UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Par

Djaballah Madjda

Sujet

Approximations des équations différentielles d'ordre fractionnaires

Soutenu le : 02/07/2019

Devant le jury :

Mr. SELT Omar	MCA . Univ de M'sila	Président
Mr. GAGUI Bachir	MCA . Univ de M'sila	Encadreur
Mr. DILMI Mustapha	MCB . Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

Je remercie avant tout **ALLAH** qui m'a donné la force et la volenté pour achever ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur de mémoire **GAGUI BACHIR** pour ces Conseils, ses orientations, son soutien.

Je tiens à remercie aussi les membres du jury d'avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques.

j'adresse mes s'incère remerciements mes parents, mon frère et ma sœur , ma famille et mes amis.

En fin j'adresse mes s'incère remerciments à tous qui sont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Merçi

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers, respectueux et mangifique parents mon pére Mustapha et ma mére Chafika Qui m'ont soutenus tout au long de ma vie
Par leur patience, leur amours et leur encouragement.

A mon frère Khalil .

A ma sœur basmala .

A toute ma famille.

A tout mes amis.

A tout les étudiants de $2^{ième}$ Master Math 2019.

A tous.

Table des matières

Notations

$C^n([a,b])$	:	L'ensemble des fonctions n fois continuement dérivables sur $[a,b]$.
$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des réels.
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexe.
Γ	:	La fonction Gamma.
$\mathcal{I}^\alpha$	:	L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.
$\mathcal{D}^\alpha$	:	La dérivée fractionnaire d'ordre α.
${}^{c}\mathcal{D}^\alpha$	:	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sans de Caputo.
$\mathcal{A}_n(x)$	:	Les polynômes d'Adomian.
A	:	Opérateur différentiel contenant des termes linéaires et des termes non linéaires.
L	:	Opérateur linéaire.
N	:	Le terme non linéaire.
R	:	Le reste.
$\simeq$	:	Approximation.

Introduction

Le calcul fractionnaire est un concept mathématique très ancien et impliquant l'intégration et la différenciation d'ordre arbitraire.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujoud'hui, ces origines remontent à la fin du $17^{ème}$ siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigne la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?. Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

L'étude des équations différentielles fractionnaires en calcul fractionnel a été l'objet principal de nombreuses disciplines, elles sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, l'hydrologie, la mécanique...etc

Ce mémoire est organisé comme suit :

Premier chapitre, Il est contient quelques notations et définitions des fonctions de base (la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction Mittag-Leffter), et on définit la dérivation et d'intégration fractionnaire au sens de Riemann Liouville, et Caputo, et leurs propriétés.

En fin nous rappelons les équations différentielle fractionnaires de type Riemann-Liouville et Caputo .

Deuxième chapitre, on traité les méthodes analytiques et les méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles fractionnaires.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire et Equations Différentielles d'ordre fractionnaires

1.1 Calcul fractionnaire

Le concept du calcul fractionnaire est une généralisation de la dérivation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire.

Fonctions Spéciales

Dans cette partie, nous présentons les définitions de les fonctions : Gamma , Bêta et Mittag-Leffter, qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications.

1.1.1 La fonction Gamma

En mathématiques, la fonction Gamma est une fonction complexe elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe.

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma* $\Gamma(z)$ *est définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\ e^{-t}\ dt,\ \ (z \in \mathbb{C}, \Re e(z) > 0). \tag{1.1.1}$$

Exemple 1.1.1

1. $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1.$
2. $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\frac{1}{2}-1}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau=\sqrt{\pi}.$
   (Posant le changement de variable $t=\tau^2$).

Lemme 1.1.1 *La fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, (resp.holomorphe sur le demi plan $z\in\mathbb{C}$, $\Re e(z)>0$) et*

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\forall z\in\mathbb{R}_+^*\ (resp.z\in\mathbb{C},\Re e(z)>0);\ \Gamma^{(k)}(z)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^k\ t^{z-1}\ e^{-t}dt. \tag{1.1.2}$$

Lemme 1.1.2 *Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\Re e(z)>0$, $n\in\mathbb{N}$, on a*

$$\begin{cases} 1.\ \Gamma(z+1)=z\ \Gamma(z). \\ 2.\ \Gamma(n)=(n-1)!. \\ 3.\ \Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Preuve.

1. Représentons $\Gamma(z+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty}t^z\ e^{-t}dt=[-t^ze^{-t}]_0^{+\infty}+z\int_0^{+\infty}t^{z-1}\ e^{-t}dt \\ &= z\ \Gamma(z).\end{aligned}$$

2. On pose $z=n-1$

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2)...\Gamma(1) \\ &= (n-1)!.\end{aligned}$$

3. Nous allons démontre la formule $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$, Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

- Pour $n=0$, On a

$$\Gamma(0+\frac{1}{2})=\frac{(0)!\sqrt{\pi}}{4^0(0!)}=\sqrt{\pi}.$$

- Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n. c-à-d que supposons que $\Gamma((n-1)+\frac{1}{2})=\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}$, est vérifié. Alors

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) \\
&= (n-\frac{1}{2})\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\
&= \frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.
\end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposition 1.1.1 *Pour tout* $p > 0$, *on a :*

$$\Gamma(p) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n!n^p}{p(p+1)(p+2)...(p+n)}. \tag{1.1.4}$$

Preuve.

Considérons la fonction

$$f(n,p) = \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{p-1} dx,$$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(n,p) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{p-1}\ dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\ dx \\
&= \Gamma(p).
\end{aligned}$$

D'autre part, par l'intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
f(n,p) &= \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{p-1} dx \\
&= \left[(1-\frac{x}{n})^n \frac{x^p}{p}\right]_0^n + \frac{1}{p}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-1}\ x^p dx \\
&= \frac{1}{p}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-1}\ x^p dx.
\end{aligned}$$

encore fois, en intégant par parties :

$$\begin{aligned}
f(n,p) &= \frac{1}{p}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-1}\, x^p dx \\
&= \frac{1}{p}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ \frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^n + \frac{(n-1)}{np(p+1)}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-2}\, x^{p+1}dx. \\
&= \frac{n(n-1)}{n^2p(p+1)}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1}dx.
\end{aligned}$$

Aprés intégration par parties n fois on obtient :

$$\begin{aligned}
f(n,p) &= \frac{n(n-1)...[n-(n-1)]}{n^n p(p+1)...[p+(n-1)]}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{p+(n-1)}dx, \\
&= \frac{n!}{n^n p(p+1)...[p+(n-1)]}\left[\frac{x^{n+p}}{n+p}\right]_0^n, \\
&= \frac{n!n^p}{p(p+1)...(n+p)}.
\end{aligned}$$

■

1.1.2 La fonction Bêta

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est elle aussi définie par une intégrale.

Définition 1.1.2 *La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \quad (p,q \in \mathbb{C}, \Re e(p) > 0, \Re e(q) > 0). \tag{1.1.5}$$

Remarque 1.1.1 *La fonction Bêta est symétrique i.e.,*

$$B(p,q) = B(q,p). \tag{1.1.6}$$

Proposition 1.1.2 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivant :*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p,q \in \mathbb{C} : \Re e(p) > 0;\ \Re e(q) > 0. \tag{1.1.7}$$

Preuve.

Soit $D = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1}\, e^{-x}\, dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}\, e^{-y}\, dy\right) \\
&= \iint_D x^{p-1}\, y^{q-1}\, e^{-(x+y)}\, dx\, dy,
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = u\ v \\ y = u\ (1 - v). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\ \Gamma(q) &= \iint_D (uv)^{p-1}\ (u - uv)^{q-1}\ e^{-u}\ u.du\ dv \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u} du\ \left(\int_0^1 (uv)^{p-1}\ (u - uv)^{q-1}\ u\ dv \right) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u} du\ \left(\int_0^1 u^{p+q-1}\ v^{p-1}\ (1 - v)^{q-1}\ dv \right) \\
&= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1}\ e^{-u}\ du \int_0^1 v^{p-1}\ (1 - v)^{q-1}\ dv \\
&= \Gamma(p + q)\ B(p, q).
\end{aligned}$$

■

1.1.3 La fonction Mittag-Leffter

La fonction Mittag-Leffter est une généralisation directe de la fonction exponentielle e^x à deux paramètres pour différentes valeurs de α et β, et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.

