



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées et
fondamentales

Par : ARIOUA Nadia

Sujet

Les espaces de Besov

Dirigé par :

Mr. M. MOUSSAI

Promotion: 2011/2012

SOMMAIRE

NOTATION	01
INTRODUCTION.....	03
Chapitre 1 : Rappel de certaines propriétés classiques	04
1. Inégalités principales.....	04
2. Séries de Littelwood-Paley.....	08
3. Rappel sur les espaces de Sobolev.....	11
Chapitre 2 : Définition et propriétés	14
1. Définition des espaces de Besov	14
2. quelques propositions et sa preuve.....	14
3. L'inclusion $B_{p1}^{s1,q1} \hookrightarrow B_{p1}^{s2,q2}$	17
4. L'inclusion $B_p^{s,q} \hookrightarrow L^\infty$	18
Chapitre 3 : Exemples et applications	20
1. Exemple de fonctions dans Besov	20
- Exemple 1.....	20
- Exemple 2	22
-Exemple 3.....	23
2. La composition en dimension 1	24
2.1 Préparation.....	24
2.3 Une version de norme maximale de Besov	24
2.4 Quelques remarques.....	25
2.5 Proposition de Bourdaud et sa preuve	25
2.6 Démonstration du théorème de composition en dimension 1.....	28

2.7 Le cas $m = 1$	28
2.8 Le cas $m > 1$	32
BIBLIOGRAPHIE.....	33

.

Notations

- . $C = C(\mathbb{R}^n)$: est l'espace des fonctions continues.
- . C_0 : est l'espace des fonctions continues et nulles au voisinage de l'infinie
- . $C^r(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) ; D^\alpha f \in C(\mathbb{R}^n), \text{ pour tout } |\alpha| \leq r\}$.
- . $C^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) ; D^\alpha f \in C(\mathbb{R}^n), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.
- . $\text{supp}(f)$ est l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}$, est appelé support compact.
- . $D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact.
- . $D'(\mathbb{R}^n)$: est le dual de $D(\mathbb{R}^n)$, espace de distributions sur \mathbb{R}^n .
- . $S(\mathbb{R}^n)$: est l'espace de Schwartz et $S'(\mathbb{R}^n)$ son dual, est l'espace de distribution tempérées.
- . L'espace de Lebesgue $L_p(\mathbb{R}^n)$ est défini par :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ si } p \geq 1$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

L^q : est l'espace des suites $(a_k)_k$ telle que :

$$\|(a)_k\|_{L^q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

. $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que $f^{(\alpha)} \in L^2$ pour

$$|\alpha| \leq [s].$$

. Soient A_1 et A_2 deux espaces, on dit que $A_1 \hookrightarrow A_2$ S'il existe $c > 0$, telle que :

$$\|f\|_{A_1} < c \|f\|_{A_2}. (\forall f \in A_1)$$

. Pour toute $g \in S(\mathbb{R}^n)$, la convolution $f * g$ vérifie $f * g \in S(\mathbb{R}^n)$, telle que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n ; f * g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} T_t f(\xi) \cdot g(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \cdot T_t g(\xi) du, \quad \text{ou}$$

$$T_t g(\xi) = g(\xi - u)$$

. Si $g \in S(\mathbb{R}^n)$, on définit la transformation de Fourier et son inverse par :

$$Fg(\xi) = \hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi) g(x) dx$$

$$F^{-1}g(x) = \check{g}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix\xi) g(\xi) d.$$

Introduction

En analyse fonctionnelle, l'espaces de Sobolev forment un outil moderne, comme dans la théorie des équations aux dérivées partielles... etc.

Les espaces de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ généralisent les Sobolev $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ car on dispose de l'inclusion

$$W_p^m \subset B_p^{m,2} \quad (p \geq 2)$$

Par exemple. Ce qui montre que travailler dans les $B_p^{s,q}$ permet d'obtenir systématiquement les résultats dans les espaces de Sobolev.

Revenons à ce mémoire, il est organisé en trois chapitres:

- *Dans le premier chapitre on va rappeler les notions essentielles à savoir les inégalités de Hölder, Young et de Bernstein les suites de Littlewood-Paley et un rappel sur les espaces de Sobolev*
- *Dans le deuxième chapitre on présente les espaces de Besov et leurs propriétés avec la démonstration*
- *Le dernier chapitre contient des exemples de fonctions de l'espace de Besov. Il contient aussi une partie intéressante sur la composition sur l'espace de Besov.*

Chapitre 1

RAPPEL DE CERTAINES PROPRIETES CLASSIQUES

Dans ce chapitre nous allons rappeler quelques notions classiques du type, des inégalités de sobolev, des espaces fonctionnels comme de besov et Lizorkin-trieble et la décomposition de Littelwood-Paley.

