x}} (Y_0 + \dots)}_{(2)} + \underbrace{2(Y_0 + \dots)}_{(3)} = 0. \quad (1.12)$$

Il est nécessaire de déterminer le bon équilibre dans (1.12). L'équilibre entre les termes (2) et (3) a été considéré à l'étape 1, et donc les possibilités suivantes restent :

**(1)  $\sim$  (3) et (2) est d'ordre supérieur** La condition (1)  $\sim$  (3) exige que  $1 - 2\alpha = 0$ , et ainsi  $\alpha = \frac{1}{2}$ , Avec ce que nous avons (1), (3) =  $O(1)$  et (2) =  $O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$ . Cela viole notre hypothèse que (2) est d'ordre supérieur (ce est à dire, (2)  $\ll$  (1)), ce cas ne pas possible.

**(1)  $\sim$  (2) et (3) est d'ordre supérieur** La condition (1)  $\sim$  (2) exige que  $1 - 2\alpha = -\alpha$ , et ainsi  $\alpha = 1$ , avec ce que nous avons (1), (2) =  $O(\varepsilon^{-1})$  et (3) =  $O(1)$ . Dans ce cas, la conclusion est conforme aux hypothèses initiales, et donc ce l'équilibre que nous recherchons.

Avec cela, nous avons le problème suivant à résoudre :

$$O(\varepsilon^{-1}) : \begin{cases} Y_0'' + 2Y_0' = 0, 0 < \bar{x} < +\infty, \\ Y_0(0) = 0. \end{cases}$$

La solution générale de ce problème est

$$Y_0(\bar{x}) = A(1 - e^{-2\bar{x}}). \quad (1.13)$$

où  $A$  est une constante arbitraire.

L'expansion de la couche limite dans (1.11) est censé décrire la solution dans le voisinage immédiat du point d'extrémité  $x = 0$ . Il est raisonnable de se attendre à ce que la solution externe (1.8) s'applique sur le reste de l'intervalle. Cela signifie que la solution externe doit satisfaire la condition aux limites en  $x = 1$ . A partir de (1.8) et (1.4), on trouve que

$$y_0(x) = e^{1-x}. \quad (1.14)$$

### Etape 3 : Raccordement des Solutions (Matching)

Il reste à déterminer la constante  $A$  dans l'approximation du premier terme de la solution de la couche limite (1.13). Le point important ici est que les deux expansions intérieures et extérieures sont des approximations de la même fonction. Par conséquent, dans la zone de transition entre les couches intérieure et extérieure nous devrions nous attendre à ce que les deux expansions donneront le même résultat. Ceci est accompli en exigeant que la valeur de  $Y_0$  comme une sort de la couche limite (par exemple, sous la forme  $\bar{x} \rightarrow \infty$ ) est égale à la valeur de  $y_0$  comme on vient dans la couche limite (par exemple, sous la forme  $x \rightarrow 0$ ). En d'autres termes, nous exigeons que

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} Y_0(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x), \quad (1.15)$$

donc  $A = e$  et

$$Y_0(\bar{x}) = e - e^{1-2\bar{x}}.$$

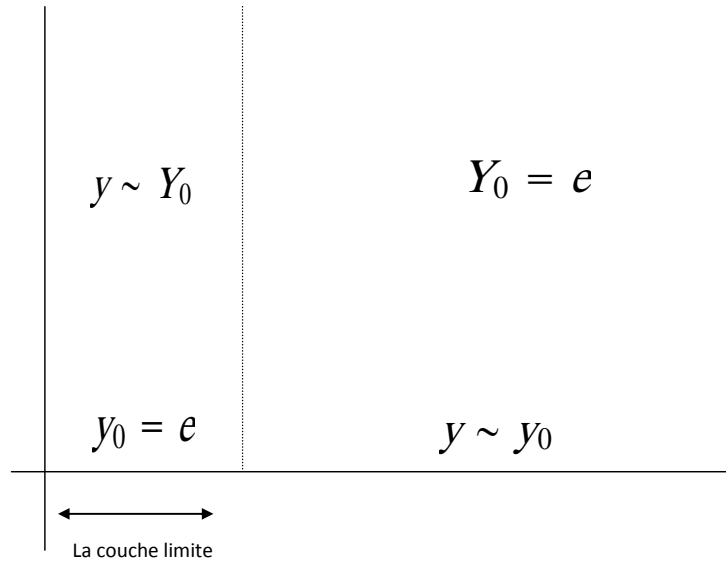


FIGURE 1.2 – La couche limite aux voisinage de 0.

#### Etape 4 : Développement composite

Notre description de la solution se compose de deux morceaux, qui applique une près de  $x = 0$ , l'autre qui fonctionne partout ailleurs. Parce que ni peut être utilisé sur tout l'intervalle, ils ne sont pas uniformément valable pour  $0 \leq x \leq 1$ . La question que nous considérons maintenant est de savoir si il est possible de les combiner pour produire une approximation uniforme, qui est, celui qui fonctionne sur l'ensemble du intervalle, Ceci résumé dans la figure 1.2. Les solutions internes et externes sont constants en dehors de leurs intervalles d'application, et la constante est la même pour les deux solutions. La valeur de la constante peut être écrite comme  $y_0(0)$  ou  $Y_0(\infty)$ , et le fait qu'elles sont égale est une conséquence de la condition assortie (1.15). Cette observation peut être utilisé pour construire une approximation uniforme, à savoir, nous ajouter juste les approximations ensemble et puis soustraire la partie qui est commun à la fois. Le résultat est

$$\begin{aligned}
 y &\sim y_0(x) + Y_0(\bar{x}) - y_0(0), \\
 &\sim y_0(x) + Y_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - y_0(0), \\
 &\sim e^{1-x} - e^{1-2\frac{x}{\varepsilon}}.
 \end{aligned}$$

### Comparaison avec la solution exacte

L'équation de (1.4) est linéaire du second ordre et l'équation caractéristique associée donné par  $\varepsilon r^2 + 2r + 2 = 0$ . Alors  $\Delta = 4 - 8\varepsilon$  avec  $0 < \varepsilon \ll 1$ , on a

$$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon}}{\varepsilon}, \quad r_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon}}{\varepsilon}.$$

et la solution a la forme

$$y(x) = C_1 e^{\frac{-1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon}}{\varepsilon} x} + C_2 e^{\frac{-1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon}}{\varepsilon} x}.$$

En utilisant les conditions initiales  $y(0) = 0$  et  $y(1) = 1$  pour déterminer  $C_1$  et  $C_2$ , on obtient

$$y_{ext}(x) = \frac{1}{e^{\frac{-1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon}}{\varepsilon}} - e^{\frac{-1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon}}{\varepsilon}}} \left[ e^{\frac{-1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon}}{\varepsilon} x} - e^{\frac{-1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon}}{\varepsilon} x} \right].$$