Définition 1.1.3 *La fonction de Mittag-Leffter est définie par*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, \tag{1.1.8}$$

et la fonction de Mittag-Leffter généralisée est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \tag{1.1.9}$$

Exemple 1.1.2 *La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simple*

$$\begin{aligned}
E_1(z) &= E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}.
\end{aligned}$$

Théorème 1.1.1 *Pour* $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{cases} 1.\ \left(\frac{d}{dz}\right)^n E_n\ (\lambda\ x^n) = \lambda\ E_n(\lambda\ x^n), \\ 2.\ \left(\frac{d}{dz}\right)^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda\ z^n) = \lambda\ z^{\beta-n-1} E_n(\lambda\ z^n). \end{cases} \tag{1.1.10}$$

1.2 L'intégrale fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Définition 1.2.1 *Soit* f *une fonction continue sur l'intervalle* $[a, b]$. *On considère l'intégrale*

$$\mathcal{I}^{(1)} f(x) = \int_a^x f(t) dt. \tag{1.2.1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{(2)} f(x) &= \int_a^x \mathcal{I}^{(1)} f(u)\ du, \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t)\ dt \right)\ du, \\ &= \int_a^x \left(\int_t^x du \right)\ f(t)\ dt, \\ &= \int_a^x (x-t)\ f(t)\ dt. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

En générale la $n^{ième}$ *itération de l'opération* $\mathcal{I}$ *peut s'écrire :*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{(n)} f(x) &= \int_a^{x1} dx_1 \int_a^{x2} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\ dx_n, \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)}\ f(t)\ dt. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Pour tout entier n.

1.2.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2.2 *L'intégrale fractionnaire de Riamann-Liouville à gauche d'ordre* $(\alpha \in \mathbb{C}, \Re e(\alpha) > 0)$ *est définie par :*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)}\ f(t)\ dt. \tag{1.2.4}$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riamann-Liouville à droite d'ordre $(\alpha \in \mathbb{C}, \Re e(\alpha) > 0)$ *par :*

$$\mathcal{I}_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)}\ f(t)\ dt. \tag{1.2.5}$$

Proposition 1.2.1 *Soit* $\alpha > 0,\ \beta > 0,$ *et* $f \in L^2\left([a,b]\right)$. *Alors*

$$\begin{cases} 1.\ \mathcal{I}_{a^+}^{(\alpha)} \left[\mathcal{I}_{a^+}^{(\beta)} f(x)\right] = \mathcal{I}_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x). \\ 2.\ \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}. \\ 3.\ \frac{d}{dx}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f(x)\right) = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-1} f(x). \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Preuve.

1. D'après la définition, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} \left[\mathcal{I}_{a^+}^{\beta} f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1}\ \mathcal{I}^{\beta}(f(y))\ dy, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^y (y-t)^{\beta-1} f(t) dt\right)\ dy, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} dy \int_a^y (y-t)^{\beta-1} f(t) dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)\ dt\ \left(\int_t^x (x-y)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1}\ dy\right). \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} y = t + (x-t)\ \tau \\ dy = (x-t)\ d\tau. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} \left[\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}\ f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)\ dt \left(\int_0^1 ((x-t)-(x-t)\ \tau)^{\alpha-1} ((x-t)\ \ \tau)^{\beta-1} (x-t)\ d\tau\right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}\ f(t)\ dt \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\ \tau^{\beta-1}\ d\tau, \\ &= B(\alpha,\beta)\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}\ f(t)\ dt, \quad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}\ f(t)\ dt \\ &= \mathcal{I}_{a^+}^{(\alpha+\beta)}\ f(x). \end{aligned}$$

2. On a

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt,$$

On pose

$$\begin{cases} t = a + (x-a)y, \quad y \in [0,1] \\ dt = (x-a)dy. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-a+(x-a)y^{\alpha-1}(x-a)^{\beta-1}y^{\beta-1}(x-a)dy, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-a)^{\alpha+\beta-1}(1-y)^{\beta-1}y^{\beta-1}dy, \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\beta-1}y^{\beta-1}dy, \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta), \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right), \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{d}{dx}\left((x-t)^{\alpha-1}\right)f(t)dt, \\
&= \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)dt, \\
&= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)dt, \\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-1}f(x).
\end{aligned}$$

■

1.3 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions pour la dérivée fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont plus utilisées dans les applications Riemann-Liouville et Caputo.

1.3.1 Dérivées fractionnaires de type Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 *Soitent $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par :*

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \ f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n}\right) \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} \ f(t) \ dt, \tag{1.3.1}$$

Où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ la partie entiere de α.

Définition 1.3.2 *Soitent $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par :*

$$\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \ f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n}\right) \int_x^b (t-x)^{(n-\alpha-1)} \ f(t) \ dt. \tag{1.3.2}$$

Remarque 1.3.1 *Pour $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$ l'opérateur $\mathcal{D}^{\alpha}$ donne le même résultat que la dérivée usuelles pour les ordres entieres, tel que :*

$$\begin{cases} 1. \ \mathcal{D}_{a^+}^{n} \ f(x) = f^{(n)} \ (x) \ . \\ 2. \ \mathcal{D}_{b^-}^{n} \ f(x) = (-1)^n \ f^{(n)}(x) \ . \end{cases} \tag{1.3.3}$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires de type Caputo

On se donne une définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de type Caputo.

Définition 1.3.3 *Soitent $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par :*

$$^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \ f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} \ f^{(n)}(t) \ dt. \tag{1.3.4}$$

Définition 1.3.4 *Soitent $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par :*

$$^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \ f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{(n-\alpha-1)} \ f^{(n)}(t) \ dt. \tag{1.3.5}$$

Remarque 1.3.2 *Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivée classique $\forall n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\begin{cases} ^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{n} f(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a). \\ ^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{n} f(x) = (-1)^n (f^{(n)}(x) - f^{(n)}(b)). \end{cases} \tag{1.3.6}$$

1.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1.4.1 Linéarité

La dérivation et l'intégration fractionnaire sont des opérateurs linéaires :

$$\mathcal{D}^{\alpha}(\lambda\ f(t)+\mu\ g(t))=\lambda\ \mathcal{D}^{\alpha}\ f(t)+\mu\ \mathcal{D}^{\alpha}\ g(t). \tag{1.4.1}$$

1.4.2 La règle de Leibniz

Pour un entier n, on a

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)\ g(t))=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\ f^{(k)}(t)\ \ g^{(n-k)}(t). \tag{1.4.2}$$

La généralisation de cette formule est donneé par

$$\mathcal{D}^{p}(f(t)\ g(t))=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}\ f^{(k)}(t)\ \mathcal{D}^{(p-k)}\ g(t)+R_n^p(t), \tag{1.4.3}$$

Où $n\geq p+1$ et

$$R_n^p(t)=\frac{1}{n!\Gamma(-p)}\int_a^t(t-\tau)^{-p-1}\ g(\tau)\ d\tau\int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)\ d\xi, \tag{1.4.4}$$

Avec $\lim R_n^p(t)=0$.

Si f et g sont continues dans $[a,b]$ ainsi que toutes leurs dérivées, alors la formule devient :

$$\mathcal{D}^{\alpha}(f(t)\ g(t))=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}\ f^{(k)}(t)\ \mathcal{D}^{(p-k)}\ g(t). \tag{1.4.5}$$

$\mathcal{D}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.4.3 Intégration par parties

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions. C'est ici qu'apparaissent inévitablement les opérateurs à droite.