1-1 Inégalités principales :

Théorème 1 (théorème de Riesz-thorin)

Soit (X, μ) et (Y, ν) deux espaces mesurés et $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$,
Avec $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$

On suppose que T est l'opérateur qui envoie $L^{p_0}(X, \mu)$ dans $L^{q_0}(Y, \nu)$ et $L^{p_1}(X, \mu)$ dans $L^{q_1}(Y, \nu)$ tel que pour toute fonction simple f :

$$\| Tf \|_{q_i} \leq C_i \| f \|_{p_i} \quad (i = 0, 1)$$

Alors T envoie $[L^{p_0}, L^{p_1}] = L^p$ dans $[L^{q_0}, L^{q_1}] = L^q$

$$\text{tel que } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \text{ et } \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\text{de plus } \| Tf \|_q \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \| f \|_p$$

Théorème 2 (inégalité de Hölder)

Soit $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p_i \leq \infty$ ou $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$

Alors $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\| f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n \|_p \leq \| f_1 \|_{p_1} \| f_2 \|_{p_2} \cdot \dots \cdot \| f_n \|_{p_n}$

$$\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r} \leq 1\right)$$

Preuve :

La démonstration est vraiment classique, elle est basée sur les fonctions convexes.

Théorème 3 (inégalité de Young)

Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tel que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$.

Alors pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$$

Et de plus

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Preuve :

On fixe $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et on considère l'opérateur $Tf = f * g$ on a :

$$\|Tf\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (1)$$

Car

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g(\cdot - y)\|_q dy \\ &= \|g\|_q \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|Tf\|_\infty \leq \|g\|_q \|f\|_{q'} \quad (2)$$

Maintenant de (1) et (2) on peut appliquer le théorème (1), car il est claire

$$T : L^1 \rightarrow L^q \text{ avec } C_0 = \|g\|_q$$

$$T : L^{q'} \rightarrow L^\infty \text{ avec } C_1 = \|g\|_q$$

Il vient

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$$

avec

$$\frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{q'}, \quad \theta \in [0,1]$$

On a :

$$\frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}$$

entraîne

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \theta + 1 - \frac{1}{q} - \theta + \frac{\theta}{q} \\ &= \theta + (1-\theta) \left(1 - \frac{1}{q}\right) = 1 - \frac{1}{q} + \frac{\theta}{q} \end{aligned}$$

Ce calcul facile donne la relation demandée, i.e.

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

■

Théorème 4 (Inégalité de Bernstein)

Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$, et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Il existe une constante $C_0 = C(\alpha, p, q, n) > 0$ tel que pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

avec

$$\text{supp } f \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$$

On a :

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq c_0 R^{|\alpha|+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|f\|_p \quad (3)$$

Preuve :

Soit $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$. On pose :

$$\phi_{R(\xi)} = \phi\left(\frac{\xi}{R}\right)$$

Alors

$$\hat{f} = \phi_R f$$

Et par conséquent

$$f^{(\alpha)} = (F^{-1}\phi_R) * f$$

Par l'inégalité de Young on obtient :

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq \|F^{-1}\phi_R\|_r \|f\|_p$$

Avec

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} .$$

D'autre part, comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$(F^{-1}\phi_R)^\alpha(x) = R^n (F^{-1}\phi)^\alpha(Rx) ,$$

Il vient :

$$\|(F^{-1}\phi_R)^\alpha\|_r = R^{n+|\alpha|+\frac{n}{r}} \|F^{-1}\phi^\alpha\|_r .$$

Ce qui donne le résultat. ■

Théorème 5 (Rieman-Lebesgue)

a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors,

(i) Son image de Fourier f est une fonction continue bornée sur \mathbb{R}^n et

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_1$$

(ii) \hat{f} tend vers 0 quant $|\varepsilon|$ tend vers ∞ . C'est à-dire $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

b) soient f et g deux éléments de L^1 à valeur réelles. Alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\varepsilon) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx .$$

c) La transformation de Fourier échange la translation en multiplication exponentielle

$$\widehat{T_a f} = e^{ia\xi} f$$

d) la transformation de Fourier échange la dérivation en multiplication monomiale, la différentiabilité et la décroissance à l'infini, plus précisément.

(i) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| \leq K$, alors $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$; de plus, on a :

$$D^\alpha(f) = (-2i\pi)^\alpha f.$$

(ii) Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, avec $D^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ et $|\beta| \leq K$, alors $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$; de plus on a :

$$(2i\pi)^\beta \hat{f} = D^\beta f$$

Preuve : voir [1]

1.2 Séries de Littelwood-Paley

1.2.1 Décomposition de Littelwood-Paley

La décomposition de Littelwood-Paley est basée sur une C^∞ partition de l'unité que nous allons rappeler.

Soit $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ vérifiant :

i) $\phi \geq 0$, $\text{supp } \phi \subset \{\xi : |\xi| \leq 2\}$.

ii) $\phi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$ et $\phi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 2$

on pose :

$$\varphi(\xi) = \phi(\xi) - \phi(2\xi)$$

Il vient alors que φ est supportée par la couronne $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$, positive et paire.

On vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=N}^M \varphi(2^{-j} \xi) &= 1 \\ &= \sum_{j=N}^M \phi(2^{-j} \xi) - \sum_{j=N-1}^{M-1} \phi(2^{-k} \xi) \quad k = j - 1 \\ &= \phi(2^{-M} \xi) - \phi(2^{-N+1} \xi) \end{aligned}$$

Pour $N \rightarrow -\infty$ et $M \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^{-j} \xi) = \phi(0), \text{ avec } (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0). \quad (4)$$

On peut aussi vérifier (on pose $M = 0$)

$$\sum_{j=N}^0 \varphi(2^{-j} \xi) = \phi(\xi) - \phi(2^{-N+1} \xi),$$

Ce qui donne :

$$\phi(\xi) = \sum_{j=-\infty}^0 \varphi(2^{-j} \xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

On continue (4) et (5) on obtient notre partition

$$\phi(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-j} \xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On pose

$$\phi(\xi) = 1 - \sum_{j \geq 1} \varphi(2^{-j}\xi) \quad (6)$$

On obtient une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ portée par la boule $|\xi| < 2$.