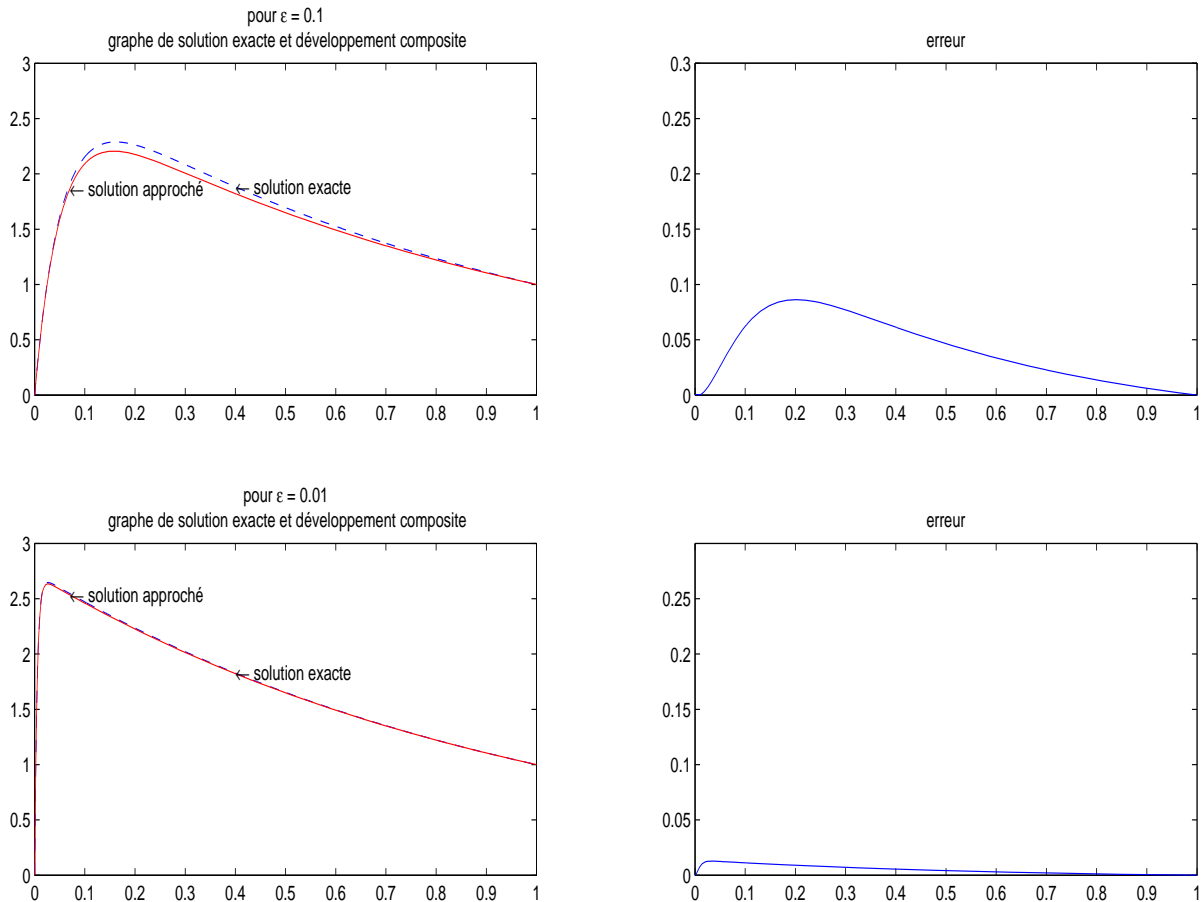


FIGURE 1.3 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approché

## 1.4 Quelques inégalités et formules

**Inégalité de Young.**

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, (a, b \in \mathbb{R}).$$

**Démonstration.**  $0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ . ■

**Inégalité de Young avec  $\lambda$ .**

$$ab \leq \lambda a^2 + \frac{b^2}{4\lambda}, (a, b > 0, \lambda > 0).$$

**Démonstration.** On écrit

$$ab = ((2\lambda)^{\frac{1}{2}}a) \left( \frac{b}{(2\lambda)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

et on applique l'inégalité originale. ■

**Inégalité de Schwarz.**

Soit  $u \in L^2(\Omega), v \in L^2(\Omega)$ , nous avons

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \left( \int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Lemme de Gronwall.**

Soient  $\varphi, \psi$  et  $y$  trois fonctions continues sur un segment  $[a; b]$ , à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a; b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

alors

$$\forall t \in [a; b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp \left[ \int_s^t \psi(u)du \right] ds.$$

### L'unité normale

i) Si  $\partial u$  est régulière, alors le long de  $\partial u$  est défini le domaine pointant vers l'extérieur de vecteur normal de l'unité.

$$\nu = (\nu^1, \dots, \nu^n).$$

L'unité normale en tout point  $x^0 \in \partial u$  est  $\nu(x^0) = \nu = (\nu^1, \dots, \nu^n)$ .

ii) Soit  $u \in C^1(\bar{U})$  nous appelons

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot Du$$

Le dérivé normale vers l'extérieur de  $u$ .

### Formules de la divergence et de Green.

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , et  $\nu(x)$  sa normale extérieure. Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions régulières,  $w$  un champ de vecteurs définis sur  $\Omega$ . Alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} w dx = \int_{\partial\Omega} w \cdot \nu d\sigma \quad (\text{formule de la divergence}).$$
$$\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma \quad (\text{formule de Green}).$$

# Chapitre 2

## Approximation formelle

Dans ce chapitre nous étudions le problème de perturbation singulière suivant

$$L_\varepsilon [u_\varepsilon(x, t)] = \varepsilon L_2 [u_\varepsilon(x, t)] + L_1 [u_\varepsilon(x, t)] = f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

avec des valeurs initiales

$$u_\varepsilon(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u_\varepsilon(x, 0)}{\partial t} = h(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

où  $\varepsilon$  est encore un petit paramètre positif. Les opérateurs différentiels  $L_1$  et  $L_2$  sont donnés par les expressions

$$L_1 = a \frac{\partial}{\partial x} \cdot + b \frac{\partial}{\partial t} \cdot + d \cdot, \quad (2.3)$$

$$L_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot. \quad (2.4)$$

Les coefficients  $a, b, c$  sont des constantes, le terme de source  $f$  et les données initiales  $g$  et  $h$  sont des fonctions suffisamment régulier pour les variable de  $x$  et  $t$ .

Ce problème de valeur initiale peut être considéré comme perturbation du problème de valeur initiale

$$L_1 [w(x, t)] = f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

avec la condition initiale

$$w(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Nous étudions encore de si la solution (2.5) – (2.6) peut être considéré comme une bonne approximation de (2.1) – (2.2), et ainsi nous étudions également l'ordre de l'approximation  $w(x, t)$  en termes de  $\varepsilon$ .

## 2.1 Caractéristique et sous-caractéristiques

Pour comprendre de l'effet les caractéristiques de  $L_1$  et ceux de  $L_2$  sur la validité de l'approximation de  $u_\varepsilon$  par  $w$ , nous considérons le problème simplifié suivant

$$L_\varepsilon [u_\varepsilon] = \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

avec des conditions initiales

$$u_\varepsilon(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont des constantes avec  $b \neq 0$  et  $g$  et  $h$  sont des fonctions arbitraires de classe  $C^1(\mathbb{R})$  et  $C(\mathbb{R})$  respectivement .

Le problème de valeur initiale réduit est

$$\begin{cases} a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial t} = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ w(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

qui a la solution suivant

$$w(x, t) = g\left(x - \frac{a}{b}t\right).$$

Les sous-caractéristiques (c.-à-d. les caractéristiques de  $L_1$ ) sont les lignes de  $x = \frac{a}{b}t + \text{constante}$ . La solution  $w(x, t)$  a des valeurs constantes le long de ces lignes. Les caractéristiques de l'opérateur hyperbolique  $\varepsilon L_2 + L_1$  sont des lignes  $x = \pm t + \text{constante}$ . Nous distinguons maintenant deux cas.

i) Le sous-caractéristiques sont de type spacelike, c.-à-d.  $\left|\frac{a}{b}\right| > 1$  et la droite  $x = \frac{a}{b}t + \text{constante}$  est plus proche de l'axe de la variable d'espace. Dans ce cas-ci nous avons la situation comme indiqué dans la figure 2.1.