Corollaire 1.4.1 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tels que* $n-1 < \alpha \leqslant n$. *Soit* $f(t) \in C^n([a,b])$, *et* $g(t) \in C^n([a,b])$, *et Alors*

$$\int_a^b f(t)\ \mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\ g(t)\ dt \ = \ \int_a^b \mathcal{D}^{a}_{b-}\ f(t)\ g(t)\ dt. \tag{1.4.6}$$

$$\int_a^b f(t)\ \mathcal{D}^{\alpha}_{b-}\ g(t)\ dt \ = \ \int_a^b \mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\ f(t)\ g(t)\ dt. \tag{1.4.7}$$

1.5 Equations différentielles fractionnaires

Dans cet section on va discuter les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On commence par donner une définition d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire (EDF) :

Définition 1.5.1 *Soitent* $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ *et* $f : A \sqsubset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, *alors :*

$$\mathcal{D}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \tag{1.5.1}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville. où les conditions initiales pour ce type d'EDF est de la forme

$$\mathcal{D}^{\alpha-k}\ y(0) = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1), \quad \lim_{t \to 0} \ \mathcal{I}^{n-\alpha}\ y(t) = b_n. \tag{1.5.2}$$

De la même manière

$$^{C}\mathcal{D}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \tag{1.5.3}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas, les conditions est de cette forme

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1), \tag{1.5.4}$$

L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les équations différentielles fractionnaires (1.5.1) *et* (1.5.3) *nous assure l'unicité des solutions de l'EDF correspondante, qu'on va prouver dans les théorèmes suivants.*

1.5.1 Equation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville

On commence par l'équation homogène de type Riemann-Liouville.

Lemme 1.5.1 *Soit $\alpha > 0$. Si nous suppossons que $y \in C(0,1) \cap L(0,1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville :*

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1.5.5}$$

Admet une solution unique

$$y(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_n t^{\alpha-n}. \tag{1.5.6}$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, ..., n$.

Preuve.
Soit $\alpha > 0$, on a :

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ t^{\alpha-m} = 0, \quad avec \quad m = 1, 2, ..., n \tag{1.5.7}$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (1.5.5) admet une solution particulière , comme

$$y(t) = C_m t^{\alpha-m}, \quad avec \quad m = 1, 2, ..., n. \tag{1.5.8}$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$.
La solution générale de l'équation (1.5.5) est donnée comme une somme des solutions particulières (1.5.8), C-à-d.

$$y(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_n t^{\alpha-n}. \tag{1.5.9}$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, ..., n$. ■

Lemme 1.5.2 *Supposons que*

$$y \in C(0,1) \cap L(0,1), \quad et \quad \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} y \in C(0,1) \cap L(0,1). \tag{1.5.10}$$

Alors :

$$\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\ \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y(t)=y(t)+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+...+\ C_nt^{\alpha-n}. \tag{1.5.11}$$

Où $C_m\in\mathbb{R}$, avec $m=1,2,...,n$.

Preuve.

Soit $\alpha>0$. Pour tout $y\in C(0,1)\cap L(0,1)$ on a

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\ \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}u(t) &= y(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\mathcal{I}_{0+}^{n-\alpha}y^{(n-k)})(0)}{\Gamma(\alpha-k+1)},\\ &= y(t)-\left[\frac{\left(\mathcal{I}_{0+}^{n-\alpha}y^{(n-1)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}+\frac{\left(\mathcal{I}_{0+}^{n-\alpha}y^{(n-2)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-1)}t^{\alpha-2}+...+\frac{\left(\mathcal{I}_{0+}^{n-\alpha}y\right)(0)}{\Gamma(\alpha-n+1)}t^{\alpha-n}\right].\end{aligned}$$

On pose $C_m=-\frac{\left(I_{0+}^{n-\alpha}u^{(n-m)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-m+1)}\in\mathbb{R}$, pour chaque $m=1,2,...,n$, on trouve l'égalité (1.5.11).

■

Lemme 1.5.3 *Soit* $1<\alpha<2$, *et* $z\in C([0,1])$. *Alors l'unique solution de problème aux limites*

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}\ y(t)+z(t)=0, & 0<t<1\\ y(0)=y(1)=0, \end{cases} \tag{1.5.12}$$

est donné par

$$y(t)=\int_0^1 G(t,s)\ z(s)\ ds, \tag{1.5.13}$$

tel que :

$$G(t,s)\ =\ \begin{cases}\frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & si\quad 0\le s\le t\le 1,\\ \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & si\quad 0\le t\le s\le 1.\end{cases} \tag{1.5.14}$$

Preuve.

En appliquant $\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}$, sur l'équation (1.5.12) on obtient :

$$\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\left[\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}\ y(t)+z(t)\right]=0\Longleftrightarrow\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\ \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}\ y(t)+\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\ z(t)=0.$$

D'après le lemme (1.5.2) pour $1<\alpha\le 2$ $(n=[\alpha]+1=2)$, on a :

$$\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\ \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}\ y(t)=y(t)+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2},C_1,C_2\in\mathbb{R},$$

donc

$$y(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\ z(t) = 0,$$

ce qui implique

$$y(t) = -\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\ z(t) - C_1 t^{\alpha-1} - C_2 t^{\alpha-2},$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (1.5.12), donne par :

$$y(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds - C_1 t^{\alpha-1} - C_2 t^{\alpha-2}. \tag{1.5.15}$$

Les conditions aux limites implique que

$$\begin{cases} y(0) = 0 & \Longrightarrow & 0 = & -0 - 0 - \lim_{t\to 0} C_2 t^{\alpha-2} & \Longrightarrow & C_2 = 0, \\ y(1) = 0 & \Longrightarrow & 0 = & \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds - C_1 & \Longrightarrow & C_1 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds. \end{cases}$$

L'équation intégro-différentielle (1.5.15) , équivalente à :

$$\begin{aligned} y(t) &= -\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds + \tfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds \\ &= -\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds + \tfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds + \tfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}\right] z(s)\ ds + \tfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds \\ &= \int_0^t \tfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ z(s)\ ds + \int_t^1 \tfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ z(s)\ ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)\ z(s)\ ds. \end{aligned}$$

■

1.5.2 Equation différentielle fractionnaire de type Caputo

On commence par l'équation homogène de type Caputo.

Lemme 1.5.4 *Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $y \in C(0,1) \cap L(0,1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo :*

$${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\ y(t) = 0, \tag{1.5.16}$$

Admet une solution unique

$$y(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_{n-1} t^{n-1}. \tag{1.5.17}$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0.$, on a :

$$^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+} t^m = 0, \quad \textit{pour} \quad m = 0, 1, 2, ..., n-1$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (1.5.16), admet une solution particulière, comme

$$y(t) = C_m t^m, \quad \textit{pour} \quad m = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{1.5.18}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.

Donc la solution générale de (1.5.16), donné comme une somme des solutions particulières (1.5.18), C-à-d.

$$y(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_{n-1} t^{n-1}.$$

■

Lemme 1.5.5 *Supposons que* $y \in C^n([0,1])$. *Alors :*

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\ y(t) = y(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_{n-1} t^{n-1}. \tag{1.5.19}$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, *avec* $m = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $y \in C^n([0,1])$ on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\ y(t) &= y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} t^k, \\
&= y(t) - \left[y(0) + y'(0)t + \frac{y"(0)}{2} t^2 + ... + \frac{y^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} \right].
\end{aligned}$$

On pose $C_m = -\frac{u^{(m)}(0)}{m!} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 0, 1, 2, ..., n-1$. ou trouve facilement l'égalité (1.5.19). ■

Lemme 1.5.6 *Soit* $1 < \alpha \leq 2$, *et* $z \in C([0,1])$. *Alors l'unique solution de problème aux limites*

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}\ y(t) = z(t) & 0 < t < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) + y'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.5.20}$$

est donné par :

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s)\ z(s)\ ds, \tag{1.5.21}$$

tel que

$$G(t,s) \quad = \quad \begin{cases} \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}+(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & si \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & si \quad 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{1.5.22}$$

Preuve.

