UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse numérique et mathématique

Par

Dallel M'hamdia

Sujet

Les polynômes orthogonaux dans les espaces de Hilbert

Devant le jury :

NADIR Mostefa	prof	Univ de M'sila	Président
LAKEHALI Belkacem	MCA	Univ de M'sila	Encadreur
KHIRANI Amina	MCB	Univ de M'sila	Examinateuse

Promotion : 2018 / 2019

Dédicace

Je dédie ce travail :

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie, et bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi ***Mon père****.*

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, ***maman*** *que j'adore.*

Et au lien de ma vie avec eux, la vertu la plus haute après le Dieu et les parents, mon oncle le plus cher **thameur et sa femme.**

A mon fiancé **Abd Elrazak.**

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, mes frères : ***Saber****,* ***Abd Elsalem*** *sans oubliés mes sœurs:* ***Rima*** *et* ***chahraZad****.*

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, mes aimables amis, et frères de cœurs, à toi **Meskia, Sara, Ibtissem, Amel et Amel.**

Remerciements

Au nom d'Allah ,le tout Miséricordieux , le très miséricordieux

Nous remercions tout d'abord ***Allah*** *de nous avoir donné la volonté, la santé et le courage pour mener à détermine ce mémoire .*

Un remerciement particulier à monsieur ***LAKEHALI Belkacem*** *pour son aide , aussi pour ses conseils et ses encouragements le long de cette période*

Nous remercions les membres de la jury qui ont accepté de juger ce travail

Nous remercions aussi tous ceux qui me sont venus en aide au cours d'élaboration de ce mémoire, tout particulièrement : tous mes enseignants de primaire jusqu'à l'université.

Pour tous mes collègues de promotion 2019 pour les bons moments que nous avons passés ensemble et nous les souhaitons le bonheur et réussite dans la vie.

Table des matières

Introduction :

Les polynômes orthogonaux sont un sujet d'étude pour les mathématiens depuis longtemps. A titre d'exemple, Adrien-Marie Legendre en était arrivé dès le début du XIX^{ème} siècle à considérer la suite de polynômes orthogonaux aux quels son nom maintenant associé, les polynômes de Legendre, dans le cadre de ses calculs concernant la mécanique céleste, depuis cette époque jusqu'à aujourd'hui, la théorie concernant ces polynômes n'a cessé de croitre en précision et aussi en importance. Les polynômes orthogonaux sont devenus des outils d'approximation très utiles, puisque d'autres application se sont développées .

Ce mémoire se veut une introduction à l'étude des polynômes orthogonaux, qui soit accessible et rigoureuse.

Le premier chapitre consiste à représenter l'espace de Hilbert .

Le 2ème chapitre traite le sujet de polynômes orthogonaux, puis on cite les propriétés qui caractérisent ces polynômes, et on le termine par l'étude des classes des polynômes orthogonaux (définition, formule de Rodriguez, …).

L'objectif principale de dernier chapitre est d'utiliser les polynômes orthogonaux dans la quadrature de Gauss (intégration numérique), puis on applique la méthode de quadrature de Gauss- Legendre sur un exemple.

Chapitre 1

Espace de Hilbert

1.1 Espace vectoriel normé

produit scalaire :

Soit E un espace vectoriel, le produit scalaire est une opération algébrique s'ajoutant aux lois s'appliquant aux vecteurs u, v. C'est une forme bilinéaire symétrique et définie positive, définit par l'application :

$$\begin{array}{rcl} \varphi & : & E * E \to \mathbb{k}. \\ (u,v) & \to & < u,v > \end{array}$$

qui vérifié les conditions suivantes :

$\forall u, v, w \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}.$

1. $\langle u,u \rangle \geqslant 0, \langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$
2. $\langle u+w, v \rangle = \langle u,v \rangle + \langle w,v \rangle$
3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u,v \rangle .$

Définition 1 *Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{k}$ et $F = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs avec $I = [a,b]$. On dit que F est une base de Hilbert (ou bien base Hilbertienne) de H si :*

1. F est une famille orthonormée de H, c'est-à-dire :
   $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0.$
   $\forall i \in \mathbf{I}$, $\langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1.$
2. La famille F est de plus complète ou total, c'est-à-dire :

l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de F est dense dans H.

