



REPUBLIQUE ALGERIENNE DE MOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et Informatique  
Département des Mathématiques



## Mémoire de Master

**Domaine:** Mathématiques et Informatique

**Filière:** Mathématiques

**Option:** Analyse mathématique et numérique

### Thème

*Etude et simulation numérique d'un écoulement potentiel en absence de gravité*

Présentée par:

DJAFER Abir

Devant le jury composé de:

A.KHIRANI	M.C.A,	Université de M'sila	Président
N.BOUNAB	M.C.B,	Université de M'sila	Encadreur
T.BLIZAK	M.A.A,	Université de M'sila	Examineur

Année universitaire 2022/2023 .

## *Dédicace*

Je dédie ce travail

A mes chers parents qui m'ont toujours assuré leur Soutien et de leur tendre affection.

A mes chères sœurs "**Ghania, Rania**".

A mes chers frères "**Hamza , Zaki ,Rida**".

A ma belle soeur "**Fatima**" et leurs enfants "**Soundous , Bachir**".

A toute ma famille .

A mes amis "**Wafa , Yousra , Soltana, Saadia**."

A ma fiancé **Bdaira** et ma deuxième famille .

A mes amis dans un spécialité .

À tous ceux qui m'ont aidé à faire ce travail de professeurs et d'étudiants à l'intérieur et à l'extérieur de la faculté

***ABIR***

## *Remerciements*

Je remercie Dieu, le Tout Puissant, pour son aide et sa protection, et de nous avoir donné le courage d'aller jusqu'au bout de ce travail.

Ce mémoire est le résultat d'un effort. Cet effort n'aurait pu aboutir sans la contribution d'un nombre de personnes. Ainsi se présente l'occasion de les remercier :

Tout d'abord

Nos vifs remerciements vont à mes très chers parents et mes se pour leurs efforts fournis et leurs conseils pendant toute ces années d'études.

Je exprimons ma reconnaissance à mon encadreur,  $M^d$ **BOUNAB Noura** pour sa disponibilité, ses critiques, ses conseils judicieux et constructifs qu'il nous a donné tout au long de ce travail.

Sans oublier le jury  $M^d$ **A.KHIRANI** et  $M^r$  **T.BLIZAK** qui ont accepté d'évaluer notre travail.

Je remercie aussi le professeur **S.ABDELKEBIR** de m'avoir aidé à réparer le programme.

Je remercie aussi tous les étudiants et tous les professeurs de département de mathématiques.

