

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
N° :



FILIERE : AUTOMATIQUE
OPTION : AUTOMATIQUE ET
SYSTEME

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par :
CHERIF Ala Eddine
NAIDJI Ilyes

Intitulé :

**Commande robuste fractionnaire d'une classe de
systèmes d'ordre fractionnaire.**

Devant le jury composé de :

Dr. IDIR Abdelhakim	Président	Univ. De M'sila
Dr. KHTTAB Khatir	Rapporteur	Univ. De M'sila
Dr. BOUKHALFA Abdelouaheb	Co- rapporteur	Univ. De M'sila
Dr. ROUBACHE Toufik	Examineur	Univ. De M'sila

Année universitaire : 2022/2023

Remerciement

Avant tout, nos remerciements vont à **Allah** le tout puissant qui nous a aidés à faire ce travail et qui nous a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Ce travail de recherche a été effectué au sein de l'université de Mohamed Boudiaf – M'SILA, sous la direction scientifique de **Dr. KHETTAB Khatir** et **Dr. BOUKHALFA Abdelouaheb** qu'on tient à remercier très vivement pour son enthousiasme envers notre travail, sa disponibilité et son soutien scientifique et humain.

On adresse nos remerciements à tous les membres du jury d'accepter de juger ce modeste travail.

On adresse un grand merci à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin durant ces années de recherche et d'études.

On ne peut conclure sans un mot de remerciement à tous nos enseignants tout le long de notre formation.

Enfin, un grand merci à nos parents, et à toute ma famille pour leur amour et leur soutien surtout durant les deux dernières années.

Dédicace

A nous parents,
A nous frères et
sœurs,
A tous les amis,

Table des matières

Remerciement	I
Dédicace	II
Table des matières	III
Listes des figurées	VI
Introduction générale.....	2

Chapitre I

Théorie de calcul d'ordre fractionnaire

I.1	Introduction	3
I.2	Commande d'ordre fractionnaire	3
I.3	Opérateurs d'ordre fractionnaire	3
I.3.1	Définition fondamentale	3
I.3.1.1	Définition de Grunwald-Letnikov	3
I.3.1.2	Définition de Riemann-Liouville.....	4
I.3.1.3	Définition de Caputo.....	4
I.4	Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire	5
I.5	Éléments sur la Transformé de La place	5
I.6	Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire	6
I.7	Equations différentielles fractionnaires et ces applications	8
I.7.1	Méthode d'Adams-Bashforth-Moulton.....	8
I.7.2	Méthode d'Oustaloup.....	10
I.7.3	Méthode de Charef (fonction de singularité)	11
I.7.3.1	Système du premier ordre fractionnaire	11
I.7.3.2	Système du second ordre fractionnaire	12
I.8	Conclusion.....	15

Chapitre II

Théorie de la commande robuste d'ordre fractionnaire

II.1	Introduction	16
II.2	Commande robuste	16
II.3	Théorie de la commande par mode glissant	16
II.3.1	Principe du réglage par mode glissant	17
II.3.2	Conception de la commande par mode glissement.....	17

II.3.3	Technique de commande par mode glissant.....	17
II.3.4	Synthèse de loi de commande par mode glissant	18
II.3.5	Domaine d'application du réglage par mode glissant.....	18
II.3.6	Les avantages de la commande par mode glissant.....	18
II.3.7	Problématique et conception de commande par mode glissant.....	19
II.3.8	Phénomène de réticence ou broutement.....	21
II.4	Théorie de la commande robuste H^∞	21
II.4.1	Synthèse de la commande robuste H^∞	21
II.4.2	Domaine d'application de la commande robuste H^∞	22
II.5	Notion de base sur la stabilité.....	22
II.6	Définitions et stabilité de Lyapunov.....	22
II.6.1	Méthode direct de Lyapunov.....	22
II.6.2	Extension au cas fractionnaire de la méthode directe de Lyapunov.....	23
II.7	Lemme de Barbalat.....	24
II.8	Conclusion	25

Chapitre III Commande robuste d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire :
Application et simulation

III.1	Introduction.....	26
III.2	Commande glissante d'ordre fractionnaire	26
III.2.1	Conception de la commande glissante	27
III.2.2	Choix de la surface de glissement.....	27
III.2.3	Conditions de convergence et d'existence.....	28
III.2.4	La fonction discrète de commutation.....	28
III.2.5	La fonction de Lyapunov.....	28
III.3	Calcul de la commande	29
III.3.1	Phénomène de réticence.....	31
III.3.2	Fonction de saturation.....	32
III.4	Exemple d'application.....	33
III.4.1	Résultats de simulation.....	33
III.5	Commande H^∞ d'ordre fractionnaire.....	36
III.5.1	Analyse de la stabilité.....	38
III.6	Exemple d'application.....	40

III.6.1 Résultats de simulation.....	40
III.7 Conclusion.....	44
Conclusion générale	45
Bibliographie	47

Listes des figurées

Figure III.1 : Différents modes pour la trajectoire dans le plan de phase	27
Figure III.2 : Représentation de la commande discontinue.....	31
Figure III.3 : Phénomène de Chattering.....	31
Figure III.4 : Représentation de la fonction Sat	32
Figure III.5 : Signal de x_1 et sa référence y_1	33
Figure III.6 : Signal de x_2 et sa référence y_2	34
Figure III.7 : Signal d'erreur x_1-y_1	34
Figure III.8 : Signal d'erreur x_2-y_2	34
Figure III.9 : Signal de la surface avec Sat(t).....	35
Figure III.10 : Signal de commande glissante.....	35
Figure III.11 : Plan de phase de synchronisation sans Sat(t)	35
Figure III.12 : Signal de la commande avec Sat(t).....	36
Figure III.13 : Plan de phase de synchronisation des systèmes avec Sat(t)	36
Figure III.14 : Signal de x_1 et sa référence y_1	41
Figure III.15 : Signal d'erreur x_1-y_1	41
Figure III.16 : Signal de x_2 et sa référence y_2	42
Figure III.17 : Signal d'erreur x_2-y_2	42
Figure III.18 : Signal de la commande avec Sat(t).....	43
Figure III.19 : Signal de la surface avec Sat(t).....	43

Résumé :

Ce mémoire, nous avons proposé les systèmes qui sont utilisés pour approximer les dynamiques inconnus des systèmes. L'analyse de la stabilité et de la robustesse des structures de commande vis-à-vis des erreurs d'approximation et des perturbations externes est effectuée par l'approche de Lyapunov. Ainsi que des développements des lois de commande (mode glissant et H^∞) et la stabilisation des systèmes linéaires à dérivée d'ordre fractionnaire pour la synchronisation et la réalisation des performances de poursuite. De plus, pour chaque technique proposée des exemples de simulation sont donnés pour montrer et mettre en évidence ses performances.

Mots-clés : Commande robuste, Systèmes fractionnaires, commande par mode glissant, commande par H^∞ , critère de Lyapunov.

Abstract:

In this thesis, we have proposed the systems which are used to approximate the unknown dynamics of the systems. The analysis of the stability and the robustness of the control structures vis-à-vis the errors of approximation and the external disturbances is carried out by the approach of Lyapunov. As well as developments of the control laws (sliding mode and H^∞) and the stabilization of fractional order derivative linear systems for synchronization and achieving tracking performance. In addition, for each proposed technique, simulation examples are given to show and highlight its performance.

Keywords: Robust control, fractional systems, sliding mode control, H^∞ control, Lyapunov criterion.

ملخص :

في هذه الأطروحة، اقترحنا الأنظمة المستخدمة لتقريب الديناميكيات غير المعروفة للأنظمة. يتم إجراء تحليل استقرار وقوة هياكل للتحكم في مواجهة أخطاء التقريب والاضطرابات الخارجية من خلال نهج ليابونوف. وكذلك تطورات قوانين التحكم (الوضع الانزلاقي و) وتثبيت الأنظمة الخطية المشتقة من النظام الكسري من أجل التزامن وتحقيق أداء التتبع. بالإضافة إلى ذلك، لكل تقنية مقترحة، يتم إعطاء أمثلة محاكاة لإظهار وإبراز أدائها.

كلمات مفتاحية: التحكم القوي، أنظمة كسور، التحكم في الوضع المنزلق، تحكم H^∞ ، معيار ليابونوف.

Introduction Générale

Introduction Générale

L'idée du calcul fractionnaire a été proposée il y a plus de 300 ans, mais ce n'est qu'à partir des années 1960 que la première application réussie du calcul fractionnaire a été réalisée. Au cours des dernières décennies, le calcul fractionnaire a connu un développement considérable et est largement utilisé dans divers domaines scientifiques et d'ingénierie.

L'application des concepts du calcul fractionnaire dans le domaine des systèmes de commande automatique a commencé au début des années 1960. Cependant, ce n'est que récemment que les contrôleurs basés sur le calcul d'ordre fractionnaire ont suscité un intérêt croissant au sein de la communauté de la commande. Dans ce domaine de recherche, tous les contrôleurs d'ordre fractionnaire développés intègrent des opérateurs et/ou des systèmes d'ordre fractionnaire dans leur structure ou leur mise en œuvre. Ces contrôleurs ont été introduits dans des applications de commande dans le but continu d'améliorer les performances du système de commande et sa robustesse.

L'une des théories qui connaissent actuellement une grande popularité parmi les chercheurs aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénierie, le Calcul Fractionnaire dont les premières prémises datent de plus de trois siècles. Au début c'était presque un jeu de l'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordre entier par des opérateurs d'ordre fractionnaire

Bien que le concept de la commande par mode glissant (SMC) et la théorie de système d'ordre fractionnaire soient bien connus, leur intégration, commande par mode glissant fractionnaire, est un point intéressant de la recherche a insisté sur ce travail avec quelques applications.

Ce genre de commande souffre de problème du chattering (le broutement) inhérent à la fonction discontinue (i.e. la fonction signe), pour cela en combinant cette commande par une commande proportionnelle intégrale, pour le but d'éliminer le phénomène de chattering.

On propose ici, un nouvel critère de stabilité de Lyapunov avec l'utilisation de la commande par mode glissant (SMC) par l'intégration de la commande SAT de saturation.

En général, dans ce travail, et par l'incorporation du critère de la technique de conception de poursuite de H^∞ et de stabilité de Lyapunov, de telle sorte que non seulement la stabilité du système de commande soit garantie mais également l'influence de la perturbation externe et

d'erreur d'approximation sur l'erreur de poursuite puisse être atténuée à un niveau prescrit par l'intermédiaire de la technique de conception H^∞ .

Notre travail est structuré en trois chapitres dans le mémoire :

- Le premier chapitre se concentre sur la présentation des fondements théoriques des systèmes d'ordre fractionnaire et de leurs principes.
- Dans le deuxième chapitre, nous abordons les aspects généraux de la commande robuste en mode glissant et H^∞ pour les systèmes d'ordre fractionnaire, ainsi que les méthodes de synthèse de leurs paramètres.
- Enfin, le dernier chapitre présente des simulations réalisées dans l'environnement MATLAB, mettant en œuvre des commandes robustes pour les systèmes d'ordre fractionnaire.

Chapitre I

Théorie du calcul d'ordre fractionnaire

Chapitre I : Théorie du calcul d'ordre fractionnaire

I.1 Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire est un domaine des mathématiques qui traite des dérivés et intégrales des ordres non entiers, en d'autres termes il s'agit d'une généralisation du calcul traditionnel qui conduit à des concepts et des outils similaires mais avec une application beaucoup plus large. Dans les deux dernières décennies le calcul fractionnaire a été redécouvert par les scientifiques et les ingénieurs et a été appliqué dans un nombre croissant de domaines notamment dans le domaine de la théorie de la commande. Le succès des contrôleurs d'ordre fractionnaire est incontestable avec beaucoup de succès en raison d'émergence de méthodes efficaces dans la différenciation et l'intégration des équations d'ordre non entier.

I.2 Commande d'ordre fractionnaire

La commande d'ordre fractionnaire est une généralisation de la théorie de la commande d'ordre entier classique. Son intérêt majeur est d'améliorer les performances des systèmes de commande en utilisant les concepts de la dérivation non entière et des systèmes d'ordre fractionnaire. Les systèmes dynamiques et les contrôleurs d'ordre fractionnaire, qui sont basés sur le calcul fractionnaire, ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs.

I.3 Opérateurs d'ordre non entier

I.3.1 Définition Fondamentale

Plusieurs définitions mathématiques pour la dérivation et l'intégration d'ordre fractionnaire peuvent être numérisées et parmi celles-là on cite les trois définitions utilisées pour la diffère intégral d'ordre fractionnaire général sont la définition de Grunwald-Letnikov (GL), la east l'ordre de l'opération, généralement définition de Riemann Liouville (RL) et la définition de Caputo.

I.3.1.1 Définition de Grunwald-Letnikov

Une des définitions les plus rencontrées de la dérivée d'ordre fractionnaire est appelée définition de Grunwald-Letnikov [1], donnée par :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{a d_t^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad (\text{I.1})$$

Cette définition provient de la généralisation aux ordres fractionnaires de la formule donnant la dérivée d'ordre entier supérieur n d'une fonction continue f(t), soit :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) n; N \in \mathbb{N} \quad (\text{I.2})$$

Sous la condition que les dérivées $f^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, m + 1$) sont continués dans

$[t_0, t]$ avec $m \leq \Re(\alpha) \leq m + 1$, a définition de Grunwald-Letnikov peut être aussi donnée par:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (I.3)$$

Où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma généralisée aux nombres fractionnaires, définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (I.4)$$

I.3.1.2 Définition de Riemann-Liouville

Une autre définition très utilisée de la dérivée d'ordre fractionnaire est appelée définition de Riemann-Liouville. Inspirée de la formule de Cauchy donnée par l'équation :

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x) dx \quad (I.5)$$

La définition complète de Riemann-Liouville de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire α de (t) est donnée par :

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{-\alpha-1} f(x) dx, & \text{si } \Re(\alpha) < 0 \\ f(t) & \text{si } \Re(\alpha) = 0 \\ D^n [{}_a D_n^{a-n} f(x)] , n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \Re(\alpha)\} & \text{si } \Re(\alpha) > 0 \end{cases} \quad (I.6)$$

Où $\alpha \in \mathbb{C}$ un entier positif et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, \infty]$.

I.3.1.3 Définition de Caputo

A la fin des années 60, dans le cadre de ses travaux sur la dissipation dans un matériau viscoélastique linéaire, Caputo a introduit une autre définition de la dérivation fractionnaire. [3] L'expression mathématique de cette définition est :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{r-\alpha-1} f^{(r)}(\tau) d\tau \quad (I.7)$$

Avec r un entier positif vérifiant l'inégalité $(r-1) < \alpha < r$.

$f^{(r)}(\tau)$, étant la dérivée d'ordre entier r , par rapport $a\tau$, de la fonction $f(\tau)$. ${}_a D_t^\alpha f(t)$, désigne la dérivée d'ordre fractionnaire α de la fonction $f(t)$ entre a et t selon la définition de Caputo.

I.4 Propriétés des opérateurs d'ordre non entier

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes : [3] et [4]

Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire ${}_aD_z^\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z et α .

Pour $\alpha = n$, où n est un entier, l'opération ${}_aD_z^\alpha f(z)$ donne le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier n .

Pour $\alpha = 0$ l'opération ${}_aD_z^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité : ${}_aD_z^0 f(z) = f(z)$.