Dans tout ce qui suite, on fixe la partition (6) l'unité qui résulte :

$$\phi(\xi) + \sum_{j \geq 1} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

A cette partition on associe une suite d'opérateurs des convolutions notés Δ_k :

$$\Delta_k : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

Définit par :

$$(\Delta_k f)^\wedge(\xi) = \varphi(\xi) \hat{f}(\xi).$$

et

$$(\Delta_0 f)^\wedge = \phi(\xi) \hat{f}(\xi).$$

On définit de même les opérateurs Q_j par :

$$(Q_j f)^\wedge(\xi) = \phi(2^{-j}\xi) \hat{f}(\xi) \text{ pour } j \geq 0$$

Avec comme notation $\Delta_0 = Q_0$.

Définition 6

Pour toute $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, la décomposition de Littelwood-Paley de f , est alors l'identité :

$$f = Q_k f + \sum_{j \geq k+1} \Delta_j f \quad (7)$$

La série (7) converge au sens des distributions tempérées.

Remarque 7

La série (7) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$f = Q_k f + \sum_{j \geq k+1} \Delta_j f \quad (8)$$

Valable pour toute $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{N}$.

Par l'inégalité de Young les opérateurs Δ_k et ϕ_k sont bornés uniformément sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

1.3 Rappel sur les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev jouent un rôle très important dans la théorie des équations aux dérivées partielles, pour cette raison nous trouvons utile pour la suite de ce mémoire de faire un rappel sur ce espace

Définition 8

Soit s un réel positif. On définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ par l'ensemble des fonctions u de $L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant que la fonction :

$$\xi \rightarrow (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi)$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On munit $H^s(\mathbb{R}^n)$ par la norme

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Remarque 9

i) $H^s(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^s}$ est un espace de Banach.

ii) $(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

1.3.1 Propriétés élémentaires

Théorème 10

(i) La transformation de Fourier envoie isométriquement de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2_S(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $H^s(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces Hilbert isométriquement isomorphes, plus précisément, la convolution par $\mathcal{F}\left[(1 + |M|^2)^{\frac{s}{2}}\right]$ envoie isométriquement l'espace $H^{r+s}(\mathbb{R}^n)$ sur $H^r(\mathbb{R}^n)$, pour tout s et r dans \mathbb{R} .

(iii) Pour tout s réel, $S(\mathbb{R}^n)$ s'injecte canoniquement dans l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$, cette injection est continue et à image dense.

(iv) Pour tout s réel, l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $S'(\mathbb{R}^n)$.

Définition 11

Nous rappelons l'injection de Sobolev. On aura de la notion suivante :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_0^k(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^k(\mathbb{R}^n) \text{ à support compact}\}$$

et l'on munira par la norme

$$p_k(u) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|.$$

Théorème 12

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $s > \frac{n}{2} + k$. Alors l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continument dans l'espace $C_0^k(\mathbb{R}^n)$.

Preuve : voir [1].

Théorème 13 (Injection compact)

Soient s et $r \in \mathbb{R}$ tel que $r < s$. Pour tout compact $K \subseteq \mathbb{R}^n$ on a

$H^s(\mathbb{R}^n) \cap S'_k(\mathbb{R}^n)$ dans $H^r(\mathbb{R}^n)$ est compact

Preuve : voir [1]

Chapitre 2

DEFINITION ET PROPRIETES

2.1 Définition des espaces de Besov

Soient $s \in \mathbb{R}$, p et $q \in]0, \infty]$, l'espace de Besov noté $B_p^{s,q}$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \begin{cases} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty & \text{pour } q \neq \infty \\ \sup_{j \geq 0} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_p) < \infty < \infty & \text{pour } q = \infty \end{cases}$$

Proposition 14

- (i) $B_p^{s,q}$ est un Banach pour $p, q \in [1, +\infty]$.
- (ii) $B_p^{s,q} = C^s$ pour $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.
- (iii) $B_2^{s,2} = H^s$ espace de Sobolev.
- (iv) $B_p^{s,2}$ espace de Bessel (potentiel de Bessel).

Proposition 15

- (i) $B_p^{s,q} \hookrightarrow B_p^{s,t}$ si $(s \geq t)$.
- (ii) $B_p^{s,q} \hookrightarrow B_p^{s_1, q_1}$ si $s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ et $p < p_1$.
- (iii) $B_p^{s, q_1} \hookrightarrow B_p^{s, q_2}$ si $(q_1 \leq q_2)$.

Preuve

Pour une lisibilité donnons la démonstration :

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_p^{t,q}} &= \left(\sum_{j \geq 0} (2^{tj} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j \geq 0} (2^{j(t-s)} \cdot 2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder on obtient (i).