Proposition 2 *Soit E un espace vectoriel de dimension fini ou infinie muni d'un produit scalaire hermitien $\langle .,. \rangle$ alors l'application :*

$$u \to \sqrt{\langle u,u \rangle} = \|u\| \,.$$

définit une norme sur E.

Définition 3 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est dit espace vectoriel normé lorsqu'il muni d'une norme $\|.\|$*

$$\begin{array}{rcl} \|.\| & : & E \to \mathbb{R}^+ \\ x & \to & \|x\| \end{array}$$

Satisfait les hypothèses suivantes :
$\forall\ x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{k}$:

1. $\|x\| > 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

1.1.1 Suite convergente

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n > N : |u_n - l| < \varepsilon.$$

1.1.2 Suite de cauchy

Définition 4 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de E est dite de cauchy si, et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p, q\ , \forall N \geqslant p, q\ ,\ |U_p - U_q| < \varepsilon.$$

Proposition 5 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé, alors :*

1. Toute suite convegente est de cauchy, mais l'inverse n'est pas vraie.

2. Si toute suite de cauchy est convergente, alors $(E, ||.||)$ est complet.

Définition 6 *Un espace vectoriel normé complet muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert.*

Dans toute la suite, on considère que l'espace $L^2([a,b], ||.||_2)$ avec :

$$L^2([a,b], |.|) = \{\ f : [a,b] \to \mathbb{R}, \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\ \}.$$

muni de la norme : $\|.\|_2 = \left(\int\limits_a^b |\ f\ (x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$

1.1.3 Orthogonalité

Définition 7 *Soit $(E, < .,. >)$ un espace préhilbertien. On dit que deux vecteurs u, v sont orthogonaux si :*

$$< u, v > \ = 0, \ \textit{et on note } x \perp y$$

Une famille de vecteurs de E est dite orthogonale si tous les vecteurs de cette famille sont deux à deux orthogonaux .

Chapitre 2

Les polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux jouent un rôle trés important dans les méthodes spectrales, donc il est nécessaire d'avoir une étude approffondue de leurs propriétés pertinentes. Notre point de départ est l'espace des polynômes et on étude leurs propriétés, puis on donne des exemples classiques.

2.1 Espace des polynômes

L'étude des polynômes orthogonaux à une variable nécessite de travailler dans l'espace vectoriel des polynômes à une variable réelle $\mathbb{R}[x]$.

Une base de cet espace est constituée des monômes x^n, $n \in \mathbb{N}$ .Un polynôme $P_n(x)$ est de degré n s'il s'écrit de la façon suivante :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

avec $a_n \neq 0$, les constantes non nulles sont donc des polynômes de degrée 0.

2.2 Définition de l'orthogonalité

Le produit scalaire entre deux fonction $f(x)$ et $g(x)$ définit par l'intégrale :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx.$$

où $\omega(x) \geqslant 0$, et pour $a < x < b$.

C'est la généralisation de l'idée d'un produit scalaire de deux vecteurs de dimention fini a un dimention infinie .

Si le produit scalaire égale à 0, nous disons que les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont orthogonales .

2.3 Propriétés des polynômes orthogonaux

Tout les ensembles de polynômes orthogonaux ont un certain nombre de propriétés :

- Tout les polynômes $f(x)$ de degrée n peut être élargi en termes $p_0, p_1...p_n$ s'il existe les coéfficients a_i tel que :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i p_i(x).$$

- On donne l'ensemble du polynôme $\{p_0(x),\, p_1(x), ...\}$ sont deux à deux orthogonaux.
- Chaque polynôme dans $\{p_0(x), p_1(x), ...\}$ à n racines réelles, distincts et strictement dans l'intervalle $[a, b]$.
- Entre deux racines (zéros) de $P_n(x)$ il y'a au moins un zéro de $P_m(x)$ pour $m > n$. Voir [4].