En appliquant $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}$, sur l'équation (1.5.20) on obtient :

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\left[\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ y(t) - z(t)\right] = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ y(t) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ z(t) = 0.$$

D'aprés le lemme (1.5.5), pour $1 < \alpha \leq 2$ $(n = [\alpha] + 1 = 2)$,on a :

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ y(t) = y(t) + C_0 + C_1 t, \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

Donc

$$y(t) = C_0 + C_1 t - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ z(t) = 0,$$

Ce qui implique

$$y(t) = \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ z(t) - C_0 - C_1 t,$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (1.5.20) , donne par

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds - C_0 - C_1 t. \tag{1.5.23}$$

Les conditions aux limites implique que :

$$\begin{cases} y(0) + y'(0) = 0 & \Longrightarrow \quad C_0 + C_1 = 0. \\ y(1) + y'(1) = 0 & \Longrightarrow \quad C_0 + 2C_1 = \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} z\right)(1) + \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} z\right)'(1). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} C_0 = -\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} z\right)(1) + \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} z\right)'(1) \\ = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\ z(s)\ ds \\ C_1 = \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} z\right)(1) + \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} z\right)'(1) \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\ z(s)\ ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\ z(s)\ ds. \end{cases}$$

L'équation intégro-différentielle (1.5.20), équivalente à

$$\begin{aligned}
y(t) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, z(s)\, ds + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\, z(s)\, ds + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\, z(s)\, ds \\
&\quad - \tfrac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\, z(s)\, ds - \tfrac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\, z(s)\, ds \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, z(s)\, ds + \tfrac{(1-t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\, z(s)\, ds + \tfrac{(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\, z(s)\, ds \\
&= \int_0^t \left[\tfrac{(t-s)^{\alpha-1} + (1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \tfrac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] z(s)\, ds \\
&\quad + \int_t^1 \left[\tfrac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \tfrac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] z(s)\, ds \\
&= \int_0^1 G(t,s)\, z(s)\, ds.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Résolution des équations différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre on va traiter quelques types d'équation EDF linéaire par les différents méthodes, notamment les méthodes analytiques et numériques de raison illustré éficacité de notre algorithmes choisis.

2.1 Méthodes analytiques

2.1.1 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est méthode plus éfficaces pour résoudre certaines des équations differentielles .

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ définie pour tout nombre réel $t \geqslant 0$ est la fonction F, définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\ f(t)\ dt, \tag{2.1.1}$$

On dit qu'une fonction f d'ordre exponentiel d'ordre α, c-à-d qu'il existe deux canstante M et T, telles que

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}, \quad pour \quad t > T. \tag{2.1.2}$$

L'inverse de la transformée de Laplace s'effectue par le moyen d'une intégrale dans le plan complexe, pour t positive,

$$f(t) = \mathcal{L}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)ds. \tag{2.1.3}$$

Où c est choisi pour que l'intégrale soit convergente, ce qui implique que c soit supérieur à la partie réelle de singularité de $F(s)$.

les propriétés de la transformée de Laplace :

Linéairité La transformée de Laplace est linéaire c'est-à-dire que quelles soient les fonctions f, g et deux nombres complexes α, β :

$$\mathcal{L}\left\{\alpha f + \beta g\right\} = \alpha\mathcal{L}\{f\} + \beta\mathcal{L}\{g\}. \tag{2.1.4}$$

Dérivation

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\ f^{(k)}\ (0). \tag{2.1.5}$$

Convolution On dit que le produit de convolution de f et g est défini par :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-s)\ g(s)\ ds = \int_0^t f(s)\ g(t-s)\ ds, \tag{2.1.6}$$

est donné par :

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\}(s) = F(s).G(s), \tag{2.1.7}$$

Où $F(s)$ et $G(s)$ sont les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$.

Résolution des EDFs par la transformée de Laplace

La transformée de Laplace pour l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re e(\alpha) > 0)$ est définie par la convolution :

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\ f(s)\ ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} * f(t). \tag{2.1.8}$$

et la transformée de Laplace du fonction $t^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha-1}\right\}(s) = \Gamma(\alpha)\ s^{-\alpha}. \tag{2.1.9}$$

d'après la formule (2.1.8) et (2.1.9) la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens Riemann-Liouville est

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f(t)\right\}(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{L}\left\{t^{\alpha-1} * f(t)\right\}(s), \\
&= s^{-\alpha}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s), \\
&= s^{-\alpha}F(s). \qquad (2.1.10)
\end{aligned}$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

D'après la formule (2.1.5) et (2.1.10), on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ f(t)\right\}(s) &= \mathcal{L}\{\mathcal{D}_{0^+}^{m}\ \mathcal{I}_{0^+}^{m-\alpha}\ f(t)\}(s), \qquad (2.1.11) \\
&= s^m\ \mathcal{L}\left\{\mathcal{I}_{0^+}^{(m-\alpha)} f(t)\right\}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k\ \mathcal{D}_{0^+}^{(m-k-1)}\ \left(\mathcal{I}_{0^+}^{(m-\alpha)}\ f(t)\right)(0), \\
&= s^m\ s^{(\alpha-m)}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k\ \mathcal{D}_{0^+}^{(m-k-1)}\ \left(\mathcal{I}_{0^+}^{(m-\alpha)}\ f(t)\right)(0), \\
&= s^\alpha\ \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k\ \mathcal{D}_{0^+}^{(m-k-1)}\ \left(\mathcal{D}_{0^+}^{(\alpha-m}\ f(t)\right)(0), \\
&= s^\alpha\ \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k\ \mathcal{D}_{0^+}^{(\alpha-k-1)}\ f(0),\ m-1 \leqslant \alpha < m. \qquad (2.1.12)
\end{aligned}$$

Le tableau suivant donne un résumé de certaines transformées de Laplace utiles. Notez que la fonction de Mittag- Lefftr joue un rôle très importante pour la résolution des équations différentielles fractionnaires

$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s); t\right\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1}\ E_{\alpha,\alpha}(a\ t^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha+a)}$	$E_\alpha(-a\ t^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha+a)}$	$1 - E^\alpha(-a\ t^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha\ E_{1,\alpha+1}(a\ t)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1}\ E_{\alpha,\beta}(a\ t^\alpha)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$

Transformée de Laplace de quelques fonctions

Exemple 2.1.1 *Résolons*

$$\mathcal{D}^{\frac{2}{3}}\ y(t) = a\ y(t)$$

avec α *une constante, On a* $\alpha = \frac{2}{3} \leq 1$,*En prenant la transformée de laplace des deux côtés de l'équation que nous avons*

$$\mathcal{L}\{\mathcal{D}^{\frac{2}{3}}\ y(t)\} = a\ \mathcal{L}\{y(t)\}.$$

Ce qui implique que

$$s^{\frac{2}{3}}\ F(s) - \mathcal{D}^{-(1-\frac{2}{3})}\ y(0) = a\ F(s)$$

la constante $\mathcal{D}^{-(1-\frac{2}{3})}\ y(0) = \mathcal{D}^{-\frac{1}{3}}y(0)$ *est la valeur de* $\mathcal{D}^{-\frac{1}{3}}y(t)$ *en* $t = 0$. *Si nous supposons que cette valeur existe, et noter* c_1*, alors*

$$\begin{aligned} s^{\frac{2}{3}}\ F(s) - c_1 &= a\ F(s) \\ \Longrightarrow F(s) &= \tfrac{c_1}{s^{\frac{2}{3}}-a} \end{aligned}$$