Pour démontrer (ii) et (iii) on applique l'inégalité de Bernstein, on a :

$$\|\Delta_j f\|_{p_1} \leq c 2^{j\left(\frac{n}{n} - \frac{n}{p_1}\right)} \|\Delta_j f\|_p.$$

La suite par l'inégalité de Hölder on obtient que $B_p^{s,\infty} \hookrightarrow B_p^{s,\infty}$, ce qui permet de conclure ■

Proposition 16

L'opération de dérivation ∂^α , envoie l'espace $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_p^{s-|\alpha|,q}(\mathbb{R}^n)$

De plus :

$$\|\partial^\alpha f\|_{B_p^{s-|\alpha|,q}} \leq c \|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}, \text{ pour tout } f \in B_p^{s,q}. \quad (9)$$

Preuve

Par l'inégalité de Bernstein on a :

$$\|\Delta_j(\partial^\alpha f)\|_p \leq c 2^{j|\alpha|} \|\Delta_j f\|_p.$$

En passant à la norme dans $B_p^{s-|\alpha|,q}(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\left(\sum_{j \geq 0} (2^{j(s-|\alpha|)}) \|\Delta_j(\partial^\alpha f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c_0 \left(\sum_{j \geq 0} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

d'où l'inégalité (9)

Définition 17

On dit qu'un espace vectoriel E est muni d'une structure d'algèbre si :

$$\forall f, g \in E \Rightarrow f \cdot g \in E$$

et l'appelle un espace d'algèbre.

Si E est un espace d'algèbre, on a :

$$\|fg\|_E \leq \|f\|_E \|g\|_E \quad (\forall f, g \in E)$$

Voici quelques exemples des espaces muni des structure d'algèbre :

$L_\infty(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n),$

(l'inégalité de Cauchy-Schwartz), l'espace de Sobolev pour $s > \frac{n}{2}$.

Proposition 18

Soient $s \in \mathbb{R}, p$ et $q \in [1, \infty]$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $B_p^{s,q}$ est une algèbre.

(ii) $B_p^{s,q} \hookrightarrow C_0$

(iii) $\begin{cases} 1 \leq p \leq \infty, 0 < q \leq \infty \text{ et } s > \frac{n}{p} \\ 1 \leq p < \infty, q = 1 \text{ et } s = \frac{n}{p} \end{cases}$

Preuve voir [2].

Théorème 19

$B_p^{t,q_1} \subset B_p^{s,q_2}$ si $t > s$

Preuve

$$\|f\|_{B_p^{s,q_2}} = \left(\sum_{j \geq 0} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_p)^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} = \left(\sum_{j \geq 0} (2^{(s-t)j} 2^{tj} \|\Delta_j f\|_p)^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\leq \|f\|_{B_p^{s,\infty}} \left(\sum_{j \geq 0} (2^{(s-t)j})^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

La norme $L_{q_1}(\mathbb{Z}) \subset L_{q_2}(\mathbb{Z})$, alors

$$\left(\sum_{j \geq 0} 2^{(s-t)jq_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \left(\sum_{j \geq 0} 2^{(s-t)jq_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

Maintenant l'hypothèse $s - t < 0$, donne :

$$\left(\sum_{j \geq 0} 2^{(s-t)jq_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq +\infty$$

Car c'est la norme d'une série géométrique de raison $0 < 2^{(s-t)q_1} < 1$

D'où

$$\|f\|_{B_p^{s,q_2}} \leq c \|f\|_{B_p^{s,\infty}} \leq c' \|f\|_{B_p^{s,q_1}}.$$

$$\leq \|f\|_{B_p^{s,\infty}} \left(\sum_{j \geq 0} (2^{(s-t)j})^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

$$< \infty \text{ si } : s - t < 0 \Rightarrow t > s$$

L'inclusion $B_{p_1}^{s_1,q_1} \hookrightarrow B_{p_1}^{s_2,q_2}$

De quelle condition sur $(s_1, s_2, p_1, p_2, q_1, q_2)$ tel que $B_{p_1}^{s_1,q_1} \hookrightarrow B_{p_1}^{s_2,q_2}$

$$\begin{aligned}
\| f \|_{B_{p_1}^{s_2, q_2}} &= \left(\sum_{j \geq 0} (2^{s_2 j} \| \Delta_j f \cdot \|_{p_2})^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\
&\leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{j(s_2 + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2})} \| f \cdot \|_{p_1}^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \quad ; \quad (p_1 \leq p_2). \\
&\leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{j(s_1 + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s_2)} 2^{s_1 j} \| \Delta_j f \cdot \|_{p_1}^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\
&\leq \left(\sum_{j \geq 0} (2^{s_1 j} \| \Delta_j f \cdot \|_{p_1})^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \sum_{j \geq 0} 2^{(s_2 + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s_1) q_2} (q_1 < q_2).
\end{aligned}$$

$< \infty$ si :

$$\left(s_2 + \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - s_1 \right) < 0 \Rightarrow s_1 - \frac{n}{p_1} < s_2 - \frac{n}{p_2} \quad ; \quad (p_1 < p_2, q_1 < q_2)$$

L'inclusion $B_p^{s, q} \hookrightarrow L^\infty$

On a :

$$f = \sum_{k \geq 0} \Delta_k f.$$

Avec $\Delta_0 = Q_0$

$$\begin{aligned}
\| f \|_\infty &\leq \sum_{j \geq 0} \| \Delta_j f \cdot \|_\infty . \\
&\leq \sum_{j \geq 0} 2^{j \frac{n}{p}} (\| \Delta_j f \cdot \|_p 2^{j s}) 2^{-j s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j \geq 0} 2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p) \\
&\leq \sum_{j \geq 0} \left(2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{j \geq 0} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&< \infty \quad ; \quad \frac{n}{p} - s < 0 \Rightarrow s > \frac{n}{p}
\end{aligned}$$

Donc $B_p^{s,q} \hookrightarrow L^\infty$ si $s > \frac{n}{p}$.