2.4 Equation différentielle

Il est possible de définir certaines familles de polynômes orthogonaux par une équation différentielle .

Théorème 8 *Soit* $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de polynômes orthogonaux définie à l'aide d'une formule Rodriguez alors,* $P_n(x)$ *satisfait pour* $n \geqslant 0$ *une équation différentielle de la forme :*

$$A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_n y = 0.$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes quadratiques, le premier à deux racines réelles, et l'autre à une racine située entre les deux racines de $B(x)$ et ils ne dépand pas de n, et λ_n ne dépand de x.

Preuve. Voir [4] p.31 ■

2.5 Polynômes classiques

Nous souhaitons rappeler dans ce chapitre les notions de base concernant les polynômes orthogonaux à une variable (définition, formule de Rodriguez, équation différentielle, ...) :

2.5.1 Polynômes de Jacobi

Les polynômes de Jacobi est les plus général des polynômes orthogonaux classiques dans le domaine $[a, b]$ noté par $J_n^{\alpha,\beta}(x)$, avec la fonction de poids

$$\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \text{ avec } \alpha, \beta > -1.$$

Toutes les autres polynômes orthogonaux dans ce domaine sont des cas paticuliers, parmi lesquels :

1. Polynômes de Legendre si :$\alpha = \beta = 0$.
2. Polynômes Gegenbauer :$\alpha = \beta$.
3. Polynômes de tchebychef de première espèce : $\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$.
4. Polynômes de tchebychef de deuxième espèce : $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Nous définissons les polynômes de Jacobi (nommés ainsi car c'est Jacobi qui les a introduits en 1859) par l'équation suivante :

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}).$$

– **Equation différentielle**
Les polynômes de Jacobi sont des solutions de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x)y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0.$$

– **Formule de Rodriguez**
La formule de Rodriguez pour les polynômes de Jacobi est indiquée ci-dessous :

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}J_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}].$$

Voir [1] p 72

2.5.2 Polynôme de Legendre

Les polynômes de Legendre définient sur le domaine $[-1,+1]$, avec la fonction de poids $w(x)=1$.

Les polynômes de Legendre notés l_n (n entier positif) peuvent être définis de differentes manières :

$$l_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

$$l_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(\frac{n!}{k!(n-k)!})^2(x-1)^k(x+1)^{n-k}.$$

Les polynômes de Legendre sont des cas particuliers de Jacobi avec : $\alpha=\beta=0$.

$$l_n(x)=J_n^{(0,0)}(x)\ .\ n\geqslant 1,\ x\in[-1,1].$$

les premiers polynômes de Legendre:
$l_0(x)=1.$
$l_1(x)=x$
$l_2(x)=\dfrac{(3x^2-1)}{2}.$
$l_3(x)=\dfrac{(5x^3-3x)}{2}.$
$l_4(x)=\dfrac{(35x^4-30x^2+3)}{8}.$
$l_5(x)=\dfrac{(63x^5-70x^3+15x)}{8}.$
$l_6(x)=\dfrac{(231x^6-315x^4+105x^2-5)}{16}$
Le graphe de $l_n(x)$ de $n=1,...,5$.

– **Equation différentielle**
Les polynômes de Legendre sont des solutions de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0.$$

– **Formule de Rodriguez**

$$l_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n],\ n\geqslant 0.$$

– **Orthogonalité**

Les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[x]$, relativement à la fonction de poids $\omega(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1, +1]$.

$$\int_{-1}^{+1} l_n(x) l_m(x) dx = \gamma_n \delta_{mn}.$$

avec

$$\gamma_n = \frac{2}{2n+1}.$$

avec

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ 1 \text{ si } n = m \end{cases}$$

En particulier Le carré de la norme, dans $L^2([-1, +1])$ est :

$$\|l_2\| = \left(\int_{-1}^{+1} l_n^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

– **Propriètés :**

1. les l_i sont définis dans [-1,+1].
2. toutes les racines de $l_i \in [-1, +1]$.
3. toutes les racinrs sont réelles.
4. toutes les polynômes l_i sont orthogonaux deux à deux.