Si  $w(x, t)$  est une bonne approximation de  $u_\varepsilon(x, t)$  c.-à-d.  $u_\varepsilon(P) \approx w(P)$ , alors

$$u_\varepsilon(P) \approx w(Q) = g(Q)$$

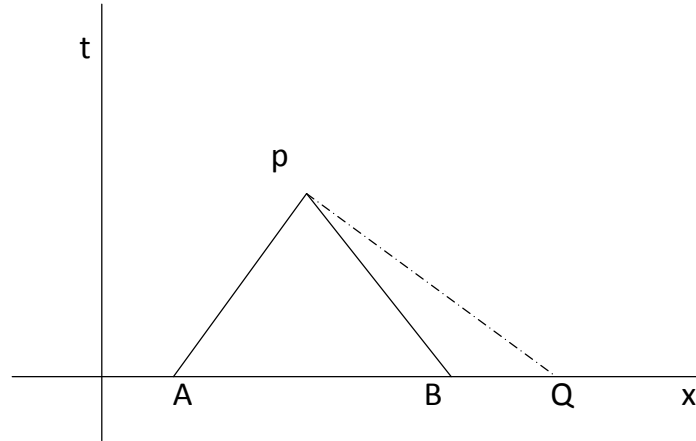


FIGURE 2.1 – Sous-caractéristique spacelike.

puisque  $w$  est constante sur le segment  $PQ$ . Cependant, pour l'équation d'onde, la valeur de  $u_\varepsilon(P)$  est complètement déterminé par les valeurs de  $g(x)$  et de  $h(x)$  sur  $\overline{AB}$ . Comme la valeur de  $g(Q)$  est indépendant de ces derniers valeur, il est clair que  $w(P)$  ne peut pas être en général une bonne approximation de  $u_\varepsilon(P)$ . Par conséquent il suit que la solution  $w(x, t)$  du problème ne peut pas être en général une bonne approximation de  $u_\varepsilon(x, t)$  lorsque les sous-caractéristiques sont spacelike.

ii) Le sous-characteristics sont de type timelike, c.-à-d.  $|\frac{a}{b}| < 1$  et la droite  $x = \frac{a}{b} + \text{constante}$  est plus proche de l'axe de la variable de temps. Dans ce cas-ci nous avons la situation comme indiqué dans la figure 2.2.

Maintenant nous ne pouvons pas énoncer a priori que la solution  $w(x, t)$  du problème réduit n'est pas une bonne approximation de  $u_\varepsilon(x, t)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il s'avérera dans la suite que la solution  $w(x, t)$  du problème réduit est en effet une bonne approximation de  $u_\varepsilon(x, t)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  avec l'hypothèse additionnelle  $b > 0$ . En fait, pour la régularité suffisante de  $g(x)$  et  $h(x)$ , on démontre que

$$u_\varepsilon(x, t) = w(x, t) + O(\varepsilon). \quad (2.9)$$

uniformément dans tout domaine borné fixe dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ . Pour plus de discussions de cette argument voir [1, 2].

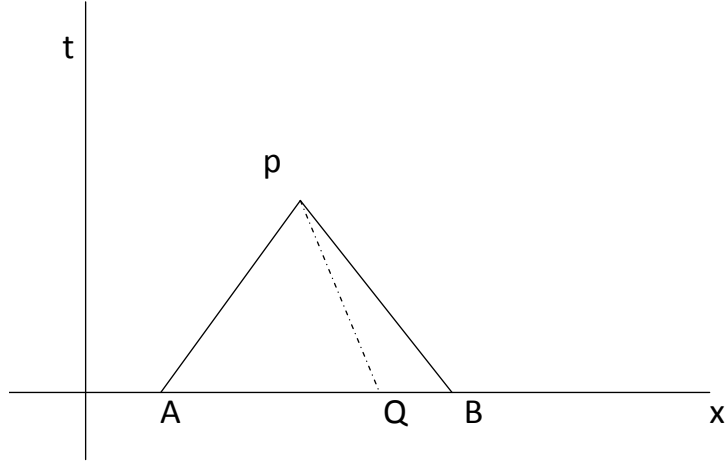


FIGURE 2.2 – Sous-characteristique timelike.

## 2.2 Approximation formelle

Nous considérons le problème de valeur initiale (2.1) – (2.4)

$$\begin{aligned} L_\varepsilon [u_\varepsilon(x, t)] &= \varepsilon L_2 [u_\varepsilon(x, t)] + L_1 [u_\varepsilon(x, t)] \\ &= \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + du_\varepsilon = f(x, t), \end{aligned} \quad (2.10)$$

valide pour  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ , alors que les conditions initiales sont données par

$$u_\varepsilon(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes

1.  $g$  et  $h$  sont des fonctions de  $C^\infty(\mathbb{R})$ .
2. Il existe un nombre positive  $\alpha$ , tels que

$$1 - \frac{a^2}{b^2 c^2} \geq \alpha > 0.$$

L'hypothèse 1 est été faite pour éviter des complication non nécessaire pour notre étude.

### 2.2.1 Première approximation

Vue l'argument ci-dessus, l'hypothèse 2 est nécessaire pour avoir une bonne approximation de  $u_\varepsilon$  par la solution du problème réduit

$$\begin{cases} a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial t} + dw = f(x, t), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Ce problème de valeur initiale est un problème linéaire simple du premier ordre et à cause de  $b \neq 0$  il peut toujours être résolu uniquement par les méthodes des caractéristiques, donc on peut supposer que *la solution  $w(x, t)$  du problème réduit est connue*. Cette fonction est de la classe  $C^\infty$  et elle satisfait l'équation (2.10) jusqu'à  $O(\varepsilon)$ , uniformément dans tout domaine borné, et il satisfait aussi la premier condition initiale (2.11), mais pas la seconde condition initiale en général.

### 2.2.2 Fonction de correction

Nous introduisons un terme de correction  $v$  tels que la deuxième condition est satisfaite par

$$w + v$$

mais "sans trop déranger" la première condition. D'ailleurs  $w + v$  devrait aussi satisfaire approximativement l'équation au moins dans des domaines bornés dans  $t > 0$ . Cet effet nous étirons la variable de temps  $t$  par la transformation

$$t = \varepsilon\tau, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

L'expression différentielle  $L_\varepsilon[w + v]$  équivalent à :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial t} + dw + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial t} + dv \\ = f(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{aligned}$$

et puisque  $w$  satisfait (2.12), on obtient

$$\varepsilon \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial t} + dv = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

Substituant cette nouvelle variable  $\tau$  dans  $L_\varepsilon$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial^2 v}{\varepsilon^2 \partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\varepsilon \partial \tau} + dv = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

c.-à-d.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + b \frac{\partial v}{\partial \tau} - \varepsilon \left( \varepsilon c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a \frac{\partial v}{\partial x} - dv \right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

et en conservant seulement la contribution principale de  $v(x, t)$  à l'expression différentielle  $L_\varepsilon[w + v]$ , on va exiger que  $v$  satisfait

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + b \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, 0 < \tau < +\infty, \quad (2.13)$$

avec la condition initiale

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) + \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = h(x), x \in \mathbb{R}.$$

alors

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(x, 0) = \varepsilon \left( h(x) - \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) \right), x \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Puisque (2.13) est du deuxième ordre, nous avons besoin d'une deuxième condition, pour  $v$  on exige que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} v(x, \tau) = 0. \quad (2.15)$$

Cette condition garantit que le terme de correction  $v(x, t)$  à une valeur significative seulement dans un petit voisinage d'ordre  $\varepsilon$  de  $t = 0$ , c.-à-d.  $t = O(\varepsilon)$ .