La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires :

$${}_aD_z^\alpha f(z)af(z) + {}_aD_z^\alpha f(z)bg(z) = a{}_aD_z^\alpha f(z)aD^\alpha f(z) + b{}_aD_z^\alpha f(z)g(z)$$

La loi additive (propriété du semi-groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z)$$

Est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(z)$

I.5 Eléments sur la transformée de Laplace

La fonction $F(s)$ de la variable complexe s dénie par,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \quad (I.8)$$

La fonction originale $f(t)$ peut être retrouvée à partir de la transformée de Laplace $F(s)$ avec la transformée inverse de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s); t\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st}F(s)ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0 \quad (I.9)$$

Où c_0 se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (1.9).

Le produit de convolution des fonctions f et g est donné par

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(y - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (I.10)$$

des deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, qui sont nulles pour $t < 0$, est égale au produit de la transformée de Laplace des deux fonctions

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s) \quad (I.11)$$

Sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent. On utilisera la propriété (1.11) pour l'évaluation de la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville.

Une autre propriété très utile dont nous aurons besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée d'un ordre entier n de la fonction $f(t)$

Dans la partie suivante nous considérons la limite inférieure $a = 0$. [5], [4].

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)} \quad (\text{I.12})$$

I.6 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire [6], [5]

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) \quad (\text{I.13})$$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ est donnée par

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \quad (\text{I.14})$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}D_t^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{{}^{GL}D_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (\text{I.15})$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$, posons

$$D^\alpha = g^{(n)}(t) \quad (\text{I.16})$$

Ce qui entraîne

$$g(t) = D^{-(n-\alpha)} f(t) \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\tau-1} f(\tau) d\tau, \quad n-\tau < \alpha < n \quad (\text{I.17})$$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (\text{I.18})$$

Où

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)} F(s) \quad (\text{I.19})$$

A partir de la définition de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville, il vient

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-\alpha)} f(t) = {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) \quad (\text{I.20})$$

En substituant (1.19) et (1.20) dans (1.18), nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} f(t) \Big|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n \quad (\text{I.21})$$

En résumé, soit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, la transformée de Laplace de $f(t)$. On a les relations suivantes

- transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov

$$\mathcal{L}\{ D_t^{-\alpha} f(t) \} = s^{-\alpha} F(s), \quad n-1 < \alpha < n \quad (\text{I.22})$$

- transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} f(t) \Big|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n \quad (\text{I.23})$$

- transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

$$\mathcal{L}\{ {}_0^c D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} \frac{d^k f(t)}{dt^k} \Big|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n \quad (\text{I.24})$$

I.7 Equations différentielles fractionnaires et ces applications

Dans la littérature du chaos fractionnaire, deux méthodes d'approximations ont été proposées pour résoudre numériquement les équations différentielles d'ordre fractionnaire.

La première méthode, connue comme approximation de domaine fréquentiel, est basée sur l'approximation du comportement du système d'ordre fractionnaire dans le domaine fréquentiel. Dans un algorithme a été proposé de calculer les approximations de transfert linéaires de la fonction $\frac{1}{s^q}$ (Oustaloup et Charef ...).

La deuxième méthode est une version améliorée de l'algorithme (Grünwald-Letnikov et Adams-Bashforth-Moulton) est proposée et basée sur les définitions de Grünwald-Letnikov et Caputo [7].

I.7.1 Méthode d'Adams-Bashforth-Moulton

Soit q un réel positif vérifiant $m - 1 < q < m$, ${}^c D^q$ désigne l'opérateur de dérivation au sens de Caputo.

On se donne le problème aux conditions initiales suivant

$$\begin{cases} {}^c D_0^q y(t) = f(t, y) \\ {}^c D_0^q y(0) = y_0^k, k = 0, 1, \dots, m - 1 \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

La solution de l'équation (1.23) est équivalente à l'équation intégrale non linéaire de Volterra [8] comme,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - \tau)^{q-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (\text{I.26})$$

Le principe de cette méthode est de remplacer l'équation originale (1.23) par l'équation intégrale de Volterra (1.24) et on utilise la formule (produit de quadrature des trapèzes) pour remplacer l'intégrale par les nœuds $t_j, j = 0, 1, \dots, n + 1$ qui sont prises respectivement à la fonction $(t_{n+1} - \cdot)^{q-1}$ [9] c'est-à-dire

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} g(\tau) d\tau \approx \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} \tilde{g}_{n+1}(\tau) d\tau = \frac{h^q}{q(q+1)} \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} g(t_j) \quad (\text{I.27})$$

Avec

$$a_{jn+1} = \begin{cases} n^{q+1}(n-q)(n+1)^q & j = 0 \\ (n-j+2)^{q+1}(n-j)^{q+1} - (n-j+1)^{q+1} & 1 \leq j \leq n \\ 1 & j = n+1 \end{cases} \quad (I.28)$$

Cela nous donne la formule de correction [9] :

$$y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[q]-1} y_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_j) \quad (I.29)$$

Pour déterminer la formule de prédiction qui donne $y_h^p(t_{n+1})$, on procède de la même manière comme précédemment mais cette fois l'intégrale sera remplacée en utilisant la méthode des rectangles

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} g(t_j) \quad (I.30)$$

Où

$$b_{j,n+1} = \frac{h^q}{q} ((n-j+1)^q - (n-j)^q) \quad (I.31)$$

Où la valeur prédictive de $y_p(t_{n+1})$ est déterminée par la méthode Adams–Bashforth [10]

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{j=0}^{[q]-1} y_0^{(j)} \frac{t_{n+1}^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_j) \quad (I.32)$$

L'erreur d'estimation de cette approximation est décrite comme suit

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |y(t_j) - y_h(t_j)| = O(h^p) \quad \text{Avec } p = \min(2, 1+q)$$

Un système ayant trois équations différentielles fractionnaire de la forme

$$D^{q_1} x(t) = f_1(x, y, z)$$

$$D^{q_2} x(t) = f_2(x, y, z)$$

$$D^{q_3}x(t) = f_3(x, y, z)$$

Avec $0 < q_i \leq 1$ ($i = 1, 2, 3$), et la condition initial (x_0, y_0, z_0) .

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_0 + \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1 + 2)} f_1(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_1} \alpha_{1,j,n+1}}{\Gamma(q_1 + 2)} f_1(x_j, y_j, z_j), \\ x_{n+1} &= y_0 + \frac{h^{q_2}}{\Gamma(q_2 + 2)} f_2(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_2} \alpha_{2,j,n+1}}{\Gamma(q_2 + 2)} f_2(x_j, y_j, z_j), \\ x_{n+1} &= z_0 + \frac{h^{q_3}}{\Gamma(q_3 + 2)} f_3(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_3} \alpha_{3,j,n+1}}{\Gamma(q_3 + 2)} f_3(x_j, y_j, z_j), \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

Où

$$\begin{aligned} x_{n+1}^p &= x_0 + \sum_{j=0}^n \frac{\beta_{1,j,n+1}}{\Gamma(q_1)} f_1(x_j, y_j, z_j), \\ x_{n+1}^p &= y_0 + \sum_{j=0}^n \frac{\beta_{2,j,n+1}}{\Gamma(q_2)} f_2(x_j, y_j, z_j), \\ x_{n+1}^p &= z_0 + \sum_{j=0}^n \frac{\beta_{3,j,n+1}}{\Gamma(q_3)} f_3(x_j, y_j, z_j), \end{aligned}$$

$$\alpha_{i,j,n+1} = \begin{cases} n^{q_i+1} - (n - q_i)(n + 1)^{q_i}, & j = 0 \\ (n - j + 2)^{q_i+1} + (n - j)^{q_i+1} - 2(n - j + 1)^{q_i+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j = n + 1 \end{cases}$$

$$\beta_{i,j,n+1} = \frac{h^{q_i}}{q_i} ((n - j + 1)^{q_i} - (n - j)^{q_i})$$

I.7.2 Méthode d'Oustaloup

L'approximation d'Oustaloup d'un dérivateur généralisé, dont l'action différentielle couvre tout l'espace des fréquences, repose sur une distribution récursive d'une infinité de zéros et de pôles réels négatifs (afin d'assurer un comportement à phase minimale). Dans le cadre d'une synthèse réaliste (pratique) fondée sur un nombre fini de zéros et de pôles, il convient de réduire le comportement différentiel généralisé sur un intervalle fréquentiel borné, choisi selon les besoins de l'application.

La méthode est basée sur l'approximation de la fonction de la forme :

$$H(s) = s^m \quad m \in R^+ \quad (I.34)$$

Par la fonction rationnelle suivante :

$$\hat{H}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1 + (\frac{s}{w_k})}{1 + (\frac{s}{w'_k})} \quad (I.35)$$

En utilisant les formules de synthèse suivantes :

$$w'_0 = \alpha^{-0,5} w_m ; w_0 = \alpha^{0,5} w_m ; \frac{w_{k+1}}{w_k} = \frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \alpha . n > 1 \quad (I.36)$$

$$\frac{w'_{k+1}}{w_k} = n > 0 ; \frac{w_k}{w'_k} = \alpha > 0 ; N = \frac{\log(w_N/w_0)}{\log(\alpha.n)} ; m = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha.n)} \quad (I.37)$$

Avec w_m la fréquence du gain unité tel que $w_m = \sqrt{w_h/w_b}$, w_h et w_b sont les fréquences
Avec w_m la fréquence du gain unité tel que $w_m = \sqrt{w_h/w_b}$, w_h et w_b sont les fréquences
transitoires hautes, et basse respectivement.

I.7.3 Méthode de Charef (fonction de singularité) :

Dans le but d'implémenter des modèles d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande présentés dans ce travail, nous utiliserons la méthode appelée "méthode de la fonction de singularité" développée par Charef [11] qui est présentée dans cette section. Cette approche repose sur une méthode graphique ; elle consiste à approximer la ligne de pente fractionnaire sur le tracé de Bode de la fonction de transfert irrationnelle par un nombre de lignes sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente correspondant à une alternance de pôles et de zéros.

I.7.3.1 Système du premier ordre fractionnaire :

Pour un système d'ordre fractionnaire du premier ordre :

$$G(s) = \frac{1}{(1 + \frac{s}{w_c})^m} \quad (I.38)$$

Avec $0 < m < 1$ et w_c : fréquence de coupure.

On peut réécrire (I. 38) comme suit :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

Où (N + 1) est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système. L'équation (I.36) peut être tronquée à un nombre fini N, et l'approximation devienne :

$$G(s) = G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$p_i = (ab)^i p_0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3 \dots \dots \dots N \quad \text{(I. 39)}$$

$$z_i = (ab)^i a p_0 \quad \text{pour} \quad i = 2, 3 \dots \dots \dots N - 1 \quad \text{(I. 40)}$$

Avec :

$$p_0 = w_c 10^{\frac{\varepsilon}{20m}} = w_c \sqrt{b}$$

$$a = 10^{\frac{\varepsilon}{10(1-m)}}$$

$$b = 10^{\frac{\varepsilon}{10m}}$$

$$m = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad \text{(I. 41)}$$

ε est l'erreur tolérée en dB.

Avec une pente de -20m dB/déc. et son approximation par des lignes droites en zig-zig avec des pentes individuelles de -20 dB/déc. et 0 dB/déc.

I.7.3.2 Système du second ordre fractionnaire :

Pour un système de second ordre décrit par l'équation suivante :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\varepsilon \frac{s}{w_n} + 1\right)^m} \quad \text{(1.42)}$$

Avec $0 < m < 1$, on distingue deux cas :

Pour $0 < m < 0.5$:

La fonction est exprimée comme suit :

$$G_1(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \left(\frac{s}{w_n + 1}\right)^n}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1\right)} \quad (1.43)$$

Avec $\alpha = \varepsilon^m$ et $n = 1 - 2m$, ce qui peut aussi être approximé par la fonction :

$$G_1(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.44)$$

Les singularités (pôles p_i et z_i zéros) sont données par les formules suivantes :

$$p_i = (ab)^{i-1} a z_1 \quad \text{Pour } i = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$z_i = (ab)^{i-1} z_1 \quad \text{Pour } i = 2, 3, \dots, N - 1$$

Avec :

$$z_1 = w_n 10^{\frac{\varepsilon}{20^n}} = w_n \sqrt[n]{b}$$

$$a = 10^{\frac{\varepsilon}{10^{1-n}}}$$

$$b = 10^{\frac{\varepsilon}{10^n}}$$

$$n = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (I. 45)$$

ε Est l'erreur tolérée en dB.

L'ordre d'approximation N est calculé en fixant la bande de fréquences de travail, spécifiée par

w_{max} Telle que : $pN-1 < w_{max} < pN$, ce qui mène à la valeur suivante :

$$N = \text{partie entiere de } \left[\frac{\log\left(\frac{w_{max}}{p_1}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1$$

$G_1(s)$ peut alors être écrite sous la forme d'une fonction paramétrique d'ordre $N + 2$:

$$G_1(s) = \frac{b_{m0}s^N + b_{m1}s^{N-1} + \dots + b_{mN}}{s^{N+2} + a_{m1}s^{N+1} + \dots + a_{mN+2}} \quad (\text{I. 46})$$

Les coefficients ami et bmi sont calculés à partir des singularités pi et zi ainsi que α et wn .

Pour $0.5 < m < 1$:

La fonction d'approximation est donnée comme suit :

$$G_2(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha\frac{s}{w_n} + 1\right)\left(\frac{s}{w_{n+1}}\right)^n} \quad (1.47)$$

Avec $\alpha = \varepsilon m$ et $n = 2m - 1$, qui développée comme précédemment avec les valeurs singulières suivantes :

$$p_i = (ab)^{i-1}p_1 \quad \text{Pour } i = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$z_i = (ab)^{i-1}ap_1 \quad \text{Pour } i = 2, 3, \dots, N - 1$$

Avec :

$$p_1 = w_n 10^{\frac{\varepsilon}{20m}} = w_n \sqrt{b}$$

$$a = 10^{\frac{\varepsilon}{10^{1-n}}}$$

$$b = 10^{\frac{\varepsilon}{10^n}}$$

$$n = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I. 48})$$

ε Est l'erreur tolérée en dB.

$G_2(s)$ Peut alors être écrite sous la forme de la fonction paramétrique (I. 47).

I.8 Conclusion :

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul d'ordre fractionnaire. Quelques notions essentielles sur le calcul d'ordre fractionnaire nécessaire sont présentées pour la compréhension de notre travail sur la commande adaptative d'ordre fractionnaire. Après un historique sur le calcul fractionnaire. Nous avons présenté les définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire. Les caractéristiques et les méthodes de représentation et d'approximation de ces

opérateurs sont également étudiées. Enfin, nous avons présenté les performances des systèmes d'ordre non entier.

Chapitre II

Théorie de la commande robuste d'ordre fractionnaire

Chapitre II : Théorie de la commande robuste d'ordre fractionnaire

II.1 Introduction :

Dans ce chapitre, en incorporant le critère de la technique de H_∞ et la théorie de Lyapunov [12], on propose un nouvel algorithme de commande robuste de telle sorte que non seulement la stabilité du système est garantie, mais également l'influence de la perturbation et l'erreur d'approximation sur l'erreur de poursuite peut être atténuée à un niveau prescrit par l'intermédiaire de la technique proposée de H_∞ .

La méthode de conception proposée essaye de combiner la technique d'atténuation, la méthode d'approximation floue, et l'algorithme de la commande adaptative pour la conception d'une commande de poursuite robuste des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire avec une incertitude ou une variation inconnue des paramètres et des structures du système.