2.5.3 Polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre notés par $L_n(x)$ qui sont orthogonaux par rapport à la fonction poids $\omega_\alpha(x) = x^\alpha \exp(-x)$, sur le domaine $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

$$\int_{0}^{+\infty} L_n(x) L_m(x) \omega_\alpha(x) dx = \gamma_n^\alpha(x) \delta_{mn}.$$

avec

$$\gamma_n^\alpha = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}.$$

avec

$$\Gamma(x) = x \to \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

où

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

i.e :

$$\int_0^{+\infty} L_n(x) L_m(x) \exp(-x) dx = \delta_{mn}.$$

Les premiers polynômes de Laguerre sont :

$L_0(x) = 1.$

$L_1(x) = 1 - x.$

$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}.$

$L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3.}{6}$

$L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{24}.$

$L_5(x) = 1 - 5x + 5x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} - \frac{x^5}{120}.$

$L_6(x) = 1 - 6x + \frac{15x^2}{2} - \frac{10x^3}{3} + \frac{5x^4}{8} - \frac{x5}{20} + \frac{x^6.}{720}.$

Les graphes du premiers polynômes de Laguerre :

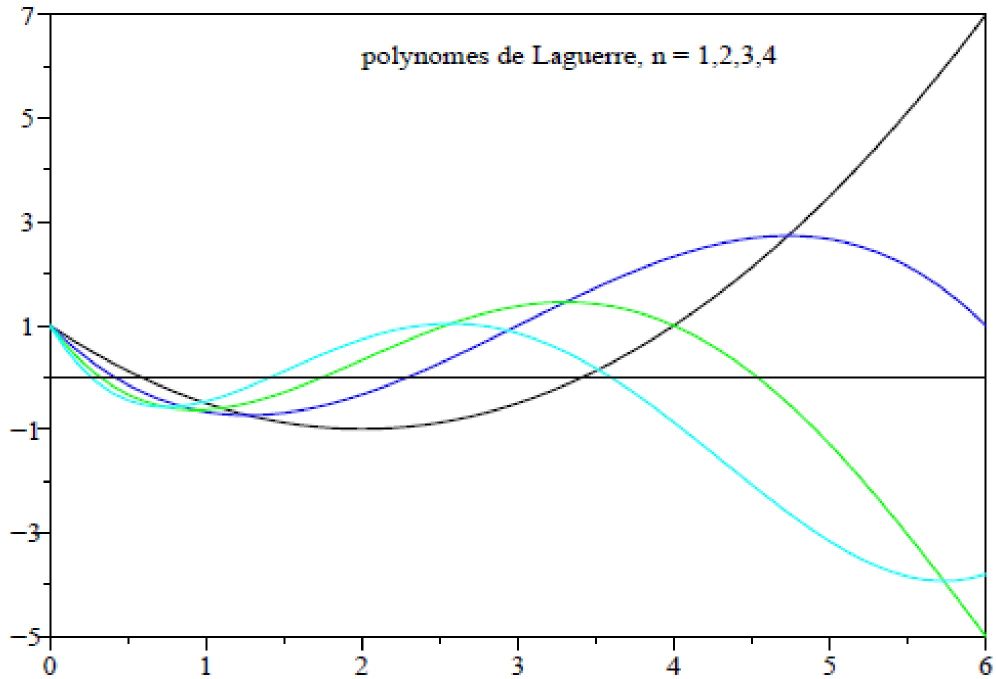

Figure (b)

– **Equation différentielle**
L'équation différentielle associé au polynôme de Laguerre est :

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + \lambda y = 0.$$

– **La formule de Rodriguez**

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}\exp(x)}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}\exp(-x)$$