Chapitre 3

EXEMPLES ET APPLICATION

3.1 Exemples de fonctions dans Besov

Exemple (1)

$$f(x) = vp \frac{1}{x} \text{ (la valeur principale de } \frac{1}{x} \text{)}$$

On a

$$Ff(\xi) = -i\pi 3gn\xi \quad (10)$$

$$\text{supp } \widehat{\Delta_j f} \subset \{ \xi \in \mathbb{R} / |\xi| \leq 2^{j+1} \}$$

D'après l'inégalité de Bernstein on obtient

$$\| \Delta_j f \|_p \leq c_1 2^{j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \| \Delta_j f \|_2 \quad (p \geq 2) \quad (11)$$

D'autre part on a

$$\| \Delta_j f \|_2 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \| \Delta_j \hat{f} \|_2 \quad (\text{Plancherel})$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \| \varphi(2^{-j} \cdot) f \|_2$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \| \varphi(2^{-j} \cdot) \|_2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{1}{2}} \| \varphi \|_2 = c_2 2^{\frac{1}{2}}$$

Car $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

En remplaçant dans (11) on obtient

$$\| \Delta_j f \|_p \leq c 2^{j(1-\frac{1}{p})} . \quad c = c_1 c_2 \quad \text{Constante}$$

D'où

$$2^{sj} \| \Delta_j f \|_p \leq c 2^{j(s+\frac{1}{p})}$$

La série $\sum_{j \geq 0} 2^{j(s+\frac{1}{p})q}$, $1 \leq q \leq \infty$ converge si $s < -\frac{1}{p'}$,

ce qui donne

$v p \frac{1}{x} \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ dans les deux cas suivantes :

$$1) s = -\frac{1}{p'}, 1 \leq p \leq +\infty, q = \infty \text{ et } \| f \|_{B_p^{-\frac{1}{p'}, \infty}} = \sup_{j \geq 0} 2^{-\frac{1}{p'}j} \| \Delta_j f \|_p$$

$$2) s < -\frac{1}{p'}, 1 \leq p, q \leq +\infty \text{ et } \| f \|_{B_p^{s, \infty}} < +\infty .$$

Preuve de (10)

Soient $g \in S'(\mathbb{R})$, $\varphi \in S(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}(xg)(\xi) = i \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}g(\xi)$ et

$$\begin{aligned} \langle x\hat{f}, \varphi \rangle &= \langle f, x\hat{\varphi} \rangle = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \xi} e^{ix \cdot 0} \hat{\varphi}(x) dx \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1} \hat{\varphi}(0) \\ &= 2\pi \varphi(0) \\ &= 2\pi \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{F}(xf)(\xi) = i \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}f(\xi) = 2\pi \delta \quad (\delta \text{ mesure de Dirac}),$$

Ce qui donne

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2i\pi H(\xi) + a, \quad (\text{Constante})$$

Ou H est la fonction de Heaviside

Puisque $\delta = H'$ en effet

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0), \quad \varphi \in D(\mathbb{R})$$

f est impaire donc \hat{f} est impaire ($\mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$),

D'où

$$a = i\pi(H(\xi) + H(-\xi)) = i\pi, \quad \text{avec } H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\xi) &= -2\pi H(\xi) = i\pi \\ &= \begin{cases} -i\pi & , \quad \xi \geq 0 \\ i\pi & , \quad \xi < 0 \end{cases} = -i\pi \operatorname{sgn} \xi \end{aligned}$$

Exemple (2)

$f = \delta$ (mesure de Dirac)

Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

d'où

$$\hat{\Delta}_j \delta = \varphi(2^{-j} \cdot)$$

Comme dans l'exemple (1) on obtient

$$2^{sj} \|\Delta_j \delta\|_p \leq c 2^{j(s + \frac{n}{p})}$$

La série $\sum_{j \geq 0} 2^{j(s + \frac{n}{p'})q}$ converge si $s < \frac{-n}{p'}$, $1 \leq q \leq +\infty$,

Ce qui donne

$\delta \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ Dans les cas suivants :

1) $s = -\frac{n}{p}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $q = +\infty$

2) $s < -\frac{n}{p}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$

Exemple (3)

$f = \mathcal{F}^{-1}g$ Telle que $g(x) = |x|^\sigma$

On a $\widehat{\Delta}_j f(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi) = |\xi|^{-\sigma}\varphi(2^{-j}\xi)$.