II.2 Commande robuste :

Toutefois, les performances de poursuite sont liées directement au choix des valeurs initiales des paramètres ajustables, et la robustesse du système bouclé vis-à-vis des incertitudes et des perturbations externes ne peut être garantie. Pour remédier à ces inconvénients et maintenir de bonnes performances de poursuite, l'utilisation d'approches de robustification s'avère nécessaire. Dans ce sens, plusieurs contrôleurs adaptatifs fous robustes utilisant la technique H_∞ ont été développés [13, 14].

Ces approches se basent sur l'ajout d'un signal de commande de type robuste pour atténuer les effets des erreurs d'approximation et des perturbations externes à un niveau arbitraire prescrit. Ce terme de commande peut être traduit dans l'espace d'état par l'obtention d'une matrice définie positive unique solution de l'équation de Riccati [15].

D'autre part, en raison de sa robustesse vis-à-vis des incertitudes et des perturbations externes, la commande par mode glissant, qui consiste à définir une surface de glissement en fonction des états du système de façon qu'elle soit attractive est combinée avec les algorithmes adaptatifs fous dans de nombreux travaux Tong (1999), Yoo (1998) ...

II.3 Théorie de la commande par mode glissant :

La commande par modes de glissement est une technique particulièrement intéressante, qui traite l'inévitable problème des incertitudes. Elle remonte aux années 1970. Son principe consiste à amener, dans un temps fini, quelles que soient les conditions initiales, le point représentatif de l'évolution du système sur une hypersurface de l'espace de phase par l'incorporation d'éléments de commutation dans la loi de commande. Le système se met en régime glissant lorsque ce point atteint l'hypersurface, dite surface de glissement. Son comportement devient alors insensible aux perturbations sur la sortie et aux variations paramétriques. Ce genre de commande source de problème de réticence ou "broutement" inhérent à la fonction discontinue (i.e. la fonction signe) [16, 17].

La théorie des systèmes à structure variable datant du début du 20ème siècle a pris son essor dans les années 60 Emelyanov [18] et à cause de la structure du contrôleur utilisé qui peut

changer d'une façon discontinue entre deux ou plusieurs structures, c'est le cas par exemple des circuits de conversion de puissance où le système est gouverné par une équation différentielle différente pour chaque position de l'interrupteur [19].

La théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés a fait l'objet d'études détaillées au cours des trente dernières années aussi bien par les chercheurs soviétiques que par les chercheurs d'autres pays, ce n'est que durant le premier congrès de l'IFAC en 1960 que la détermination du comportement dynamique du système commandé sur la surface de commutation a été considérée [20].

II.3.1 Principe du réglage par mode glissant :

La technique des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre, d'où le phénomène de glissement. Parmi les propriétés des modes glissants :

- La trajectoire d'état du système en mode de glissement appartient à une surface de dimension inférieure à celle de l'espace d'état, par conséquent l'ordre des équations différentielles régissant le fonctionnement du système en mode de glissement est réduit.
- La théorie des modes glissants s'adapte bien pour les systèmes dont la commande est discontinue.
- La dynamique du système en mode de glissement est déterminée uniquement par le choix des coefficients de la surface de glissement.

II.3.2 Conception de la commande par mode glissement :

Le concept des régulateurs par les modes glissants prend en charge les problèmes de stabilité et des performances désirées d'une façon symétrique. La mise en œuvre de cette méthode de commande nécessite principalement trois étapes :

1. Le choix de la surface.
2. L'établissement des conditions d'existence de la convergence.
3. La détermination de la loi de commande.

II.3.3 Technique de commande par mode glissant :

La commande par régime glissant consiste à garantir qu'un système dynamique d'ordre n peut être amené vers l'origine à partir de la stabilisation d'un nouveau système d'ordre 1 ; une seule variable s va définir le nouveau système au lieu de stabiliser de manière explicite les n variables qui constituent le système original, le problème est réduit à la stabilisation de s qui est une fonction des variables des systèmes elle est couramment appelée variable de glissement.

Plus précisément cette technique repose sur les deux étapes décrites ci-dessous :

- On définit d'abord une fonction $s = 0$ appelée surface de glissement, cette variable est déterminée de telle sorte que lorsque le point représentatif des systèmes l'atteint, sa dynamique le fait converger vers zéro.
- Ensuite, on impose une dynamique sur s an de garantir que le système va électivement atteindre la surface de glissement à l'aide de la condition d'attraction. La façon de dénis permet de déduire la commande à partir de la dynamique imposée.

II.3.4 Synthèse de loi de commande par mode glissant :

Soit le système non linéaire défini par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (\text{II.1})$$

Où $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathfrak{R}$ est la commande, $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions non linéaires.

La loi de commande par mode glissant est construite de façon à ce que les trajectoires du système pointent vers la surface de glissement $s = 0$ dans un premier lieu et ensuite maintenir ces trajectoires sur cette surface en deuxième lieu. Pratiquement, cette commande est composée de deux composantes : un discontinu us, permet de ramener les trajectoires vers la surface de glissement et d'assurer la robustesse vis-à-vis des perturbations externes, et la seconde, continue, dite la commande équivalente u_{eq} , permet le maintien et le glissement le long de la surface.

L'étude de l'existence du mode de glissement est basée sur la méthode de Lyapunov, an de garantir l'attractivité de la surface $s(t, x) = 0$, ce qui peut être traduit mathématiquement par [16, 33] :

$$s\dot{s} < 0 \quad (\text{II.2})$$

Cette condition indique que les trajectoires des systèmes convergent asymptotiquement vers la surface de glissement $s(t, x) = 0$ puis restent dans un ϵ -voisinage de cette surface [21].

II.3.5 Domaine d'application du réglage par Mode Glissant :

La technique du réglage par mode glissant a connu des développements importants dans tous les domaines de la commande. Dans le domaine des commandes hydrauliques ou pneumatiques, il existe des valves fonctionnant par tout ou rien qui ne possèdent que deux états stables : complètement ouvertes ou complètement fermées. Ces valves admettent des fréquences de commutation de quelques 10Hz.

Les entraînements électriques pour des machines-outils ou des robots, entraînements qui nécessitent, soit un réglage de la vitesse de rotation, soit un réglage de position. Dans ce cas le comportement dynamique à haute performance et la possibilité de limiter facilement certaines grandeurs (comme le courant et la vitesse de rotation) sont des avantages incontestables en faveur du réglage par mode glissant.

II.3.6 Les avantages de la commande par Mode Glissant :

Cette commande présente les caractéristiques suivantes :

1. La réponse du système est insensible et robuste aux variations de certains paramètres et aux effets troubles de la charge, et perturbations ;
2. Il suffit de connaître une borne pour v , ce qui simplifie le réglage ;
3. Le choix de la surface de commutation est assez libre ;
4. La commande est adoucie par la présence de la commande équivalente, celle-ci peut être supprimée au prix d'une augmentation de v .

II.3.7 Problématique et conception de commande par mode glissant :

Considérons le système SISO non linéaires d'ordre fractionnaire comme suit :

$$\begin{cases} D^q x_1 = x_2 \\ D^q x_2 = f(X, t) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

$$\begin{cases} D^q y_1 = y_2 \\ D^q Y_2 = f(Y, t) + \Delta f(Y, t) + d t + u(t) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Où $X = [x_1, x_2]^T$, $y = [y_1, y_2]^T$ est le vecteur d'état de ce système, et $0 < q < 1$. (Y, t) est non linéaire et inconnue. $\Delta(Y, t)$ Désigne l'incertitude et $d(t)$ est une perturbation agissant contre la performance du système. Une commande de mode glissant est proposée de prévoir l'entrée de commande (t) . En effet la procédure et conception de la commande par mode glissant comme suivantes :

- 1- Construire une surface de glissement qui représente une dynamique de système désiré.
- 2- Élaboration d'une loi de commande de commutation pour rendre le mode de glissement possible Sur chaque point de la surface de glissement Tous les états l'extérieur de la surface sont entraînés pour atteindre la surface en un temps fini.

Cependant, pour obtenir la loi de commande l'erreur de synchronisation est définie comme :

$$e_i = x_i - y_i \quad (\text{II.5})$$

La surface de glissement doit être

$$S(t) = c_1 e_1 + c_2 e_2 . \quad (\text{II.6})$$

Où c_1 et c_2 seront choisis de manière à ce que la dynamique de la surface de glissement seront rapidement, Dès que l'état atteint à la surface, il devrait rester inchangé,

La commande de mode de glissement sera conçue en deux phases

- 1- La phase d'arrivée quand $(t) \neq 0$ et
- 2- la phase de glissement par $(t) = 0$

Une condition suffisante pour que l'erreur de se déplacer de la première phase à la seconde est comme suit:

$$S(t) \dot{S}(t) \leq 0. \quad (\text{II.7})$$

Cette condition est appelée la condition de glissement. En l'absence d'incertitude et de perturbation externe le correspondant force de contrôle équivalent $u_{eq}(t)$. Peut être obtenu par $\dot{S}(t) = 0$ L'équation suivante fraction alize le dérivé classique vers un type fractionnel

$$\dot{S}(t) = D^{(1-q)} (D^q (s(t))) = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$Si D^q (s(t)) = 0 \rightarrow S(t) = 0 \quad (II.9)$$

Les signaux de commande dans l'équation suivant e poussent la dynamique pour atteindre la surface de glissement

$$\begin{aligned} D^q(s(t)) &= c_1 D^q e_1 + c_2 D^q e_2 = [c_1 c_2] \begin{bmatrix} D^q(x_1 - y_1) \\ D^q(x_2 - y_2) \end{bmatrix} \\ &= [c_1 c_2] \begin{bmatrix} e_2 \\ f(X) - f(Y) - \Delta f(Y, t) - d(t) - u_{eq}(t) \end{bmatrix} \\ D^q(s(t)) &= [c_1 c_2] \begin{bmatrix} e_2 \\ f(X) - f(Y) - \Delta f(Y, t) - d(t) \end{bmatrix} - c_2 u_{eq}(t) \end{aligned} \quad (II.10)$$

Par conséquent, la loi de commande équivalente est obtenue comme suit:

$$\begin{aligned} u_{eq}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{c_1}{c_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f(X) - f(Y) - \Delta f(Y, t) - d(t) \end{bmatrix} \\ u_{eq}(t) &= \frac{c_1}{c_2} e_2 + f(X) - f(Y) - \Delta f(Y, t) - d(t) \end{aligned} \quad (II.11)$$

Pour améliorer la robustesse contre les incertitudes des modèles et des perturbations externes, tels que les Etats restent sur la surface de glissement une action de commande de commutation peut être intégré en tant que:

$$U(t) = u_{eq} t - k D^{q-1}(sgn(S)). \quad (II.12)$$

La fonction de Lyapunov $V_{MG} = \frac{s^2(t)}{2}$. Ensuite, la condition d'atteindre peut être garantie pour

$$K > |D^{q-1}(\Delta f(Y, t))| + |D^{q-1}(d(t))| \quad (II.13)$$

Où $|D^{q-1}(\Delta f(Y, t))|$ et $|D^{q-1}(d(t))|$ sont supposés être délimitée

$$(ie |D^{q-1}(\Delta f(Y, t))| \leq \alpha \text{ et } |D^{q-1}(d(t))| \leq \beta).$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{V}_{MG}(t) &= S(t)\dot{S}(t) = S D^{q-1}(c_1 e_2 + c_2) \cdot [f(Y) - f(X) + \Delta f(Y, t) + d(t) + u_{eq}(t) - \\ &D^{q-1}(sgn(S))] \\ &= S D^{q-1}(\Delta f(Y, t) + d(t) - k D^{q-1}(sgn(S)) c_2 \\ &\leq c_2 \{-S \cdot K sgn(S) + \alpha |S| + \beta |S|\} = c_2 |S| \cdot [K - \alpha - \beta] \leq 0 \end{aligned} \quad (II.14)$$

Confirme l'existence

$$U(t) = \frac{c_1}{c_2} e_2 + f(X) - f(Y) - kD^{q-1}(\text{sgn}(S)). \quad (\text{II.15})$$

II.3.8 Phénomène de réticence ou broutement :

Le terme discontinu $K \sin(s)$ de la commande par mode glissant excite de fortes oscillations autour de la surface, qui entraînent l'apparition de ce qu'on appelle réticence connue en anglais sous le nom de "Chattering". An d'éliminer le broutement, plusieurs techniques ont été proposées telles que :

- la décomposition de la commande en une composante continue de basse fréquence et une commande discontinue de haute fréquence [20],
 - la solution de la couche limite : Dans ce cas la fonction signe est remplacée par des approximations continues [22] comme la fonction de saturation SAT qui filtré les hautes fréquences. Autres fonctions peuvent être aussi utilisées.
 - la solution basée sur un observateur : L'idée proposée par [23] consiste à générer les modes glissants idéaux dans une boucle auxiliaire d'observation.
 - la solution par la commande continue dans une bande autour de la surface de glissement [24].
- Et plus récemment les modes glissants d'ordre supérieur (HOSM) [25], l'idée est de satisfaire deux conditions de contrainte $s = \dot{s} = 0$ au lieu de la précédente, et simultanément garantir la continuité de \dot{s} . Pour cela l'espace d'état est élargi par l'addition de la variable de commande u comme nouvelle coordonnée.

II.4 Théorie de la commande Robuste H_∞ :

La robustesse est une notion très large qui traduit toujours la même idée, à savoir l'insensibilité ou par défaut la quasi-insensibilité. Aussi, dans un même domaine, il existe autant de types de robustesses que de grandeurs insensibles. Le domaine de la commande n'y échappe pas. Dans celui-ci, il est fréquent de considérer la robustesse de la stabilité dont l'objectif est le maintien de la stabilité ou en d'autres termes, la garantie d'une valeur maximale du facteur de résonance en asservissement ou en régulation [26, 27].

II.4.1 Synthèse de la commande robuste H_∞ :

La synthèse H_∞ est une méthode qui sert à la conception de commandes optimales. Il s'agit essentiellement d'une méthode d'optimisation, qui prend en compte une définition mathématique des contraintes en ce qui concerne le comportement attendu en boucle fermée. La commande H_∞ a pour principal avantage la capacité d'inclure dans un même effort de synthétisation les concepts liés à la commande classique et à la commande robuste.

Le mot « optimal » est utilisé dans son sens strictement mathématique car la commande synthétisée est celle qui minimisera l'effet des entrées/sorties du système, ce qui peut être vu comme "non optimal" par les opérateurs (l'optimisation étant relative à l'objectif recherché).

Le « infini » dans H_∞ signifie que ce type de commande est conçu pour imposer des restrictions de type minimax au sens de la théorie de la décision (minimiser la perte maximale possible) dans le domaine fréquentiel. La norme H_∞ d'un système dynamique est

l'amplification maximale que le système peut exercer sur l'énergie du signal d'entrée. Dans le cas d'un système MIMO, ceci équivaut au maximum de la plus grande valeur singulière du système, ce qui, dans le cas SISO, se traduit par la valeur maximale de l'amplitude de sa réponse fréquentielle.

II.4.2 Domaine d'application de la commande robuste H_∞ :

La synthèse de commande est depuis le début des années 2000 utilisée dans le cadre du contrôle de structures flexibles des systèmes spatiaux comme les satellites ou les lanceurs. Ces systèmes possèdent des modes de flexions proches de la bande passante du contrôleur et dont les caractéristiques sont incertaines (fréquence, gain, amortissement). La méthode permet de garantir théoriquement une certaine robustesse de la stabilité du système (via la marge de module) tout en assurant les performances de réjection de perturbation.

