

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## Mémoire de Master

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Equations aux dérivées partielles et applications

## Thème

---

*Méthode variationnelle, théorie et application sur un problème aux limites de second ordre singulier.*

---

**Présenté par :**

M<sup>r</sup> : Mekki Fouzi

**Membres de jury :**

Mr. Abdelhak MOKHTARI	M.C.B.,	Université de M'sila	<b>Président.</b>
Mr. Dahmane BOUAFIA	M.C.B.,	Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
Mr. Nour Eddine DACHOUCHA	M.A.A.,	Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2020/2021.

---

# Remerciements

---

*Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu qui m'a donné tout le puissant et la volonté, le courage et la patience durant ces longues années de formation.*

*Je tiens à remercier sincèrement **Mr : Dahmane BOUAFIA**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour ses conseils.*

*Mes remerciements vont également aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.*

*Aussi mes remerciements à tous les enseignants de département de mathématiques et précisément, les enseignants de spécialité équations aux dérivées partielles et applications.*

*Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier mon frère Moussa et toute personne qui m'a aidé à réaliser ce travail.*

---

# Dédicace

---

*Je dédie ce modeste travail :*

*-À mes parents,*

*-À mes frères,*

*-À mes sœurs,*

*-À toute la famille Mekki,*

*-À tous mes amis et toute ma famille de département  
de Mathématiques et à toute la promotion 2020 /2021  
de L'EDP.*

*-À toutes mes adorables que j'ai connu pendant  
toute ma vie ...*

*À vous cher lecteur .*

**Mekki fouzi**

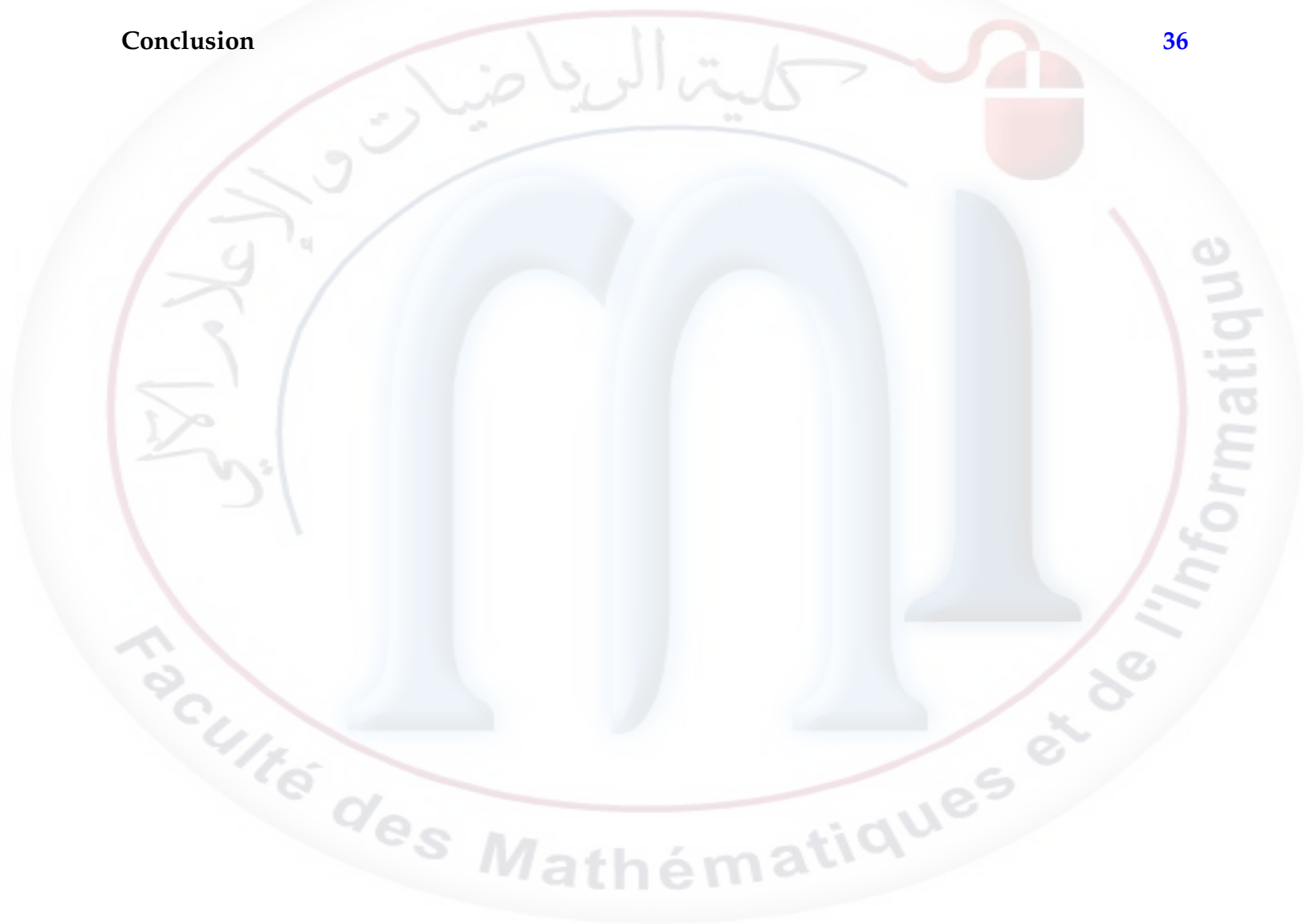
---

# Table des matières

---

Remerciements	i
Dédicace	ii
Notation	v
Introduction générale	1
<b>1 QUELQUES OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE</b>	<b>3</b>
1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach	3
1.1.1 Semi-continuité	4
1.1.2 Continuité et compacité des opérateurs	4
1.1.3 Cas particulier (l'injection continu et compact)	5
1.1.4 Semi-continuité forte et faible	5
1.2 Espace de Lebesgue et Sobolev	10
1.2.1 Espace $L^p$	10
1.2.2 Espace $H^1$	11
1.2.3 Théorème classique de compacité	12
<b>2 Méthodes variationnelles et théorie des points critiques</b>	<b>13</b>
2.1 Théorie des points critiques	13
2.1.1 Points et valeurs critiques	13
2.1.2 Suite minimisante et infimum	16
2.2 Principe variationnel d'Ekeland	16
2.3 Lemme du Col de la Montagne	17
2.3.1 Suite et condition de Palais-Smale	17
2.3.2 Suite et condition de Cerami	18
2.3.3 Lemme du Col en dimension infinie	19
2.3.4 Autre version de lemme du Col	22

<b>3 Théorie des points critiques, et applications sur un problème aux limites de second ordre singulier</b>	<b>23</b>
3.1 Introduction . . . . .	23
3.1.1 Fonction de Green et le problème approché . . . . .	23
3.2 La fonctionnelle d'Euler-Lagrange . . . . .	26
3.3 Un principe d'existence . . . . .	28
3.4 Cas Asymptotiquement linéaire . . . . .	30
<b>Conclusion</b>	<b>36</b>



---

# Notation

---

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$H$	Espace de Hilbert.
$E$	Espace de Banach.
$X'$	Dual topologique de $X$ .
$\Omega$	Un ouvert de $\mathbb{R}$ .
$\partial\Omega$	Frontière de $\Omega$ .
BVP	Problème aux limites de second ordre.
$L^p(\Omega)$	$= \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} :  u ^p \in L^1(\Omega) \right\}$ avec $1 \leq p < \infty$ .
$\ u\ _{L^p}$	$= \left( \int_{\Omega}  u(x) ^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ .
$L^\infty(\Omega)$	$= \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists C :  u(x)  \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$ .
$\ u\ _{L^\infty}$	$= \inf \{ C :  u(x)  \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$ .
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur $\Omega$ .
$D(A)$	: Domaine de définition d'un opérateur borné $A$ .
$\mathcal{D}(\Omega)$	: L'espace des fonctions de classe $C^\infty$ à support compact dans $\Omega$ .
$R(A)$	: Image de $A$ qui est noté aussi par $ImA$ .
$(X, d)$	: Espace métrique .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: Définit un produit scalaire.
$\mathcal{L}(X, Y)$	: Ensemble des applications linéaires continues.
$\hookrightarrow$	: On écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que $X$ est inclus dans $Y$ et que l'injection canonique de $X$ dans $Y$ est continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	: On écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ pour signifier que $X$ est inclus dans $Y$ et que l'injection canonique de $X$ dans $Y$ est compacte.
p.p	Presque partout.
$\partial_v F$	Dérivée directionnelle de $F$ dans la direction $v$ .
$dF$	Dérivée au sens de Fréchet qui est noté aussi par $F'$ .
$d_G F$	Dérivée au sens de Gâteaux.

EVP	Principe variationnel d'Ekeland .
s.c.i	Semi continue inférieur.
s.c.s	Semi continue supérieur.
f.s.c.i	Faiblement semi continue inférieur.
f.s.c.s	Faiblement semi continue supérieur .
$\mathcal{D}(J)$	Domaine de définition de $J$ .



---

# Introduction générale

---

Le but de ce mémoire est l'étude d'existence et multiplicité de solutions positives pour un problème aux limites de second ordre. La preuve du résultat principal repose sur un théorème de minimisation, le lemme du Col et le principe variationnel d'Ekeland.

Le principe de lemme du Col établit l'existence d'un point Col (point critique), l'intuition qui sous-tend ce lemme se trouve dans le mot « Col » lui-même. Supposons que  $I$  désigne l'altitude. Il existe alors deux points bas : l'origine, car  $J(0) = 0$ , et un autre point  $v$  où  $J(v) \leq 0$ . Entre ces deux points se situe une chaîne de montagnes (à distance  $\|u\| = r$  de l'origine) où l'altitude est élevée (plus grande que  $a > 0$ ). Pour aller de l'origine à  $v$  en suivant un chemin  $\gamma$ , il faut traverser les montagnes, c'est-à-dire d'abord monter, puis redescendre. Comme  $J$  est plus ou moins régulière, elle doit atteindre un point critique quelque part entre les deux. L'intuition suggère que si un tel point se situe sur un chemin qui traverse les montagnes à l'altitude la plus basse, ce sera presque toujours un point Col.

Dans ce travail, on présente le lemme du Col (en dimension infinie). Ce mémoire comprend trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux outils d'analyse fonctionnelle. On donne quelques notions élémentaires qui sont nécessaires par la suite. Nous avons divisé le chapitre en deux sections, la première section contient quelques notions sur les opérateurs de Banach comme la continuité et la compacité, injection continue et injection compacte et les propriétés de semi-continuité de fonctionnelles. Nous avons présenté dans la deuxième section un rappel sur l'espace de Lebesgue et de Sobolev comme l'espace  $L^p$  et l'espace  $H^1$ , lemme de compacité.

Ensuite, le deuxième chapitre est consacré à la méthode variationnelle et théorie des points critiques qui contient trois sections, la première section est la théorie des points critiques comme points et valeurs critiques, suite minimisante et infimum.

Dans la deuxième section on va présenter le principe variationnel d'Ekeland.

Dans la troisième section on va présenter le lemme du Col de la montagne qui contient la suite et condition de Palais-Smale et la condition de Cerami, lemme du Col en dimension infinie.