Je tenons à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

*MERCI*

# Table des matières

<b>1</b>	<b><i>Définitions et préliminaires</i></b>	<b>1</b>
1.1	<i>Définition des fluides[14]</i> . . . . .	1
1.2	<i>Les écoulements des fluides[13]</i> . . . . .	2
1.2.1	<i>Écoulement stationnaire :</i> . . . . .	2
1.2.2	<i>Écoulement irrotationnel :</i> . . . . .	2
1.2.3	<i>Écoulement uniforme :</i> . . . . .	2
1.2.4	<i>Écoulement incompressible :</i> . . . . .	2
1.2.5	<i>Écoulement potentiel :</i> . . . . .	3
1.3	<i>Débit[7]</i> . . . . .	3
1.3.1	<i>Débit massique :</i> . . . . .	3
1.3.2	<i>Débit volumique :</i> . . . . .	3
1.4	<i>Description d'un fluide en mouvement[7]</i> . . . . .	3
1.4.1	<i>Description de Lagrange</i> . . . . .	3
1.4.2	<i>Description d'Euler</i> . . . . .	4
1.5	<i>Utilisation de la théorie de la variable complexe[13]</i> . . . . .	4
1.6	<i>Quelque équations de la mécanique des fluides[13]</i> . . . . .	5
1.6.1	<i>Conservation de l'énergie du fluide :</i> . . . . .	5
1.6.2	<i>Ligne et fonction de courant :</i> . . . . .	6
1.6.3	<i>Équations différentielles des fonctions <math>\phi</math> et <math>\psi</math> :</i> . . . . .	7
1.6.4	<i>Théorème de Bernoulli :</i> . . . . .	7
1.6.5	<i>Équation de continuité :</i> . . . . .	8
1.6.6	<i>Équation du mouvement des fluides</i> . . . . .	9
1.6.7	<i>Les équations de Stokes :</i> . . . . .	9
<b>2</b>	<b><i>Solution exacte</i></b>	<b>10</b>
2.1	<i>Quelques transformations classiques[6]</i> . . . . .	10
2.2	<i>Transformation de Schwartz-Christoffel[6]</i> . . . . .	11
2.3	<i>Position du problème</i> . . . . .	13
2.4	<i>Les étapes de la solution</i> . . . . .	14
<b>3</b>	<b><i>Simulation</i></b>	<b>18</b>
3.1	<i>Présentation de code (Gambit , Fluent)[18]</i> . . . . .	18
3.1.1	<i>Le role de logiciel Gambit</i> . . . . .	18
3.1.2	<i>Capacité de Fluent</i> . . . . .	19
3.2	<i>L'utilisation des logiciels (Gambit,Fluent)[10]</i> . . . . .	20
3.2.1	<i>GAMBIT</i> . . . . .	20
3.2.2	<i>FLUENT</i> . . . . .	22
3.3	<i>La simulation du problème dans le cas (<math>g=0</math> ,<math>T=0</math>)</i> . . . . .	24
3.3.1	<i>Le maillage</i> . . . . .	24
3.3.2	<i>La fonction de courant</i> . . . . .	24

3.3.3	<i>Préssion statique</i>	25
3.3.4	<i>Préssion dynamique</i>	25
3.4	<i>Discussion des résultats</i>	27
3.4.1	<i>La fonction de courant</i>	27
3.4.2	<i>La Préssion Statique</i>	27
3.4.3	<i>La préssion dynamique</i>	27
	<i>Conclusion générale</i>	28

# Table des figures

1.1	<i>Représentation l'état des fluides.</i>	1
1.2	<i>Position du champ de vitesse.</i>	2
2.1	<i>Le plan de variable <math>\Omega</math></i>	12
2.2	<i>le plan de variable <math>\lambda</math></i>	12
2.3	<i>Schéma d'un écoulement bidimensionnel</i>	13
2.4	<i>Plan <math>\Omega</math></i>	14
2.5	<i>Plan <math>\lambda</math></i>	15
2.6	<i>Plan <math>f</math></i>	16
2.7	<i>La forme de la surface libre</i>	17
3.1	<i>Schéma d'une simulation complètement en utilisant logiciel Gambit et Fluent.</i>	18
3.2	<i>Fenêtre principale.</i>	20
3.3	<i>Menu principale de Gambit.</i>	21
3.4	<i>Maillage sur Logiciel Gambit.</i>	21
3.5	<i>Ouvrir le fichier (msh).</i>	22
3.6	<i>Définir le modèle mathématique, le type d'écoulement et le fluide.</i>	22
3.7	<i>Fenêtre des conditions aux limites.</i>	23
3.8	<i>Initialisation des variables.</i>	23
3.9	<i>Maillage de domaine d'écoulement.</i>	24
3.10	<i>Contour de la fonction de courant.</i>	24
3.11	<i>Contour de la pression statique.</i>	25
3.12	<i>Contour de la pression dynamique.</i>	25
3.13	<i>Pression statique.</i>	26
3.14	<i>Pression dynamique.</i>	26

## *Notation*

$\rho$	La masse volumique.
$\vec{u}$	Le vecteur vitesse.
$\vec{a}$	L'accélération.
m	La masse.
P	La pression.
S	La surface.
V	La volume.
C	Une courbe.
n	La normale.
f	La force.
(x,y)	Le plan.
i	Le nombre complexe.
z	La variable complexe.
$\phi$	Fonction potentiel.
$\psi$	Fonction de courant.
$D_m$	Débit massique.
$D_v$	Débit volumique
$M_0(x_0, y_0, z_0)$	Position initiale
g	La gravité.
T	La tension de surface.
H	Hauteur d'eau.