Sur Ariane 5, le pilotage basé a ainsi permis de garantir la stabilité du lanceur tout en optimisant la commande de braquage de la tuyère, faisant économiser plusieurs centaines de kilos sur le liquide hydraulique de commande.

II.5 Notion de base sur la stabilité :

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour de son point d'équilibre, c'est-à-dire, la capacité à revenir à sa position d'équilibre lorsqu'il est ponctuellement écarté. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de ses trajectoires d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Dans la littérature, plusieurs approches ont été proposées :

Les méthodes d'analyse qualitative, les méthodes géométriques, la théorie d'hyper stabilité de Popov, la théorie de Lyapunov.

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle [21, 28].

II.6 Définitions et Stabilité de Lyapunov :

L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche [29]. NB - Les définitions et les résultats donnés dans cette section sont particulièrement utiles dans l'analyse des schémas de commande adaptative

II.6.1 Méthode directe de Lyapunov :

La méthode directe de Lyapunov permet d'analyser la stabilité d'un système autour de son point d'équilibre sans le résoudre explicitement [24]. L'existence d'une fonction particulière fournit des informations sur la stabilité du système.

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrits par l'équation dynamique [30] :

$$\dot{x} = f(x, t), x(t_0) = x_0 \quad (\text{II.16})$$

Définition 6.1.1 :

Soit $V(x, t) : R^n \times R^+ \rightarrow R^+$ une fonction continue. V est dite propre dénie positive si :

1. $\forall t \in R^+, \forall x \in R^n, x \neq 0, V(x, t) > 0;$
2. $\forall t \in R^+, V(x, t) = 0 \Rightarrow x = 0;$
3. $\forall t \in R^+, \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x, t) = \infty$

Définition 6.1.2 :

(Fonction de Lyapunov) : Une fonction $V(x, t)$ de classe C^1 est une fonction de Lyapunov locale (respectivement globale) au sens large pour le système (II.17) si elle est propre dénie positive et s'il existe un voisinage de l'origine v_0 tel que $x \in v_0$ (respectivement $x \in R^n$) [138]:

$$\dot{V}(x, t) = (\partial V(x, t) / \partial t) + (\partial V(x, t) / \partial x) f(x(t)) \leq 0$$

Si $\dot{V}(x, t) \leq 0$, alors $V(x, t)$ est appelée fonction de Lyapunov au sens strict pour (II.16).

Définition 6.1.3 :

(Méthode directe de Lyapunov) : Si le système (II.16) admet une fonction de Lyapunov locale au sens large (respectivement au sens strict) alors l'origine est un point d'équilibre localement stable (respectivement asymptotiquement stable). Ce résultat peut être validé globalement $\forall x \in R^n$.

Remarque 6.1.4 :

La fonction de Lyapunov quadratique est choisie comme $V(x, t) = x^t P x, P = P^t > 0$, le système linéaire : $\dot{x} = Ax(t)$ est globalement exponentiellement stable à l'origine si et seulement si P est la solution de l'équation $A^t P + P A = -Q$, pour une matrice Q symétrique dénie positive.

Remarque 6.1.5 :

L'extension de la stabilité via la théorie de Lyapunov dans le cas fractionnaire est donnée et démontré dans [31, 32]

II.6.2 Extension au cas fractionnaire de la méthode directe de Lyapunov :

Par méthode directe de Lyapunov nous faisons allusion à la méthode consistant à trouver une fonction de Lyapunov associée à un problème non-linéaire, si une telle fonction existe alors le système est stable. Cette méthode est difficile à mettre en œuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que la méthode directe de Lyapunov nous donne une condition su-sante de stabilité, c'est-à-dire que le système peut être stable même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapunov car il n'y a pas de règle générale pour trouver une telle fonction, cependant, dans les problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat. Commençons par définir la stabilité au sens de Mittag-Leffer [33] :

Définition 6.2.1 :

[55] La solution de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire

$$D^\alpha y(x) = f(x, y(x)), 0 < \alpha < 1, \quad (\text{II.17})$$

Est dite Mittag-Leffer stable si :

$$\| y(x) \| \leq \{ m y(x_0) (x - x_0)^{-\gamma} E_{\alpha, 1}(-\lambda(x - x_0)^\alpha) \}^b, \quad (\text{II.18})$$

Où $0 < \alpha < 1, \gamma \in [0, 1 - \alpha], \lambda \geq 0, b > 0, m(0) = 0, m(y) \geq 0$ et $m(y)$ est localement lipschitzienne sur $x \in B \subset R^n$ avec m_0 comme constante de Lipschitz.

Remarque 6.2.2 :

La stabilité de Mittag-Leffer implique la stabilité asymptotique.

On va maintenant énoncer un théorème qui est considéré comme une extension de la méthode directe de Lyapounov au cas d'un système d'équations fractionnaires, et qui a pour résultat la stabilité au sens de Mittag-Leffer [34].

Théorème 6.2.3 :

Soit $y = 0$ un point d'équilibre du système (II.18) et $D \in R^N$ un domaine contenant l'origine. Soit $V(x, y(x)) : [0, \infty) \times D \rightarrow R$ une fonction continument dérivable et localement lipschitzienne par rapport à y telle que :

$$\alpha_1 \| y(x) \|^a \leq V(x, y(x)) \leq \alpha_2 \| y(x) \|^{\alpha b}, \quad (\text{II.19})$$

$$D^\beta V(x, y(x)) \leq -\alpha_3 \| y(x) \|^{\alpha b}, \quad (\text{II.20})$$

Où $x \geq 0, y \in D, \beta \in (0, 1), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a$ et b sont des constantes positives. Alors $y = 0$ est Mittag-Leffer stable.

Si les hypothèses sont variées sur R^N , alors $y = 0$ est globalement Mittag-Leffer stable.

La démonstration de ce théorème est trouvée dans [31].

II.7 Lemme de Barbalat :

Le lemme suivant sera utilisé intensivement à travers cette thèse, an de démontrer la convergence de l'erreur de poursuite vers zéro.

Lemme 7.1 :

Si $f, \dot{f} \in L_\infty$ et $f \in L_p$, pour $p \in [1, \infty[$, alors $f \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow \infty$.

Le résultat du Lemme 2.1 est un cas spécial d'un résultat plus général donné par le lemme de Barbalat indiqué ci-dessous :

Lemme 7.2 (Lemme de Barbalat, [61]) :

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$, existe et est finie, et $f(t)$ est une fonction uniformément continue, alors
 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$

II.8. Conclusion :

En conclusion, la théorie de la commande robuste d'ordre fractionnaire offre une approche prometteuse pour la conception de systèmes de contrôle plus efficaces et flexibles. En incorporant le calcul fractionnaire, cette théorie permet de modéliser et de contrôler des comportements dynamiques complexes qui ne sont pas bien représentés par les modèles d'ordre entier.

La commande robuste d'ordre fractionnaire offre plusieurs avantages par rapport à la commande d'ordre entier. Elle permet une meilleure adaptation aux incertitudes, aux perturbations et aux non-linéarités, offrant ainsi une performance plus robuste et précise. De plus, elle fournit des degrés de liberté supplémentaires dans la conception des régulateurs, ce qui facilite l'optimisation et l'ajustement des performances du système.

Cependant, il convient de noter que la théorie de la commande robuste d'ordre fractionnaire est encore un domaine de recherche relativement récent, et il existe encore des défis à relever, tels que la complexité de la conception et l'identification des paramètres. De plus, son application pratique peut être limitée par la disponibilité d'outils de calcul fractionnaire et de méthodes de mise en œuvre.

Chapitre III

Commande robuste d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire Simulation et Application

Chapitre III : Commande robuste d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire : Simulation et Application.

III.1 Introduction :

Dans ce chapitre, on propose deux commandes pour réaliser la performance de la poursuite des systèmes d'ordre fractionnaire.

L'une est par mode de glissement pour une classe des systèmes d'ordre fractionnaire non linéaires inconnus, afin d'éviter le phénomène de chattering et d'offrir une bonne performance de l'état; en outre, on applique la théorie de la synthèse de Lyapunov pour assurer que tous les signaux sont bornés, ainsi que la poursuite de la sortie du système et de référence avec les incertitudes des perturbations soit réalisée

L'autre est le H_∞ de telle sorte que non seulement la stabilité du système pour cette commande soit garantie, mais également l'influence de l'erreur d'approximation et de la perturbation externe sur l'erreur de poursuite puisse être atténuée arbitrairement à un niveau bien défini.

Des résultats de simulation montrent que l'erreur de poursuite et l'effort de commande peuvent être rendus plus petits.

III.2 Commande glissante d'ordre fractionnaire

Un système à structure variable est un système dont la structure change pendant son fonctionnement. Il est caractérisé par le choix d'une logique de commutation. Ce choix permet au système de commuter d'une structure à une autre à tout instant. De plus, un tel système peut avoir des nouvelles propriétés qui n'existent pas dans chaque structure. Dans la commande par mode de glissement, la trajectoire d'état est amenée vers une surface puis à l'aide de la loi de commutation, elle est obligée de rester au voisinage de cette surface appelée surface de glissement et les mouvements qui se produisent sont appelés mouvements de glissement [35].

La trajectoire dans le plan de phase est constituée de trois parties distinctes :

1. Le mode de convergence (MC) : est le mode durant lequel la variable à régler se déplace à partir de n'importe quel point initial dans le plan de phase (x_1, x_2) , est tend vers la surface de commutation $S(x_1, x_2) = 0$. Ce mode est caractérisé par une loi de commande discontinue et le critère de convergence.
2. Le mode de glissement (MG) : est le mode durant lequel la variable d'état atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique de ce mode
3. Le mode de régime permanent (MRP) : ce mode est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre, il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande.

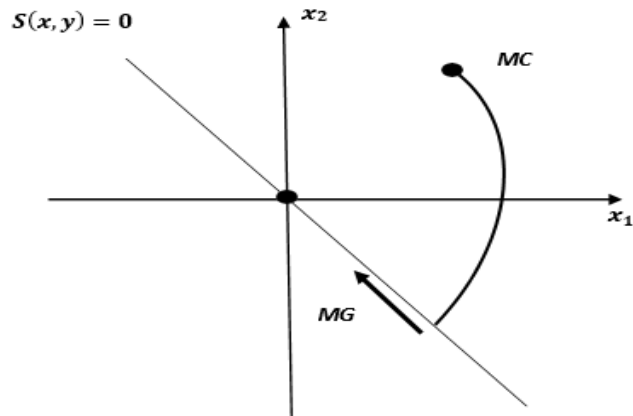


Figure III.1 Différents modes pour la trajectoire dans le plan de phase

III.2.1 Conception de la commande glissante

La commande par mode glissant, à des avantages importants et multiples, tels que la haute précision, la bonne stabilité, la simplicité de conception, la robustesse, etc. Ceci lui permet d'être particulièrement adaptée pour les systèmes ayant un modèle imprécis.

Dans ce cas, la structure d'un contrôleur comporte deux parties : une partie continue représentant la dynamique du système durant le mode glissant et une autre discontinue représentant la dynamique représentant la dynamique du système durant le mode de convergence. Ce dernier est important dans la commande non linéaire, elle a pour rôle d'éliminer ou réduire les effets d'imprécisions et des perturbations sur le modèle.

Pour illustrer la méthode de conception de la commande par mode glissant d'ordre un, nous considérons le cas d'un système non linéaire, défini par [36]:

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x).u \quad (\text{III.1})$$

Avec :

$x \in R^n$: est le vecteur d'état.

$u \in R^m$: est le vecteur de commande.

La conception de la commande peut être effectuée en trois étapes dépendantes l'une de l'autre.

1. Choix de la surface de glissement.
2. L'établissement des conditions d'existence et de convergence.
3. Détermination de la loi de commande

III.2.2 Choix de la surface de glissement

La surface de glissement ou la fonction de commutation (Switching function) représente le comportement dynamique désiré du système en boucle fermée. Elle peut être choisie linéaire ou non linéaire.

L'une des formes que la surface (de Slotine) peut prendre est donnée par [37] :

$$S(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)^{r-1} e(x) \quad \text{III.2}$$

Avec :

λ : Constante positive.

r : est le degré relatif, il représente le nombre de fois qu'il faut dériver la surface pour faire apparaître la commande.

$e(x) = x - x_d$: est l'écart entre la variable à régler et sa référence.

x : Variable d'état.

x_d : Valeur désirée.

Une autre forme de la surface est la suivante :

$$S(x) = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{id}) \quad \text{(III.2)}$$

La dynamique de convergence est assurée par les choix des coefficients c_i .

L'objectif de la commande est de maintenir la surface à zéro ($S(x) = 0$), dont l'unique solution est ($e(x) = 0$) pour un choix convenable des paramètres.

III.2.3 Conditions de convergence et d'existence

Les conditions de convergence et d'existence sont deux critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment de la perturbation. Il existe deux conditions pour assurer le mode de convergence.

III.2.4 La fonction discrète de commutation

C'est la première condition de convergence, elle est proposée par Emilyanov et Utkin. Il s'agit de donner à la surface une dynamique convergente vers zéro. Elle est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{s}(x) &> 0 \quad \text{si} \quad s(x) < 0 \\ \dot{s}(x) &< 0 \quad \text{si} \quad s(x) > 0 \end{aligned} \quad \text{(III.3)}$$

Cette condition peut être formulée comme suit :

$$\dot{s}(x) s(x) < 0 \quad \text{(III.4)}$$

III.2.5 La fonction de Lyapunov

L'idée est de choisir une fonction scalaire $S(x)$ pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence et de concevoir la commande u . La fonction de Lyapunov est définie comme suit :

$$v(x) = 1 s^2(x) \quad (\text{III.5})$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\dot{v}(x) = \dot{s}(x) s(x) \quad (\text{III.6})$$

Pour que la fonction $v(x)$ puisse décroître, il suffit d'assurer que sa dérivée soit strictement négative. Ceci n'est vérifié que si la condition suivante est vérifiée :

$$\dot{v}(x) = \dot{s}(x) s(x) < 0 \quad (\text{III.7})$$

L'équation (III.7) explique que le carré de la distance entre un point donné du plan de phase et la surface de glissement exprimé par $s^2(x)$ diminue tout le temps, contraignant la trajectoire du système à se diriger vers la surface à partir des deux côtés de cette surface. Cette condition suppose un régime glissant idéal où la fréquence de commutation est infinie.

III.3 Calcul de la commande

Il faut déterminer la commande nécessaire pour attirer la trajectoire d'état vers la surface de glissement et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant les conditions d'existence du mode de glissement.

L'obtention d'un régime de glissement suppose une commande discontinue. La surface de glissement devrait être attractive des deux côtés. Si cette commande discontinue est indispensable, il n'empêche nullement qu'une partie continue lui soit ajoutée.

La partie continue en effet, amène à réduire autant que nous voulons l'amplitude de la partie discontinue.

En présence d'une perturbation, la partie discontinue a essentiellement pour but de vérifier les conditions d'attractivité. Dans ce cas, la structure d'un contrôleur par mode de glissement est constituée de deux parties, une concernant la linéarisation (u_{eq}) et l'autre stabilisante (u_n).