Enfin, on va présenter le travail de l'article de Pavi P, Agarwal, Kanishka Perera, et Donal

O'regan qui a été publié en 2005, (voir [25]).

Alors, nous discutons l'existence et la multiplicité des solutions positives pour un problème aux limites du second ordre suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)), & x \in [0, 1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$



# QUELQUES OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Dans ce chapitre, on donne quelques notions élémentaires qui sont nécessaire par la suite.

## 1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach

Soit  $X$  et  $Y$ , deux espaces de Banach normés.

**Définition 1.1. (Opérateur linéaire borné)[1]** Soit  $A$  un opérateur linéaire, tel que  $D(A) = X$  et  $R(A) \subset Y$ . On dit que  $A$  est borné, s'il est borné sur la boule unité  $\bar{B}(0, 1)$ . C'est-à-dire, si l'ensemble

$$\{\|Ax\|, \|x\| \leq 1\}$$

est borné.

Conformément à cette définition, si  $A$  est borné, il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour tout  $x$  avec  $\|x\| \leq 1$ , on a l'inégalité

$$\|Ax\| \leq c.$$

**Théorème 1.1. [1]**  $A$  est borné, si et seulement si, il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|,$$

pour tout  $x \in X$ .

**Définition 1.2. (Espace dual)[2]** L'ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé constitue un espace vectoriel. On l'appelle dual de l'espace  $X$  et on note  $X'$ .

On munit  $X'$  de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|, \quad \forall f \in X'.$$

$X'$  muni de cette norme est un espace de Banach et on a l'inégalité

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X, \quad \forall f \in X', \quad \forall x \in X.$$

### 1.1.1 Semi-continuité

**Définition 1.3.** 1. On dit qu'une fonctionnelle  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point  $x_0$ , si pour chaque suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightarrow x_0$ , on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que  $f$  est semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point  $x_0$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightarrow x_0$ , on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

**Définition 1.4.** On dit qu'une suite  $(x_n) \in X$  converge faiblement vers  $x$ , si

$$\text{pour tout } f \in X', \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle,$$

et on écrit  $x_n \rightharpoonup x$ .

**Proposition 1.1.** [3] Soit  $(x_n)$  une suite de  $X$ . On a

1. Si  $x_n \rightarrow x$ , alors  $x_n \rightharpoonup x$ .
2. Si  $x_n \rightharpoonup x$ , alors  $(x_n)$  est bornée et  $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ .

**Proposition 1.2.** [3] Lorsque  $X$  est de dimension finie, une suite  $(x_n)$  converge faiblement, si et seulement si, elle converge fortement.

**Définition 1.5. (Réflexivité)** Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $\mathbf{i}$  l'injection canonique de  $X$  dans  $X''$ . On dit que  $X$  est réflexif, si  $\mathbf{i}(X) = X''$ , où  $X''$  est le bidual de  $X$ .

**Définition 1.6. (Séparabilité)** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On dit que  $X$  est séparable si  $X$  admet une partie dénombrable et dense.

**Théorème 1.2.** [3] Un espace de Banach  $X$  est réflexif, si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.

**Corollaire 1.1.** [3] Si  $X$  est un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée  $(x_n) \subset X$  avec  $\|x_n\| \leq M$  contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément  $x \in X$  vérifiant  $\|x\| \leq M$ .

### 1.1.2 Continuité et compacité des opérateurs

On va considérer des opérateurs  $T$  de  $X$  dans  $Y$  et on va donner une définition concernant les propriétés de la continuité de  $T$ .

La notion plus simple est la suivante

**Définition 1.7.** L'opérateur  $T : X \rightarrow Y$  est dit continu en  $x$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset X$  qui converge vers  $x$ ,  $T(x_n)$  converge vers  $T(x)$ .

$T$  est dit continu sur  $\Omega \subset X$  si  $T$  est continu en tout point  $x \in \Omega$ .

**Définition 1.8.** Un opérateur  $T : X \rightarrow Y$  est dit compact s'il est continu et a la propriété. Pour toute suite  $(x_n)$  bornée dans  $X$ , la suite  $(T(x_n))$  admet une sous suite convergente.

**Définition 1.9.** Soit  $(X, \|\cdot\|_1)$  et  $(Y, \|\cdot\|_2)$  deux espaces de Banach. Un opérateur  $T : X \rightarrow Y$  est dit complètement continu s'il est continu et l'image de tout ensemble borné de  $X$  est relativement compact dans  $Y$ .

### 1.1.3 Cas particulier (l'injection continu et compact)

L'injection définissent les relations qui existent entre différents espaces fonctionnels. Ils sont très importants dans l'analyse moderne et les problèmes aux limites.

**Définition 1.10.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. On dit que  $X$  est injecté dans  $Y$  et on écrit  $X \hookrightarrow Y$ , si pour tout  $x \in X$  on a  $x \in Y$  et  $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$ , où la constante  $c$  ne dépend pas de  $x \in X$ . On définit l'opérateur d'injection  $i : X \rightarrow Y$ , qui nous permet de considérer le même élément  $x \in X$  comme un élément de  $Y$ .

$X \hookrightarrow Y$  est équivalent à dire que l'opérateur d'injection  $i : X \rightarrow Y$  est un opérateur linéaire continu.

Si  $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$ , pour tout  $x \in X$  alors  $\|i(x)\|_Y \leq c$  si  $\|x\|_X \leq 1$ .

**Définition 1.11.** Si  $X \hookrightarrow Y$  et l'opérateur d'injection  $i : X \rightarrow Y$  est un opérateur compact, alors on dit que  $X$  est injecté de manière compacte dans  $Y$ , et on écrit  $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ . La compacité de l'opérateur  $i : X \rightarrow Y$  est équivalent à dire que tout sous-ensemble borné de  $X$  est un sous-ensemble compact de  $Y$ .

### 1.1.4 Semi-continuité forte et faible

**Définition 1.12.** 1. On dit qu'une fonctionnelle  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point  $x_0$ , si pour chaque suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightarrow x_0$ , on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que  $f$  est semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point  $x_0$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightarrow x_0$ , on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

**Exemple 1.1.** 1. Soit la fonctionnelle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq 0 \\ 3 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Alors  $f$  est semi-continue inférieurement (*s.c.i.*) à  $x_0 = 0$  mais n'est pas semi-continue supérieurement.

2. Soit la fonctionnelle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Alors  $f$  est semi-continue supérieurement (*s.c.s.*) à  $x_0 = 0$  mais n'est pas semi-continue inférieurement.

**Définition 1.13.** 1. Une fonctionnelle  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite faiblement semi-continue inférieurement (*f.s.c.i.*) au point  $x_0$ , si pour chaque suite  $(x_n) \subset \Omega$  telle que  $x_n \rightharpoonup x_0$ , on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que  $f$  est faiblement semi-continue supérieurement (*f.s.c.s.*) au point  $x_0$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightharpoonup x_0$ , on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

**Exemple 1.2.** Soit la fonctionnelle  $J$  définie sur un espace de Hilbert  $H$  comme suit

$$J : u \rightarrow \|u\|^2,$$

alors  $J$  est faiblement semi-continue inférieure (*f.s.c.i.*). En effet, soit  $(u_n)$ , telle que  $u_n \rightharpoonup u$ , on montre que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= (u_n - u, u_n - u) \\ &= \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

et comme  $\mathcal{H}' = H$  et  $u_n \rightharpoonup u$ , donc

$$\forall u \in H : (u_n, u) \rightarrow (u, u) = \|u\|^2.$$

Alors

$$\|u_n\|^2 \geq \|u\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

il résulte que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

**Remarque 1.1.** 1. Il est facile de voir que si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors  $f$  est (s.c.s.) et (s.c.i) et inversement.

2. Si  $f$  est faiblement continue en  $x_0$ , alors  $f$  est (f.s.c.s.) et (f.s.c.i.) et inversement.

**Définition 1.14. (La dérivée au sens de Fréchet)** Soit  $u \in U$  et  $F : U \rightarrow Y$ . On dit que  $F$  est différentiable au point  $u$  s'il existe une application linéaire continue  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , telle que si on considère

$$R(h) = F(u + h) - F(u) - A.h, \text{ pour } h \in X, \text{ petit.}$$

Alors

$$\frac{R(h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|h\| \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \|h\|_X \leq \delta, \text{ alors } \|R(h)\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X.$$

Si une telle application  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  existe, elle est forcément unique. On note par

$$A = dF(u).$$

Elle est appelée différentielle (au sens de Fréchet) de  $F$  en  $u$ , ou encore application linéaire tangente à  $F$  en  $u$ . En l'absence de précision supplémentaire différentiable signifiera dans la suite différentiable au sens de Fréchet.

**Exemples 1.1.** 1. Si  $F(u) = c$ . Alors  $F$  Fréchet différentiable et

$$dF(u) = 0, \forall u.$$

2. Si  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$   $A(u + h) - A(u) = A.h$  et donc  $dA(u) = A, \forall u \in X$ .

3. La fonctionnelle  $F : H \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

$$F(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 = \langle u, u \rangle,$$

est Fréchet différentiable et

$$dF(u)h = \langle u, h \rangle.$$

4. La fonctionnelle  $F : H \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$F(u) = \frac{1}{2} \|u\|,$$

est Fréchet différentiable pour  $u \neq 0$  et

$$dF(u)h = \frac{\langle u, h \rangle}{\|u\|}.$$

On a ensuite toutes les propriétés classiques.

**Proposition 1.3.** [5]

i) Soit  $F$  et  $G$  deux applications de  $U$  vers  $Y$ . Si  $F$  et  $G$  sont différentiables en  $u \in U$ . Alors  $\forall \lambda, \mu$  réels  $\lambda F + \mu G$  est différentiable en  $u$ , et

$$d(\lambda F + \mu G)(u) = \lambda dF(u) + \mu dG(u).$$

ii) Soit  $X, Y$  et  $Z$  trois espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $X$ , et  $V$  un ouvert de  $Y$ . Soit  $F : U \rightarrow Y$  et  $G : V \rightarrow Z$ , tels que  $F(U) \subset V$ . Si  $F$  est différentiable en  $u$  et  $G$  est différentiable en  $v = F(u)$ , alors  $G \circ F$  est différentiable en  $u$  et

$$d(G \circ F)(u) = dG(v) \circ dF(u), \quad v = F(u),$$

c'est-à-dire

$$d(G \circ F)(u)h = dG(v)[dF(u)h].$$

La différentielle de  $G \circ F$  est donc la composition des applications linéaires continues  $dF(u)$  et  $dG(v)$ , pour  $v = F(u)$ .

**Définition 1.15. (Dérivée directionnelle)** Soit  $F : U \rightarrow Y$ ,  $u \in U$ . Soit  $v \in X$ ,  $v \neq 0$ . On appelle dérivée directionnelle en  $u$  de  $F$  dans la direction  $v$ , notée  $\partial_v F(u)$ , la limite lorsqu'elle existe.