$\text{supp } \varphi(2^{-j}\cdot) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n / 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$ Alors on peut pose $|\xi| = 2^j$

d'où

$$\widehat{\Delta}_j f = \varphi(2^j) 2^{-j\sigma}.$$

Comme dans l'exemple (1) on obtient

$$2^{sj} \|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(\frac{n}{p})} \text{ avec } c > 0$$

Ce qui donne

$f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ Dans les cas suivants :

1) $s = -\frac{n}{p'}$, $1 \leq p \leq +\infty$, $q = \infty$

2) $s < -\frac{n}{p'}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$

3.2 La composition en dimension 1

Théorème 20

Soit $1 \leq p \leq q < +\infty$ et $m + \left(\frac{1}{p}\right) < s < m + 1$, pour $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 1$

Si f est une fonction telle que $f(0) = 0$ et $f' \in B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})$ alors l'opérateur de composition T_f envoie l'espace $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ dans lui-même, de plus il existe une constante $c = c(s, p, q) > 0$ telle que :

$$\|f \circ g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c \|f'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \left(1 + \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}\right)^{s - \left(\frac{1}{p}\right)} \quad (12)$$

Pour tout $g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$

3.3 Préparation :

3.3.1 Une version de norme maximale de Besov :

On pose

$$W_p(f, h) = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

et

$$\Omega_p(f, t) = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t > 0$$

Définition 21

Pour $s \in]0,1[$ on dit que $f \in B_p^{s,q}$ si et seulement si, on a

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{W_p(f,h)}{h^s}\right)^q \frac{dh}{h} + \|f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \quad (13)$$

Remarque 22

Dans la formule (13) on peut remplacer $\int_0^{+\infty}$ par rapport à h par \int_0^R pour tout $R > 0$, car la partie $\int_R^{+\infty}$ sera majorée par $c \|f\|_p$.

Remarque 23

Si $s > 1$ alors $\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \|f^{(m)}\|_{B_p^{s-m,q}(\mathbb{R})}$ on $m = [s]$

Proposition 24

Soit $p > 1, \frac{1}{p} < s < 1$ et $q \in [1, +\infty]$

Alors une fonction $f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ si et seulement si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et :

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{\Omega_p(f,t)}{t^s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

De plus, l'expression au dessus inférieure à $c \|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}$

Preuve voir [1]

Proposition 25 (proposition de Bourdaud)

Pour tout $p > 1, \frac{1}{p} < s < 1, q \in [1, +\infty]$, il existe $c = c(s, p, q) > 0$ tel que

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{W_p(g,h)}{h^{s-\frac{1}{p}}}} \right)^q \frac{dh}{h} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \quad (14)$$

Pour tout $g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$

Preuve

On a l'inclusion $B_p^{\frac{1}{p},1} \hookrightarrow BV_p(\mathbb{R})$, alors il existe $c = c(p) > 0$

Tel que

$$\|g\|_{BV_p(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{B_p^{\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})}$$

Alors

$$W_p(g, h) \leq c \|g\|_{B_p^{\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})} \quad \forall h > 0 \quad (15)$$

On aussi l'affirmation suivante :

$$W_p(g, h) \leq h^{1-\left(\frac{1}{p}\right)} \|g\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \quad (16)$$

En effet : pour tout $g \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned} |g(t_k) - g(t_{k-1})| &\leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} |g'(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_{[t_{k-1}, t_k]} |g'(x)| dx \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} |g(t_k) - g(t_{k-1})| &\leq \left(\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} (1_{[t_{k-1}, t_k]}(x))^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |g'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\leq (t_k - t_{k-1})^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |g'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (16) est vraie.

On définit $\theta \in]0,1[$ par l'égalité : $\theta(1 - \left(\frac{1}{p}\right)) = s - \left(\frac{1}{p}\right)$.

Nous rappelons que $B_p^{s,q}(\mathbb{R}) = \left(B_p^{\frac{1}{p},1}(\mathbb{R}), W^{1,p}(\mathbb{R}) \right)_{\theta,q}$

On sait pour que $B_p^{s,q}(\mathbb{R}) = (B_p^{s_1,q_1}(\mathbb{R}), B_p^{s_2,q_2}(\mathbb{R}))_{\theta,q}$

Il faut $1 \leq q, q_1, q_2 \leq \infty$ et $s = \theta_{s_1} + (1 - \theta)_{s_2}$

On a $W^{1-p}(\mathbb{R}) = F_p^{1,2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_p^{1,\max(p,2)}(\mathbb{R})$

Si on pose $s_1 = 1$ et $s_2 = \frac{1}{p}$ on trouve $s = \theta + (1 - \theta)\left(\frac{1}{p}\right)$ alors

$$\theta \left(1 - \left(\frac{1}{p}\right)\right) = s - \left(\frac{1}{p}\right)$$

Donc $B_p^{s,q}(\mathbb{R}) = \left(B_p^{\frac{1}{p},1}(\mathbb{R}), W^{1,p}(\mathbb{R})\right)_{\theta,q}$

Par la définition d'interpolation, il existe deux familles $(U_t)_{t>0}$ et $(V_t)_{t>0}$ des fonctions telles que :

$$g = U_t + V_t \text{ et } \|U_t\|_{B_p^{\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})} + t \|V_t\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2k(t, g)$$

Telle que $k(t, g)$ est le k -fonction de g relative de couple $\left(B_p^{\frac{1}{p},1}(\mathbb{R}), W^{1,p}(\mathbb{R})\right)$