On écrit :

$$u = u_{eq} + u_n \quad (\text{III.8})$$

Tel que :

u_{eq} : La commande proposée par Utkin, elle sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement $s(x) = 0$, la commande équivalente est déduite en considérant que la dérivée de la surface est nulle $\dot{s}(x) = 0$. Elle peut être interprétée comme étant un retour d'état particulier jouant le rôle d'un signal de commande appliqué sur le système à commander, elle peut être comme une valeur moyenne que prend la commande lors de la commutation rapide entre les valeurs u_{max} et u_{min} .

u_n : est déterminée pour vérifier la condition de convergence.

Pour mettre en évidence le calcul de la commande, nous considérons un système défini dans l'espace d'état par l'équation. Il s'agit de trouver l'expression de la commande u .

$$s(\dot{x}) = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t}$$

Il en résulte :

$$S(x) = \frac{\partial S}{\partial x} (f(x) + g(x)u_{eq}) + \frac{\partial S}{\partial x} g(x)u_n$$

Durant le mode de glissement et le régime permanent, la surface est nulle, et par conséquent, sa dérivée et la partie discontinue sont aussi nulles. D'où nous déduisons l'expression de la commande équivalente :

$$u_{eq} = - \left(\frac{\partial S}{\partial x} + g(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} f(x)$$

Pour que la commande équivalente puisse prendre une valeur finie, il faut que :

$$\frac{\partial S}{\partial x} g(x) \neq 0$$

Durant le mode de convergence, et en remplaçant la commande équivalente par son expression nous trouvons la nouvelle expression de la dérivée de la surface :

$$\dot{s}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} g(x)u_n \quad (\text{III.9})$$

Et la condition d'attractivité exprimée par (III.5) devient :

$$\frac{\partial S}{\partial x} g(x)u_n \quad S(x) > 0 \quad (\text{III.10})$$

Afin de satisfaire cette condition le signe de u_n doit être opposé à celui de

$$S(x) \frac{\partial S}{\partial x} g(x)$$

La forme la plus simple que peut prendre la commande discontinue est celle d'un relais

$$u_n = K \text{sign } s(x) \quad (\text{III.11})$$

Le signe de K doit être différent de celui de $\frac{\partial S}{\partial x} g(x)$.

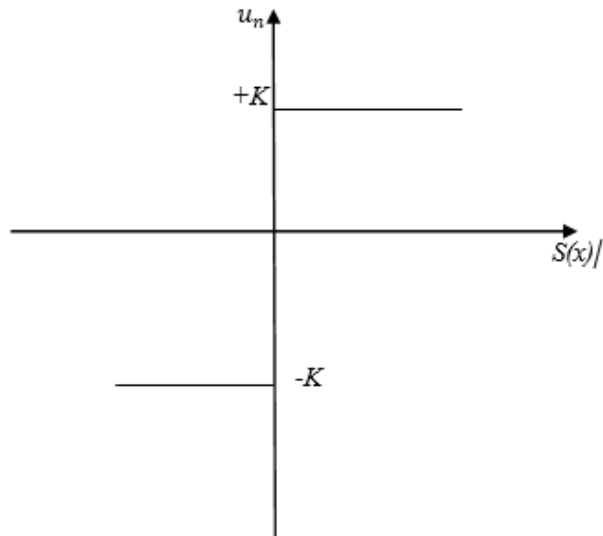


Figure III.2 Représentation de la commande discontinue

III.3.1 Phénomène de réticence

La commande discontinue u_n , du fait d'une fréquence de commutation finie, ne génère pas un mode glissant idéal, des oscillations à haute fréquence apparaissent dans un voisinage de la surface, connues sous le nom de réticence ou Chattering en anglais.

Ce phénomène est le principal désavantage de la commande par mode glissant d'ordre un, il peut exciter des dynamiques non modélisées conduisant à l'instabilité [38].

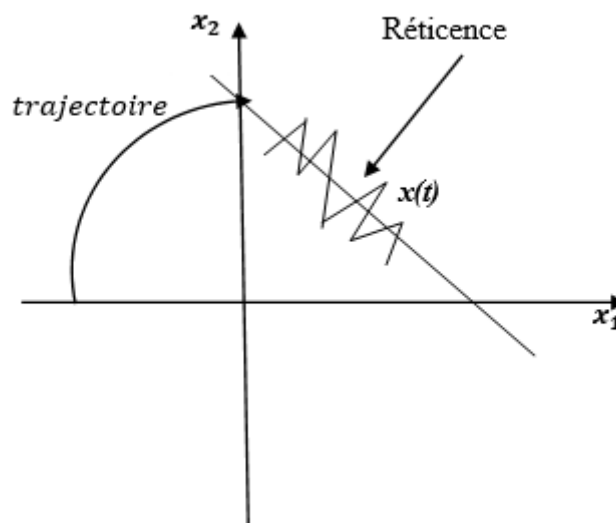


Figure III.3 Phénomène de Chattering.

De nombreuses études ont été effectuées dans le but de réduire ou d'éliminer le phénomène de réticence (Chattering). L'une d'entre elles consiste à utiliser des fonctions sigmoïdes, telle que la fonction \tanh , \arctan ou la fonction de saturation représentées comme suit :

III.3.2 Fonction de saturation

Elle consiste à remplacer la fonction $\text{sign}(s)$ par la droite de pente $\frac{1}{\varepsilon}$; à l'intérieur d'une bande de largeur 2ε située de part et d'autre de la surface de glissement, la discontinuité étant conservée à l'extérieur de cette bande. Son expression est donnée par [39] :

$$\text{Sat}(s, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{S}{\varepsilon} & \text{si } |s| \leq \varepsilon \\ \text{sign}(s) & \text{si } |s| > \varepsilon \end{cases}$$

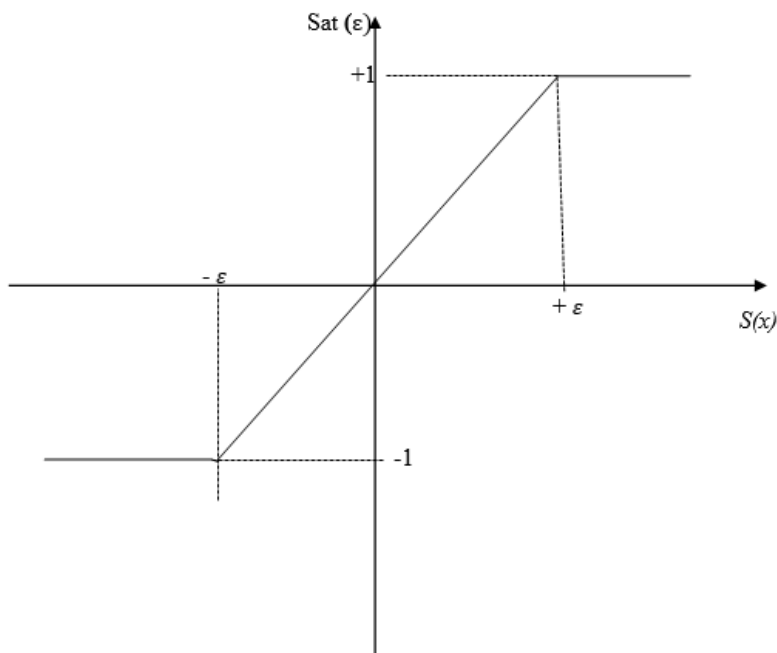


Figure III.4 Représentation de la fonction Sat

- **Fonction pseudo-signe**

$$V(s, \varepsilon) = \frac{s}{|s| + \varepsilon}$$

- **Fonction avec tangente**

$$V(s, \varepsilon) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

- **Fonction tangente hyperbolique**

$$V(s, \varepsilon) = \tanh\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

- Fonction tangente sigmoïde

$$V(s) = \frac{1}{1 + e^{-2s}}$$

III.4 Exemple d'application

Dans cette section, on applique la commande par mode glissant pour la commande et la synchronisation des deux différents systèmes de Duffing d'ordre fractionnaire. On considère deux systèmes d'ordre fractionnaire de Duffing comme suit, L'un est un système de référence donné comme

$$D^q y_1 = y_2$$

$$D^q y_2 = y_1 - \alpha y_2 - y_1^3 + \beta \cos(t) + \Delta f(Y, t) + d(t) + u(t)$$

Et l'autre est un système de réponse (de commande) donnée comme

$$D^q x_1 = x_2$$

$$D^q x_2 = x_1 - \alpha x_2 - x_1^3 + \beta \cos(t)$$

Où la perturbation externe donnée comme $d(t) = 0.1 \sin(t)$.

Les conditions initiales sont choisies comme suit $y(0) = [0, 0]^T$ et $x(0) = [1, -1]^T$ respectivement avec un temp de simulation $TSim = 30, Ks = 1$.

On considère dans ce cas l'ordre fractionnaire $q_1 = q_2 = 0.98$, Pour les autres constantes de conception sont fixées comme suit $k_1 = k_2 = 1, r = 0.005$, le pas $h = 0.001$, et $\alpha = 0.25, \delta = 0.3, \omega = 1, \theta = 1$.

III.4.1 Résultats de simulation

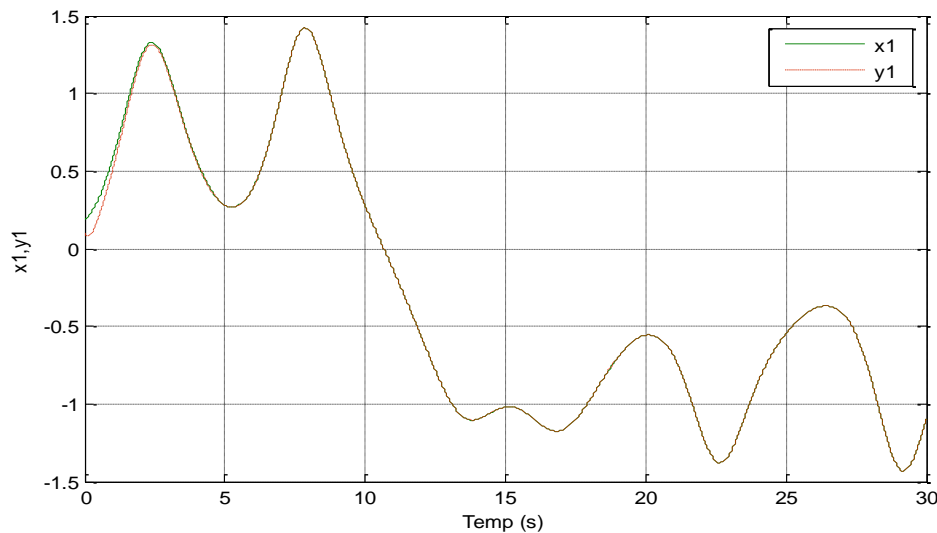


Figure III.5 Signal de x1 et sa référence y1

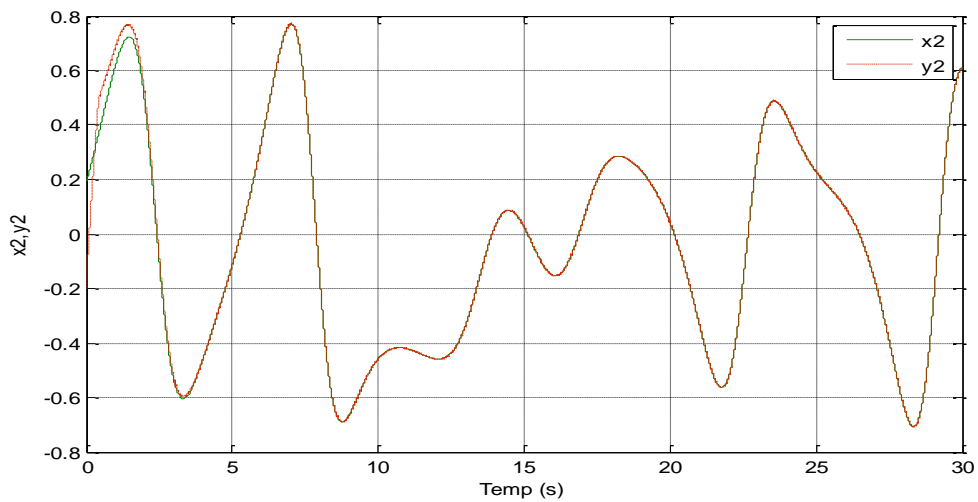


Figure III.6 Signal de x_2 et sa référence y_2

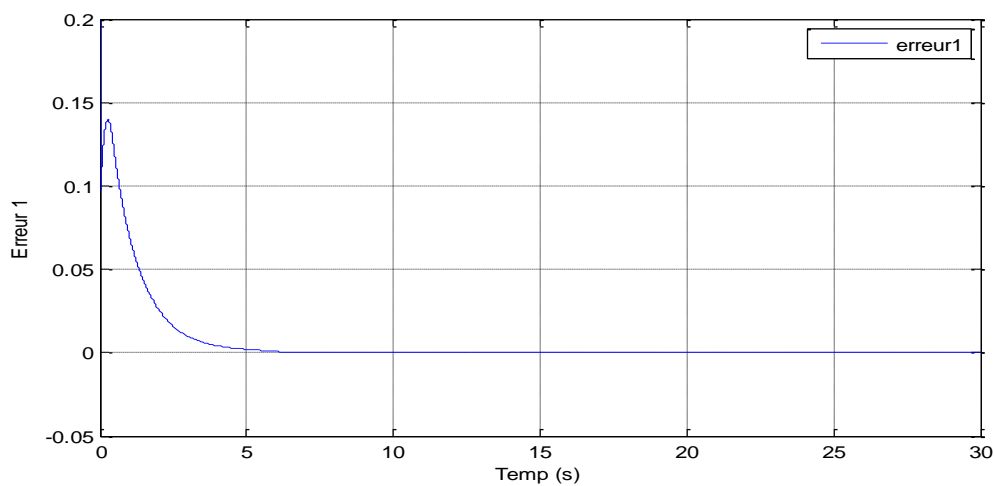


Figure III.7 Signal d'erreur $x_1 - y_1$

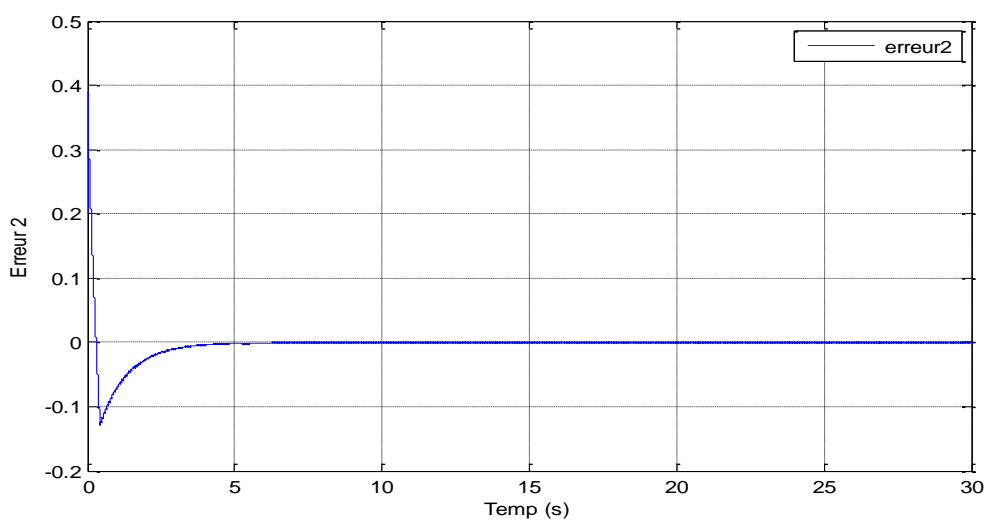


Figure III.8 Signal d'erreur $x_2 - y_2$

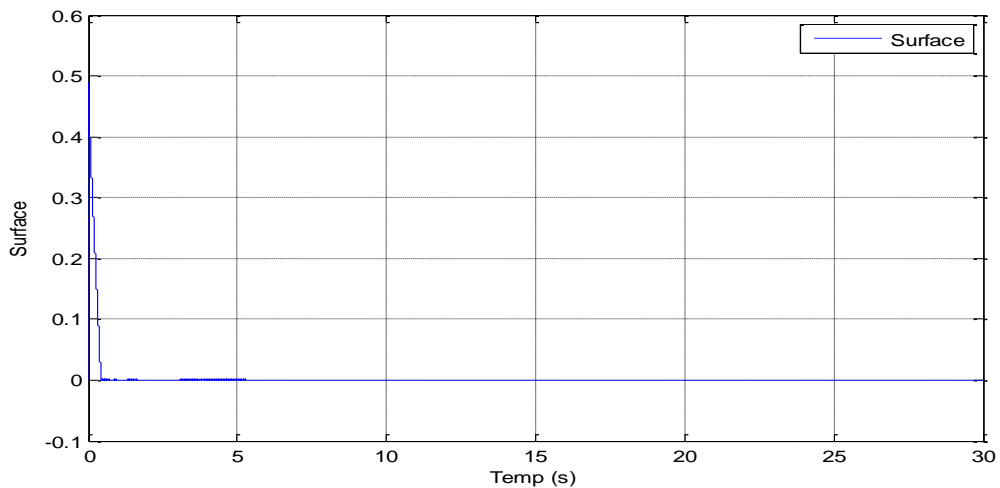


Figure III.9 Signal de la surface avec Sat(t)