## *Introduction*

La mécanique des Fluides Numérique (MFN) ou Computational Fluid Dynamic (CFD) est une branche associée à la mécanique des fluides qui consiste à simuler le comportement d'écoulement réels en résolvant les équations de la mécanique des fluides à savoir : les équations de Navier-Stokes. Bien qu'elles soient connues depuis près de 200 ans .La mécanique des fluides est un domaine plus vaste , nécessaire pour la nouvelle technologie, qui basée essentiellement sur deux grands axes,(statistique et dynamique) tel que :

La statistique des fluides ou hydrostatique étudie les fluides sans application , des efforts extérieurs, tel que l'analyse de (débit, la masse volumique,...).

La dynamique des fluides qui consiste à la détermination des équations d'Euler et ainsi les équations de Bernoulli et Navier-Stokes[14].

L'étude des écoulements autour des objets est un problème classique de mécanique des fluides qui peut être très utile dans la pratique comme dans la conception mécanique et thermique de nombreux systèmes en engineering, à savoir l'aéronautique,l'automobile, le bâtiment... etc.

En 1868, Kirchhoff a développé la théorie des lignes de courant libre basé sur l'introduction de la variable complexe

$$\Omega = \log(dz/df)$$

qui permet de transformer le domaine de l'écoulement du plan complexe  $Z$  en un domaine polygonale sur le plan  $\Omega$  ensuite par la transformation de Schwartz-Christoffel on transforme conformément les deux domaines en un domaine auxiliaire  $\lambda$  pour obtenir un système des équations non-linéaires de  $f(\lambda)$  et  $\Omega(\lambda)$ , finalement on aboutit à une relation entre  $f$  et  $\Omega$  . Les problèmes où les forces de la gravité et les effets de la tension de la surface libre sont considérés deviennent difficiles analytiquement[7].

De la mécanique des fluides , les problèmes des écoulements à surface libre d'un fluide parfait sont étudiés grâce à leur importance d'application dans plusieurs domaines par plusieurs chercheurs : Dias et J.M Vanden-Broeck [9] , Vanden-Broeck [12] , H.Mekias et B-Bouderah [5], A.Gasmi et H-Mekias [2] , N.Bounab [15]. où ils ont trouvé plusieurs résultats concernant la forme de la surface libre de différentes géométries de domaine de l'écoulement .

Dans ce mémoire on a traité analytiquement un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux devant un obstacle incliné forme avec l'horizontale un angle  $\beta = \frac{\pi}{4}$  sans les effets de la gravité et les forces de la tension de surface.

Notre travail est composé de trois chapitres , organisés de la manière suivante :

- **Le premier chapitre** est consacré aux définitions et notions préliminaire concernant la théorie des écoulements potentiels et les équations générales du mouvement de fluide .

-**Le deuxième chapitre** consiste à traiter le problème d'un écoulement à surface libre dans le cas la tension de surface et la gravité sont négligées ,où on a trouvé la solution exacte explicitement en utilisant la méthode des lignes de courant (méthode de Kirchhoff.) et la transformation de Shwartz-Christoffel.

-*Le troisième chapitre* c'est une simulation de notre problème, en utilisant le code Gambit-fluent pour étudier les caractéristique concernant le fluide étudié (vitesse, pression dynamique, fonction de courant , ...).

Enfin, on à terminer ce manuscrit par une conclusion générale englobe les principaux résultats obtenus durant notre étude.

# Chapitre 1

## *Définitions et préliminaires*

### 1.1 Définition des fluides[14]

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Ils se déforment et s'écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l'état gazeux et l'état liquide.