Pour $t > 0$, d'après théorème 24 et 25 on obtient

$$h^{\frac{1}{p}-s} W_p(g, h) \leq ck(t, g) \left(h^{\frac{1}{p}-s} + h^{1-s}t^{-1}\right) \forall h, t > 0$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{W_p(g, h)}{h^{s-\frac{1}{p}}}\right)^q \frac{dh}{h}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_0^\infty \left(\frac{k(h^{1-\frac{1}{p}}, g)}{h^{s-\frac{1}{p}}}\right)^q \frac{dh}{h}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= c \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\int_0^\infty \left(\frac{k(t, g)}{t^\theta}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

D'où le résultat voulu, puisque démontré que :

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{k(t, g)}{t^\theta}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}$$

Démonstration du théorème 20

Le cas $m = 1$:

Comme

$$|g'(x+h)f'(g(x+h)) - f'(g(x))g'(x)| \leq \|f'\|_\infty |g'(x+h) - g'(x)| + |f'(g(x+h)) - f'(g(x))||g'(x)|$$

alors

$$W_p((f \circ g)', h) \leq \|f'\|_\infty W_p(g', h) + u(h).$$

Avec

$$u(h) = \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(g(x+h)) - f'(g(x))|^p |g'(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Alors compte tenu de la remarque (14) il suffit de prouver que

$$\left(\int_0^1 \left(\frac{u(h)}{h^{s-1}} \right)^q \frac{dh}{h} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \|f'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \left(1 + \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \right)^{s - \left(\frac{1}{p}\right)}.$$

Nous examinons le cas où $h > 0$, et nous faisons le même travail pour $h < 0$ et sans oublier le cas général.

On suppose que g est une fonction réelle analytique et non nulle dans $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$, le cas général on le verra un peu plus tard.

On considère l'ensemble discret

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid g'(x) = 0\}$$

On pose $\{I_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ la famille des intervalles ouverts disjoints non vide dans \mathbb{R} définie par

$$\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} I_\ell = C_{\mathbb{R}} A$$

Où $C_{\mathbb{R}} A$ est la complémentaire de A dans \mathbb{R} .

Pour chaque $h > 0$, on pose I'_ℓ l'ensemble des $x \in I_\ell$ dont la distance à l'extrémité droite de I_ℓ est supérieur à h et I''_ℓ le complément de I'_ℓ dans I_ℓ , c'est-à-dire :

$$I'_\ell = \{x \in I_\ell, \text{dist}(x, \text{l'extrémité droite de } I_\ell) > h\}$$

et

$$I''_\ell = I_\ell \setminus I'_\ell \quad \text{et} \quad a_\ell = \sup_{x \in I_\ell} |g'(x)|.$$

Il est clair que g est un difféomorphisme sur I_ℓ c'est-à-dire admet une fonction $g|_{I_\ell}$ réciproque notée :

$$g|_{I_\ell}^{-1} = g_\ell^{-1}$$

Donc si $x \in I'_\ell$ (alors $x + h \in I_\ell$), et le théorème des accroissements finis donne

$$|g(x + h) - g(x)| = |g(g_\ell^{-1}(x) - y)| \leq ha_\ell \quad (17)$$

Avec

$$g(x) = y \quad \text{et} \quad x \in I_\ell$$

Estimation des termes définis par I'_ℓ :

Par 11-8 et par un changement de variable $t = a_\ell h$ on a

$$\int_{I'_\ell} |f'(g(x + h)) - f'(g(x))|^p |g'(x)|^p dx \leq a_\ell^{p-1} \Omega_p^p(f', a_\ell h) \quad (18)$$

avec la condition $q \geq p$, on utilise l'inégalité de Minkowski ainsi on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_\ell a_\ell^{p-1} \Omega_p^p(f', a_\ell h) \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{h} \right)^{\frac{p}{q}} \\ & \leq \sum_\ell \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} a_\ell^{p-1} \Omega_p^p(f', a_\ell h) \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{h} \right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\ell} \alpha_{\ell}^{p-1} \alpha_{\ell}^{(s-1)p} \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{\Omega_p(f', t)}{t^{s-1}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} \\
&\leq c \|f'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})}^p \left(\sum_{\ell} \left(\sup_{x \in I_{\ell}} |g'(x)| \right) \right).
\end{aligned}$$

Maintenant, avec les arguments du ([7] preuve du thm .7) admettons pour l'instant le lemme suivant :

Lemme 26

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière. Soit $\{I_{\ell}\}$ une famille d'intervalles ouverts disjoints dans \mathbb{R} , dont la réunion et la complémentaire des zéros de g' (voir (11-7)). Alors

$$\left(\sum \sup_{x \in I_{\ell}} |g'(x)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c \|g\|_{BV_r^1(\mathbb{R})} \quad (\forall r \geq 1)$$

Où c est une constante positive indépendante de g .

Par 11-9 est le lemme précédent avec $r = sp - 1$ on conclut que :

$$\left(\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_{\ell} \int_{I'_{\ell}} |f'(g(x+h)) - f'(g(x))|^p |g'(x)|^p \right)^{\frac{q}{p}} dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

est estimé par $\|f'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})}^p \|g\|_{BV_{sp-1}^1(\mathbb{R})}^{sp-1}$.