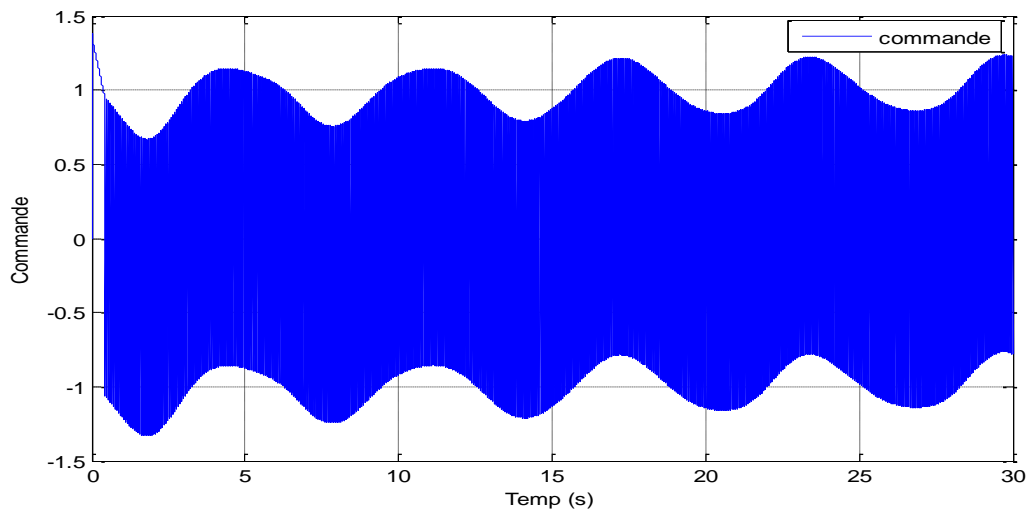


Figure III.10 Signal de commande glissante

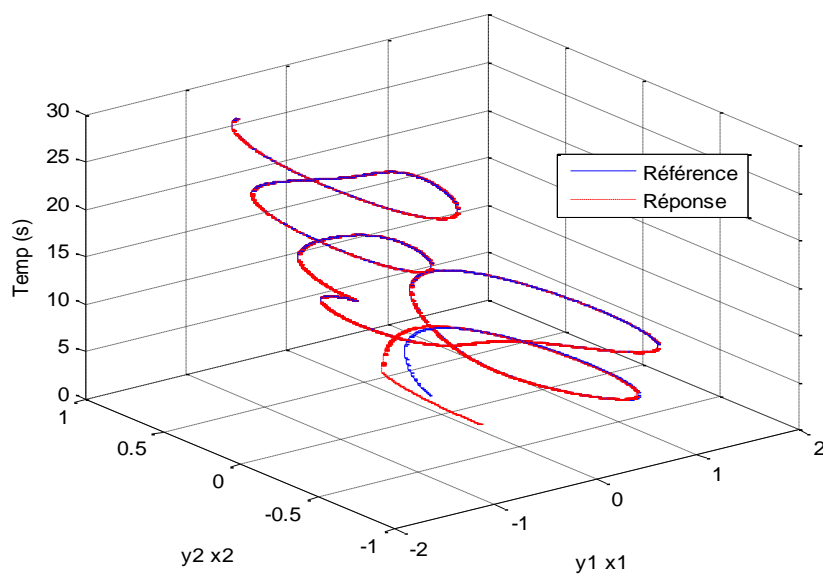


Figure III.11 Plan de phase de synchronisation sans Sat(t)

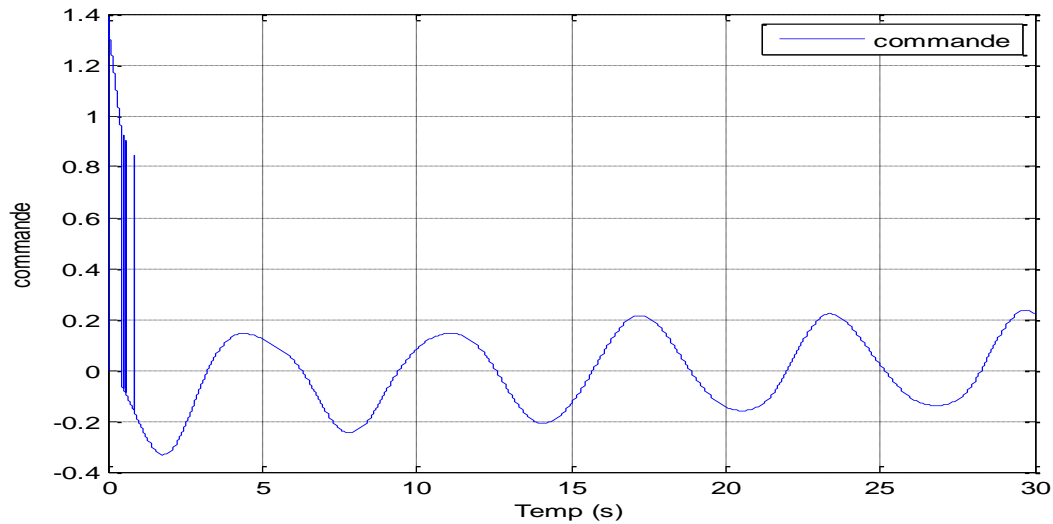


Figure III.12 Signal de la commande avec Sat(t)

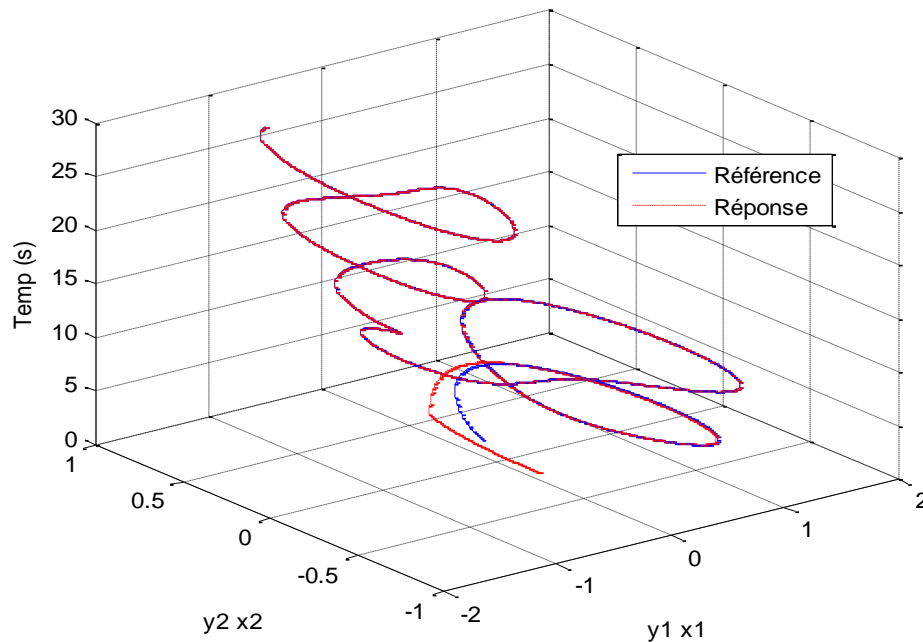


Figure III.13 Plan de phase de synchronisation des systèmes avec Sat(t)

III.5 Commande H^∞ d'ordre fractionnaire

Considérons le système chaotique d'ordre fractionnaire comme suit [40]

$$\begin{aligned} x^{(nq)} &= f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t)u + d(t) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Où $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T$ est le vecteur d'état de ce système,

$f(\underline{x}, t)$ et $g(\underline{x}, t)$ Sont non linéaires et inconnues, $d(t)$ est la perturbation externe donnée bornée, $u(t)$ est l'entrée de commande. L'objectif de la commande est de forcer la sortie y à

suivre un signal de référence donné borné \underline{y}_d , sous la contrainte que tous les signaux impliqués doivent être bornés.

Pour commencer, le signal de référence de vecteur y_d et le vecteur d'erreur \underline{e} est définie

Comme [41],

$$\underline{y}_d = [y_d, y_d^{(q)}, \dots, y_d^{((n-1)q)}]^T \in R^n$$

$$\underline{e} = \underline{y}_d - \underline{y} [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in R^n, e^{(iq)} = y_d^{(iq)} - y^{(iq)}$$

Soit $\underline{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \in R^n$ telles que toutes les racines du polynôme caractéristique $p(s) = s^{nq} + k_n s^{(n-1)q} + \dots + k_1$, soient dans le demi-plan gauche (système stable). Si les fonctions $f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont connues et le système avec une perturbation externe $d(t) = 0$, alors la loi de commande a la forme suivante [42] [43]

$$\bar{u} = \frac{1}{g(\underline{x}, t)d} (-f(\underline{x}, t) + y_d^{(nq)} + \underline{k}^T \underline{e}) \quad (\text{III.13})$$

En appliquant (III.13) à (III.12) l'équation de l'erreur est obtenue comme, [44]

$$e(nq) + k_n e^{(n-1)q} + \dots + k_1 e = 0$$

Qui implique que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ qui est l'un des objectifs de la commande.

Cependant, lorsque $f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont inconnues et la perturbation externe $d(t) \neq 0$, l'effort de commande idéal (4.2) ne peuvent pas être mis en œuvre (non réalisable). On remplace $f(x, t)$ et $g(x, t)$ par les systèmes flous $f(\underline{x}|\underline{\theta}_f)$ et $g(\underline{x}|\underline{\theta}_g)$ spécifiés comme,

$$f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) = \xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_f \text{ and } g(\underline{x}|\underline{\theta}_g) = \xi^T(\underline{x})\underline{\theta}_g \quad (\text{III.14})$$

Avec $\xi(\underline{x})$ est un vecteur de fonctions floues de base supposé convenablement fixé en avance par l'utilisateur, $\underline{\theta}_f$ et $\underline{\theta}_g$ sont les vecteurs de paramètres ajustés par des lois d'adaptation sur la base d'un critère de stabilité de Lyapunov. [40]

L'équation dynamique d'erreur peut être obtenue dans la représentation de l'espace d'état comme

$$\underline{e}^{(q)} = A\underline{e} + B\{\alpha([f(\underline{x}|\underline{\theta}_f) - f(\underline{x}, t)] + [g(\underline{x}|\underline{\theta}_g) - g(\underline{x}, t)]u_i) - (1 - \alpha)(g(\underline{x}, t)[u_D(\underline{x}|\underline{\theta}_D) - \bar{u}] + u_a - d(t))\} \quad (\text{III.15})$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & \dots & -k_{(n-1)} & -k_n \end{bmatrix} \text{ Et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs des paramètres optimaux $\underline{\theta}_f^*$, $\underline{\theta}_g^*$ et $\underline{\theta}_D^*$ sont définis par :

$$\underline{\theta}_f^* = \arg \min_{\underline{\theta}_f \in \Omega_f} [\sup_{x \in \Omega_x} \max |f(x|\underline{\theta}_f) - f(x,t)|] \quad (\text{III.16})$$

$$\underline{\theta}_g^* = \arg \min_{\underline{\theta}_g \in \Omega_g} [\sup_{x \in \Omega_x} \max |g(x|\underline{\theta}_g) - g(x,t)|] \quad (\text{III.17})$$

$$\underline{\theta}_D^* = \arg \min_{\underline{\theta}_D \in \Omega_D} [\sup_{x \in \Omega_x} \max |u_D(x|\underline{\theta}_D) - \bar{u}|] \quad (\text{III.18})$$

Où Ω_f , Ω_g , Ω_D et Ω_x sont des ensembles de contraintes pour $\underline{\theta}_f$, $\underline{\theta}_g$, $\underline{\theta}_D$ et x respectivement et elles sont définies comme

$$\Omega_f = \{\underline{\theta}_f | |\underline{\theta}_f| \leq M_f\}, \Omega_g = \{\underline{\theta}_g | |\underline{\theta}_g| \leq M_g\}, \Omega_D = \{\underline{\theta}_D | |\underline{\theta}_D| \leq M_D\} \quad \text{Et } \Omega_x = \{x | |x| \leq M_x\}$$

Où M_f , M_g , M_D et M_x sont des constantes positives.