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}.$$

La notion de dérivée directionnelle est donc une extension de la notion de dérivée partielle. Si  $F$  est Fréchet différentiable, alors pour tout  $v \in X$  la dérivée directionnelle dans la direction  $v$  est donnée par

$$\partial_v F(u) = dF(u)v.$$

En effet,

$$F(u + tv) = F(u) + dF(u)(tv) + R(tv).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} &= dF(u)(v) + \frac{R(tv)}{t}, \\ \frac{R(tv)}{t} &\rightarrow 0, \text{ lorsque } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Définition 1.16. (Différentiabilité au sens de Gâteaux)** On dit que  $F : U \rightarrow Y$  est Gâteaux différentiable en  $u$  (G-différentiable en  $u$ ), s'il existe une application linéaire continue  $A$  de  $X$  vers  $Y$ , c'est-à-dire  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , telle que pour tout  $v \in X$ , la dérivée directionnelle de  $F$  en  $u$  dans la direction  $v$  existe et est égale à  $A(v)$ , c'est-à-dire

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = A(v), \quad t \rightarrow 0, \quad \forall v \in X.$$

On vérifie alors que, si une telle application  $A$  existe, elle est unique. On note

$$A = d_G F(u).$$

**Proposition 1.4.** [5] *Si  $F$  est Fréchet différentiable en  $u$ , elle est Gâteaux différentiable en  $u$  et*

$$\partial_G F(u) = dF(u).$$

*La réciproque est fautive en général, même en dimension finie.*

**Exemple 1.3.** Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

est G-différentiable à  $(0, 0)$ , mais pas différentiable au sens de Fréchet à  $(0, 0)$ .

**Remarque 1.2.** La G-différentiabilité n'implique pas la continuité de  $F$ .

**Exemple 1.4.** Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y = x^2 \\ 0, & \text{si } y \neq x^2. \end{cases}$$

est G-différentiable à  $(0, 0)$ , mais n'est pas continue à  $(0, 0)$ , (alors que bien entendu la différentiabilité au sens de Fréchet l'implique).

Tandis que, si on sait que  $F$  est  $C^1$  au sens de Gâteaux, alors  $F$  est Fréchet différentiable sur  $U$  et les deux notions coïncident et on a

**Théorème 1.3.** [5] *Soit  $F : U \rightarrow Y$  une application G-différentiable ( $U$  ouvert de  $X$ ). On suppose que l'application  $v \mapsto d_G F(v)$  est continue sur  $U$ . Alors  $F$  est Fréchet différentiable sur  $U$  et*

$$dF(v) = d_G F(v), \quad \forall v \in U.$$

**Démonstration** - Soit  $r \in (0, 1]$  tel que  $B_r(u) \subset U$ . Puisque  $d_G F : U \rightarrow X'$  est continue à  $u$ , pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta \in (0, 1]$  tel que

$$\|d_G F(u + tv) - d_G F(u)\| < \varepsilon \quad \text{pour } \|v\| < \delta, |t| < 1. \quad (1.1)$$

D'autre par, pour chaque  $v \in B_r(0)$  la fonction

$$t \in [0, 1] \mapsto (d_G F(u + tv), v),$$

est la dérivée de la fonction

$$g(t) = F(u + tv) \quad t \in [0, 1].$$

Par conséquent

$$\int_0^1 (d_G F(u + tv), v) dt = g(1) - g(0) = F(u + v) - F(u).$$

Donc

$$F(u + v) - F(u) - (d_G F(u), v) = \int_0^1 (d_G F(u + tv) - d_G F(u), v) dt. \quad (1.2)$$

Soit

$$R(u, v) = \int_0^1 (d_G F(u + tv) - d_G F(u), v) dt.$$

D'après (1.1), pour tout  $v \in B_\delta(0)$ , nous avons que

$$\begin{aligned} \|R(u, v)\| &\leq \int_0^1 \|d_G F(u + tv) - d_G F(u)\| \|v\| dt \\ &\leq \varepsilon \|v\|. \end{aligned}$$

Pour cette raison  $R(u, v) = o(\|v\|)$  quand  $\|v\| \rightarrow 0$ . Ensuite, (1.2) montre que  $d_G F(u)$  est le dérivé de Fréchet de  $F$  à  $u$ . ■

**Remarque 1.3.** En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux. Si on veut prouver que  $F$  est  $C^1$ , il suffit donc de prouver qu'elle est Gâteaux différentiable, puis de vérifier que la différentiable  $d_G F$  est continue.

## 1.2 Espace de Lebesgue et Sobolev

Dans la suite,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$ .

### 1.2.1 Espace $L^p$

**Définition 1.17.** Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ , on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\}.$$

On note  $\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ , et  $\|\cdot\|_{L^p}$  est une norme.

**Définition 1.18.** On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

**Théorème 1.4. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)[3]** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1$ . On suppose que

(a)  $(f_n(x)) \rightarrow f(x)$  p.p. Sur  $\Omega$ .

(b) Il existe une fonction  $g \in L^1(\Omega)$ , telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. Sur  $\Omega$ . Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

**Théorème 1.5. [3]** L'espace  $L^p$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ , et son dual est  $L^q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

## 1.2.2 Espace $H^1$

**Définition 1.19.** L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, N\right\}$$

où  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  est la dérivée au sens distribution de  $v$ .

L'espace  $H^1(\Omega)$  est équipé du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \left( uv + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

et la norme correspondante

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} \left( v^2 + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Remarque 1.4.** Par définition de la dérivée distributionnelle, les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $v \in H^1(\Omega)$
2.  $v \in L^2(\Omega)$  il existe  $g_1, g_2, \dots, g_N \in L^2(\Omega)$  telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx.$$

Alors, par définition,  $\frac{\partial v}{\partial x_i} = g_i$  au sens de la distribution.

**Définition 1.20.** On désigne par  $H_0^1(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ . Notons ici que la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  est  $H_0^1(\Omega)$  (avec en général  $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$ ), Alors que la fermeture de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  est  $H^1(\Omega)$ .

**Proposition 1.5.** Soit  $u \in H^1(\Omega)$ . La fonction  $u$  appartient à  $H_0^1(\Omega)$  si et seulement si  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . En particulier, si  $\Omega = ]0; 1[$ , et  $u \in H_0^1(\Omega)$ , Alors  $u(0) = u(1) = 0$ . Par ailleurs,

$$H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega).$$

**Théorème 1.6. (Théorème de Rellich)[3]** Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ , alors de toute suite bornée de  $H^1(\Omega)$  on peut extraire une sous-suite convergente dans  $L^2(\Omega)$  on dit que l'injection canonique de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte.

**Théorème 1.7. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)[3]** Soit  $f$  et  $g \in L^2(\Omega)$ . Alors, nous avons que

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \left( \int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Théorème 1.8. (Inégalité de Hölder)[3]** Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note  $q$  l'exposant conjugué,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Suppose que  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors

(i)  $fg \in L^1(\Omega)$  et

$$(ii) \int_{\Omega} |fg| \leq \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Proposition 1.6. (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)[23]** Soit  $\Omega$  un intervalle borné, soit  $u \in L^1(\Omega)$ , on pose

$$\tilde{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u$$

.Alors,

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u'\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall u \in L^1(\Omega) \quad (1.3)$$

### 1.2.3 Théorème classique de compacité

**Théorème 1.9. (Ascoli-Arzéla)[2]**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un espace métrique compact  $(X, d)$  et à valeurs réelles. On suppose que la suite  $(f_n)$  a les deux propriétés suivantes

(1)  $(f_n)$  est équicontinue i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, \forall n \in \mathbb{N} : d(x, y) < \eta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

(2) La suite  $(f_n(x))_n$  est bornée pour tout  $x \in X$ .

Alors il existe une sous-suite de  $(f_n)$  qui converge vers une fonction continue  $f$  dans  $C(X, \mathbb{R})$ .

# MÉTHODES VARIATIONNELLES ET THÉORIE DES POINTS CRITIQUES

Dans cette chapitre, nous présenterons la théorie des points critiques et on va étudié les points, valeurs critiques et la suite minimisante et infimum. Puis, on vas donner le principe variationnel d'Ekeland parce que nous apportent la preuve de le Lemme du Col basée sur ce théorème. Nous introduirons également une condition de compacité connue sous le nom de condition Palais-Smale ( $P.S$ ) et on va étudier aussi la condition de Cerami ( $C$ ). Les deux conditions ( $C$ ) et ( $P.S$ ) sont nécessaire pour le Lemme du Col (de dimension infinie) d'Ambrosetti et de Rabinowitz (voir [5] et [19]).

## 2.1 Théorie des points critiques

Soit ( $E$ ) une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles), on veut l'étudier par une méthode variationnelle. Les solutions sont alors cherchées comme points critiques d'une fonctionnelle  $J$  définie sur un espace de Banach  $X$  bien précis telle que :

- i)  $J$  est au moins Gateaux-différentiable.
- ii) L'équation d'Euler correspondante :  $d_G J(u) = 0$  est équivalente à ( $E$ ).

Dans le cas où  $J$  est minorée (respectivement majorée), il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum (respectivement le maximum) est atteint.

### 2.1.1 Points et valeurs critiques

**Proposition 2.1.** [5] Soit  $X$  un espace de Banach, et  $J$  une application de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , soit  $u \in X$ . On suppose que

$$J(u) = \inf_{v \in X} J(v),$$

c'est-à-dire

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in X.$$

Alors, si  $J$  est Gâteaux-différentiable en  $u$ , on a

$$d_G J(u) = 0.$$

**Démonstration** - Sous l'hypothèse de ce proposition, supposons sans perte de généralité que  $u_0$  est un point minimum (sinon considérons la fonction  $-J$  au lieu de  $J$ ).

Comme  $u_0 \in U$  et  $U$  est ouvert, il existe un nombre réel positif  $r$  tel que la boule ouverte  $B_r(u_0)$  est contenu dans  $U$ .

Maintenant, soit  $h \in X \setminus \{0\}$ . Alors, pour chaque  $t$  tel que

$$|t| \leq \frac{r}{\|h\|}, \quad \text{on a,} \quad J(u_0 + th) \geq J(u_0),$$

et ainsi par le Gâteaux différentiabilité de  $J$  à  $u_0$ , nous avons

$$d_G J(u_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [J(u_0 + th) - J(u_0)] \geq 0.$$

Il s'ensuit également que  $d_G J(u_0)(-h) \geq 0$ , i.e.,  $d_G J(u_0)(h) \leq 0$ , par linéarité de  $d_G J(u_0)$ .

Par conséquent, on trouve  $d_G J(u_0)(h) = 0$ , pour tout  $h \in X$ . Ainsi  $d_G J(u_0) = 0$ . ■

**Définition 2.1.** Soit  $u_0 \in X$ . On dit que  $u_0$  est un minimum local pour  $J$  si il existe  $\delta > 0$  tel que

$$J(u_0) \leq J(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta), \quad v \neq u_0.$$

On a alors

**Proposition 2.2.** [5] Soit  $u_0 \in X$ , un minimum local de  $J$ . Alors si  $J$  est Gâteaux différentiable en  $u_0$ , alors

$$d_G J(u_0) = 0.$$

**Définition 2.2. (Points critiques)** Soit  $J$  une fonctionnelle différentiable de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ . Un point  $u \in X$  est dit critique pour  $J$  si et seulement si

$$dJ(u) = 0.$$

**Définition 2.3. (Valeurs critiques)** On appelle valeur critique, de la fonctionnelle  $J$ , de classe  $C^1$  définie sur  $X$ , un nombre  $c \in \mathbb{R}$ , tel qu'il existe  $u \in X$ , tel que

$$J(u) = c, \quad dJ(u) = 0.$$

**Théorème 2.1.** [27] Soient  $X$  un espace de Banach réflexif, et  $J$  une fonctionnelle définie sur  $X$ , telle que

1.  $\lim_{\|x\|_X \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$  (coercivité uniforme)
2.  $J$  est (f.s.c.i),

alors  $J$  est bornée inférieurement sur  $X$  et atteint sa borne inférieure en un point  $x_0$ . De plus, si  $J$  est Gâteaux différentiable en  $x_0$ , alors  $\text{Grad } J(x_0) = 0$ .