En utilisant finalement le tableau , on obtient

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}\right\} = c_1\ t^{\frac{1}{3}}\ E_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}}\left(a\ t^{\frac{2}{3}}\right)$$

calcul c_1

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\mathcal{D}^{\frac{-1}{3}}y(t)\right\} &= s^{\frac{-1}{3}}F(s) \\ \Longrightarrow \quad F(s) &= \tfrac{c_1}{s^{\frac{2}{3}}-a} \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{D}^{\frac{-1}{3}}y(t)\right\} = \frac{c_1 s^{\frac{-1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - a},$$

et

$$\mathcal{D}^{\frac{-1}{3}}y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{cs^{\frac{-1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - a}\right\} = C_1 E_{\frac{2}{3},1}\left(at^{\frac{2}{3}}\right).$$

En $t = 0$

$$\mathcal{D}^{\frac{-1}{3}}y(0) = c_1 E_{\frac{2}{3},1}(0) = c_1.$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

D'après la formule (2.1.5) et (2.1.10), on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+}\ f(t)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\mathcal{I}^{(m-\alpha)}_{0^+}\ \mathcal{D}^{m}_{0^+}\ f(t)\right\}(s), \qquad (2.1.13)\\
&= s^{(\alpha-m)}\ \mathcal{L}\left\{\mathcal{D}^{m}_{0^+}\ f(t)\right\}(s),\\
&= s^{(\alpha-m)}\left[s^{m}\ \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)-\sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}\ f^{(k)}(0)\right],\\
&= s^{\alpha}\ \mathcal{L}\left\{f(t)(s)\right\}-\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1}\ f^{(k)}(0), \ldots\ m-1\leqslant\alpha<m,\\
&= s^{a}\ F(s)-\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1}\ f^{(k)}(0), \ldots\ m-1\leqslant\alpha<m. \qquad (2.1.14)
\end{aligned}$$

Exemple 2.1.2 *Soit l'équation :*

$$\begin{cases}\mathcal{D}^{2}\ y(t)+2\ \mathcal{D}^{\frac{3}{2}}\ y(t)+2\ y(t)=8\ t^{5};\\ y(0)=0; \qquad y'(0)=0.\end{cases}$$

En apliquant la tansformée de Laplace sur les deux côtés de l'équation ci-dessus, nous avons

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{D}^{2}\ y(t)+2\ \mathcal{D}^{\frac{3}{2}}\ y(t)+2\ y(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{8\ t^{5}\right\}$$

$$s^{2}\ F(s)-s\ y(0)-y'(0)+2\left[\frac{s^{2}\ F(s)-s\ y(0)-y'(0)}{s^{\frac{1}{2}}}\right]+2\ F(s)=8\ \frac{5!}{s^{6}}$$

Par conditions initiales,

$$\begin{aligned}
&s^{2}\ F(s)+2\ \tfrac{s^{2}\ F(s)}{s^{\frac{1}{2}}}+2\ F(s)=8\ \tfrac{5!}{s^{6}}\\
&F(s)\ \left[s^{2}+2\ s^{\frac{3}{2}}+2\right]=8\ \tfrac{5!}{s^{6}}\\
&F(s)=\tfrac{8\times 5!}{s^{6}(s^{2}+2\ s^{\frac{3}{2}}+2)}.
\end{aligned}$$

En appliquant la transformation inverse de Lapace de deux côtés de l'équation ci-dessus ;

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8\times 5!}{s^{6}(s^{2}+2\ s^{\frac{3}{2}}+2)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8\times 5!s^{6}}{s^{6}(s^{2}+2\ s^{\frac{3}{2}}+2)}\right\}.$$

2.1.2 La méthode ADM

La méthode décomposition d'Adomian (ADM) permet de résoudre des problèmes fonctionnels de différents types : équation algébriques, différentielles, intégrales, intégro-différentielles, et aux dérivées partielles (EDP). La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non linéaires.

Description de la méthode

Considérons l'équation fonctionnelle :

$$AU = f. \tag{2.1.15}$$

où A est un opérateur différentiel contenant des termes linéaires et des termes non linéaires et f est une fonction connue.

Le terme linéaire de l'opérateur A est décomposé en $L + R$ où L est inversible et R est le reste de (2.1.15) . On note N le terme non linéaire de A et donc $A = L + R + N$, alors (2.1.15) s'écrit comme : $LU + RU + NU = f$,

L étant inversible, si L^{-1} est son inverse on a :

$$U = \phi + L^{-1}f - L^{-1}RU - L^{-1}NU, \tag{2.1.16}$$

où ϕ est la constante de l'intégration.

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous la forme d'une série :

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \tag{2.1.17}$$

et à décomposer le terme non linéaire NU sous forme d'une série :

$$NU = F(U) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n, \tag{2.1.18}$$

Les $\mathcal{A}_n$ sont appellés polynômes d'Adomian et sont obtenues grâce à la relation suivante

$$\mathcal{A}_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, \tag{2.1.19}$$

Où λ est un paramètre réel introduit par convenance.

En remplaçant les relations (2.1.17) et (2.1.18) dans (2.1.16), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \phi + L^{-1}f - L^{-1}R\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n. \tag{2.1.20}$$

Ce qui entreine par identification :

$$\begin{cases} u_0 = \phi + L^{-1}\ f \\ u_1 = -L^{-1}\ R\ u_0 - L^{-1}\ \mathcal{A}_0 \\ \dots \\ u_{n+1} = -L^{-1}\ R\ u_n - L^{-1}\ \mathcal{A}_n. \end{cases} \tag{2.1.21}$$

Remarque 2.1.1 *Tous les termes de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *ne peuvent être calculés, en utilisant l'approximation*

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n \geqslant 1, \qquad avec \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = U. \tag{2.1.22}$$

Le problème qui se pose est comment déterminer les $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$.

Les polynômes d'Adomian

Définition 2.1.1 *Les polynômes d'Adomian sont définent par la formule :*

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0(u_0) = N(u_0) = F(u_0) \\ \mathcal{A}_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, \end{cases} \tag{2.1.23}$$

La formule proposée par G.Adomian pour calculer des polynômes d'Adomian $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$, est la suivante :

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{A}_0(u_0) & = & N(u_0) & = F(u_0) \\ \mathcal{A}_1(u_0, u_1) & = & u_1 \frac{d}{du} N(u_0) = N(u_0)\ u_1 & = F'(u_0)\ u_1 \\ \mathcal{A}_2(u_0, u_1, u_2) & = & u_2 \frac{d}{du} N(u_0) + u_1^2 \frac{1}{2!} \frac{d^2}{du^2} N(u_0) & = u_2\ F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2\ F^{(2)}(u_0) \\ & & \ldots & \\ \mathcal{A}_n & = & \sum_{v=0}^{n} c(v,n) N^{(v)}(u_0),\ n \geqslant 1. & \end{array}$$

Où $c(v,n)$ représente la somme de tous les produits (f divisée par $m!$) des v termes u_i dont la somme des indices i est égale à n, m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

Résolution des EDFs par la méthode d'Adomian

Considérons l'équation différentielle au sens de Caputo avec $0 < \alpha < 1$, si f est une fonction continue alors notre problème à valeur initiale est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de Volterra.

Dans ce sens, si $u(x) \in C[0,T]$ satisfait le problème, alors elle satisfait aussi l'équation intégrale de Volterra.

L'équation non linéaire de Caputo peut s'écrit sous la forme :

$$^{C}\mathcal{D}^{\alpha} u(x) = f(x, u(x)) = g(x) + h(x)u + N(x,u), \tag{2.1.24}$$

où g, h sont des fonctions continues et N est la partie non linéaire de f

Appliqons l'opérateur $\mathcal{I}$ sur les deux cotés de l'équation précédente, on trouve l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = u(0) + \mathcal{I}^{\alpha}[g](x) + \mathcal{I}^{\alpha}[h(x)u + N(x,u)](x). \tag{2.1.25}$$

ADM propose la relation de récurence suivante :

$$u_0(t) = u(0) + \mathcal{I}^{\alpha}[g](x), \quad u_{n+1}(t) = \mathcal{I}^{\alpha}\left[h(x)u + N(x,u)\right](x), \;\; n \geq 0. \tag{2.1.26}$$

Tel que les $\mathcal{A}_n$ sont des polynômes d'Adomian.