En utilisant (III.16) - (III.18), l'équation dynamique de l'erreur (III.17) peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} \underline{e}^{(q)} = & A\underline{e} + B\{\alpha([f(x|\underline{\theta}_f) - f(x|\underline{\theta}_f^*)] + [g(x|\underline{\theta}_g) - g(x|\underline{\theta}_g^*)]u_i) \\ & - (1 - \alpha)(g(x,t)[u_D(x|\underline{\theta}_D) - u_D(x|\underline{\theta}_D^*)]) + u_\alpha + \omega \} \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Où les erreurs minimales d'approximation sont définies comme

$$\begin{aligned} \omega = & \alpha(f(x|\underline{\theta}_f^*) - f(x|\underline{\theta}_f) + [g(x|\underline{\theta}_g^*) - g(x|\underline{\theta}_g)]u_i) \\ & - (1 - \alpha)g(x,t)[u_D(x|\underline{\theta}_D^*) - \bar{u}] - d(t) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Si $\tilde{\theta}_f = \underline{\theta}_f - \underline{\theta}_f^*$, $\tilde{\theta}_g = \underline{\theta}_g - \underline{\theta}_g^*$ et $\tilde{\theta}_D = \underline{\theta}_D - \underline{\theta}_D^*$,

$$\underline{e}^{(q)} = A\underline{e} + B[\alpha(\xi(x)^T \tilde{\theta}_f + \xi(x)^T \tilde{\theta}_g u_i) + \xi(x)^T \tilde{\theta}_D + u_\alpha + \omega] \quad (\text{III.21})$$

Après les considérations précédentes, le théorème (4.1) peut être obtenu. [40][43]

III.5.1 Analyse de la stabilité

Théorème IV.1: Considérons le système chaotique non linéaire d'ordre fractionnaire SISO (III.12) avec une entrée de commande (III.15), si le compensateur robuste u_a et les lois adaptatives floues sont choisis comme

$$u_a = -\frac{1}{r} B^T P e \quad (\text{III.22})$$

$$\underline{\theta}_f^{(q)} = -r_1 \xi(\underline{x}) B^T P e \quad (III.23)$$

$$\underline{\theta}_g^{(q)} = -r_2 \xi(\underline{x}) B^T P \underline{e} u_i \quad (III.24)$$

$$\underline{\theta}_D^{(q)} = r_3 \xi(\underline{x}) g(\underline{x}, t) B^T P e \quad (III.25)$$

Où $r > 0, r_i > 0, i = 1 \sim 2$, et $P = P^T > 0$ est la solution de l'équation de Riccati suivante

$$PA + A^T P + Q - PB \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\rho^2} \right) B^T P = 0 \quad (III.26)$$

Où $Q = Q^T > 0$ est une matrice de pondération prescrite. Par conséquent, la performance de poursuite H_∞ peut être obtenue pour un niveau d'atténuation ρ prescrit et toutes les variables du système en boucle fermée sont bornées. [12]

Afin d'analyser la stabilité en boucle fermée, la fonction de Lyapunov est choisie comme [40],

$$V = \frac{1}{2} \underline{e}^T P e + \frac{a}{2r_1} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f + \frac{a}{2r_2} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g + \frac{(1-\alpha)}{2r_3} \tilde{\theta}_D^T \tilde{\theta}_D \quad (III.27)$$

La dérivée de (III.30) par rapport au temps, nous obtenons

$$\begin{aligned} V^{(q)}(t) &= \frac{1}{2} (\underline{e}^{(q)}(t))^T P \underline{e}(t) + \frac{1}{2} \underline{e}^T(t) P \underline{e}^{(q)}(t) \\ &+ \frac{\alpha}{r_1} (\tilde{\theta}_f^T) (\tilde{\theta}_f^q) + \frac{\alpha}{r_2} (\tilde{\theta}_g^T) (\tilde{\theta}_g^q) + \frac{(1-\alpha)}{r_3} (\tilde{\theta}_D^T) (\tilde{\theta}_D^q) \end{aligned} \quad (III.28)$$

$$\begin{aligned} V^{(q)} &= \frac{1}{2} \underline{e}^T A^T P \underline{e} + [\alpha (\xi^T \tilde{\theta}_f + \xi^T \tilde{\theta}_g u_i) - (1-\alpha) g(x, t) \xi^T \tilde{\theta}_D + u_a + \omega]^T B^T P \underline{e} \\ &+ \frac{1}{2} \underline{e}^T P A \underline{e} + \underline{e}^T P B [\alpha (\xi^T \tilde{\theta}_f + \xi^T \tilde{\theta}_g u_i) - (1-\alpha) g(x, t) \xi^T \tilde{\theta}_D + u_a + \omega] \\ &\quad \frac{a}{r_1} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f^{(q)} + \frac{a}{r_2} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g^{(q)} + \frac{(1-\alpha)}{r_3} \tilde{\theta}_D^T \tilde{\theta}_D^{(q)} \end{aligned} \quad (III.29)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \underline{e}^T (PA + A^T P - \frac{2}{r} P B B^T P) \underline{e} + (\alpha \underline{e}^T P B \xi^T(\underline{x}) + \frac{a}{r_1} \tilde{\theta}_f^{(q)T}) \tilde{\theta}_f \\ &+ (\alpha \underline{e}^T P B \xi^T(\underline{x}) u_i + \frac{a}{r_2} \tilde{\theta}_g^{(q)T}) \tilde{\theta}_g - ((1-\alpha) \underline{e}^T P B g(x, t) \xi^T(\underline{x}) \\ &\quad - \frac{(1-\alpha)}{r_3} \tilde{\theta}_D^{(q)T}) \tilde{\theta}_D + \frac{1}{2} (\omega^T B^T P \underline{e} + \underline{e}^T P B \omega) \end{aligned} \quad (III.30)$$

Avec le compensateur robuste u_a et les lois adaptatives floues sont donnés par (III.22) - (III.25), après une simple manipulation, nous avons

$$\begin{aligned} V^{(q)}(t) &= -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} - \frac{1}{2\rho^2} \underline{e}^T P B B^T \underline{e} + \underline{e}^T P B \omega \\ &= -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} B^T P \underline{e} - \rho \omega \right)^T \left(\frac{1}{\rho} B^T P \underline{e} - \rho \omega \right) + \frac{1}{2} \rho^2 \omega^T \omega \end{aligned}$$

$$\leq -\frac{1}{2} \underline{e}^T Q \underline{e} + \frac{1}{2} \rho^2 \omega^T \omega \quad (\text{III.31})$$

L'intégration de (2.23) à partir de $t = 0$ à $t = T$,

$$V(T) - V(0) \leq -\frac{1}{2} \int_0^T (\underline{e}^T Q \underline{e} dt + \frac{1}{2} \rho^2 w_1^T w_1) dt \quad (\text{III.32})$$

Puisque $V(T) \geq 0$, (4.24) peut être réécrite comme suit

$$\int_0^T \underline{e}^T Q \underline{e} dt \leq e^T(0) P e(0) + \theta^T(0) \theta(0) + \rho^2 \int_0^T w^T w dt.$$

Donc, l'approche H_∞ peut être obtenue. Et la preuve est terminée

III.6 Exemple d'application

Dans cette section, on applique la commande par mode glissant pour la commande et la synchronisation des deux différents systèmes de Duffing d'ordre fractionnaire. On considère deux systèmes d'ordre fractionnaire de Duffing comme suit, L'un est un système de référence donné comme

$$D^q y_1 = y_2$$

$$D^q y_2 = y_1 - \alpha y_2 - y_1^3 + \beta \cos(t) + \Delta f(Y, t) + d(t) + u(t)$$

Et l'autre est un système de réponse (de commande) donnée comme

$$D^q x_1 = x_2$$

$$D^q x_2 = x_1 - \alpha x_2 - x_1^3 + \beta \cos(t)$$

Où la perturbation externe donnée comme $d(t) = 0.1 \sin(t)$.

On considère dans ce cas l'ordre fractionnaire $q_1 = q_2 = 0.98$ Pour les autres constantes de conception sont fixées comme suit $k_1 = k_2 = 1$, $r = 0.005$, le pas $h = 0.001$, $\alpha = 0.25$, $\delta = 0.3$, $\omega = 1$, $\theta = 1$,