2.5.4 Polynôme de Hermite

Les polynômes d'Hermite sont définis de deux manières différentes notés $H_n(x)$ définis sur le domaine ouvert $]-\infty, +\infty[$, avec la fonction de poids :

$$\omega(x) = \exp(\frac{-x^2}{2})$$

par :

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) \exp(-x^2) dx = 0$$

Les premiers polynômes de Hermite sont :

$H_0(x) = 1.$

$H_1(x) = 2x.$

$H_2(x) = 4x^2 - 2.$

$H_3(x) = 8x^3 - 12x.$

$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$

$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$

$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120.$

Les graphes du premiers polynômes d'Hermite :

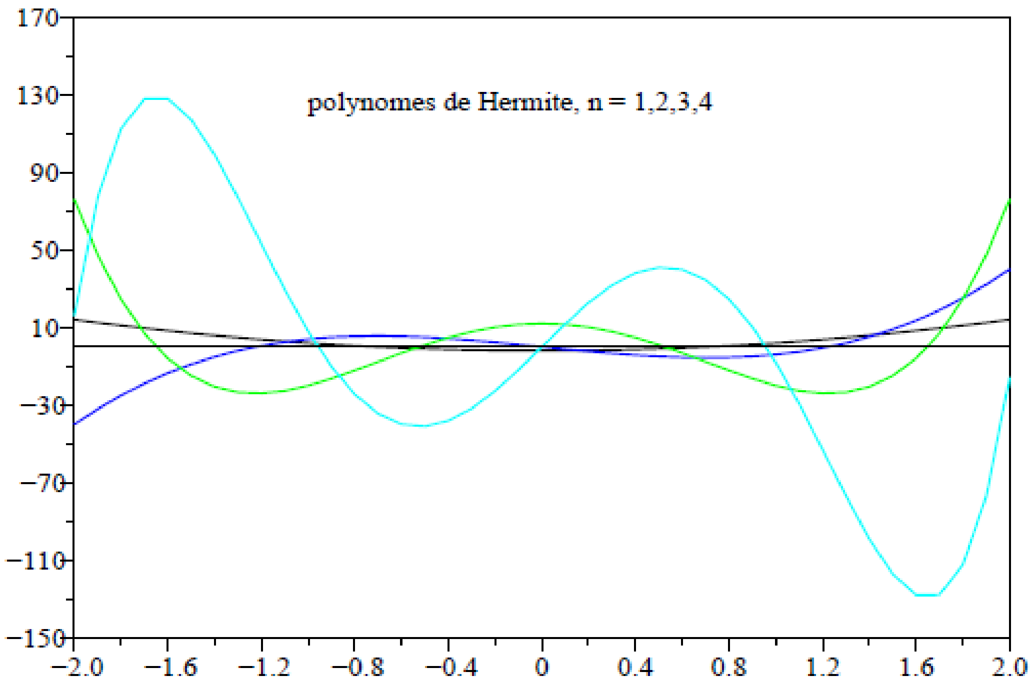

Figure (c)

– **Equation différentielle**
L'équation différentielle associé au polynôme d'Hermite est :

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0.$$

– **Formule de Rodriguez**
La formule de Rodriguez s'écrit sous la forme :

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(x^{-2}).$$

et nous avons l'expression éxplicite :

$$H_n(x) = \sum_{n=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^K n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

polynôme	Symbole	fonction du poids	intervalle
Jacobi	$J_n^{\alpha,\beta}$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$[a,b]$
Legendre	l_n	1	$[-1,+1]$
Laguerre	L_n	$x^\alpha \exp(-x), \alpha > -1$	$[0,+\infty]$
Hermite	H_n	$\exp(-x^2)$	$]-\infty,+\infty[$

Chapitre 3

Quadrature de Gauss

On à étudié dans les années passés des méthodes d'intégration numériques .Parmi ces méthodes on cite newton-côtes (rectangle, trapèze, et simpson, ...), pour calculer l'intégrale du fonctions par la formule :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N} \omega_i f(x_i).$$