**Démonstration** - : Supposons que  $J$  n'est pas bornée inférieurement, alors il existe une suite  $(x_n)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = -\infty$ .

D'après 1), la suite est uniformément bornée; donc  $(x_n)$  admet une sous-suite  $(x_{n_k})$  telle que  $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$  avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} J(x_{n_k}) = -\infty$ .

D'après 2), alors

$$J(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} J(x_{n_k}) = -\infty$$

et ceci est impossible. Donc  $J$  est bornée inférieurement.

Montrons maintenant que  $J$  atteint son infimum : soit  $\alpha = \inf_{x \in X} J(x)$  et soit  $(x_n)$  une suite minimisante de  $J$  i.e :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \alpha$ ; comme précédemment,  $(x_n)$  admet une sous-suite  $(x_{n_k})$  telle que  $x_{n_k} \rightharpoonup x_0 \in X$  et donc

$$J(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} J(x_{n_k}) = \alpha.$$

Comme  $J(x_0) \geq \alpha$  par définition de  $\alpha$  alors  $J(x_0) = \alpha$ .

La dernière partie du théorème est une conséquence du théorème précédent. ■

Pour les fonctionnelles convexes (ou espaces convexes), un résultat classique est donné par le théorème suivant

**Théorème 2.2.** [2] Soit  $C$  un ensemble convexe fermé de  $X$ , Banach réflexif.

Soit  $J : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . On suppose

- i)  $J$  coercive et  $J \neq +\infty$ , c'est-à-dire

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

- ii)  $J$  (s.c.i) pour la convergence faible. Alors il existe  $u \in C$ , tel que

$$J(u) = \inf_{v \in C} J(v) (< +\infty).$$

Si de plus  $J$  est Gâteaux-différentiable en  $u$ , alors  $d_G J(u) = 0$ .

### 2.1.2 Suite minimisante et infimum

**Définition 2.4. (Suite minimisante)** Une suite minimisante d'une fonctionnelle  $J : X \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est une suite  $(x_n)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in X} J(x)$$

**Théorème 2.3. [5]** Soit  $X$  un espace de Banach réflexif, et  $J$  une fonctionnelle définie sur  $X$ , telle que

1.  $J$  est (f.s.c.i),
2. la suite minimisante de  $J$  est bornée sur  $X$ ,

alors  $J$  atteint son infimum sur  $X$ .

## 2.2 Principe variationnel d'Ekeland

Soit  $X$  un espace métrique complet et  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement. Si  $(u_n)_n$  est une suite minimisante, alors pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe  $n_0$  tel que pour  $n > n_0$

$$J(u_n) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

On dit que  $u = u_\varepsilon$  est un  $\varepsilon$ - minimiseur de  $J$  si

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Le théorème d'Ekeland considère l'existence des points  $\varepsilon$ - minimiseur.

**Théorème 2.4. (Principe variationnel d'Ekeland, forme forte 1974)([8], [9])**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement, et non identiquement égale à  $+\infty$  ( $J \not\equiv +\infty$ ).

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $u = u_\varepsilon \in X$  qui donne tel que

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Alors, pour tout  $\lambda > 0$  il existe  $v = v_\varepsilon \in X$  tel que

- (a)  $J(v) \leq J(u)$ ,
- (b)  $d(u, v) \leq \lambda$ , et
- (c)  $J(v) < J(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda}d(w, v)$ , pour tout  $w \in X \setminus \{v\}$ .

Nous présentons un théorème et un corollaire dérivés de principe variationnel d'Ekeland.

**Théorème 2.5. (Principe variationnel d'Ekeland, forme faible 1979)[9]**

Soit  $(X, d)$  est un espace métrique complet et soit  $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonctionnelle qui est semi-continu inférieur, bornée inférieurement. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u_\varepsilon \in X$  qui satisfait

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon,$$

et chaque fois  $w \in X$  avec  $w \neq u_\varepsilon$ , alors

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon d(u_\varepsilon, w).$$

**Corollaire 2.1. ([10], [12])**

Soit  $X$  est un espace de Banach  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle (s.c.i.), bornée inférieurement et Gâteaux différentiable. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute  $u_\varepsilon \in X$  tel que

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon,$$

il existe un point  $v$  dans  $X$  satisfaisant

- (1)  $J(v) \leq J(u_\varepsilon)$ ,
- (2)  $\|v - u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ , et
- (3)  $\|J'(v)\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ .

**Remarque 2.1.** Les relations (1) et (3) signifie que nous avons obtenu un (presque minimiseur) de  $J$ , qui est aussi un ( presque point critique ).

## 2.3 Lemme du Col de la Montagne

### 2.3.1 Suite et condition de Palais-Smale

**Définition 2.5. [12]** Soit  $E$  un espace Banach et  $J : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle de classe  $C^1$ . On dit que  $J$  satisfait la condition de Palais-Smale, notée  $(P.S)$ , s'il y a une suite  $(u_n)$  dans  $E$  telle que

$$(J(u_n)) \text{ bornée, et } J'(u_n) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty \tag{2.1}$$

admet une sous-suite convergente.

Toute suite satisfaisante (2.1) est appelée suite de Palais-Smale.

**Définition 2.6. [12]** Soit  $E$  un espace de Banach et  $J$  une fonctionnelle de classe  $C^1$ , et  $c \in \mathbb{R}$ . On dit que la fonctionnelle  $J$  satisfait la condition (locale) de Palais-Smale au niveau  $c$ , notée  $(P.S)_c$ , s'il y a une suite  $(u_n)$  dans  $E$  telle que

$$J(u_n) \rightarrow c, \quad \text{et} \quad J'(u_n) \rightarrow 0, \text{ dans } E' \tag{2.2}$$

admet une sous-suite convergente.

**Exemple 2.1.** Dans  $\mathbb{R}$  la fonctionnelle  $J : x \mapsto x^2$ , satisfait la condition de Palais-Smale en 0 tandis que  $J : x \mapsto e^{-x}$ , ne la satisfait pas, car la suite définie par  $u_n = n$  vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} -ne^{-n} = 0$  mais  $(u_n)$  n'admet pas une sous-suite convergente.

**Remarque 2.2.** La condition  $(P.S)_c$  est une condition de compacité sur la fonctionnelle  $J$ , en ce sens que l'ensemble  $K_c$  de points critiques de  $J$  au niveau  $c$ ,

$$K_c = \{u \in E : J(u) = c \text{ et } J'(u) = 0\}$$

est compact.

**Démonstration -** De  $(P.S)_c$ , il s'ensuit que toute suite  $(u_n)$  dans  $K_c$  a une sous-suite convergente, et par la continuité de  $J$  et  $J'$  (rappel de la définition 2.6 que  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ ) tout point d'accumulation d'une telle suite se situe également dans  $K_c$ .

Donc  $K_c$  est compact. ■

- Exemples 2.1.**
1. L'identité fonctionnelle sur  $E$  satisfait  $(P.S)$ , où  $K = \phi$  est l'ensemble de tous les points critiques de  $J$  dans  $E$ ,
  2. La fonctionnelle  $J \equiv 0$  qui définie sur  $E = \mathbb{R}$  ne satisfait ni  $(P.S)_0$  ni  $(P.S)_c$ , et l'ensemble  $K$  est l'espace entier,
  3. La fonctionnelle  $J(u) = \sin(u)$  qui définie sur  $E = \mathbb{R}$  satisfait  $(P.S)_c$  pour tous  $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  et  $K$  est un ensemble infini et non borné.

**Définition 2.7.** Soit  $M \neq \phi$  un sous ensemble borné dans un espace de Hilbert et réflexif  $H$ . Alors, pour chaque suite  $(u_n)$  dans  $M$  telle que  $u_n \rightharpoonup u$  quand  $n \rightarrow \infty$ , nous avons toujours  $u \in M$ .

**Théorème 2.6.** [24] Soit la fonctionnelle  $J : M \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $M \neq \emptyset$ ,  $\min_{u \in M} J(u) = \alpha$  a une solution lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $E$  est un espace de Banach réel réflexif.
- (ii)  $M$  est borné et séquentiellement faiblement fermé.
- (iii)  $J$  est faiblement semi-continue inférieurement sur  $M$ .

### 2.3.2 Suite et condition de Cerami

**Définition 2.8.** [21] Soit  $E$  un espace Banach et  $J : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle de classe  $C^1$ . On dit que  $J$  satisfait la condition de Cerami, notée **(C)**, s'il y a une suite  $(u_n)$  dans  $E$  telle que

$$(C) : J(u_n) \text{ est bornée, } (1 + \|u_n\|)\|J'(u_n)\|_{E'} \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

admet une sous-suite convergente.

Toute suite satisfaisante (2.3) est appelée suite de Cerami.

**Remarque 2.3.** — Cette condition est plus faible que la condition Palais-Smale, mais peut être utilisée à sa place lors de la construction de déformation d'ensembles de sous-niveaux via des flux pseudogradients négatifs, et donc aussi dans les théorèmes minimax et plus précisément dans le lemme de Col de montagne.

— Les conditions  $(P.S)_c$  est implique (C).

**Théorème 2.7.** Soit  $J \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  est une fonctionnelle coercitive, c'est-à-dire,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty,$$

alors  $J$  satisfait  $(P.S)$ .

**Théorème 2.8. (Lemme du Col dans  $\mathbb{R}^n$ )** Supposons  $J \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  est une fonctionnelle coercitive et possède deux minima relatifs stricts distincts  $x_1$  et  $x_2$ . Alors  $J$  possède un troisième point critique  $x_3$  distinct de  $x_1$  et  $x_2$ , caractérisé par

$$J(x_3) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{x \in \gamma} J(x),$$

où

$$\Gamma = \{\gamma \subset \mathbb{R}^n, \quad \gamma \text{ compact et connecté(raccordé) } x_1, x_2 \in \gamma\}.$$

### 2.3.3 Lemme du Col en dimension infinie

**Théorème 2.9. Lemme du Col[5], [19],**

Soit  $E$  un espace de Banach réel et  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$  satisfait  $(P.S)_c$  la condition de Palais-Smale au niveau  $c$ , avec  $J(0) = 0$ . Supposons que

- (a) Il existe  $\rho > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que  $J(u) \geq \alpha$  pour tout  $u \in E$  avec  $\|u\| = \rho$ ;
- (b) Il existe  $e \in E$ ,  $\|e\|_E > \rho$  tel que  $J(e) < 0$ .