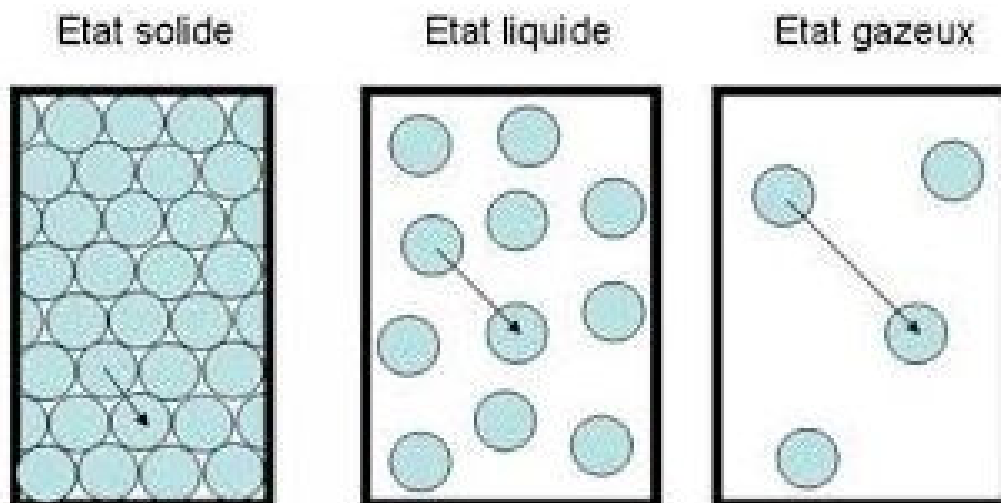


FIGURE 1.1 – Représentation l'état des fluides.

#### **fluide parfait :**

est un fluide dont les molécules glissent les unes sur les autres sans aucun frottement.

#### **fluide visqueux (réel) :**

est un fluide dont les molécules glissent les unes sur les autres avec frottement.

## 1.2 Les écoulements des fluides[13]

Un écoulement est dit à surface libre lorsqu'il se produit avec une interface libre entre l'aire et liquide .

### 1.2.1 Écoulement stationnaire :

On dit qu'un écoulement est stationnaire ou encore écoulement permanent, si toutes ces caractéristiques quantitatives sont indépendants du temps, en particulier pour la vitesse on :

$$\partial_t u = \partial_t \rho = \partial_t T = \partial_t P = 0$$

### 1.2.2 Écoulement irrotationnel :

Un écoulement est dit irrotationnel si :

$$\text{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$$

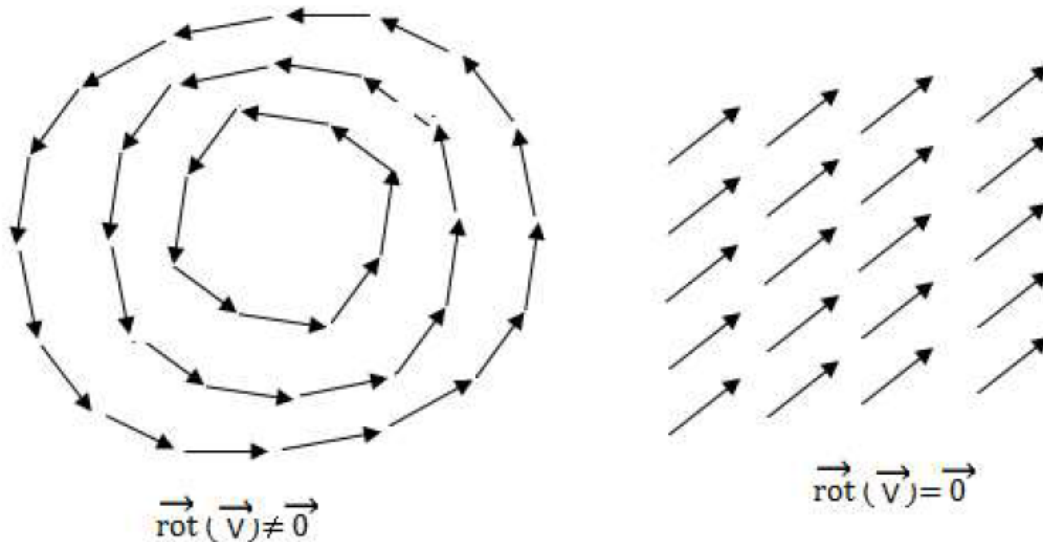


FIGURE 1.2 – Position du champ de vitesse.