Finalement, nous rapprochons la solution par la série suivante :

$$\phi_N = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(t) \quad et \quad \lim_{N\to\infty} \phi_N = u(t). \tag{2.1.27}$$

Exemple 2.1.3 *Résoudre le EDF*

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{2\alpha} y(t) = 2\ e^{y(t)}, & 0 < \alpha \leqslant 1, \\ y(0) = y^{\alpha}(0) = 0. \end{cases}$$

en utilisant la méthode de Adomian.

Solution *Pour résoudre ce problème, nous appliquons la Transformation de Laplace :*

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left[\mathcal{D}^{2\alpha} y(t)\right] = 2\ \mathcal{L}\left[e^{y(t)}\right] \\ &Y = \mathcal{L}\left[y(t)\right], && y_0(t) = y(0) + \tfrac{y^{\alpha}(0)}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} = 0, \\ &\mathcal{L}\left[\mathcal{D}^{2\alpha} y(t)\right] = s^{2\alpha} Y - s^{2\alpha-1} y(0) && = s^{\alpha} Y, \\ &\mathcal{L}\left[e^{y(t)}\right] = \mathcal{L}\left[\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n\right]. \end{aligned}$$

Alors

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t),$$

On obtient :

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n, \qquad y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n,$$

Où $\mathcal{A}_n$ sont les polynômes d'Adomian :

$$\mathcal{A}_0 = e^{y_0},\ \mathcal{A}_1 = y_1 e^{y_0},$$
$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} Y_n = \frac{2}{s^{2\alpha}}\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n\right],$$
$$y_0 = 0 \Longrightarrow \mathcal{A}_0 = e^{y_0} = 1,$$
$$Y1 = \tfrac{1}{s^{2\alpha}}\mathcal{L}\left[\mathcal{A}_0\right] \Longrightarrow Y_1 = \tfrac{2}{s^{2\alpha+1}}, \qquad y_1 = \tfrac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \Longrightarrow \mathcal{A}_1 = y_1 e^{y_0},$$
$$Y_2 = \tfrac{4}{s^{4\alpha+1}}, \qquad y_2 = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_2\right] = \tfrac{4t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)},$$
$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + ...$$
$$y(t) = 0 + \tfrac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \tfrac{4t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} + ...$$

Pour le cas des équations différentielles fractionnaires, obtenir une solution analytique exacte est très compliqué, ainsi, il est nécessaire de se tourner vers les méthodes numériques.

2.2 Méthodes numériques

2.2.1 Méthode des trapèzes

En analyse numérique, la méthode de Trapèze est une méthode pour le calcul numérique d'une intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$, s'appuyant sur l'interpolation linéaire sur des intervalles. Pour évaluer numériquement $\int_a^b f(x)\ dx$, on divise l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ de même longeur $h = \frac{(b-a)}{n}$ et on considère les nœuds $x_k = a + kh$ pour $k = 0, 1, ..., n$.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx = \frac{x_{k+1} + x_k}{2}\ \left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right]. \tag{2.2.1}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0} f(x)\ dx + \int_{x_1} f(x)\ dx + ... + \int_{x_n} f(x)\ dx,\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx,\\
&= \frac{h}{2}\ \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + ...\right),\\
&= \frac{h}{2}\ \left[f(x_0) + f(x_k) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\ f(x_k)\right],\\
&= \frac{h}{2}\ \left(f(x_0) + f(x_k)\right) + h\sum_{k=1}^{n-1}\ f(x_k). \qquad (2.2.2)
\end{aligned}$$

Alors

$$T(f,h) = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right) \tag{2.2.3}$$

$$= \frac{h}{2}\ \left(f(a)+f(b)\right)+h\sum_{k=1}^{n-1}\ f(x_k). \tag{2.2.4}$$

C'est une approximation de l'intégrale de $f(x)$ sur $[a,b]$, et on écrit

$$\int_a^b f(x)dx \approx T(f,h). \tag{2.2.5}$$

Erreur En analyse numérique l'erreur est par convention la différence entre la valeur exacte et son approximation par un nombre fini d'opérations.

L'analyse d'erreur, si $f(x)\in C^2[a,b]$, alors il existe une valeur c, avec $a<c<b$ le terme d'erreur $E(f,h)$ est de la forme

$$E(f,h) = \frac{-(b-a)\ f^{(2)}(c)\ h^2}{12} = O(h^2), \tag{2.2.6}$$

Où

$$E(f,h) = \int_a^b f(x)\ dx - T(f,h). \tag{2.2.7}$$

2.2.2 Approximations des intégrales fractionnaires

L'opérateur intégral fractionnaire joue un rôle important dans le calcul fractionnel, ce qui est utile pour convertir les équations différentielles fractionnaires en équations intégrales. Il faut donc étudier les méthodes numériques pour approximer des intégrales fractionnaires. Cette section présente les appròches numériques utilisé pour approcher les intégrales fractionnaires basées sur l'interpolation polynômiale.

On suppose que $f(t)\in C^2[0,T]$. Soit h le pas avec $h=T/n$. et notons $t_k = kh$, pour $k=0,1,...,n$. Ensuite, nous étudions comment calculer numériquement les valeurs de l'intégral suivante

$$\mathcal{D}_{0,t}^{\alpha}\ f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\ f(s)\ ds\ ,\ \alpha>0. \tag{2.2.8}$$

Une façon de calculer numériquement (2.2.8) consiste à approximer $f(t)$ par une certaine fonction $\widetilde{f(t)}$ pour que $\mathcal{D}_{0,t}^{\alpha}\ \widetilde{f(t)}$ peut facilement être calculé exactement. Nous penson naturellement à l'approximation polynômiale de $f(t)$ sur l'intervalle $[0,T]$. Théoriquement parlant $\mathcal{D}^{\alpha}_{0,t}\ \widetilde{f(t)}$ peut être calculé exactement si $\widetilde{f(t)}$ est un polynôme. Pour $t = t_n$, $n \in \mathbb{N}$, nous réécrivons $\left[\mathcal{D}^{\alpha}_{0,t}\ f(t)\right]_{t=t_n}$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}^{\alpha}_{0,t}\ f(t)]_{t=t_n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1}\ f(s)\ ds, &(2.2.9)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{\alpha-1}\ f(s)\ ds. &(2.2.10)
\end{aligned}$$

Ensuite, nous introduisons les méthodes numériques basées sur l'interpolation polynomiale calculer (2.2.10).

Méthodes numériques basées sur l'interpolation polynômiale

Cette sous-section étend les méthodes numériques pour les intégrales classiques aux intégrales fractionnaires.

Sur chaque sous-intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, $\widetilde{f(t)}$ est l'interpolation linéaire par morceaux pour f avec degré d'ordre 1.

$$f(t)\ |_{[t_k,t_{k+1}]} \approx\ \widetilde{f(t)}\ |_{[t_k,t_{k+1}]} = \frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}\ f(t_k) + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\ f(t_{k+1}), \tag{2.2.11}$$

Méthode de trapèze modifiée

Dans cette partie, nous donnons une généralisation de la méthode de trapèze (2.2.3) pour approcher l'intégrale fractionnaire $\mathcal{I}^{\alpha}\ f(x)$ d'ordre $\alpha > 0$.

on obtient la formule de trapèze modifiée comme suit :

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}^{\alpha}_{0,t}\ f(t)]_{t=t_n} &\approx [\mathcal{D}^{\alpha}_{0,t}\ \widetilde{f(t)}]_{t=t_n}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - t)^{\alpha-1} \left(\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}\ f(t_k) + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\ f(t_{k+1}) \right) dt\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}\ f(t_k), &(2.2.12)
\end{aligned}$$