Alors  $J$  admet une valeur critique  $c \geq \alpha$ . De plus,  $c$  peut être caractérisée par

On définit

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0, 1], E) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}. \tag{2.4}$$

Alors

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\gamma(t)) \geq \alpha \tag{2.5}$$

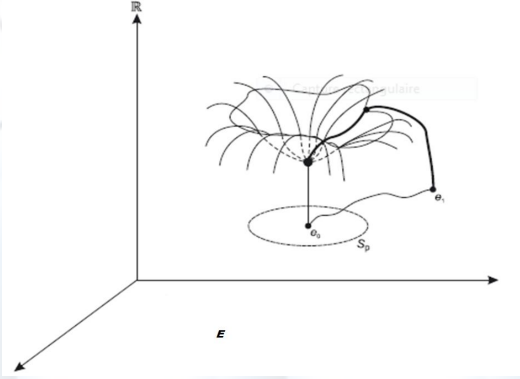
est une valeur critique de  $J(u)$ .

**Remarque 2.4.** Géométriquement, lorsque  $E = \mathbb{R}^2$  les hypothèses (a) et (b) signifient que l'origine se situe dans une vallée entourée d'une montagne

$$\Gamma_\gamma = \{(x, \gamma(x)) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}^2\}.$$

Il doit donc exister un Col de montagne joignant  $(0, 0)$  et  $(1, \gamma(1))$  qui contient une valeur critique (voir figure en-dessous).

FIGURE 2.1 – Col de la montagne entre "villages"  $e_0(0, 0)$  et  $e_1(1, e)$ , qui illustre les conditions géométriques (a) et (b) de Lemme 2.9.



**Remarque 2.5.** Notez que la condition (P.S) est essentielle dans le théorème 2.9 comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 2.2.** La fonctionnelle  $J(x, y) = x^2 + (x + 1)^3 y^2$  satisfait aux hypothèses (a) et (b) du Lemme 2.9 mais ne satisfait pas à la condition (P.S) et son point critique unique est  $(0, 0)$ .

**Démonstration -** Le point  $(0, 0)$  est un minimum local strict et l'unique point critique. Si la condition (P.S) est satisfaite, alors  $(P.S)_c$  avec  $c > 0$  défini par (2.11) est également satisfait.

Soit  $(x_n, y_n)$  une suite telles que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n^2 + (x_n + 1)^3 y_n^2) = c > 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (2x_n + 3(x_n + 1)^2 y_n^2) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(x_n + 1)^3 y_n = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$ . En passant à la limite de (2.6) on obtient

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}^2 + (\bar{x} + 1)^3 \bar{y}^2) = c > 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\bar{x} + 3(\bar{x} + 1)^2 \bar{y}^2) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(\bar{x} + 1)^3 \bar{y} = 0. \end{cases}$$

ce qui implique une contradiction. ■

Pour la preuve du Lemme 2.9, nous donnons un nouveau démonstration basée sur principe variationnel d'Ekeland.

**Démonstration** - Clairement,  $\Gamma \neq \emptyset$  puisque  $\gamma(t) = te$  est dans  $\Gamma$ . Alors nous supposons que la condition géométrique

$$c > \inf_{u \in S(o, \rho)} J(u) > \max\{J(0), J(e)\}, \quad (2.7)$$

est satisfait pour tout

$$u \in S(o, \rho) = \{u \in E : \|u - 0\| < \rho\}. \quad (2.8)$$

Notez que  $J$  peut être non bornée inférieurement mais nous exigeons seulement qu'il soit bornée inférieurement sur  $S(0; \rho)$  pour certains  $\rho > 0$ .

Si nous considérons  $\Gamma$  de (2.10) comme un espace normé pour la topologie uniforme engendrée par la norme

$$\|\gamma\|_{\Gamma} = \max_{t \in [0;1]} |\gamma(t)|, \quad \text{pour } \gamma \in \Gamma,$$

et définir

$$\phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{comme } \phi(\gamma) = \max_{t \in [0;1]} J(\gamma(t)).$$

Alors,  $\phi$  est semi-continue inférieurement comme une limite supérieure d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement. Il est également bornée inférieurement, depuis

$$c > \inf_{\Gamma} \phi(u) > \max\{J(0), J(e)\},$$

par conséquent, nous pouvons utiliser le principe variationnel d'Ekeland. c'est-à-dire que pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe un chemin  $\gamma_{\varepsilon} \in \Gamma$  tel que

$$\begin{cases} \phi(\gamma_{\varepsilon}) \leq c + \varepsilon, & \text{et,} \\ \phi(\gamma) \geq \phi(\gamma_{\varepsilon}) - \varepsilon \|\gamma - \gamma_{\varepsilon}\|_{\Gamma}, & \text{pour tout } \gamma \in \Gamma. \end{cases} \quad (2.9)$$

Soit

$$M(\varepsilon) := \{t \in [0; 1] : J(\gamma_{\varepsilon}(t)) = \max_{x \in [0;1]} J(\gamma_{\varepsilon}(x))\},$$

Alors, (2.9) implique qu'il existe un  $t_{\varepsilon} \in M(\varepsilon)$  tel que

$$\|J'(\gamma_{\varepsilon}(t_{\varepsilon}))\| \leq \varepsilon.$$

La condition  $(PS)_c$  avec la suite de Palais-Smale  $x_n = \gamma_{\frac{1}{n}}(t_{\frac{1}{n}})$  fait ensuite le travail pour terminer l'épreuve. ■

### 2.3.4 Autre version de lemme du Col

**Théorème 2.10.** Soit  $E$  un espace de Banach réel et  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$  satisfait (C) la condition de Cerami, avec  $J(0) = 0$ . Supposons que

- (a) Il existe  $\rho > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que  $J(u) \geq \alpha$  pour tout  $u \in E$  avec  $\|u\| = \rho$ ;
- (b) Il existe  $e \in E$ ,  $\|e\|_E > \rho$  tel que  $J(e) < 0$ .

Alors  $J$  admet une valeur critique  $c \geq \alpha$ . De plus,  $c$  peut être caractérisée par

On définit

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0, 1], E) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}. \quad (2.10)$$

Alors

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\gamma(t)) \geq \alpha \quad (2.11)$$

est une valeur critique de  $J(u)$ .

# THÉORIE DES POINTS CRITIQUES, ET APPLICATIONS SUR UN PROBLÈME AUX LIMITES DE SECOND ORDRE SINGULIER

Dans ce chapitre, nous discutons l'existence et la multiplicité des solutions positives pour une classe d'équations du second ordre. Pour obtenir nos résultats, nous utiliserons la méthode variationnelle et la théorie de point critique, et aussi le lemme du Col. Par exemple, nous choisissons l'article qui a été publié par les auteurs Ravi P. Agarwal, Kanishka Perera, et Donal O'rgan en 2005, (voir [25]).

## 3.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est d'obtenir au moins deux solutions positives au problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f(x, u), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Où nous supposons seulement que  $f \in C((0, 1) \times (0, \infty), [0, \infty))$  satisfait

$$2\varepsilon \leq f(x, u) \leq Cu^{-\gamma}, \quad (x, u) \in (0, 1) \times (0, \varepsilon). \quad (3.2)$$

Pour certains  $\varepsilon, C > 0$  et  $\gamma \in (0, 1)$ , de sorte qu'il puisse être singulier à  $u = 0$  ( bien sûr  $C$  que pourrait dépend de  $\varepsilon$ ).

**Exemple 3.1.** Un exemple modèle de non linéarité  $f$  est

$$f(x, u) = u^{-\gamma} + g(x, u) \leq Cu^{-\gamma} \quad (3.3)$$

Avec  $g \in C((0, 1) \times (0, \infty), [0, \infty))$ .

### 3.1.1 Fonction de Green et le problème approché

On définit  $f_\varepsilon \in C((0, 1) \times \mathbb{R}, [0, \infty))$  par,

$$f_\varepsilon(x, u) = f(x, (u - \varphi_\varepsilon(x))^+ + \varphi_\varepsilon(x)). \quad (3.4)$$

**Proposition 3.1.** La fonction de Green  $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon x(1 - x)$  est une solution de

$$\begin{cases} -u'' = 2\varepsilon, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

**Démonstration** - D'après (3.5), on a l'équation suivante

$$-u'' = 2\varepsilon, \quad x \in (0, 1)$$

Par intégration, on trouve,

$$\begin{aligned} \int u'' du &= - \int 2\varepsilon dx \\ u' &= -2\varepsilon x + C_1 \end{aligned}$$

On intègre une autre fois, donc,

$$\int u' du = \int (-2\varepsilon x + C_1) dx.$$

Alors, on obtient,

$$u(x) = -\varepsilon x^2 + C_1 x + C_2.$$

En appliquant les conditions aux bords, on a

$$\begin{cases} u(0) = C_2 = 0 \\ u(1) = -\varepsilon + C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \varepsilon \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Finalement,  $u(x) = -\varepsilon x^2 + \varepsilon x$ , d'où  $u(x) = \varepsilon x(1 - x)$ . ■

**Notation 3.1.** On pose :  $u^\pm = \max\{\pm u, 0\}$ . On considère le problème aux limites régulier et approximé suivant

$$\begin{cases} -u'' = f_\varepsilon(x, u), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Nous présentons maintenant l'espace de Hilbert  $H_0^1(0, 1)$  qui convient à l'étude de notre problème. Soit

$$H_0^1(0, 1) = \left\{ u \text{ mesurable} : u, u' \in L^2(0, 1), u(0) = u(1) = 0 \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\| = \left( \int_0^1 |u'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

et associé au produit scalaire

$$(u, v) = \int_0^1 u'(x) \cdot v'(x) dx.$$

**Lemme 3.1.** [20] Soit

$$K = \{ u \in C[0, 1] : u(x) \geq 0, x \in [0, 1] \text{ et } u(x) \text{ est concave sur } [0, 1] \}$$

Si  $u \in K, \exists x_0 \in [0, 1]$  tel que

$$u(x_0) = \|u\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |u(x)|,$$

et  $u(x) \geq \theta(x, x_0) \|u\|_\infty$ , pour tout  $x \in [0, 1]$ , telle que

$$\theta(x, s) = \begin{cases} \frac{x}{s} & \text{si } 0 \leq x \leq s, \\ \frac{s(1-x)}{(1-s)} & \text{si } s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

**Démonstration** - L'existence de  $x_0$  est immédiate. Maintenant si  $0 \leq x \leq x_0$ . Alors depuis  $u(x)$  est concave sur  $[0, 1]$ . On a

$$u(t) = u\left(\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)0 + \frac{x}{x_0}x_0\right) \geq \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)u(0) + \frac{x}{x_0}u(x_0).$$

C'est à dire,

$$u(x) \geq \frac{x}{x_0}u(x_0) = \theta(x, x_0) \|u\|_\infty \geq x(1-x) \|u\|_\infty.$$

Car,

$$\frac{x}{x_0} - x(1-x) = x\left(\frac{1-x_0+xx_0}{x_0}\right) \geq 0.$$

Un argument similaire établit le résultat si  $x_0 \leq x \leq 1$ . ■

**Lemme 3.2.** Par (3.2), on a

$$2\varepsilon \leq f(x, u) \leq C\varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma}, \quad (x, u) \in (0, 1) \times (-\infty, \varepsilon).$$

**Démonstration** - On observe que si  $u$  est une solution de (3.6), alors  $u \geq \varphi_\varepsilon(x)$  et donc aussi une solution de (3.1). Pour voir cela on suppose que

$$u(x) < \varphi_\varepsilon(x), \quad \text{pour certains } x. \quad (3.7)$$

Par lemme 3.1 de Agarwal et O'Regan, (voir [20])

$$u(x) \geq x(1-x) \|u\|_\infty, \quad x \in [0, 1], \quad (3.8)$$

Où  $\|u\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|$ , alors (3.7) implique  $\|u\|_\infty < \varepsilon$ . Mais alors  $-u'' \geq 2\varepsilon = -\varphi_\varepsilon''$  par lemme 3.2, alors  $u \geq \varphi_\varepsilon$ , contredisant (3.7). ■

**Remarque 3.1.** Inversement, toute solution de (3.1) est une solution de (3.6).

## 3.2 La fonctionnelle d'Euler-Lagrange

Nous définissons maintenant la fonction d'Euler-Lagrange associée au problème (3.1). Soit  $J : H_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_0^1 F_\varepsilon(x, u) dx.$$

Telle que  $F_\varepsilon(x, u) = \int_0^u f_\varepsilon(x, s) ds$ .