L'équation caractéristique associée à l'équation (2.13) est donné par

$$r^2 + br = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = -b,$$

alors

$$v(x, \tau) = c_1 + c_2 e^{-b\tau}$$

et comme  $b > 0$  on a

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} v(x, \tau) = c_1 = 0.$$

En rapportant ceci dans (2.14), on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(x, 0) = -bc_2 = \varepsilon \left( h(x) - \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) \right)$$

c.-à-d.

$$c_2 = \varepsilon \frac{\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) - h(x)}{b}$$

la fonction de correction  $v$  est donné par

$$v(x, \tau) = v\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \frac{\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) - h(x)}{b} e^{-b\frac{t}{\varepsilon}} \quad (2.16)$$

### 2.2.3 Estimation du reste

Finalement, on considérant le reste

$$R_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon(x, t) - \left[ w(x, t) + v\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) \right], \quad (2.17)$$

il satisfait l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned} L_\varepsilon[R_\varepsilon] &= L_\varepsilon[u_\varepsilon] - L_\varepsilon[w] - L_\varepsilon[v] & (2.18) \\ &= f - \left[ f - \varepsilon \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - \left[ 0 - \left( -\varepsilon c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial v}{\partial x} + dv \right) \right] \\ &= -\varepsilon \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \varepsilon c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial v}{\partial x} + dv \quad t, x \in \mathbb{R}, t > 0. \end{aligned}$$

Notons que

$$v = v\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \frac{\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) - h(x)}{b} e^{-b\frac{t}{\varepsilon}} = O(\varepsilon), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}(x, 0) - \frac{\partial h}{\partial x}}{b} e^{-b\frac{t}{\varepsilon}} = O(\varepsilon), \quad (2.20)$$

pour  $t = O(\varepsilon)$ , et nous pouvons conclure que

$$L_\varepsilon[R_\varepsilon] = O(\varepsilon).$$

uniformément dans tout domaine borné fixe  $G$  dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ . Pour les conditions initiales  $R_\varepsilon(x, t)$  satisfait

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, 0) &= w(x, 0) + v(x, 0) + R_\varepsilon(x, 0), \\ g(x) &= g(x) + v(x, 0) + R_\varepsilon(x, 0). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(x, 0) &= -v(x, 0), \\ &= -\varepsilon \frac{\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) - h(x)}{b}, \\ &= O(\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uniformément dans tout intervalle lié de l'axe des abscisses, et

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) + \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) + \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial t}(x, 0),$$

c.-à-d.

$$\frac{\partial R_\varepsilon(x, 0)}{\partial t} = h(x) - h(x) = 0, x \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

En résumé  $R_\varepsilon(x, 0)$  satisfait le problème

$$\begin{cases} L_\varepsilon[R_\varepsilon] = O(\varepsilon). & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ R_\varepsilon(x, 0) = O(\varepsilon), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial R_\varepsilon(x, 0)}{\partial t} = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Il suit que l'expression  $w(x, t) + v(x, \frac{t}{\varepsilon})$  satisfait le problème de valeur initiale pour  $u_\varepsilon(x, t)$  jusqu'à  $O(\varepsilon)$ .

### Resultat final

On a formellement

$$u_\varepsilon(x, t) \simeq w(x, t) + v\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right)$$

uniformément dans n'importe quel domaine  $G$  borné dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ , où  $w$  est solution du problème

$$\begin{cases} a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial t} + dw = f(x, t) & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et  $v$  est définie par

$$v\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \frac{\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) - h(x)}{b} e^{-b \frac{t}{\varepsilon}}. \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

**Remarque 2.1** Cette approximation formelle sera justifier dans le chapitre suivant.

# Chapitre 3

## Justification de l'approximation

Pour nous montrer que  $w(x, t) + v(x, \frac{t}{\varepsilon})$  est en effet une bonne approximation de  $u_\varepsilon(x, t)$  nous avons besoin d'une estimation de  $R_\varepsilon(x, t)$  et cette estimation devrait être petite pour de petites valeurs de  $\varepsilon$ . Cette évaluation est obtenue à l'aide de la méthode des intégrales d'énergie.

### 3.1 Estimations à priori

Nous considérons la nouvelle problème de valeur initiale

$$\varepsilon \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial t} + dz = \tilde{f}(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales

$$z(x, 0) = \tilde{g}(x) \text{ et } \frac{\partial z(x, 0)}{\partial t} = \tilde{h}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Quant aux coefficients, au côté droit et aux valeurs initiales, nous faisons la même hypothèse de régularité 1 et 2 comme dans la chapitre précédent.

#### Multiplication de l'équation par des fonctions test.

— La multiplication de (3.1) par  $(2z)$  donne

$$2\varepsilon z \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + 2za \frac{\partial z}{\partial x} + 2zb \frac{\partial z}{\partial t} + 2dz^2 = 2z\tilde{f}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left( bz^2 + 2\varepsilon z \frac{\partial z}{\partial t} \right) &= 2bz \frac{\partial z}{\partial t} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\varepsilon z \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( az^2 - 2\varepsilon c^2 z \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= 2az \frac{\partial z}{\partial x} - 2\varepsilon c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\varepsilon c^2 z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left( bz^2 + 2\varepsilon z \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( az^2 - 2\varepsilon c^2 z \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ = -2dz^2 + 2\varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - 2\varepsilon c^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2\tilde{f}z.\end{aligned}$$

— La multiplication de (3.1) avec  $2b\frac{\partial z}{\partial t}$  donne

$$2\varepsilon b \frac{\partial z}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + 2ab \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \left( b \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + 2bd \frac{\partial z}{\partial t} z = 2b\tilde{f} \frac{\partial z}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon b \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon bc^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) &= 2\varepsilon b \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\varepsilon bc^2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\varepsilon bc^2 \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= -2\varepsilon bc^2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} - 2\varepsilon bc^2 \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon b \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon bc^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\varepsilon bc^2 \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ = -2 \left( b \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - 2bd \frac{\partial z}{\partial t} z - 2ab \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + 2b\tilde{f} \frac{\partial z}{\partial t}.\end{aligned}$$

— La multiplication de (3.1) avec  $2a\frac{\partial z}{\partial x}$  on obtiens

$$2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + 2 \left( a \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2ab \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + 2adu \frac{\partial z}{\partial x} = 2a\tilde{f} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left( 2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= 2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon a \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon ac^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) &= 2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} + 2\varepsilon ac^2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( 2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon a \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon a c^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) \\ = -2 \left( a \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2ab \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} - 2adu \frac{\partial z}{\partial x} + 2a\tilde{f} \frac{\partial z}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ajoutant ces trois équations nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_1 + \frac{\partial}{\partial x} Q_2 = Q_3,$$

telle que

$$Q_1 = bz^2 + 2\varepsilon z \frac{\partial z}{\partial t} + \varepsilon b \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + 2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon bc^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \quad (3.3)$$

$$Q_2 = az^2 - 2\varepsilon c^2 z \frac{\partial z}{\partial x} - \varepsilon a \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - 2\varepsilon bc^2 \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} - \varepsilon ac^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \quad (3.4)$$

et

$$\begin{aligned} Q_3 = -2dz^2 + 2\tilde{f}z + 2\varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - 2\varepsilon c^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2 \left( b \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \\ - 2bdz \frac{\partial z}{\partial t} - 4ab \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + 2a\tilde{f} \frac{\partial z}{\partial x} + 2b\tilde{f} \frac{\partial z}{\partial t} - 2 \left( a \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2adz \frac{\partial z}{\partial x}, \end{aligned}$$