Où

$$a_{k,n} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \int_0^{t_1} (t_n - t)^{\alpha-1}\ \frac{t_1-t}{t_1-t_0}\ dt, & k=0,\\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - t)^{\alpha-1}\ \frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k} dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - t)^{\alpha-1}\ \frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}\ dt, & 1 \le k \le n-1,\\ \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - t)^{\alpha-1}\ \frac{t-t_{k-1}}{t_n-t_{n-1}}\ dt, & k=n. \end{cases} \tag{2.2.13}$$

Par un calcul simple, on a

$$a_{k,n} \quad = \quad \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \quad \begin{cases} (n-1)^{\alpha+1} - (n-1-\alpha)\ n^\alpha, & k=0, \\ (n-k+1)^{\alpha+1} + (n-1-k)^{\alpha+1} - 2(n-k)^{\alpha+1}, & 1 \leq k \leq n-1, \\ 1, & k=n. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

Théorème 2.2.1 *Supposons que l'intervalle* $[0,a]$ *soit subdivisé en* n *sous-intervalles* $[t_k, t_{k+1}]$ *avec* $h = a/n$ *en utilisant les nœuds* $t_k = kh$, $k = 0, 1, ..., n$, *la méthode de trapèze modifiée*

$$\begin{aligned} T(f,h,\alpha) \quad &= \quad ((n-1)^{\alpha+1} - (n-1-\alpha)\ n^\alpha)\, \tfrac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}\ f(0) + \tfrac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}\ f(a) \\ &+ \quad \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} ((n-k+1)^{\alpha+1} + (n-k-1)^{\alpha+1} - 2(n-k)^{\alpha+1})\ \tfrac{h^\alpha\ f(x_k)}{\Gamma(\alpha+2)} \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

est une approximation de l'intégrale fractionnaire

$$(\mathcal{I}^\alpha f(t))(a) = T(f,h,\alpha) - E_r(f,h,\alpha), \quad a > 0, \alpha > 0. \tag{2.2.16}$$

De plus, si $f(x) \in C^2[0,a]$, alors il existe une constante C'_α ne dépend que de α, le terme d'erreur $E_{_T}(f,h,\alpha)$ est de la forme

$$|E_T(f,h,\alpha)| \leqslant C'_\alpha \left\| f" \right\|_\infty a^\alpha h^2 = O(h^2). \tag{2.2.17}$$

Preuve. Voir [10] . ■

Exemple 2.2.1 *Considérer la fonction* $f(x) = \sin x$, *dans les tableaux 1,2 et 3, nous utilisons la méthode de trapèze modifiée pour approximer l'intégrale fractionnaire pour différentes valeurs de* α.

Table 1 *: La méthode de trapèze modifiée pour* $(\mathcal{I}^{0.5} \sin x)(1)$

n	h	$T(f,h,0.5)$	$E_T(f,h,0.5)$
10	0.1	0.6691782509	5.060087×10^{-4}
20	0.05	0.6695538539	1.304057×10^{-4}
40	0.025	0.6696509827	3.327690×10^{-5}
80	0.0125	0.6696758223	8.437300×10^{-6}
160	0.00625	0.6696821295	2.130100×10^{-6}

Table 2 *: La méthode de trapèze modifiée pour* $(\mathcal{I}^1 \sin x)(1)$

n	h	$T(f,h,1)$	$E_T(f,h,1)$
10	0.1	0.4593145489	3.8314520×10^{-4}
20	0.05	0.4596019198	9.5774300×10^{-5}
40	0.025	0.4596737513	2.3942800×10^{-5}
80	0.0125	0.4596917085	5.9856000×10^{-6}
160	0.00625	0.4596961977	1.4964000×10^{-6}

Table 3 *: La méthode de trapèze modifiée pour* $(\mathcal{I}^{1.5} \sin x)(1)$

n	h	$T(f,h,1.5)$	$E_T(f,h,1.5)$
10	0.1	0.2820860602	2.363202×10^{-4}
20	0.05	0.2822634794	5.890100×10^{-5}
40	0.025	0.2823076693	1.471110×10^{-5}
80	0.0125	0.2823187037	3.676700×10^{-6}
160	0.00625	0.2823214613	9.191000×10^{-7}

2.2.3 Approximations des dérivées fractionnaires

Approximations des dérivées de Caputo

Puisque le dérivé de Riemann–Liouville et la dérivé de Caputo ont la relation , presque toutes les méthodes numériques du dérivé de Riemann–Liouville peut être théoriquement étendu à la dérivée de Caputo si $f(t)$ vérifie la souplesse appropriée conditions. Nous énumérons d'abord des algorithmes souvent utilisés dans la simulation du dérivé de Caputo dans les $\mathrm{EDF_s}$.

Méthodes numériques basées sur l'interpolation polynomiale

D'après la définition de la dérivée de Caputo, on peut constater que la dérivée de Caputo de l'ordre α $(m-1 < \alpha < m)$ d'une fonction donnée $f(t)$ peut être vue comme l'intégrale $(m-\alpha)$ de la fonction $f^{(m)}(t)$.Par conséquent, nous pouvons étendre les méthodes numériques développées pour simuler les solutions numériques de la dérivée de Caputo. Nous donnons ici les formules généralisées et certains de leurs cas particuliers et modifications.

Méthode de trapèze modifiée

Dans cette partie, nous dérivons un algorithme pour approcher les dérivées fractionnaires d'ordre arbitraire $\alpha < 0$ de Caputo pour une fonction donnée par une somme pondérée de la fonction et ses valeurs de dérivées ordinaires à des points spécifiés.

La formule de trapèze modifiée pour ${}^{C}\mathcal{D}_{0,t}^{\alpha}\ f(t)$ est donnée par

$$\left[{}^{C}\mathcal{D}_{0,t}^{\alpha}\ f(t)\right] \approx \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}\ f^{(m)}(t_k), \tag{2.2.18}$$

Où

$$a_{k,n} = \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m+2-\alpha)} \begin{cases} (n-1)^{m-\alpha+1} - (n-1-m+\alpha)n^{m-\alpha}, & k=0, \\ (n-k+1)^{m-\alpha+1} + (n-1-k)^{m-\alpha+1} - 2(n-k)^{m-\alpha+1}, & 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ 1, & k=n. \end{cases} \tag{2.2.19}$$

Théorème 2.2.2 *Supposons que l'intervalle $[0,a]$ soit subdivisé en n sous-intervalles $[t_k, t_{k+1}]$ de même longeur $h = a/n$ en utilisant les nœuds $t_k = kh$ pour $k = 0,1,...,n$, Alors la méthode trapèze modifiée de Caputo*

$$C(f,h,\alpha) = \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m+2-\alpha)} \begin{cases} ((n-1)^{m-\alpha+1} - (n-m+\alpha-1)\ n^{m-\alpha})\ f^{(m)}(0) + f^{(m)}(a) \\ +\sum_{k=1}^{n-1} ((n-k+1)^{m-\alpha+1} - 2(n-k)^{m-\alpha+1} \\ +(n-k-1)^{m-\alpha+1})\ f^{(m)}(x_k). \end{cases} \tag{2.2.20}$$

est une approximation de la dérivée fractionnaire de Caputo.

$$(\mathcal{D}^{\alpha} f(t))(a) = C(f,h,\alpha) - E_C\,(f,h,\alpha)\,, \quad \alpha > 0, \tag{2.2.21}$$

Pour $m-1 < \alpha < m$. De plus, si $f(t) \in C^{m+2}[0,a]$, alors il existe une constante $C'_{m-\alpha}$ qui ne dépend que de α pour que le terme d'erreur $E_C(f,h,\alpha)$ est de la forme

$$|E_C(f,h,\alpha)| \leqslant C'_{m-\alpha} \left\| f^{(m+2)} \right\|_{\infty} a^{m-\alpha}\ h^2 = O(h^2). \tag{2.2.22}$$

Preuve. Voir [10] . ■

Exemple 2.2.2 *Considérer la fonction $f(x) = \sin x$, dans les tableaux 1 et 2, nous utilisons la méthode de trapèze modifiée de la dérivée de Caputo pour approximer la dérivée* *fractionnaire* $(\mathcal{D}^{\alpha}\sin x)(1)$ *pour différentes valeurs de* α.