### 1.2.3 Écoulement uniforme :

On dit qu'un écoulement est uniforme si ces composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées de l'espace, sinon il est non-uniforme .

### 1.2.4 Écoulement incompressible :

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est constante par rapport au temps, c'est-à-dire

$$\rho = cte$$

### 1.2.5 Écoulement potentiel :

On dit que l'écoulement est potentiel si sa vecteur vitesse est derivé d'un potentiel c'est-à-dire :

$$\vec{u} = \nabla\phi$$

La fonction  $\phi(x, t)$  est le potentiel des vitesses.

## 1.3 Débit[7]

Le débit est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.

### 1.3.1 Débit massique :

Le débit massique à travers une surface S par unité de temps. défini par :

$$D_m = \int \int_s \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds$$

### 1.3.2 Débit volumique :

Le débit volumique à travers une surface S par unité de temps. défini par :

$$D_v = \int \int_s \vec{u} \cdot \vec{n} ds$$

## 1.4 Description d'un fluide en mouvement[7]

### 1.4.1 Description de Lagrange

Cette méthode consiste à étudier différentes grandeurs (densité,  $\rho$ , température T, pression, ...etc) pour chaque particule, lors de son mouvement. Dans la description lagrangienne, on décrit le mouvement par la trajectoire de la particule identité établie. L'identité d'une particule est donnée par sa position initial  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . La description du mouvement est donc de déterminer le vecteur de position  $\vec{r}(M_0, t)$  à tout instant t pour toutes les particules du fluide.

$$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t) \text{ ou } \vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t)$$

C'est-à-dire

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t)$$

Et

$$\vec{u} = \vec{u}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(M_0, t), \quad \vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

## 1.4.2 Description d'Euler

La méthode d'Euler est caractérisée par l'écoulement en donnant les composantes de la vecteur de vitesse et autres quantités physique en chaque point de l'espace, c'est-à-dire on fixe un point dans l'espace et on remarque les changements des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point.

-A l'instant  $t_1$ , on détermine en M une particule  $p_2$  de vitesse.

-Au temps  $t_2 = t_1 + dt$ , on trouve au même point M de l'espace, une autre particule  $p_2$  avec une vitesse et des propriétés physiques différentes.

Donc, on a en M et à l'instant  $t_1$

$$\vec{u} = \vec{u}(p_1, t_1) = \vec{u}(x, y, z, t_1)$$

Et à l'instant  $t_2$ , on a au même point M

$$\vec{u} = \vec{u}(p_2, t_2) = \vec{u}(x, y, z, t_2)$$

## 1.5 Utilisation de la théorie de la variable complexe[13]

Soient  $\phi$  et  $\psi$  la fonction de potentiel et la fonction de courant du flux de potentiel bidimensionnel. On relie le plan d'écoulement au plan complexe  $f(z)$  comme :

$$f(z) = \phi + i\psi$$

$f(z)$  est appelé le potentiel d'écoulement complexe. Puisque la partie réelle et la partie imaginaire de  $f(z)$  satisfait l'équation de Laplace .de plus on a :

$$\begin{cases} u = \frac{-\partial\phi}{\partial x} = \frac{-\partial\psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{-\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.1)$$

Puis les relations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.2)$$

La théorie des variables complexes fournit une méthode très puissante pour obtenir des solutions de quelque écoulement. Si le plan  $(x, y)$  est traité comme le plan  $z = x + iy$ , alors la fonction  $f(z)$  est analytique dans le domaine du flux. De plus, la vitesse complexe est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ &= u - iv \end{aligned}$$

## 1.6 Quelques équations de la mécanique des fluides[13]

### 1.6.1 Conservation de l'énergie du fluide :

Nous allons évaluer l'évolution temporelle de l'énergie cinétique d'un élément de fluide de volume unité et de masse, en nous limitant aux écoulements de fluides incompressibles :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (1.3)$$