et après un certain calcul

$$\begin{aligned} Q_3 = -2dz^2 + 2\tilde{f}z - 2 \left( b \frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2dz \left( b \frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ + 2\tilde{f} \left( b \frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \varepsilon \left( 2 \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - 2c^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) \\ = -2dz^2 + 2\tilde{f}z - 2 \left( b \frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2(\tilde{f} - dz) \left( b \frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ + \varepsilon \left( 2 \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - 2c^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young ( $-2ab \leq a^2 + b^2$ ), on a

$$\begin{aligned} -2(\tilde{f} - dz) \left( b \frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} \right) &\leq (\tilde{f} - dz)^2 + \left( b \frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \\ 2\tilde{f}z &\leq \tilde{f}^2 + z^2, \\ -2\tilde{f}dz &\leq \tilde{f}^2 + (dz)^2, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
 Q_3 &\leq -2dz^2 - 2\left(b\frac{\partial z}{\partial t} + a\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + (\tilde{f} - dz)^2 + \left(b\frac{\partial z}{\partial t} + a\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \\
 &\quad + \tilde{f}^2 + z^2 + \varepsilon\left(2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 - 2c^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) \\
 &\leq -2dz^2 - \left(b\frac{\partial z}{\partial t} + a\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2\tilde{f}^2 + (dz)^2 - 2\tilde{f}dz + z^2 + \varepsilon\left(2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 - 2c^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) \\
 &\leq -2dz^2 - \left(b\frac{\partial z}{\partial t} + a\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 3\tilde{f}^2 + 2(dz)^2 + z^2 + \varepsilon\left(2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 - 2c^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) \\
 &\leq (1 - 2d + 2d^2)z^2 + \varepsilon\left(2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 - 2c^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) + 3\tilde{f}^2.
 \end{aligned}$$

Donc nous avons, pour  $\varepsilon < 1$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_1 + \frac{\partial}{\partial x}Q_2 \leq Q_4 + 3\tilde{f}^2. \quad (3.5)$$

telle que  $Q_1$  et  $Q_2$  sont indiqués par (3.3) et (3.4) et  $Q_4$  par

$$Q_4 = (1 - 2d + 2d^2)z^2 + \varepsilon\left(2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 - 2c^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right). \quad (3.6)$$

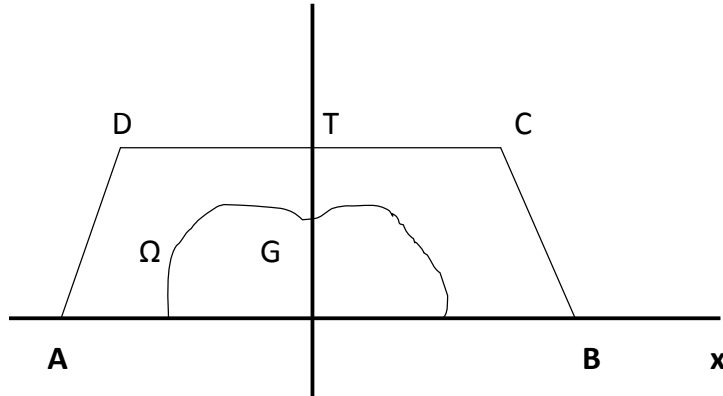


FIGURE 3.1 – Les domaines  $G$  et  $\Omega$ .

Pour estimer de  $z$  dans n'importe quel sous-ensemble compact  $\overline{G}$  dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ , Nous pouvons inclure  $G$  dans un domaine de trapèze  $\Omega$ , lié par l'axe des abscisses, un segment parallèle à l'axe des abscisses avec le  $t = T$  et deux caractéristiques avec les pentes  $c^{-1}$  et  $-c^{-1}$ , (voir figure .3.1).

Nous intégrons l'inégalité (3.5) sur le trapèze  $\Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} Q_1 dt dx + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} Q_2 dt dx \leq \int_{\Omega} Q_4 dt dx + 3 \int_{\Omega} \tilde{f}^2 dt dx$$

c.-à-d.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} dx \leq \int_{\Omega} Q_4 dt dx + 3 \int_{\Omega} \tilde{f}^2 dt dx \quad (3.7)$$

et d'après le théorème de Green

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} dx = \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} \nu ds$$

où  $\nu$  l'unité normale à  $\partial\Omega$ , donné par

$$\nu = \begin{cases} (0, -1)^t & \text{sur } [AB], \\ \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (1, c)^t & \text{sur } [BC], \\ (0, 1)^t & \text{sur } [CD], \\ \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (-1, c)^t & \text{sur } [DA]. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} \nu ds &= \int_A^B \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} ds + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \int_B^C \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} ds \\ &+ \int_C^D \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \int_D^A \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ c \end{pmatrix} ds \\ &= - \int_A^B Q_1 ds + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \int_B^C (cQ_1 + Q_2) ds \\ &+ \int_C^D Q_1 ds + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \int_D^A (cQ_1 - Q_2) ds \end{aligned}$$

et (3.7) devient

$$\begin{aligned} - \int_A^B Q_1 ds + \int_B^C (cQ_1 + Q_2) \frac{ds}{\sqrt{1+c^2}} + \int_C^D Q_1 ds + \int_D^A (cQ_1 - Q_2) \frac{ds}{\sqrt{1+c^2}} \\ \leq \int_{\Omega} Q_4 dt dx + 3 \int_{\Omega} \tilde{f}^2 dt dx \end{aligned}$$

( $ds$  est positif dans le sens antihoraire) ou encore

$$\begin{aligned} \int_D^C Q_1 dx + \int_B^C (cQ_1 + Q_2) \frac{ds}{\sqrt{1+c^2}} + \int_D^A (cQ_1 - Q_2) \frac{ds}{\sqrt{1+c^2}} \\ \leq \int_A^B Q_1 dx + \int_{\Omega} Q_4 dt dx + 3 \int_{ABCD} \tilde{f}^2 dt dx. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Cette estimation est très utile parce que les intégrants dans le côté gauche sont toutes définies positif dans  $\bar{\Omega}$ .

**Minoration du côté gauche.**

— Pour le premier du coté gauche, on a

$$Q_1 = bz^2 + 2\varepsilon z \frac{\partial z}{\partial t} + \varepsilon b \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + 2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon bc^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2,$$

d'après l'inégalité de Young ( $2ab \geq -a^2 - b^2$ ), on a

$$2\varepsilon z \frac{\partial z}{\partial t} = 2(\varepsilon^{\frac{1}{4}} z) \left( \varepsilon^{\frac{3}{4}} \frac{\partial z}{\partial t} \right) \geq -\sqrt{\varepsilon} z^2 - \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2,$$

et

$$\begin{aligned} 2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2 \left( \sqrt{\varepsilon} q \frac{\partial z}{\partial t} \right) \left( \sqrt{\varepsilon} a q^{-1} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &\geq -\varepsilon \left( q \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - \varepsilon \left( a q^{-1} \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} Q_1 &\geq (b - \sqrt{\varepsilon}) z^2 + \varepsilon (b - \sqrt{\varepsilon}) \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon bc^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial t} q \frac{\partial z}{\partial x} q^{-1} \\ &\geq (b - \sqrt{\varepsilon}) z^2 + \varepsilon (b - \sqrt{\varepsilon} - q^2) \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon (bc^2 - a^2 q^{-2}) \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

Parce que nous avons fait l'hypothèse cruciale  $b > 0$  et  $1 - \frac{a^2}{b^2 c^2} \geq \alpha, \forall x$  et  $\forall t \geq 0$ , il existe une constante  $q$  positive avec  $\frac{a^2}{b^2 c^2} < q^2 < b, \forall (x, t) \in \bar{\Omega}$ , par exemple  $q^2 = \frac{b^2 c^2 + a^2}{2bc^2}$ . Comme toutes les fonctions impliquées sont continues pour  $t \geq 0$ , alors pour  $\varepsilon$  assez petit, dire  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , on obtient

$$Q_1 \geq m \left( z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right). \forall x, t \in \bar{\Omega}. \quad (3.9)$$

où  $m$  et  $\varepsilon$  sont des constantes positives génériques, dépendant des coefficients  $a, b$  et  $c$ , mais elles sont indépendantes de  $\varepsilon$ . Les constante  $\varepsilon_0$  et  $m$  sont des constantes positives génériques qui signifie qui, s'ils le faut, peuvent être abaissés sans résultats violations des estimations précédentes, par exemple (3.9).