Avec les w_i sont appelés poids d'intégration et les x_i points (les noeuds) d'intégration. Ces méthodes sont exactes pour les polynôme de degrée N. Mais, elles ont une précision faible et le choix de x_i est arbitraire. Cherchons maintenant à atteindre un degrée de précision supérieur avec une méthode analogue qui est mieux que les autres. Ce sont les quadratures de Gauss, qui sont des approximations d'une intégrale. En générale, on remplace l'intégrale par une somme pondérée prise en un certaine nombre de points du domaine d'intégration.Voir [6]

Nous discutons maintenant des relations entre les polynômes orthogonaux et les quadrature de Gauss. Le mécanisme d'une quadrature de Gauss est de rechercher la meilleure approximation numérique, il appartient a la famille des quadratures numériques.

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{N} \omega_i f(x_i) + E_N[f].$$

Les méthodes de Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$ utilisent une subdivision particulière où les points x_i sont les racines d'une famille de polynômes orthogonaux, qui ne sont pas régulièrement espacés, contrairement aux méthodes composées, w_i sont les poids de la quadrature, et $E_N[f]$ est l'erreur de la quadrature .

Si $E_N[f] = 0$, on dit que la formule de quadrature est exact pour f. Nous supposons que les noeuds x_i sont distincts si $f(x) \in C^{N+1}[a,b]$.

On à :

$$E_N[f] = \frac{1}{(N+1)!} \int_a^b f^{(N+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{N} (x - x_i) dx.$$

voir [3]

Soit $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ l'ensemble du zéros des polynômes orthogonaux P_{N+1}, alors il exist un ensemble unique de poids de quadrature $\{w_i\}_{i=0}^{N}$, tel que :

$$\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{N} p(x_i)w_i \ , \forall \ p \in P_{2N+1}.$$

où les poids de quadrature sont tous positifs .

Preuve. voir [1] p : 58 ■

3.1 Quadrature de Gauss-Jacobi

Il est simple d'avoir la formule d'intégration de type de Jacobi des règles générales. Dans le cas de Jacobi la formule générale de quadrature écrit comme suit :

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega^{(\alpha,\beta)}(x)dx = \sum_{i=0}^{N} \omega_i P(x_i) + E_N[p].$$

Rapelle que l'erreur de quadrature $E_N[p] = 0$, on dit que la formule est exact pour p.

La formule quadrature de Gauss -Jacobi est exact pour tout p, avec x_i, ω_i sont respectivement les racines (zéros) et les poids du polynôme de Jacobi

$$\omega_i = \frac{G_N^{\alpha,\beta}}{J_N^{\alpha,\beta}(x_i)\partial J_{N+1}^{\alpha,\beta}(x_{i)}}$$

où :

$$G_N^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta}(2N+\alpha+\beta+2)\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}{(N+1)!\Gamma(N+\alpha+\beta+2)}$$

pour plus de détails voir [1] p.81.
qu'on peut les calculer facilement par matlab.

3.2 Quadrature Gauss-legendre

La famille des polynômes de Legendre relatives à la fonction de poids $\omega(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1, +1]$.

Les formules de quadrature de Gauss-Legendre peuvent être dérivées selon Jacobi dans la section précédente .

Théorème 9 *Soit $\{x_i, \omega_i\}_{i=0}^N$ l'ensemble des noeuds et de fonction de poids de quadrature de Gauss-Legendre.*

$\{x_i\}_{i=0}^N$ sont les zéros de $P_{n+1}(x)$.

La formule de Gauss-Legendre indique de prendre pour x_i la ième racine (classée dans l'ordre croissant) du polynôme de Legendre l_{n+1} $(P_{n+1}(x_i) = 0)$ et ω_i :

$$\omega_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_{N+1}(x_i)]}, 0 \leqslant i \leqslant N.$$

avec :

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = \sum_{i=0}^{N} \omega_i p(x_i) \ , \forall p \in P_{2N+1}$$

Cette formule est de degrée de précision $(2n+1)$.
Preuve. voir [1] p.96 ■

3.3 Quadrature Gauss- Laguerre

Les polynômes de Laguerre sont orthogonaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ relativement à la fonction de poids $\omega(x) = \exp(-x)$.