III.6.1 Résultats de simulation

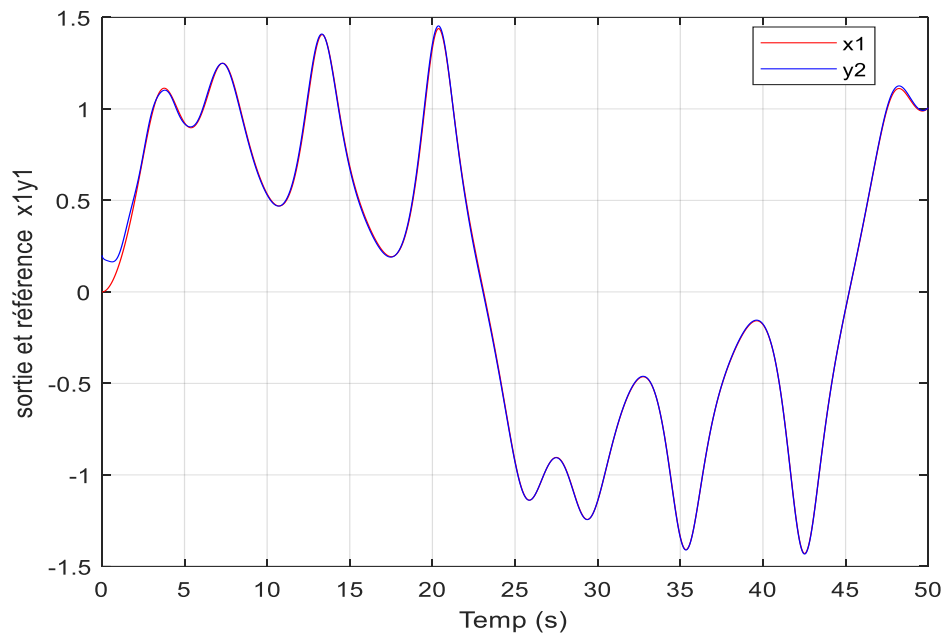


Figure III.14 Signal de x_1 et sa référence y_1

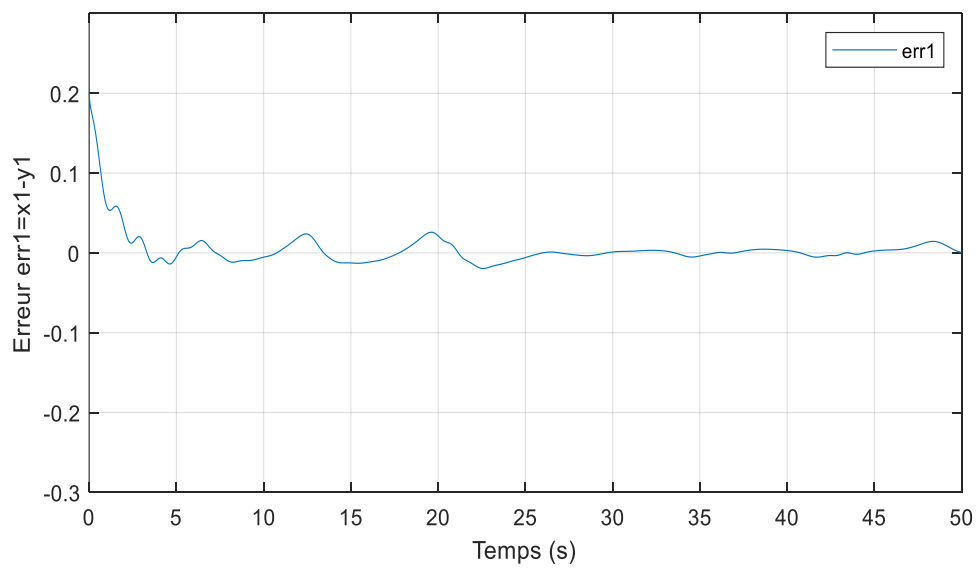


Figure III.15 Signal d'erreur x_1-y_1

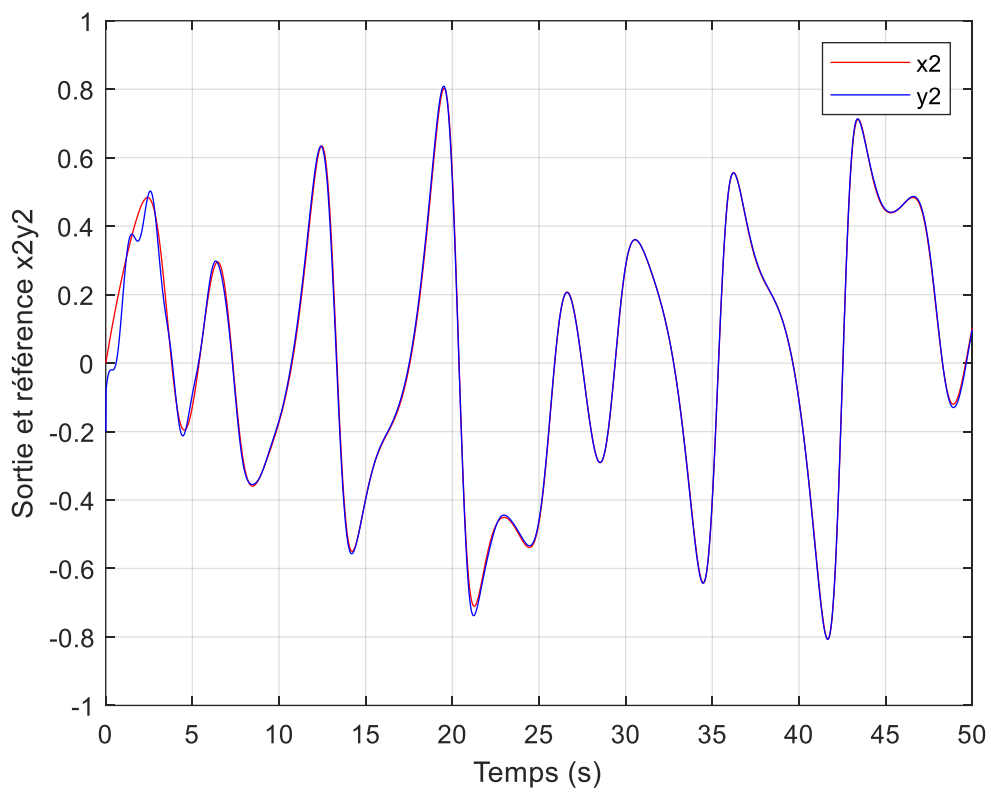


Figure III.16 Signal de x_2 et sa référence y_2

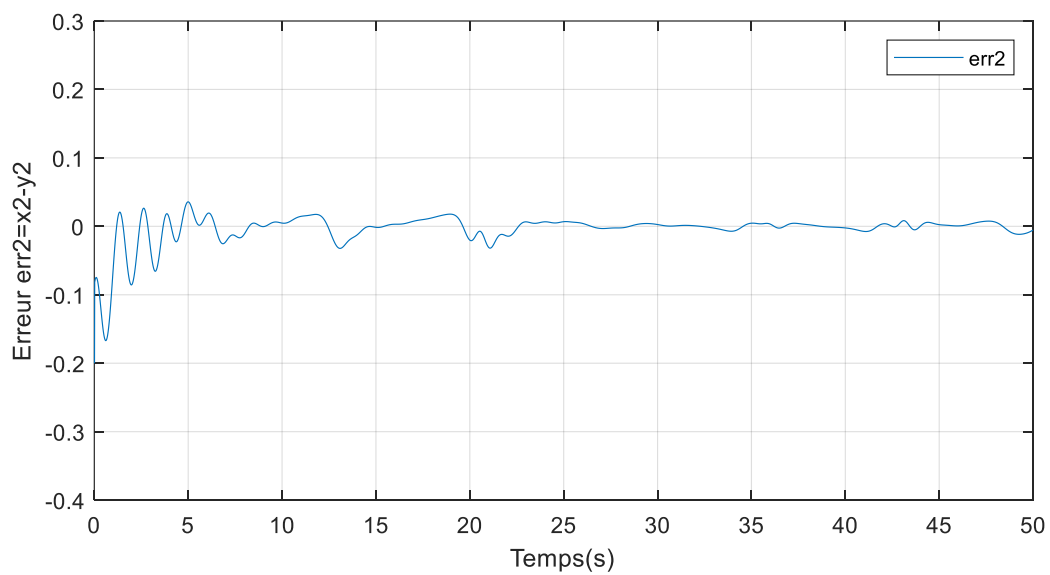


Figure III.17 Signal d'erreur $x_2 - y_2$

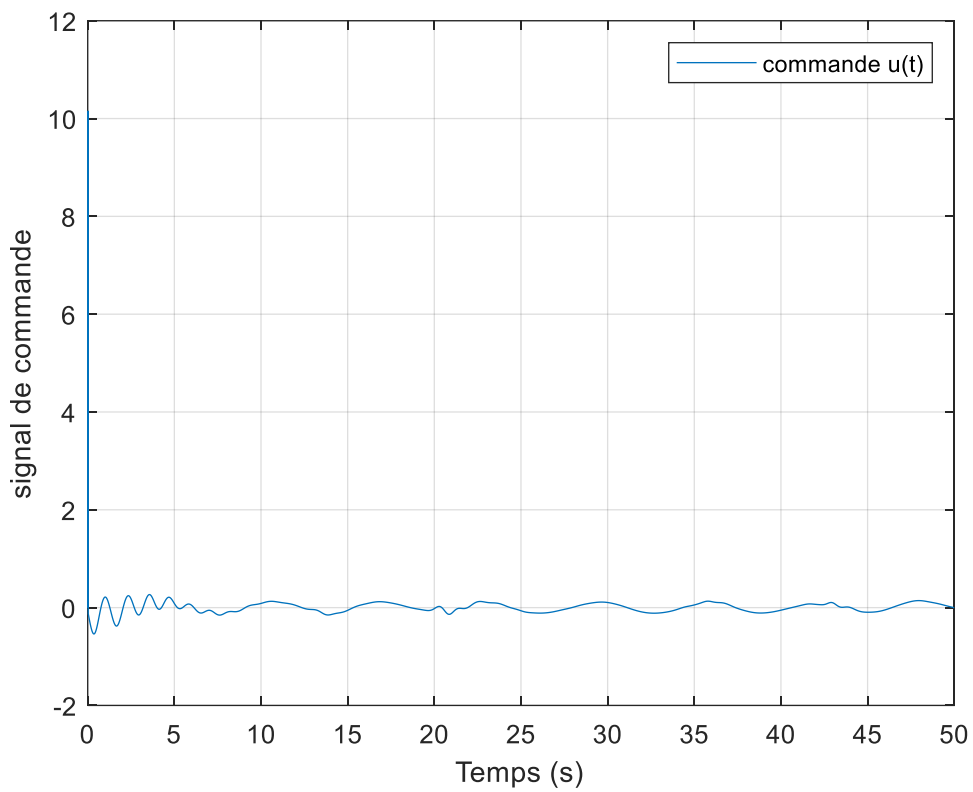


Figure III.18 Signal de la commande

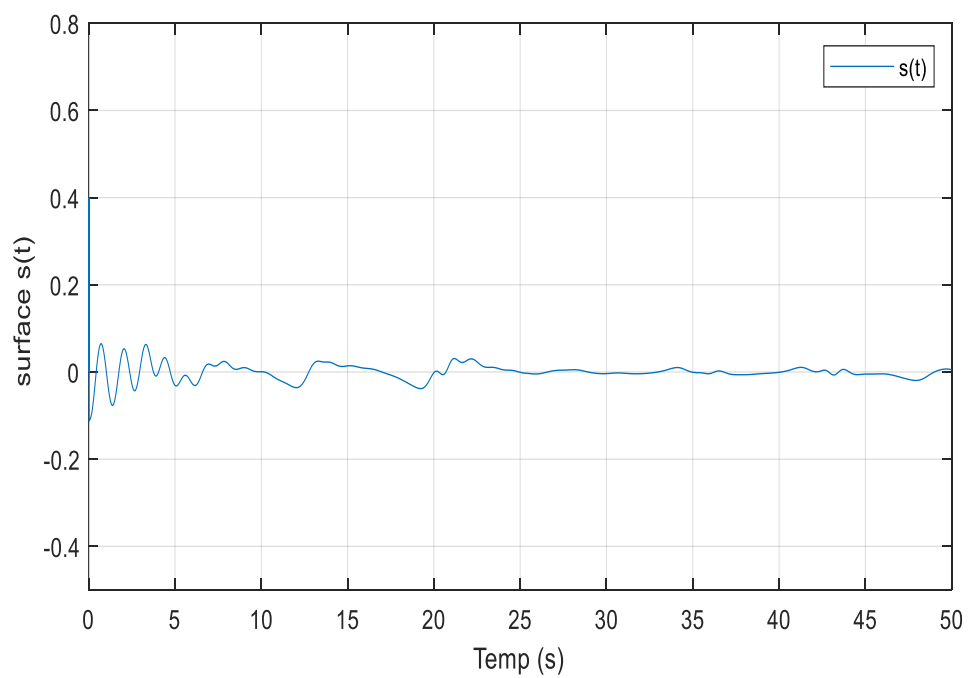


Figure III.19 Signal de la surface

Commentaire sur les résultats 'études comparatives' :

Commande par mode glissant :

- On note que la poursuite de la trajectoire désirée soit assurée avec une précision bien définie (figures (III.6. - III.7 - III.8 - III.9)),
- Le phénomène de Chattering (figure (III.12)) est éliminé par la commande de saturation.
- On remarque d'après les figures (III.12 et III.13)), les résultats dans ce cas de commande par mode glissant sont améliorés
- La méthode proposée est efficace pour les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires.

Commande par H_∞ :

- La signification de la commande H_∞ dans les simulations est manifeste (figure (III.18)).
- Les résultats de simulation prouvent que la synchronisation rapide des systèmes de référence et de réponse peut être réalisée (figures (III.15. - III.17)).
- On conclut que la commande proposée est valable pour ce genre de systèmes.

III.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une commande par mode glissant et par mode H_∞ pour réaliser la performance de la poursuite des systèmes d'ordre fractionnaire.

C'est une méthodologie de conception flexible par le compromis entre la connaissance du système et la connaissance de la commande. En ce qui concerne le phénomène de chattering, nous avons utilisé la fonction de saturation pour éliminer ce broutement.

Pour démontrer l'efficacité des deux méthodologies proposées, deux exemples de simulation de Duffing est donné. La trajectoire de sortie d'un système de réponse d'ordre fractionnaire à poursuivre la trajectoire du système de référence d'ordre fractionnaire.

Les résultats de simulation ont montrés que les deux commandes proposées peuvent atteindre les performances souhaités, ainsi confirme l'efficacité des deux méthodologies proposées.

Enfin on termine ce chapitre par un exemple de simulation pour valider l'efficacité de cette stratégie de commande d'une classe des systèmes d'ordre fractionnaire.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons proposé des développements des lois de commande et de stabilisation des systèmes linéaires à dérivée d'ordre fractionnaire pour la synchronisation et la réalisation des performances de poursuite.

La commande d'ordre fractionnaire offre de nouvelles perspectives pour le contrôle des systèmes dynamiques, en permettant une modélisation plus précise et une meilleure adaptabilité aux variations et perturbations. Cette approche ouvre de nouvelles opportunités pour améliorer les performances des systèmes de contrôle dans divers domaines d'application. Dans le but d'améliorer la qualité des performances et la robustesse des systèmes asservis beaucoup de chercheurs se sont intéressés à l'application du calcul d'ordre fractionnaire dans le domaine de la commande conduisant à la naissance du domaine de la commande d'ordre fractionnaire..

Ce mémoire peut se décomposer en trois chapitres principaux :

- Dans le premier chapitre, nous avons présenté l'état de l'art sur les systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire, et on présente aussi une méthode numérique s'appuyant sur l'approximation de la définition de Grünwald-Letnikov afin d'évaluer numériquement la dérivée fractionnaire des fonctions et de résoudre les équations à dérivée fractionnaire.

- Le deuxième chapitre nous avons réalisé a porté sur l'étude de la commande robuste par H_∞ et par mode glissant pour avoir les meilleurs performances de poursuite des systèmes d'ordre fractionnaire. En fonction de l'approche de la synthèse de Lyapunov

- Dans le dernier chapitre nous avons proposé deux commande l'une par le mode glissant et l'autre par H_∞ et on à noter que la poursuite de la trajectoire désirée soit assurée avec une précision bien définie. Tel que le phénomène de Chattering est éliminé

D'après les simulations qu'on a faites on peut dire que les résultats sont améliorés et prouvent que la synchronisation rapide des systèmes de référence et de réponse peut être réalisée aussi les deux commandes proposée est valable pour ce genre de systèmes et efficace pour les systèmes d'ordre fractionnaires

En conclusion, la commande d'ordre fractionnaire offre de nombreux avantages dans la modélisation et le contrôle de systèmes dynamiques. Elle permet une plus grande flexibilité, en capturant des comportements plus précis et en modélisant des systèmes à dynamique lente ou rapide avec précision. La prise en compte de la mémoire à long terme est un atout majeur,

Conclusion générale

permettant de modéliser des phénomènes complexes avec des dépendances temporelles étendues.

La commande d'ordre fractionnaire améliore la robustesse des systèmes de contrôle en s'adaptant aux variations des paramètres et aux perturbations externes. Elle permet également de réduire les oscillations indésirables et d'améliorer la stabilité globale du système. De plus, elle ouvre la voie à des stratégies de contrôle non locales, en influençant les entrées de commande à partir de différentes parties du système

Bibliographie

- [1] K.S. Miller, B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional Differential equations. John Wiley and Sons. New York, USA, 1993.
- [2] Caputo, M., 'Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent', Geophysical J. of the Royal Astronomical Society, Vol. 13, No. 5, pp. 529-539,
- [3] Ammour, « contribution à la commande par modes glissants d'ordre Fractionnaire », thèse de Doctorat, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, 2011
- [4] S. Ladaci, « Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire » Thèse de Doctorat, Université de Constantine, Algérie, 2007.
- [5] Petráš. I, « Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation Series: Nonlinear Physical Science », Springer, HEP. 2011
- [6] Ibrahima N'DOYE « Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour La stabilisation des systèmes fractionnaires », thèse de Doctorat, Ecole Doctorale IAEM Lorraine, Maroc, 2011.
- [7] M. Tidjani, « Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à Dérivées fractionnaires » Mémoire de Magistère, Université de Constantine, Algérie, 2009.
- [8] Diethelm K, Ford NJ, « Analysis of fractional differential equations » Journal of Mathematical Analysis and Applications 265,229–248 2002.
- [9] Diethelm K, Ford NJ, Freed AD, « A predictor–corrector approach for the Numerical solution of fractional differential equations » Nonlinear Dynamics 29: 3–22, 2002.
- [10] Diethelm K, Ford NJ, Freed AD, « Detailed error analysis for a fractional Adams method » Numerical Algorithms 36:31–52, 2004.
- [11] Charef A., Sun. H.H., Tsao .Y.Y., Onaral. B. «Fractal system as represented by Singularity function »; IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. 37, No. 9, pp.1465-1470, 1992.
- [12] C-H. Lee, Y-C. Chang, « H_∞ Tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: Adaptive fuzzy approach » IEEE Trans on systems, Vol. 4, NO. 1, February 1996.
- [13] Y.C. Chang. Adaptive Fuzzy-based Tracking Control for Nonlinear SISO Systems via VSS and H_∞ Approaches. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 9:278292, 2001.
- [14] B.S Chen, L. Ching-Hsiang, and C. Yeong-Chan. H_∞ tracking design of uncertain nonlinear siso systems: Adaptive fuzzy approach. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 4(1):3242, 1996.
- [15] Isidori. Nonlinear Control System. Springer-Verlag Berlin, Benlin, 1995.

- [16] H. Chekireb, M. Tadjine, and D. Bouchara. Direct adaptive fuzzy control of nonlinear system class with applications. *Control and Intelligent Systems*, 31(2):111, 2003.
- [17] R. Ordonez and K.M. Passino. Stable multi-input multi-output adaptive fuzzy/neural control. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 7(3):345353, 1999.
- [18] S.V. Emelyanov. Sliding mode control systems. Nauka, Moscou, 1967.
- [19] S. Hajri. Commande dynamique par mode glissant application à la robustification des processus complexes. PHD thèses, Université de Lille- France, 1997.
- [20] K. Khettab. Commande adaptative floue des systèmes non linéaires par la méthode de backstepping utilisant le mode glissant. Mémoire de Magister, Université de Frahat Abbas - Sétif, 2005.
- [21] S. Doudou. Contribution à la commande moderne des systèmes non linéaires multivariables. PHD thèses, Université Sétif 1, 2013.
- [22] J.J.E. Slotine. Sliding Controller Design for Nonlinear Systems. *Inter Jour of Control*, 40(2):421434, 1984.
- [23] A.G. Bondarev, S.A. Bondarev, N.E. Kosteleva, and V.I. Utkin. Sliding modes in systems with asymptotic state observers. *Automation and remote control*, 46(6):49 64, 1985.
- [24] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Englewoods Clis, New-Jersey, 1991.
- [25] S.V. Emel'yanov, S.V. Korovin, and L.V. Levantovsky. Higher order sliding modes in the binary control system. *Soviet Physics*, 31(4):291293, 1986.
- [26] Y.C. Chang. Robust tracking control for nonlinear mimo systems via fuzzy approaches. *Automatica*, 36(2):15351545, 2000.
- [27] N. Essounbouli, A. Hamzaoui, and J. Zaytoon. An improved robust adaptive fuzzy controller
- [28] SI Ammour. Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire. PHD thèses, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2011
- [29] Boulkroune. Commande floue adaptative avec et sans observateur des systèmes non linéaires incertains. PHD thèses, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie, 2008.
- [30] Zemouche. Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 2007uzzy sets and systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 128:107115, 2002.
- [31] N. Aguila-Camacho, M.A. Duarte-Mermoud, and J.A. Gallegos. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19 :29512957, 2014

- [32] M.A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J.A. Gallegos, and R. Castro-Linares. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Systems & Control Letters*, 22(1-3):650659, 2015.
- [33] Y. LI, Y.Q. Chen, and I. Podlubny. Stability of fractional order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leer stability. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(5) :18101821, 2009
- [34] T. Houmor. Analyse du chaos dans un Système d'équations différentielles fractionnaires. PHD thesis, Université de Constantine 1, Algérie, 2014.
- [35] Åström K.J., Wittenmark. B, Adaptive control, New York: Addison-Wesley publishing company, 1995.
- [36] Aurélien D, "Etude de systèmes différentiels fractionnaires," Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy 1, 2010.
- [37] Amar si Amour, Contribution de la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire, Thèse de Doctorat, Université Mouloud Mammeri. Tizi-Ouzou, 2011.
- [38] Åström K.J, "Adaptive Feedback Control", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 75, No. 2, pp.
- [39] Podlubny, Fractional-order system and $p-i\lambda-d\mu$ -controllers, *IEEE Trans Autom Control* 44(1):208–14, 1999.
- [40] Tsung-C. L, Chia-H. K, Valentina E. B, « Fractional Order Chaotic System Tracking Design Based on Adaptive Hybrid Intelligent Control » *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, June 27-30, 2011.
- [41] Chi-H. W, Tsung-C. L, L, Han-L. L, « Direct Adaptive Fuzzy-Neural Control with State Observer and Supervisory Controller for Unknown Nonlinear Dynamical Systems » *IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS*, VOL. 10, NO. 1, FEBRUARY 2002.
- [42] Yi-S H, Dong-S X, Xiao-X C, Qi-X Z, Zheng-W W, «tracking-based Decentralized hybrid adaptive output feedback fuzzy control for a class of Large-scale nonlinear systems » *ELSEVIER, Fuzzy Sets and Systems* 171 (2011) 72 – 92
- [43] Chi-H. W, Tsung-C. L, Tsu-T. L, Han-L. L, « Adaptive Hybrid Intelligent Control for Uncertain Nonlinear Dynamical Systems » *IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS*, VOL. 32, NO. 5, OCTOBER 2002.
- [44] Tsung-C L, Chi- W, Han-L L, « Observer-based indirect adaptive fuzzy neural tracking control for nonlinear SISO systems using VSS and