— En outre, il résulte de (3.3) – (3.4),

$$\begin{aligned} cQ_1 + Q_2 &= cbz^2 + 2\epsilon cz \frac{\partial z}{\partial t} + \epsilon cb \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + 2\epsilon ca \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \epsilon c^3 b \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + az^2 \\ &\quad - 2\epsilon c^2 z \frac{\partial z}{\partial x} - \epsilon a \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - 2\epsilon bc^2 \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} - \epsilon ac^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \\ &= (bc + a) z^2 + 2\epsilon cz \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \epsilon (bc - a) \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Young ( $2ab \geq -a^2 - b^2$ )

$$\begin{aligned} 2\epsilon cz \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= 2\sqrt{\epsilon} cz \sqrt{\epsilon} \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &\geq -\epsilon (cz)^2 - \epsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} cQ_1 + Q_2 &\geq (bc + a) z^2 - \epsilon (cz)^2 - \epsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \epsilon (bc - a) \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \\ &\geq (bc + a - \epsilon c^2) z^2 + \epsilon (-1 + bc - a) \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} cQ_1 - Q_2 &= cbz^2 + 2\epsilon cz \frac{\partial z}{\partial t} + \epsilon cb \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + 2\epsilon ca \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \epsilon c^3 b \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - az^2 \\ &\quad + 2\epsilon c^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + \epsilon a \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + 2\epsilon bc^2 \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \epsilon ac^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \\ &= (bc - a) z^2 + 2\epsilon cz \left( \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \epsilon (bc + a) \left( \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Young ( $2ab \geq -a^2 - b^2$ )

$$\begin{aligned} 2\epsilon cz \left( \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= 2\sqrt{\epsilon} cz \sqrt{\epsilon} \left( \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &\geq -\epsilon (cz)^2 - \epsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} cQ_1 + Q_2 &\geq (bc - a) z^2 - \epsilon (cz)^2 - \epsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \epsilon (bc - a) \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \\ &\geq (bc - a - \epsilon c^2) z^2 + \epsilon (-1 + bc + a) \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

En utilisant encore la relation  $1 - \frac{a^2}{b^2c^2} = p^2 > 0$ , nous obtenons pour  $\varepsilon$  suffisamment petit,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$cQ_1 \pm Q_2 \geq m \left\{ z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \mp c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right\}, \forall (x, t) \in \bar{\Omega}.$$

Où  $m$  dépend encore de  $a, b, c$  et  $\bar{\Omega}$ .

### Majoration du côté droit.

Pour le côté droit, on a

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_4 = & bz^2 + 2\varepsilon z \frac{\partial z}{\partial t} + \varepsilon b \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + 2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon bc^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + (1 - 2d + 2d^2) z^2 \\ & + \varepsilon \left( 2 \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - 2c^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} |Q_1| + |Q_4| \leq & |(b + 1 - 2d + 2d^2)| z^2 + \varepsilon \left| \left( 2 \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - 2c^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) \right| \\ & + 2 \left| \varepsilon u \frac{\partial z}{\partial t} \right| + 2 \left| \varepsilon a \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} \right| + \varepsilon \left| b \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \right| + \varepsilon \left| bc^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right|. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young ( $2ab \leq a^2 + b^2$ )

$$\begin{aligned} 2\varepsilon a \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2\sqrt{\varepsilon} a \frac{\partial z}{\partial t} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial z}{\partial x} \leq \varepsilon \left( a \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \\ 2\varepsilon u \frac{\partial z}{\partial t} &= 2(\varepsilon^{\frac{1}{4}} z) \left( \varepsilon^{\frac{3}{4}} \frac{\partial z}{\partial t} \right) \leq \sqrt{\varepsilon} z^2 + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |Q_1| + |Q_4| \leq & |(b + 1 - 2d + 2d^2 + \sqrt{\varepsilon})| z^2 + \varepsilon \left| \left( 2 \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - 2c^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) \right| \\ & + \varepsilon b \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon bc^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \left( a \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \\ \leq & |(b + 1 - 2d + 2d^2 + \sqrt{\varepsilon})| z^2 + \varepsilon |(3 + b + \sqrt{\varepsilon})| \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \\ & + \varepsilon |(-2c^2 + a^2 + bc^2)| \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

D'autre part il vient de (3.3), (3.6) et la régularité des coefficients  $a, b, c$  et  $d$  qu'il existe un  $M$  constante, en fonction de ces coefficients et sur  $\bar{\Omega}$ , mais indépendante de  $\varepsilon$ , tel que

$$|Q_1| + |Q_4| \leq M \left( z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right), \forall (x, t) \in \bar{\Omega} \text{ et } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (3.10)$$

**Estimations dans  $L^2(\Omega)$ .**

Le remplacement des inégalités (3.9) – (3.10) dans (3.8) donne

$$\begin{aligned} & m \int_D^C z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{m}{\sqrt{1+c^2}} \left( \int_B^C z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) ds \\ & + \frac{m}{\sqrt{1+c^2}} \int_D^A z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 ds \\ & \leq M \int_{\Omega} \left( z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) dt dx \\ & + M \int_A^B \left( z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) dx + 3 \int_{\Omega} \tilde{f}^2 dt dx \\ & = M \int_{\Omega} \left( z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) dt dx + K(\Omega) \end{aligned} \quad (3.11)$$

où  $K$  est déterminé par les conditions initiales (3.2) le  $\tilde{f}$ ,

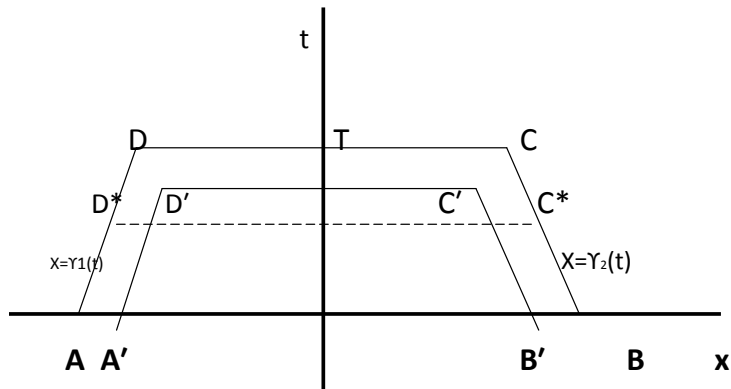
$$\begin{aligned} K(\Omega) &= M \int_A^B \left( z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) dx + 3 \int_{\Omega} \tilde{f}^2 dt dx \\ &= M \int_A^B \left( z^2(x, 0) + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x}(x, 0) \right)^2 \right) dx + 3 \int_{\Omega} \tilde{f}^2 dt dx \\ &= M \int_A^B \left( \tilde{g}^2 + \varepsilon \tilde{h}^2 + \varepsilon \frac{d\tilde{g}^2}{dx} \right) dx + 3 \int_{\Omega} \tilde{f}^2 dt dx \end{aligned}$$

c à d.

$$K(\Omega) = M \left( \|\tilde{g}(x)\|_{[AB]}^2 + \varepsilon \|\tilde{h}(x)\|_{[AB]}^2 + \left\| \frac{d\tilde{g}}{dx} \right\|_{[AB]}^2 \right) + 3 \|\tilde{f}\|_{ABCD}^2, \quad (3.12)$$

avec  $\|\tilde{g}(x)\|_{AB}$  la norme dans  $L^2$  de la fonction  $\tilde{g}$  par rapport à l'intervalle d'intégration  $AB$  et de même pour les autres termes.