Soit $\{x_i, \omega_i\}_{i=0}^{N}$ l'ensemble du zéros(noeuds) et des fonctions de poids du qudratures de Gauss-Laguerre.

$$w_i = -\frac{\Gamma(N+\alpha+1)}{(N+1)!}\frac{1}{L_N(x_i)\partial_x L_{N+1}(_i)}.$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} p(x)\exp(-x)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i p(x_i).\forall\ p \in P_{2N+1}$$

Voir [1] p 244.

3.4 Quadrature de Gauss-Hermite

Les polynômes d'Hermite forment une base orthogonale sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ par rapport à la fonction de poids $\omega(x) = \exp(-x^2)$.
soit $\{x_i\}_{j=0}^{N}$ les zéros et $\{\omega_i\}_{i=0}^{N}$ les poids de H_{N+1} donné par :

$$\omega_i = \frac{\sqrt{\pi}2^N N!}{(N+1)H_N^2(x_i)}, 0 \leqslant i \leqslant N.$$

alors, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\exp(-x^2)dx = \sum_{i=0}^{N} \omega_i p(x_i),\ \forall p \in P_{2N+1}.$$

Preuve. voir [1] p258. ■

Chapitre 4

Applications

Quadrature de Gauss-Legendre :
On veut maintenant approcher :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

La méthode de Gauss-Legendre est présentée sur un intervalle $[-1, +1]$, pour pouvoir utiliser les formules précédentes, il faut tout d'abord éffectuer le changement de variable suivant :

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2} \Rightarrow dx = \frac{b-a}{2}dt.$$

en effet :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt.$$

ou nous avons posé :

$$g(t) = f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right).$$

– **Méthode à 2 point**

On applique la méthode de Gauss Legendre sur l'exemple suivant :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \exp(-x^2)dx \text{ : on ne peut pas le calculer.}$$

on ecrit :

$$\int_{-1}^{1} \exp(-x^2)dx = \int_{-1}^{1} \omega(x)f(x_i)dx = \sum_{i=0}^{1} \omega_i f(x_i).$$

On a :

i	ω_i	x_i
0	1.0000	-0.5773
1	1.0000	0.5773

donc on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) \simeq f(-0.5773) + f(0.5773) \\ &\simeq 0.4332.\end{aligned}$$

– **Méthode à 3 points**

i	ω_i	x_i
0	0.8888	0.0000
1	0.5555	-0.7745
2	0.5555	0.7745

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} \exp(-x^2)dx = \int_{-1}^{1} \omega_i f(x_i)dx \\ &\simeq \sum_{i=0}^{2} \omega_i f(x_i) = 0.8888 f(0) + 0.5555 f(-0.7745) + 0.5555 f(0.7745). \\ &\simeq 2.913.\end{aligned}$$

– **Méthode à 10 points**

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} \exp(-x^2)dx \simeq \int_{-1}^{1} \omega(x)f(x_i)dx \\
&\simeq \sum_{i=0}^{9} \omega_i f(x_i) = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + w\omega_2 f(x_2) + \omega_3 f(x_3) + \omega_4 f(x_4) \\
&\quad +\omega_5 f(x_5) + \omega_6 f(x_6) + \omega_7 f(x_7) + \omega_8 f(x_8) + \omega_9 f(x_9). \\
&\simeq 2.0832
\end{aligned}
$$

Avec

i	ω_i	x_i
0	0.2955	-0.1488
1	0.2955	0.1488
2	0.2692	-0.4333
3	0.2692	0.4333
4	0.2190	-0.6794
5	0.2190	0.6794
6	0.1494	-0.8650
7	0.1494	0.8650
8	0.0666	-0.9739
9	0.0666	0.9739

Quadrature de Gauss Laguerre :