Estimation des termes définit par I'_{ℓ} :

Puisque les intervalles non vide I'_{ℓ} sont de longueur égale à h on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell} \int_{I'_{\ell}} |f'(g(x+h)) - f'(g(x))|^p |g'(x)|^p \\
&\leq h(2 \|f'\|_{\infty})^p \sum_{\ell} \sup_{x \in I'_{\ell}} \|g'(x)\|^p \quad (19)
\end{aligned}$$

Soit B_{ℓ} l'extrémité droite de I_{ℓ} , alors $g'(B_{\ell}) = 0$.

D'autre part, si I'_{ℓ} borné, alors il existe $\xi \in I'_{\ell}$ tel que :

$$|g'(\xi_\ell)| = \sup_{x \in I_\ell''} |g'(x)|$$

Si I_ℓ'' est non borné, alors on a au plus deux intervalles.

Donc :

$$\exists \mu_\ell \in I_\ell'' : \sup_{x \in I_\ell''} |g'(x)| \leq |g'(\mu_\ell)|^p + \varepsilon, (\forall \varepsilon > 0)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum \sup_{I_\ell''} |g'|^p &= \sum_{\ell(I_\ell'' \text{ borné})} \sup |g'|^p + \sum_{\ell(I_\ell'' \text{ non borné})} \sup |g'|^p \\ &\leq \sum_{\ell(\text{borné})} |g'(\xi_\ell) - g'(B_\ell)|^p + \sum_{\ell(2\text{termes})} |g'(\mu_\ell) - g'(B_\ell)|^p + 2\varepsilon \\ &\leq W_p^p(g', h) + 2\varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (20) \end{aligned}$$

Avec la proposition de Bourdaud et (19) on obtient

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_\ell \int_{I_\ell''} |f'(g(x+h)) - f'(g(x))|^p |g'(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{h} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f'\|_\infty \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

D'après tous ce qui précède :

$$\|fg\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \|f'\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \left(\|g\|_{BV_{sp-1}^1(\mathbb{R})}^{s-\frac{1}{p}} \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \right) \quad (21)$$

Et puisque on a les inclusions suivantes

$$B_p^{s,q}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow BV_p^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow BV_{sp-1}^1(\mathbb{R}) \quad (22)$$

On trouve l'inégalité (12)

Preuve du lemme (12)

Dans l'estimation (12), il suffit de remplacer I_ℓ'' par I_ℓ

Notons qu'on peut supprimer le terme $\sum_{\ell(I_p \text{ non borné})} \sup |g'|^p$ car

$$g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R})$$

Le cas $m > 1$:

Par récurrence sur m , soit $g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$. D'après les suppositions précédentes on a $g'' \in B_p^{s-2,q}(\mathbb{R})$. En utilisant les hypothèses de récurrence et l'inclusion

$$B_p^{s,q}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_p^{s-1,q}(\mathbb{R}) \quad \text{on obtient :}$$

$$f'og \in B_p^{s-1,q}(\mathbb{R}) \quad \text{et}$$

$$\|f'og\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \leq c \|f'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \left(1 + \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}\right)^{s-1-\left(\frac{1}{p}\right)}.$$

Comme $B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach pour la multiplication ponctuelle (voir [1]), alors on conclut que :

$(f'og)g' \in B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})$, $(fog) \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ et l'inégalité (12) tient car :

$$\begin{aligned} \|fog\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} &= \|fog\|_p + \|(f'og)g'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \\ &\leq \|f\|_\infty \|g\|_p + \|g'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \|f'og\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|f\|_\infty \|g\|_p + c \|g'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \|f'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \left(1 + \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}\right)^{s-1-\left(\frac{1}{p}\right)} \\ &\leq \|f\|_\infty \|g\|_p + c' \|f'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \left(1 + \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}\right)^{s-\left(\frac{1}{p}\right)} \\ &\leq c'' \|f'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \left(1 + \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}\right)^{s-\left(\frac{1}{p}\right)} \end{aligned}$$

Notons que l'hypothèse $f(0) = 0$, entraîne que

$$\|fog\|_p = \|fog - f(0)\|_p \leq \|f'\|_\infty \|g\|_p.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Guy : Intégral singulières.

[2] T. Runst, W. Sickel : Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operator and nonlinear partial differential equations de Gruyter.

Berlin 1996

[3] J. Bergh and Lofstrom .interpolation spaces springer ,Berlin,1976.

[4] J. Marschal. On the boundness and compactness of non regular pseudo-differential operators. Math. Nachr .175(1995)231-262.

[5] J . Peetre . Interpolation of lipschitz operators and metric spaces.

Mathematica (cluj)12(1970)1-20.

[15] H. Triebel. Theory of function spaces II Birkhäuser, Basel, 1992.

[6] G. Bourdaud, M.Moussai and Winfried Sickel . Towards sharp superpositions theorems in Besov spaces and Lizorkin-tribel spaces . Aparaitre dans Non linear analysis TMA.

[7]G.Bourdaud, M . Lanza de Cristofris. W. Sickel Superposition operators and functions of bounded p-variation. Rev mat Iberoamer. Prépublication 362 Institut de mathématiques de jussieu .unité mixte de recherche 7568 Université Paris VI et paris VII , CNRS. A paraitre Rev .MAT .Ibero americana.