Comme les estimations de tous les intégrants sont valables dans le domaine toute  $\bar{\Omega}$  l'inégalité (3.11) est également valable pour n'importe quel domaine  $ABC^*D^* < ABCD$  avec les mêmes valeurs de  $m, M$  et  $K(\Omega)$ , (voir figure 3.2).


 FIGURE 3.2 – Les domaines  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  et  $ABC^*D^*$ .

Par conséquent, il résulte de (3.11)

$$\int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx \leq \frac{1}{m} K(\Omega) + \frac{M}{m} \int_0^t \left( \int_{\gamma_1(\tau)}^{\gamma_2(\tau)} \left( z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) d\tau,$$

valide pour  $0 \leq t \leq T$  et  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . En utilisant maintenant le lemme de Gronwall nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} \left( z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) dx &\leq \frac{1}{m} K(\Omega) e^{\frac{M}{m}t} \\ &\leq \frac{1}{m} K(\Omega) e^{\frac{M}{m}T} = C(\Omega) K(\Omega), \end{aligned} \quad (3.13)$$

valide pour  $0 \leq t \leq T$  et  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , et avec  $C(\Omega) = \frac{1}{m} K(\Omega) e^{\frac{M}{m}T}$ . Cette constante  $C(\Omega)$  sera utilisé comme une constante générique, tandis que  $K(\Omega)$  reste fixe et elle est définie par (3.12), alors  $C(\Omega)$  peut être soulevée sans violer les résultats antérieurs.

Deux autres estimations de  $L^2$  pour  $z$  peuvent être obtenus en appliquant (3.11) à un domaine  $A'B'C'D'$  (voir figure 3.2) et en utilisant l'estimation (3.13). Nous obtenons les inégalités

$$\int_{B'}^{C'} \left( z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) ds \leq C(\Omega) K(\Omega),$$

et

$$\int_{D'}^{A'} \left( z^2 + \varepsilon \left( \frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) ds \leq C(\Omega) K(\Omega).$$

valable pour tous les segments caractéristiques  $B'C'$  et  $D' A'$  à l'intérieur  $\Omega$  et pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .

### Estimations ponctuelles

Nous avons trois estimations dans la norme  $L^2$  pour une combinaison de  $z$  et de ses dérivées premières

$$\int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} z^2 dx \leq C(\Omega)K(\Omega), \quad \varepsilon \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx \leq C(\Omega)K(\Omega), \quad \varepsilon \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx \leq C(\Omega)K(\Omega), \quad (3.14)$$

il n'est pas difficile d'obtenir une estimation ponctuelle pour la fonction  $z(x, t)$ , uniforme valable pour  $\varepsilon$  suffisamment petit dans  $\Omega$ .

Avec l'aide de l'inégalité de Schwarz nous ont les estimations suivantes dans  $\Omega$ , (voir figure 3.2)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1(t)}^x z(\zeta, t) \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta, t) d\zeta &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} |z(\zeta, t)|^2 \Big|_{\gamma_1(t)}^x \\ &= \frac{1}{2} z^2(x, t) - \frac{1}{2} z^2(\gamma_1(t), t), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |z^2(x, t) - z^2(\gamma_1(t), t)| &= \left| 2 \int_{\gamma_1(t)}^x z(\zeta, t) \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta, t) d\zeta \right| \\ &\leq 2 \int_{\gamma_1(t)}^x |z(\zeta, t)| \left| \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta, t) \right| d\zeta \\ &\leq 2 \left( \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} z^2(\zeta, t) d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta, t) \right)^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Young ( $2ab \leq a^2 + b^2$ )

$$|z^2(x, t) - z^2(\gamma_1(t), t)| \leq \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} z^2(\zeta, t) d\zeta + \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta, t) \right)^2 d\zeta,$$

et à partir de (3.13), on a aussi

$$\begin{aligned} \left( \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} z^2(\zeta, t) d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} &\leq (C(\Omega)K(\Omega))^{\frac{1}{2}}, \\ \left( \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta, t) \right)^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (C(\Omega)K(\Omega))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$|z^2(x, t) - z^2(\gamma_1(t), t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C(\Omega) K(\Omega).$$

D'un part

$$z^2(\gamma_1(t), t) - z^2(x, t) \leq |z^2(x, t) - z^2(\gamma_1(t), t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C(\Omega) K(\Omega)$$

donc

$$z^2(\gamma_1(t), t) \leq z^2(x, t) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C(\Omega) K(\Omega)$$

d'après l'intégration de ce résultat par rapport à  $x$  entre les limites  $\gamma_1(t)$  et  $\gamma_2(t)$  nous avons

$$\int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} z^2(\gamma_1(t), t) dx \leq \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} z^2(x, t) dx + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} C(\Omega) K(\Omega) dx$$

donc

$$(\gamma_2(t) - \gamma_1(t)) z^2(\gamma_1(t), t) \leq \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} z^2(x, t) dx + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\gamma_2(t) - \gamma_1(t)) C(\Omega) K(\Omega)$$

ou encore

$$\theta_1 z^2(\gamma_1(t), t) \leq \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} z^2(x, t) dx + \frac{\theta_2}{\sqrt{\varepsilon}} C(\Omega) K(\Omega)$$

où  $\theta_1 = \min_{0 \leq t \leq T} (\gamma_2(t) - \gamma_1(t)) = \overline{CD}$  et  $\theta_2 = \max_{0 \leq t \leq T} (\gamma_2(t) - \gamma_1(t)) = \overline{AB}$ . En utilisant (3.14), il vient

$$\begin{aligned} \theta_1 z^2(\gamma_1(t), t) &\leq C(\Omega) K(\Omega) + \frac{\theta_2}{\sqrt{\varepsilon}} C(\Omega) K(\Omega) \\ &\leq C(\Omega) K(\Omega) \left( 1 + \frac{\theta_2}{\sqrt{\varepsilon}} \right). \end{aligned}$$

D'autre part

$$z^2(x, t) - z^2(\gamma_1(t), t) \leq |z^2(x, t) - z^2(\gamma_1(t), t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C(\Omega) K(\Omega) \quad (3.15)$$

c à d.

$$z^2(x, t) \leq z^2(\gamma_1(t), t) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C(\Omega) K(\Omega)$$

L'intégration de ce résultat par rapport à  $x$  entre les limites  $\gamma_1(t)$  et  $\gamma_2(t)$  donne

$$\int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} z^2(x, t) dx \leq \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} z^2(\gamma_1(t), t) dx + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\gamma_1(t)}^{\gamma_2(t)} C(\Omega) K(\Omega) dx$$

on a

$$z^2(\gamma_1(t), t) \leq C(\Omega)K(\Omega) \left( \theta_1^{-1} + \frac{\theta_2 \theta_1^{-1}}{\sqrt{\varepsilon}} \right).$$