Pour $n = 1$, le polynôme $L_2(x)$ admet deux racines :

$$x_0 = 2 - \sqrt{2} \text{ et } x_1 = 2 + \sqrt{2}.$$

Les valeurs de ω_i sont :

$$\omega_0 = \frac{(2+\sqrt{2})}{4} \text{ et } \omega_1 = \frac{(2-\sqrt{2})}{4}.$$

Alors on écrit :

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} f(x)\exp(-x) &\simeq \frac{(2+\sqrt{2})}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{(2-\sqrt{2})}{4} f(2+\sqrt{2}). \\
&\simeq 8.65093 * \exp(10^{-6}).
\end{aligned}
$$

Quadrature de Gauss Hermite :
Pour $n = 1$: Le polynôme d'Hermite $H_2(x) = 4x^2 - 2$ admet deux racines :

$$x_0 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \ et \ x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Les valeursde ω_i sont :

$$\omega_0 = \omega_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

donc on écrit :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-x^2)dx &\simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(\frac{-1}{\sqrt{2}}) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(\frac{1}{\sqrt{2}}). \\
&\simeq 1.0750.
\end{aligned}$$

Généralisation :
Ces méthodes peuvent être appliquées a un nombre de points $(n+1)$ quelconque. on peut alors montrer qu'une bonne approximation de l'intégrale à calculer est :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \omega_i f(x_i)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i).$$

Conclusion :

Rappelons que la motivation de ce mémoire était de donner une introduction suffisamment exaustive à la théorie des polynômes orthogonaux. Dans ce but, nous avons introduit le sujet de quadrature de Gauss.

La méthode de quadrature de Gauss est plus précise dans le calcul des intégrales numériques des fonctions difficile à expliquer que Newton-côtes.

Les polynômes orthogonaux sont encore étudiés sous plusieurs angles. Il justifié de croire que la théorie continuera encore de se développer et de donner des applications intéressantes

Bibliographie

[1] Jie Shen .Tao Tang . Li-Lian Wang, "Spectral Methods", Springer - verlag Berlin Heidelberg 2011.

[2] Brian George Spencer Doman, "THE CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS", Copyright © 2016 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[3] David P, Rabinowitz P (1984)" Methods of Numerical Integration", Academic Press Inc.

[4] Valet Ludovic,"Généralités sur les polynômes orthogonaux",https ://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00661847,2012.

[5] Mathieu Lavoie, "Polynômes orthogonaux", © Mathieu Lavoie, 2015.

[6] Franck Jedrzejewski, "Introduction aux méthodes numériques" Deuxième édition, Springer Verlage France, Paris 2005.

Abstract :

In this thesis, we have study the properties of orthogonal polynomials in the Hilbert functional space. We apply the orthogonal polynomials for computing numerically the integral of functions by Gaussian quadrature .Some examples are presented.

Keys words :

Orthogonal polynomials, Gauss quadrature, Hilbert, Jacobi , Legendre,Hermite, Laguerre polynomials, weight functions .

Résumé :

Dans ce mémoire, on à étudié les propriétés des polynômes orthogonaux dans l'espace fonctionnel de Hilbert . On appliqué les polynômes orthogonaux pour calculer les intégrales des fonctions en utilisant les quadratures de Gauss. Quelques exemples sont présentés.

Les mots clés :

Polynômes orthogonaux , quadrature de Gauss, Hilbert, polynôme de Legendre ,Jacobi, Laguerre, Hermite, fonctions de poids.

ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة كثيرات الحدود المتعامدة من اجل ذلك درسنا خصائصها في فضائها الدالي الهيلبرتي ,من اجل حساب التكامل العددي للدوال بواسطة غوص .بعض الامثلة قدمت للتحقق من جدية صحة الطريقة .

الكلمات المفتاحية :

هيلبرت,كثير حدود لوجوندر ,جاكوبي,لاقار ,هيرميت, كثيرات الحدود المتعامدة ,غوص,دالة الوزن .