**Proposition 3.2.** *La fonctionnelle  $J$  est continuellement différentiable et la dérivée de Fréchet de  $J$  écrit sous la forme*

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_0^1 u'v' dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x, u)v dx.$$

pour toute  $v \in H_0^1(0, 1)$ .

**Démonstration** - En utilisant la même idée que dans les articles [28] et [30].

**Etape 1 :**  $J$  est Gâteaux-différentiable.

Pour toute  $v \in H_0^1(0, 1)$ , et pour tout  $0 < t < 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} J(u + tv) - J(u) &= \frac{1}{2} \int_0^1 |(u + tv)'|^2 dx - \int_0^1 F_\varepsilon(u + tv) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 |u'|^2 dx + \int_0^1 F_\varepsilon(u) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 |u'|^2 dx + \frac{1}{2} t^2 \int_0^1 |v'|^2 dx + t \int_0^1 u'v' dx - \int_0^1 F_\varepsilon(u + tv) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 |u'|^2 dx + \int_0^1 F_\varepsilon(u) dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_0^1 |v'|^2 dx + t \int_0^1 u'v' dx - \int_0^1 [F_\varepsilon(u + tv) - F_\varepsilon(u)] dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_0^1 |v'|^2 dx + t \int_0^1 u'v' dx - t \int_0^1 f_\varepsilon(u + t\theta v)v dx. \end{aligned}$$

Où  $0 < \theta < 1$ , et puis

$$\frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \frac{t}{2} \int_0^1 |v'|^2 dx + \int_0^1 u'v' dx - \int_0^1 f_\varepsilon(u + t\theta v)v dx.$$

Pour  $t \rightarrow 0$ , On trouve

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_0^1 u'v' dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x, u)v dx.$$

**Etape 2 :**  $J'$  est continue.

Soit  $(u_n) \subset H_0^1(0, 1)$  avec  $u_n \rightarrow u$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ , donc il existe  $R > 0$  tel que  $\|u_n\| \leq R$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\langle J'(u_n) - J'(u), v \rangle = \int_0^1 (u'_n - u')v' dx - \int_0^1 (f_\varepsilon(u_n) - f_\varepsilon(u))v dx. \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$$

D'après lemme 3.2, on a

$$f_\varepsilon(x, u) \leq C\varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma}$$

Et comme  $\varphi(x)^{-\gamma} \in L^1(0, 1)$ . Alors,

$$\int_0^1 f_\varepsilon(x, u) dx < +\infty.$$

à partir du théorème de convergence dominé de Lebesgue 1.4, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_\varepsilon(u_n)v dx &= \int_0^1 f_\varepsilon(u)v dx. \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u'_n v dx &= \int_0^1 u'v dx. \end{aligned}$$

Et d'après la continuité de  $f$ ; passant à la limite dans  $\langle J'(u_n) - J'(u), v \rangle$  quand  $n \rightarrow +\infty$  nous obtenons que  $J'(u_n) \rightarrow J'(u)$  dans  $H^{-1}(0, 1)$ . Donc  $J'$  est continue.

Finalement,  $J$  est Gâteaux-différentiable et continue. Alors  $J$  est continuellement différentiable. ■

**Définition 3.1.** On dit que  $u \in H_0^1(0, 1)$  est une solution faible du problème (3.1), si pour tout  $v \in H_0^1(0, 1)$ , on a

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_0^1 u'v' dx - \int_0^1 f_\varepsilon(u)v dx = 0.$$

**Lemme 3.3.** Par un argument standard, il suffit de montrer que  $(u_n)$  est bornée lors de la vérification de (C) (voir la condition de Cerami (2.3)). D'autre part on prend la suite  $(u_n)$  telle que,

$$\{u_n\} = \{u_n^+\} - \{u_n^-\}.$$

**Démonstration** - On montre que  $(u_n^-)$  est bornée. D'après la proposition 3.2, lemme 3.2 et puisque  $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|$ . Alors, on a,

$$\begin{aligned} \langle J'(u_n), u_n^- \rangle &= \int_0^1 u'_n (u_n^-)' dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x, u_n) u_n^- dx \\ &= \int_{u_n < 0} u'_n (u_n^-)' dx + \int_{u_n \geq 0} u'_n (u_n^-)' dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x, u_n) u_n^- dx \\ &= \int_{u_n < 0} u'_n (u_n^-)' dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x, u_n) u_n^- dx \\ &= - \int_0^1 (u_n^-)' (u_n^-)' dx - \int_0^1 f_\varepsilon(x, u_n) u_n^- dx. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|u_n^-\|^2 &= -\langle J'(u_n), u_n^- \rangle - \int_0^1 f_\varepsilon(x, u_n) u_n^- dx \\
&\leq \langle J'(u_n), u_n^- \rangle + \int_0^1 f_\varepsilon(x, u_n) u_n^- dx \\
&\leq \|J'(u_n)\| \|u_n^-\| + \|u_n^-\|_\infty \int_{u_n < 0} f_\varepsilon(x, u_n) dx \\
&\leq \|J'(u_n)\| \|u_n^-\| + C \|u_n^-\| \int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma} dx,
\end{aligned}$$

et puis, comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\|u_n^-\| \leq \|J'(u_n)\| (1 + \|u_n^-\|)$ , on a, donc,

$$\begin{aligned}
\|u_n^-\| &\leq \|J'(u_n)\| + C \int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma} dx \\
&\leq \|J'(u_n)\| (1 + \|u_n^-\|) + C \int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma} dx.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Par conséquent,

$$\|u_n^-\| \leq C \int_0^1 \varphi_\varepsilon(x)^{-\gamma} dx + o(1). \tag{3.10}$$

D'où la bornitude de  $(u_n^-)$ . Donc, nous n'aurons donc qu'à vérifier que  $(u_n^+)$  est bornée. Nous renvoyons le lecteur à Agarwal et O'egan [20] pour une large introduction aux problèmes singuliers et à Rabinowitz [22] pour les méthodes variationnelles. ■

### 3.3 Un principe d'existence

On suppose que

$(H_1)$  : Il ya une constante  $M > 0$ , indépendant de  $\lambda$ , tel que  $\|u\| \neq M$  pour chaque solution  $u > 0$  à

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(x, u), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Pour chaque  $\lambda \in (0, 1)$ .

Notons que  $(H_1)$  est vraie s'il existe une borne a priori de la norme des solutions du problème.

**Proposition 3.3.** Si (3.2) et  $(H_1)$  sont vérifiées, alors (3.1) a une solution positive.

**Démonstration** - Nous allons montrer que  $J$  atteint son infimum sur la boule

$$B = \{ u \in H : \|u\| \leq M \} \tag{3.12}$$

D'après le principe variationnel d'Ekeland, (voir théorème 2.4 dans chapitre II), à un moment donné  $u_0 \in B$ , qui est alors un minimiseur local, si  $\varepsilon$  est choisi assez petit.

Clairement,  $\inf J(B) > -\infty$ . Soit  $(u_n)$  une suite de minimisation. En passant à une sous-suite, et nous pouvons supposer que  $u_n \rightharpoonup u_0$  dans  $H_0^1(0, 1)$ . Alors, d'après le théorème 1.6 (voir chapitre I), on a

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_0, & \text{dans } H(0, 1), \\ u_n \rightarrow u_0, & \text{dans } L^2(0, 1), \\ u_n(x) \rightarrow u_0(x), & \text{p.p. dans } (0, 1). \end{cases}$$

Comme  $\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2$ , (voir exemple 1.2), on a

$$\begin{aligned} J(u_0) &= \frac{1}{2} \|u_0\|^2 - \int_0^1 F_\varepsilon(x, u_0(x)) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \liminf \|u_n\|^2 - \lim \int_0^1 F_\varepsilon(x, u_0(x)) dx \\ &= \lim J(u_n) = \inf_{u \in B} J(u). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Alors,  $J(u_0) = \inf J(B)$ .

On suppose que  $u_0 \in \partial B$ . Alors, c'est aussi un minimiseur de  $J|_{\partial B}$ , donc le gradient de  $J$  à le point  $u_0$  de la direction de la normale vers l'intérieur à  $\partial B$ , i.e.,

$$J'(u_0) = -v u_0 \quad (3.14)$$

Où

$$-u_0'' = \frac{1}{1+v} f_\varepsilon(x, u_0), \quad (3.15)$$

pour certains  $v \geq 0$ . Si  $u_0 \geq \phi_\varepsilon$ , (3.15) se réduit à (3.11) avec  $\lambda = \frac{1}{1+v} \in (0, 1)$ , alors comme l'introduction, il s'ensuit que  $u_0 < \varepsilon$ . Mais ensuite multiplier (3.15) par  $u_0$  et l'intégration par partie donne

$$M^2 = \frac{1}{1+v} \int_0^1 u_0(x) f_\varepsilon(x, u_0(x)) dx \leq C\varepsilon \int_0^1 \phi_\varepsilon(x)^{-\gamma} dx = C\varepsilon^{1-\gamma}. \quad (3.16)$$

Par lemme 3.2, où  $C$  est une constante positive générique, ce qui impossible si  $\varepsilon$  est suffisamment petit. ■

**Exemple 3.2.** On considère

$$\begin{cases} -u'' = \mu f(x, u), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Où  $\mu > 0$  est un paramètre et  $f \in C((0, 1) \times (0, \infty), [0, \infty))$  satisfait (3.2). Si  $u > 0$  est une solution de

$$\begin{cases} -u'' = \lambda \mu f(x, u), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

avec  $\|u\| = M$ ,

$$M^2 = \lambda \mu \int_0^1 u(x) f(x, u(x)) dx \leq \mu \sup_{(x,u) \in (0,1) \times (0,M]} u f(x, u), \quad (3.19)$$

Donc (3.17) a une solution positive pour

$$\mu < \sup_{M>0} \frac{M^2}{\sup_{(x,u) \in (0,1) \times (0,M]} u f(x, u)}. \quad (3.20)$$

De la même manière,

$$\begin{cases} -u'' = u^{-\gamma} + \mu g(x, u), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Où  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\mu > 0$  est un paramètre, et  $g \in C((0, 1) \times [0, \infty), [0, \infty))$  a une solution positive pour

$$\mu < \sup_{M>0} \frac{M^{1-\gamma}(M^{1+\gamma} - 1)}{\sup_{(x,u) \in (0,1) \times (0,M]} u g(x, u)}. \quad (3.22)$$

### 3.4 Cas Asymptotiquement linéaire

On suppose que

$$f(x, u) \leq Cu, \quad (x, u) \in (0, 1) \times [\varepsilon, \infty), \quad (3.23)$$

Pour certains  $C > 0$ . Nous disons que (3.1) et résonnant si

$$\frac{f(x, u)}{u} \rightarrow \lambda_1 \quad \text{quand } u \rightarrow \infty \quad (3.24)$$

Où  $\lambda_1 = \pi^2$  est une première valeur propre de

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

On note par

$$H(x, u) = F_\varepsilon(x, u) - \frac{1}{2} u f_\varepsilon(x, u) \quad (3.26)$$

La partie non quadratique de  $F_\varepsilon$ .