Table 1 *: Méthode de trapèze modifiée pour la dérivée fractionnaire de Caputo pour* $(\mathcal{D}^{0.5}\sin x)(1)$

n	h	$C(f,h,0.5)$	$E_C(f,h,0.5)$
10	0.1	0.8453829878	6.737989×10^{-4}
20	0.05	0.8458861770	1.706097×10^{-4}
40	0.025	0.8460137323	4.305440×10^{-5}
80	0.0125	0.8460459502	1.083650×10^{-5}
160	0.00625	0.8460540645	2.722200×10^{-6}

Table 2 *: Méthode de trapèze modifiée pour la dérivée fractionaaire de Caputo pour* $(\mathcal{D}^{1.5}\sin x)(1)$

n	h	$Cf,h,1.5)$	$E_C(f,h,1.5)$
10	0.1	0.6691782509	5.600870×10^{-4}
20	0.05	0.6695538539	1.304057×10^{-4}
40	0.025	0.6696509827	3.327690×10^{-5}
80	0.0125	0.6696758223	8.437300×10^{-6}
160	0.00625	0.6696821295	2.130100×10^{-6}

2.2.4 Approximations des EDF$_S$

Implémentation

Dans cette partie on veut approximer des certains types des EDF$_s$ linéaires, de la forme

$$\mathcal{D}^{\alpha}y(t) = \; y(t) + g(t) \tag{1}$$

premièrement on approxime le premier membre de cette équation $\mathcal{D}^{\alpha}y(t)$, qui est donné sous la forme (2.2.15) où la forme (2.2.20).

deuxièmement on approxime l'équation (1) suivant le schéma : $a = 0$, $b = 1$, $n = \{10, 100, 1000, 10000\}$, $h = (b-a)/n$, les points $t_k = kh$.

$$\begin{cases} y(t) = \mathcal{D}^{\alpha}y(t) - g(t) \\ y(t_k) = T(y,h,\alpha) - g(t_k). \end{cases} \tag{2}$$

Exemple 2.2.3 *On considère l'équation différentielle fractionnaire linéaire suivante*

$$\mathcal{D}^{1.5}y(t) = t^{1.5}\ y(t) + 4\sqrt{\frac{t}{\pi}} - t^{3.5},$$

Avec la condition initiale suivante

$$y(0) = 0.$$

Où la solution exact est $y(t) = t^2$, *et en prenant* $h = 0.1$.

Table 1 : *Solution numérique pour* $h = 0.1$

T	$sol.app$	$sol.exact$	$erreur$
0.1	0.00999999999999998	0.01	2.08167×10^{-17}
0.2	0.03999999999999981	0.04	2.01228×10^{-16}
0.3	0.08999999999999946	0.09	5.96745×10^{-16}
0.4	0.15999999999999906	0.16	9.99201×10^{-16}
0.5	0.24999999999999858	0.25	1.99840×10^{-15}
0.6	0.35999999999995790	0.36	2.99760×10^{-15}
0.7	0.48999999999999705	0.49	2.99760×10^{-15}
0.8	0.63999999999999600	0.64	3.99680×10^{-15}
0.9	0.80999999999999470	0.81	6.10623×10^{-15}
1.0	0.99999999999999000	1.00	6.99441×10^{-15}

Exemple 2.2.4 *On considère l'équation différentielle fractionnaire linéaire suivante*

$$\mathcal{D}^{2}y(t) + \mathcal{D}^{1.5}y(t) + y(t) = t^2 + 2 + 4\sqrt{\frac{t}{\pi}},$$

Avec la condition initiale suivante

$$y(0) = 0.$$

Où la solution exact est $y(t) = t^2$, *et en prenant* $h = 0.1$.

Table 2 : *Solution numérique pour* $h = 0.1$

T	$sol.app$	$sol.exact$	$erreur$
0.1	0.01000000000000325	0.01	3.20056×10^{-15}
0.2	0.04000000000000937	0.04	9.29812×10^{-15}
0.3	0.09000000000001489	0.09	1.48076×10^{-14}
0.4	0.16000000000001902	0.16	1.89848×10^{-14}
0.5	0.25000000000002354	0.25	2.29816×10^{-14}
0.6	0.36000000000002824	0.36	2.80331×10^{-14}
0.7	0.49000000000003320	0.49	3.30291×10^{-14}
0.8	0.64000000000003820	0.64	3.79696×10^{-14}
0.9	0.81000000000004320	0.81	4.29656×10^{-14}
1.0	1.00000000000004860	1.00	3.99680×10^{-14}

Conclusion

Dans ce mémoire on a traité certains types d'équations différentielles d'ordre fractionnaire de raison a cherché la solution analytique et approchée par des méthodes (transformeés) connues notamment la méthode de la transformeé de Laplace et la méthode décompositionnel de Adomian cette solution détermineé est appelée solution analytique, d'autre part on essaye d'approximer la solution par des techniques numérique à l'aide d'un passage essentiel qui donne l'approximation d'une dériveé ou l'intégrale fractionnaire basent sur l'interpolation polynomiale et l'intégration numérique (Méthode de trapèze modifieé), Cette étude est ilustré à la fin par des exemples .

Bibliographie

[1] Y.Arioua, Cours de équations différentielles fractionnaires, Université De M'sila, 2016/2017.

[2] A.Ajmal, A.Norhashidah Hj Mohd, On numerical solution of multi-terms fractional differential equations using shifted chebyshev polynomials, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2018, 111-125.

[3] L.Adjimi, Traitement numériques des équations différentielles d'ordre fractionnelle, Université Mohamed Boudiaf De M'sila, 2017/2018.

[4] R B. Albadarneh, I M.Batiha, M.Zurigat, Numerical solutions for linear fractional differential equations of order $1 < \alpha < 2$ using finite difference method (FFDM), J.Math. Computer Sci. 16(2016), 103-111.

[5] A.Bekka, Calcul numérique des dérivées fractionnaires, Université Mohamed Boudiaf De M'sila, 2017/1018.

[6] M E.Ben rahmoune, Problème de Cauchy pour les équations différentielles d'ordre fractionnaires, Université Mohamed Boudiaf De M'sila, 2017/2018.

[7] L.Changpin, Z .Fanhai, Numerical Methods for Fractional Calculus, Taylor et Francis Group, Boca Raton, 2015.

[8] M.Constantin, D.Gheorghe , J.Tenreiro Mochado, Introduction to Fractional Differential Equations, Springer Nature Switzerland AG 2019.

[9] Ur R.Mujeeb, A Kh.Rahmat, A numerical method for solving boundary value problems for fractional differential equations, Applied Mathematical Modelling 36 (2012), 894–907.

[10] Z.Obida, Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives, Applied Mathematics and Computation 178(2006) 527-533.

[11] F.Zaidour, La résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire, Université de Djilali Bounaama, Khemis Miliana, 2014/2015.

الملخص

في هذه المذكرة ، حاولنا إيجاد حلول تحليلية و عددية لبعض المعادلات التفاضلية ذات الصيغة الكسرية .

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية ذات الصيغة الكسرية ، مؤثر ريمان ليوفيل ، مؤثر كابتو، طريقة ترابيز، طريقة ادوميان .

Abstract

In this memory, we try to find analytical and numerical solutions for some fractional differential equations.

Keywords: Fractional differential equations, Riemann-Liouville operator, Caputo operator, Trapeze method, Adomian method.

Résumé

Dans ce mémoire, on a essayé de cherché la solution analytique et numérique de certaine classe des équations différentielle d'ordre fractionnaires.

Mots clés: Equation différentielle d'ordre fractionnaire, Opérateur de Riemann-Liouville, Opérateur Caputo, Méthode de Trapèze, Méthode d'Adomian.