Recueillons les deux équations précédentes, nous trouvons

$$z^2(x, t) + z^2(\gamma_1(t), t) \leq z^2(\gamma_1(t), t) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C(\Omega)K(\Omega) + C(\Omega)K(\Omega) \left( \theta_1^{-1} + \frac{\theta_2 \theta_1^{-1}}{\sqrt{\varepsilon}} \right),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} z^2(x, t) &\leq C(\Omega)K(\Omega) \left( \frac{(\theta_2 \theta_1^{-1} + 1)}{\sqrt{\varepsilon}} + \theta_1^{-1} \right) \\ &\leq (\theta_2 \theta_1^{-1} + 1) C(\Omega)K(\Omega) \left( 1 + \frac{\sqrt{\varepsilon} \theta_1^{-1}}{(\theta_2 \theta_1^{-1} + 1)} \right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ &\leq \frac{2(\theta_2 \theta_1^{-1} + 1)}{\sqrt{\varepsilon}} C(\Omega)K(\Omega), \end{aligned}$$

pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. L'absorption de  $2(\theta_2 \theta_1^{-1} + 1)$  en  $C(\Omega)$  et en prenant la racine, donne

$$z(x, t) \leq \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \sqrt{C(\Omega)K(\Omega)}.$$

Finalement, On a le théorème suivant

**Théorème 3.1** *La solution du problème de valeur initiale*

$$\varepsilon \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial t} + d(x, t)z = \tilde{f}(x, t),$$

avec

$$z(x, 0) = \tilde{g}(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = \tilde{h}(x), x \in \mathbb{R}.$$

et hypothèses de régularité 1 et 2, satisfait pour  $\varepsilon$  suffisamment petit l'estimation ponctuelles suivant

$$z(x, t) \leq \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \sqrt{C(\Omega)K(\Omega)} \tag{3.16}$$

uniformément valable dans n'importe quel domaine  $G$  compact dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ . Les constantes  $C(\Omega)$  et  $K(\Omega)$  dépendent des coefficients  $a, b, c, d$  et le domaine  $\Omega$ , tandis que  $K(\Omega)$  dépend de  $\tilde{f}$  et les données initiales, celle-ci est donnée par la relation (3.12).

## 3.2 Estimation du reste de l'approximation et taux de convergences

Considérons de nouvelle approximation formelle du problème de valeur initiale (2.1) – (2.4). Le résultat se lit

$$u_\varepsilon(x, t) = w(x, t) + v\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) + R_\varepsilon(x, t), \quad (3.17)$$

où  $w(x, t)$  est la solution du problème réduit

$$\begin{cases} a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial t} + dw = \tilde{f}(x, t) & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = \tilde{g}(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et la correction de la couche limite  $v(x, \frac{t}{\varepsilon})$  est donnée par (2.16). Le terme de reste  $R_\varepsilon(x, t)$  satisfait selon les équations (2.18) – (2.21), le problème de valeur initiale

$$\varepsilon \left( \frac{\partial^2 R_\varepsilon}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 R_\varepsilon}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial x} + b \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial t} + dR_\varepsilon = O(\varepsilon),$$

uniformément dans n'importe quel domaine compact en  $t > 0$ , avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(x, 0) &= -v(x, 0) = -\varepsilon \frac{\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) - h(x)}{b} = O(\varepsilon), \\ \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) &= 0, \end{aligned}$$

aussi uniformément valable dans n'importe quel segment borné de l'axe des  $x$ .

Nous pouvons maintenant estimer le reste  $R_\varepsilon(x, t)$  et de ses dérivés en appliquant le résultat du théorème du section précédente. En (3.12), On a

$$\tilde{f} = O(\varepsilon),$$

et

$$\tilde{h}(x) = \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

et selon les conditions initiales

$$\tilde{g}(x) = R_\varepsilon(x, 0) = O(\varepsilon),$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_\varepsilon}{\partial x}(x, 0) &= \frac{d\tilde{g}}{dx} \\ &= -\varepsilon \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}(x, 0) - \frac{\partial h}{\partial x}(x)}{b} \\ &= O(\varepsilon),\end{aligned}$$

en substituant ces expressions dans (3.12) on trouve

$$K(\Omega) = M \left( \|O(\varepsilon)\|_{[AB]}^2 + \varepsilon \|O(\varepsilon)\|_{[AB]}^2 \right) + 3 \|O(\varepsilon)\|_{ABCD}^2 = O(\varepsilon^2).$$

donc par (3.16)

$$R_\varepsilon(x, t) \leq \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \sqrt{C(\Omega)K(\Omega)} = \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \sqrt{C(\Omega)\varepsilon^2} = \varepsilon^{\frac{3}{4}} \sqrt{C(\Omega)}.$$

alors

$$R_\varepsilon(x, t) = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\right),$$

uniformément dans tout domaine compact avec  $t \geq 0$ .

Employer finalement (3.17)

$$v\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \frac{\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0)}{b} e^{-b\frac{t}{\varepsilon}} = O(\varepsilon),$$

donc

$$R_\varepsilon(x, t) + v\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\right) + O(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\right),$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial x}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}(x, 0)}{b} e^{-b\frac{t}{\varepsilon}},$$

pour  $t = O(\varepsilon)$ , et nous pouvons conclure que

$$\frac{\partial v}{\partial x}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon).$$

Nous avons aussi

$$\frac{\partial v}{\partial t}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, 0) e^{-b\frac{t}{\varepsilon}} = O(1).$$

### 3.3 Résultats finals

Finalement, nous avons démontré le théorème suivant.

**Théorème 3.2** *Soit  $u_\varepsilon(x, t)$  la solution du problème de valeur initiale*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + du_\varepsilon = f(x, t) & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

*Supposons que toutes les données sont de classe  $C^\infty$  avec  $b > 0$ ,  $c > 0$ , et que les sous-caractéristiques sont de timelike dans la région  $t \geq 0$ . Alors, pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, on a l'approximation suivant de  $u_\varepsilon(x, t)$*

$$u_\varepsilon(x, t) = w(x, t) + O\left(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\right),$$

*de manière uniforme valable dans n'importe quel domaine  $G$  compact dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ .*

*Où  $w(x, t)$  est la solution du problème réduit*

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial t} + dw = f(x, t) & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

Les résultat de ce théorème peut être amélioré.

**Théorème 3.3** *L'approximation de la solution  $u_\varepsilon(x, t)$  du problème de valeur initiale (2.10)-(2.11) est donnée par*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) &= w_0(x, t) + O(\varepsilon), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x, t) &= \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, t) + O(\varepsilon), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial w_0}{\partial t}(x, t) + \left( h(x) - \frac{\partial w_0}{\partial t}(x, 0) \right) e^{-b\frac{t}{\varepsilon}} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

*de manière uniforme valable pour tous domaine compact  $G$  dans  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ .*

Pour la démonstration, et pour plus de resultats, voir [1, 2].

# Conclusion

Dans ce mémoire, on a utilisé la méthode des développements asymptotiques raccordés (Matched asymptotic expansions) pour approcher la solution du problème hyperbolique perturbé suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \right) + a \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + b \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + du_\varepsilon = f(x, t) & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

par la solution du problème plus simple

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial t} + dw = f(x, t) & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

Sous certain hypothèse, on a démontré que cette approximation est de l'ordre de  $O\left(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\right)$ .

# Bibliographie

- [1] E.M.DE JAGER AND J. FURU, *The Theory of Singular Perturbations*, Vol **42**, Elsevier, **1996**.
- [2] R.GEEL, *Singular Perturbations of Hyperbolic Type*, Math Ematisch Centrum Amsterdam, **1978**
- [3] M. H. HOLMES, *Introduction to perturbation methods*, Springer, **2012**.
- [4] S. SALSA, *Partial Differential Equations in Action, From Modelling to Theory*, Springer, **2008**.
- [5] W.A. STRAUSS, *Partial Differential Equations, An Introduction*, John Wiley & sons, **2007**.
- [6] F. VERHULST, *Methods and Applications of Singular Perturbations, Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics*, Springer, **2006**.