**Théorème 3.1.** Si (3.2) et (3.23) sont vérifiées. Alors (3.1) a une solution positive dans les cas suivants :

(i) Non-résonance ci-dessous  $\lambda_1$  :

$$f(x, u) \leq au + C, \quad (x, u) \in (0, 1) \times [\varepsilon, \infty), \quad (3.27)$$

Pour certains  $0 < a < 1 < \lambda_1$  and  $C > 0$ ,

(ii) Résonance : (3.24) est satisfaite et,

$$H(x, u) \leq C, \quad (x, u) \in (0, 1) \times [\varepsilon, \infty), \quad (3.28)$$

Pour certains  $C > 0$ , et

$$H(x, u) \rightarrow -\infty \quad \text{comme } u \rightarrow \infty \quad (3.29)$$

**Démonstration - (i) Cas non-résonance :**

Par (3.27) et lemme 3.2,

$$F_\varepsilon(x, u) \leq \begin{cases} 0, & u < \varepsilon, \\ \frac{a}{2}u^2 + Cu, & u \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (3.30)$$

Et puisque  $a < \lambda_1$ , il découle de l'inégalité de Wirtinger (1.3) que  $J$  est borné inférieurement et coercive, et admet un minimum global, c'est-à-dire :

1.  $J$  est coercive car

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_0^1 F_\varepsilon(x, u) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_0^1 \frac{a}{2} u^2 + Cu dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{a}{2} \int_0^1 u^2 dx - C \int_0^1 u dx \\ &= \frac{1}{2} (1 - a) \|u\|^2 - C \|u\| \end{aligned}$$

Comme  $0 < a < 1 < \lambda_1$ . Alors,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

2.  $J$  est faiblement semi-continue inférieurement (*f.s.c.i*).

Comme  $J$  est coercive, alors elle est bornée inférieurement. Puis par un preuve similaire à celle dans la proposition 3.3, on trouve  $J$  est (*f.s.c.i*). Alors, d'après le théorème 2.1,  $J$  est atteint son infimum sur  $H_0^1(0, 1)$ .

**(ii) Cas résonance :**

For  $u \geq \varepsilon$ , on a

$$F_\varepsilon(x, u) = \int_\varepsilon^u f_\varepsilon(x, s) ds.$$

On divise cette equation par  $u^2$  ( $u \neq 0$ ). Donc,

$$\frac{F_\varepsilon(x, u)}{u^2} = \int_\varepsilon^u \frac{f_\varepsilon(x, s)}{u^2} ds$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{F_\varepsilon(x, u)}{u^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \int_\varepsilon^u \frac{f_\varepsilon(x, s)}{u^2} ds \right) \\
&= \frac{f(x, u)u^2 - 2uF(x, u)}{u^4} \\
&= \frac{f(x, u)u - 2F(x, u)}{u^3} \\
&= \frac{-2 \left( \frac{1}{2}uf(x, u) + F(x, u) \right)}{u^3} \\
&= \frac{-2H(x, u)}{u^3}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Et on a,

$$\frac{F_\varepsilon(x, u)}{u^2} \rightarrow \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{quand } u \rightarrow \infty \tag{3.32}$$

Car, d'après (3.28). On a

$$H(x, u) = F_\varepsilon(x, u) - \frac{1}{2}uf_\varepsilon(x, u) \leq C$$

Donc, d'après (3.24), quand  $u \rightarrow +\infty$ , on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{F_\varepsilon(x, u)}{u^2} &\leq \frac{1}{2u}f_\varepsilon(x, u) + \frac{C}{u^2} \\
&\leq \frac{f_\varepsilon(x, u)}{2u} + \frac{C}{u^2} \\
&\leq \frac{\lambda_1}{2}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Avec,

$$\lambda_1 = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f_\varepsilon(x, u)}{u}.$$

Par (3.24), on a, donc

$$F_\varepsilon(x, u) = \left( \frac{\lambda_1}{2} + 2 \int_u^\infty \frac{H(x, s)}{s^3} dx \right) u^2 \leq \frac{\lambda_1}{2}u^2 + C. \tag{3.34}$$

Par (3.31), (3.33), et l'inégalité de wirtinger (1.3) implique que  $J$  est bornée inférieurement.

Pour vérifier la condition (C) (2.3), soit  $(u_n)$  satisfait (3.7) et on suppose que  $\rho_n = \|u_n\| \rightarrow \infty$ .

Depuis  $(u_n^-)$  est bornée, par le théorème 1.6, et pour une sous-suite  $\tilde{u}_n = \frac{u_n}{\rho_n}$ , nous avons

$$\begin{cases} \tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}, & \text{dans } H(0, 1), \\ \tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}, & \text{dans } L^2(0, 1), \\ \tilde{u}_n(x) \rightarrow \tilde{u}(x), & \text{p.p. dans } (0, 1). \end{cases}$$

Par conséquent, d'après la proposition 3.2, On a

$$\langle J'(u_n), \tilde{u}_n - \tilde{u} \rangle = \int_0^1 \tilde{u}_n'(\tilde{u}_n' - \tilde{u}') dx - \int_0^1 f(x, u_n)(\tilde{u}_n - \tilde{u}) dx.$$

On divise cette equation par  $\rho_n$ , on trouve

$$\frac{\langle J'(u_n), \tilde{u}_n - \tilde{u} \rangle}{\rho_n} = \int_0^1 \frac{\tilde{u}_n'}{\rho_n} (\tilde{u}_n' - \tilde{u}') dx - \int_0^1 \frac{f(x, u_n)}{\rho_n} (\tilde{u}_n - \tilde{u}) dx.$$

Alors

$$\int_0^1 \frac{\tilde{u}_n'}{\rho_n} (\tilde{u}_n' - \tilde{u}') dx = \int_0^1 \frac{f(x, u_n)}{\rho_n} (\tilde{u}_n - \tilde{u}) dx + \frac{\langle J'(u_n), \tilde{u}_n - \tilde{u} \rangle}{\rho_n}. \quad (3.35)$$

On suppose que

$$g_n(x) = \frac{f(x, u_n(x))}{\rho_n} (\tilde{u}_n(x) - \tilde{u}(x)).$$

D'après lemme 3.2 et (3.23),

$$|g_n(x)| \leq C(\phi_\varepsilon(x)^{-\gamma} + 1) |\tilde{u}_n(x) - \tilde{u}(x)| \quad (3.36)$$

Et donc  $g_n \rightarrow 0$  et  $|g_n|(\phi_\varepsilon(x)^{-\gamma} + 1) \in L^2(0,1)$ , alors par passage à la limite de (3.36) donne  $\|\tilde{u}\| = 1$ , en particulier,  $\tilde{u} \neq 0$ . D'après (3.28) et lemme 3.2, on a

$$H(x, u) \leq \begin{cases} C\phi_\varepsilon(x)^{-\gamma} |u|, & u < 0, \\ 0, & 0 \leq u < \varepsilon, \\ C, & u \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (3.37)$$

et  $\|u_n^-\|$  est bornée, donc

$$\int_{\tilde{u}>0} H(x, u_n(x)) dx \rightarrow -\infty \quad (3.38)$$

Par (3.29) et  $\int_{\tilde{u}=0} H(x, u_n(x)) dx$  est bornée supérieurement. D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle J'(u_n), u_n \rangle - J(u_n) &= \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 f_\varepsilon(x, u_n(x)) u_n dx - \frac{1}{2} \|u_n\|^2 + \int_0^1 F_\varepsilon(x, u_n(x)) dx \\ &= \int_0^1 F_\varepsilon(x, u_n(x)) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f_\varepsilon(x, u_n(x)) u_n dx \\ &= \int_0^1 H(x, u_n(x)) dx \\ &= \int_{\tilde{u}>0} H(x, u_n(x)) dx + \int_{\tilde{u}=0} H(x, u_n(x)) dx \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

D'après la condition de Cerami, il existe  $\bar{C} > 0$  telle que  $\|J(u_n)\| \leq \bar{C}$ , alors, pour  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\begin{aligned} -\bar{C} &\leq -\|J'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) - \|J(u_n)\| \leq \frac{1}{2} \langle J'(u_n), u_n \rangle - J(u_n) \\ &= \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 f_\varepsilon(x, u_n(x)) u_n dx - \frac{1}{2} \|u_n\|^2 + \int_0^1 F_\varepsilon(x, u_n(x)) dx \\ &= \int_{\tilde{u}>0} H(x, u_n(x)) dx + \int_{\tilde{u}=0} H(x, u_n(x)) dx \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (3.39)$$

Contrairement à l'hypothèse. D'où la bornitude de la suite  $(u_n)$ . ■

**Théorème 3.2.** Si (3.2), (3.23) et  $f$  sont satisfaites. Alors (3.1) a deux solutions positives dans les cas suivants :

(i) Résonance : (3.24) est satisfaite, et

$$H(x, u) \geq -C, \quad (x, u) \in (0, 1) \times [\varepsilon, \infty), \quad (3.40)$$

Pour certains  $C > 0$ , et

$$H(x, u) \rightarrow +\infty \quad \text{quand } u \rightarrow \infty, \quad (3.41)$$

(ii) Non résonance ci-dessus  $\lambda_1$  :

$$f(x, u) \geq bu - C, \quad (x, u) \in (0, 1) \times [\varepsilon, \infty), \quad (3.42)$$

Pour certains  $b > \lambda_1$  et  $C > 0$ .

**Démonstration** - Par la preuve de la proposition 3.3, (par principe variationnel d'Eklend),  $J$  a un minimiseur  $u_0 \in B$  et  $\inf J(\partial B) \geq J(u_0)$ , (voir [29]). Nous allons montrer que  $J(R\phi_1) \geq \inf J(\partial B)$  si  $R > M$  est suffisamment grand, où  $\phi_1 > 0$  est la fonction propre normalisée associée à  $\lambda_1$ , et nous vérifierons (C), (2.3). Ensuite le lemme du Col de montagne donnera un deuxième point critique au niveau  $c$  tel que,

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} J(u), \quad (3.43)$$

où

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H) : \gamma(0) = u_0, \gamma(1) = R\phi_1\}, \quad (3.44)$$

est la classe des chemins joignant  $u_0$  et  $R\phi_1$ .

**(i) Cas résonance :**

Par (3.37), (3.41), et (3.42), nous avons,

$$\frac{\lambda_1}{2} u^2 - F_\varepsilon(x, u) = -2u^2 \int_u^\infty \frac{H(x, s)}{s^3} ds \leq C, \quad u \geq \varepsilon \quad (3.45)$$

Et  $H(x, u) \rightarrow -\infty$  quand  $u \rightarrow +\infty$ ,

et par lemme 3.2,

$$\frac{\lambda_1}{2} u^2 - F_\varepsilon(x, u) \leq C(\phi_\varepsilon(x)^{-\gamma} + 1), \quad 0 \leq u < \varepsilon, \quad (3.46)$$

Donc

$$J(R\phi_1) = \int_0^1 \left( \frac{\lambda_1}{2} R^2 \phi_1(x)^2 - F_\varepsilon(x, R\phi_1(x)) \right) dx \rightarrow -\infty \quad \text{quand } R \rightarrow +\infty. \quad (3.47)$$

la vérification de (C) est similaire à celle de la preuve du théorème 3.1.

(ii) Cas non-résonance :

Par (3.43) et lemme 3.2, on a

$$F_\varepsilon(x, u) \geq \begin{cases} -C\phi_\varepsilon(x)^{-\gamma}, & 0 \leq u < 0, \\ \frac{b}{2}u^2 - Cu, & u \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (3.48)$$

Puisque  $b > \lambda_1$ , il s'ensuit  $J(R\phi_1) \rightarrow -\infty$  quand  $R \rightarrow \infty$ .

Si (3.7) est satisfaite et  $\rho_n = \|u_n\| \rightarrow \infty$ , par passage à une sous suite  $\tilde{u}_n = \frac{u_n}{\rho_n}$  convergente à non trivial  $\tilde{u} \geq 0$  faiblement dans  $H(0, 1)$ , fortement dans  $L^2(0, 1)$ , et p.p. dans  $(0, 1)$  comme dans la preuve du théorème 3.1. Alors

$$\begin{aligned} (b - \lambda_1) \int_0^1 \tilde{u}_n(x) \phi_1(x) dx &= \frac{1}{\rho_n} \int_0^1 (bu_n(x) \phi_1(x) - u_n'(x) \phi_1'(x)) dx \\ &= \frac{1}{\rho_n} \left( \int_0^1 (bu_n(x) - f_\varepsilon(x, u_n(x))) \phi_1(x) dx - \langle J'(u_n), \phi_1 \rangle \right) \\ &\leq \frac{1}{\rho_n} \left( \int_{u_n \geq \varepsilon} C \phi_1(x) dx + \int_{u_n < \varepsilon} bu_n(x) \phi_1(x) dx + \|J'(u_n)\| \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Par (3.43), et  $\|u_n^-\|$  est bornée, alors

$$(b - \lambda_1) \int_0^1 \tilde{u}(x) \phi_1(x) dx \leq 0, \quad (3.50)$$

Ce qui est impossible. ■

**Exemple 3.3.** Le problème

$$\begin{cases} -u'' = u^{-\gamma} + \mu e^u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Où  $\gamma \in (0, 1)$ , admet deux solutions positives pour

$$0 < \mu < \sup_{M>0} \frac{M^{1+\gamma} - 1}{M^\gamma e^M} \quad (3.52)$$

Pour plus détail (voir (3.22)).

---

## Conclusion

---

Dans ce travail, on a étudié quelques théories des points critiques, ainsi le principe variationnel d'Ekeland et on a étudié un problème aux limites d'ordre deux singulier posés sur l'intervalle borné  $(0, 1)$  par des méthodes variationnelles, théorème de minimisation et le lemme du Col ainsi que le principe variationnel d'Ekeland.

Dans le premier chapitre, on a donné quelques outils de base, qui sont nécessaires pour ce travail, comme la théorie des points critiques, la différentiabilité d'un opérateur dans l'espace de Banach et un lemme de compacité (Ascoli-Arzelà).

Dans le deuxième chapitre, notre objectif était de montrer le théorème de Col (le lemme du Col), et aussi nous avons donné quelques théorèmes de minimisation et le principe variationnel d'Ekeland. On a introduit également des conditions de compacité connues sous le nom Palais-Smale et de Cerami respectivement.

En fin, on a étudié l'existence et la multiplicité de solutions pour les problèmes aux limites singulier suivant,

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Où  $f \in C((0, 1) \times (0, \infty), [0, \infty))$ .

Notre approche est variationnelle, nous avons utilisé les théorèmes de minimisation et le lemme du Col. Les solutions sont obtenues comme des minimums ou des points critiques d'une certaine fonctionnelle.

---

# Bibliographie

---

- [1] V. TRENOGUINE. *Analyse fonctionnelle*. Traduction française, Edition, Mir. Moscou (1985).
- [2] S. FORMINE ET A. KOLMOGOROV. *Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Traduction française, Edition Mir. Moscou (1977).
- [3] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris (1983).
- [4] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI AND D. O'REGAN. *Existence of solutions for a second order problem on the half-line via Ekeland's variational principle*, Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. **36** (2016) 131-140.
- [5] P. H. RABINOWITZ. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. CBMS regional conferece series in mathematics, vol. 65, American mathematical society, providence, RI (1986).
- [6] DAHMANE BOUAFIA, TOUFIK MOUSSAOUI, AND DONAL O'REGAN. *Multiplicity of positive solutions for second order quasilinear equations*. Mathematica Bohemica. (2019), p20.
- [7] M. BADIALE, E. SERRA. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners Existence Results via the Variational Approach*. Springer-Verlag London Limited (2011).
- [8] M. D. R. GROSSINHO AND S. A. TERSIAN. *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations*. Springer Science. (2001).
- [9] I. EKELAND. *On the variational principle*. J. Math. Anal. Appl. **47**(1974), 324-353 .
- [10] J. M. BORWEIN AND Q. J. ZHU. *Techniques of Variational Analysis*. Springer. (2005).
- [11] J. BAPTISTE AND H. URRUTY. *Bases, Outils et Principes pour L'Analyse Variationnelle*. Springer. (1966).
- [12] Y. JABRI. *The Mountan Pass Theorem Variants, Generalizations and Some Applications*. Cambridge University Press, New York. (2003).
- [13] D. CAROLINE. *Théorèmes de Point Fixe et Principe Variationnel D'Ekeland*. Mémoire. Université de Montréal (2010).
- [14] H. K. PATHAK. *An Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory*. Springer (2018).

- [15] P. V. SUBRAHMANYAM. *Elementary Fixed Point Theorems*. Springer (2018).
- [16] N.S. PAPAGEORGIOU, S.K. YIALLOUROU. *Handbook of Applied Analysis*. Springer, New-York. (2009).
- [17] D. O'REGAN, B. YAN AND R. P. AGARWAL. *Nonlinear boundary value problems on semi-infinite intervals using weighted spaces : An upper and lower solution approach*. Positivity. **11** (2007) 171-189.
- [18] C. O. ALVES. *Multiple positive solutions for equations involving critical Sobolev exponent in  $\mathbb{R}^N$* . Electron. J. Differential Equations. **13** (1997) 1-10.
- [19] M. WILLEM. *Minimax Theorems*. Birkhauser, (1986).
- [20] RAVI P. AGARWAL AND DONAL O'REGAN.. *Singular differential and integral equations with application*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2003).
- [21] GIOVANNA CERAMI. *An existence criterion for the critical points on unbounded manifolds*. Istit. Lombardo Accad. Sci.Lett.Rend, (1979) 332-336.
- [22] PAUL H. RABINOWITZ. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, (1986).
- [23] PIERRE LE BARBENCHON. *Introduction aux équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*.
- [24] ZEIDLER. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Vol III, Springer-Verlag, Berlin, (1985).
- [25] RAVI P. AGARWAL, KANISHKA PERERA AND DONAL O'REGAN. *Multiple positive solutions of singular problems by variational methods*. PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. V 134, 3 (2005), 817-824.
- [26] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris (1983).
- [27] O. KAVIAN. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. World Scientific. 2006.
- [28] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI AND D. O'REGAN, *Existence of solutions for a second order problem on the half-line via Ekeland's variational principle*, Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. **36**(2016), 131-140.
- [29] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI AND D. O'REGAN, *Multiplicity of positive solutions for second order quasilinear equation*, MATHEMATICA BOHEMICA, (2019), 20 pp.

- [30] D. BOUAFIA, JOHN R. GRAEF AND T. MOUSSAOUI, *Existence of solutions for a perturbed second order problem on the half-line via Ekeland's variational principle*, Communications in Applied Analysis, **22**, No. 3 (2018), 383-399.



## Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème aux limites de second ordre singulier, sur un intervalle borné  $(0, 1)$ , et ainsi que la théorie de point critiques, le principe variationnel d'Ekeland et lemme du Col. Notre objectif dans cette étude était d'appliquer le théorie de point critiques et lemme du Col pour étudier l'existence et multiplicité des solutions pour un problème aux limites de second ordre singulier suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f(x, u), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Lorsque nous avons utilisé la méthode variationnelle et lemme du Col, Il s'avère que la solution du problème consiste à définir les points minimum ou critiques d'une fonctionnel d'énergie.

**Mots clés :** méthode variationnelle, point critique, principe variationnel d'Ekeland, théorème du Col de la montagne, théorème de minimisation, théorème de coercivité, la condition de Cerami, solution positive.

## ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة مسألة حدية من الدرجة الثانية بنقطة شاذة على مجال محدود  $(0, 1)$  و كذلك نظرية النقطة الحرجة، مبدأ التغيرات لإكلاند و نظرية تمر الجبل. و لقد كان هدفنا من هذه الدراسة تطبيق نظرية النقطة الحرجة و نظرية تمر الجبل لدراسة وجود و تعدد الحلول لمشكلة الحدود من الدرجة الثانية بنقطة شاذة التالية.

$$\begin{cases} -u'' = f(x, u), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

حيث استخدمنا طريقة التغيرات و نظرية تمر الجبل، فأتضح أن حلول المسألة هو الحد الأدنى لدالة الطاقة.

كلمات مفتاحية : طريقة التغيرات، نظرية النقطة الحرجة، توطئة المتمر الجبلي، نظرية الشرط الأقصى، مبدأ التغيرات لإكلاند، شرط سيرامي، الحل الموجب.

## Abstract

In this memory, we have studied a singular second-order boundary problem, on a bounded interval  $(0, 1)$ , and as well as the critical point theory, the variational principle of Ekeland and Col lemma (Mountain pass lemma). Our objective in this study was to apply the critical point theory and mountain pass lemma to study the existence and multiplicity of solutions for the following singular second-order boundary value problem :

$$\begin{cases} -u'' = f(x, u), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

When we used the variational method, it turns out that the problem's solution consists of defining the minimum or critical points of an energy function.

**Keywords :** variational method, critical point, Ekeland variational principle, mountain pass theorem, minimization theorem, coercivity theorem, Cerami condition, positive solution.