En utilisant l'équation de mouvement pour exprimer la dérivée eulérienne de la vitesse, (1.3) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + u_i f_i$$

Soit, en décomposant le tenseur des contraintes comme précédemment en une partie isotrope  $-p\delta_{i,j}$  et en un déviateur  $d_{i,j}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\rho u^2}{2} - p \right) + \frac{\partial u_j d_{i,j}}{\partial x_j} - d_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (1.4)$$

Ou bien, dans une notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} \right) = u \cdot \nabla \left( \frac{\rho u^2}{2} - p \right) + \nabla \cdot (u \cdot d) - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (1.5)$$

Enfin, en tenant compte la condition d'incompressibilité ( $\nabla \cdot u = 0$ ), nous pouvons mettre le premier terme du membre de droite de (1.5) sous la forme d'une divergence, soit :

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = \nabla \cdot \left[ u \nabla \left( \frac{\rho u^2}{2} - p \right) + u \cdot d \right] - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (1.6)$$

Nous réécrivons cette équation d'évolution de l'énergie cinétique sous forme intégrale, en intégrant chacun terme sur un volume  $V$  fixe dans le repère "eulérien" en utilisant le théorème de la divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V e_c dV \right) = \int_S \frac{\rho u^2}{2} u \cdot n dS + \int_S (\sigma \cdot u) \cdot n dS + \int_V u \cdot f dV - \int_V \sigma \cdot \nabla u dV \quad (1.7)$$

Quelle est la signification physique de divers termes(1.7)

1. Le premier terme du deuxième terme est le flux d'énergie cinétique  $d\hat{u}$  à la "convection".traverse la surface S.
2. Le second terme est le travail par unité de temps des contraintes exercées sur la surface S.
3. Le troisième terme est le travail effectué par les forces volumiques par unité de temps.
4. Enfin,le quatrième terme concerne la déformation du volume V.représentée énergie dissipée par la viscosité lors de cette déformation

## 1.6.2 Ligne et fonction de courant :

### ligne de courant

Ligne dont la tangente en chacun de ses points est le vecteur vitesse de la particule fluide en ce point à un instant  $t_0$  fixe .

### fonction de courant

si on pose l'écoulement est incompressible(c'est-à-dire  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ )alors l'équation de continuité sera donnée :

$$\text{div}\vec{u} = 0$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

Cette condition peut être satisfaite en posant :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La fonction  $\psi$  ainsi définie est la fonction de courant. En effet, les lignes  $\psi = cte$  ont la propriété d'être des lignes de courant. L'équation des lignes de courant est :  $vdx - udy = 0$ , soit en remplaçant les composantes de vitesse par les dérivées de la fonction de courant :

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -d\psi = 0$$

Le débit entre deux lignes de courant  $\psi = \psi_1$  et  $\psi = \psi_2$  successivement est donnée par la différence de valeur de la fonction de courant entre ces deux lignes :  $Q = \psi_2 - \psi_1$ .

Soit  $\vec{n}$  un vecteur unitaire normale à C et orienté dans le sens de l'écoulement, l'écoulement à travers C donné par :

$$Q = \int_c \vec{u} \cdot \vec{n} = \int_c \left( -u \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \int_c (vdx - udy)$$

D'où

$$Q = \int_c \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \int_c d\psi$$

Donc

$$Q = \psi_1 + \psi_2$$

### 1.6.3 Équations différentielles des fonctions $\phi$ et $\psi$ :

Nous considérons un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible et non visqueux. loin de :

$$\vec{u} = \text{grad } \vec{\phi}$$

Et

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

Il vient que

$$\text{div}(\text{grad } \vec{\phi}) = 0$$

Donc

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

C'est-à-dire

$$\Delta \phi = 0 \tag{1.8}$$

De même ,d'après

$$\vec{u} = (u, v) = \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

Et

$$\text{rot } \vec{u} = 0$$

On trouve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

C'est-à-dire

$$\Delta \psi = 0$$

Donc , la fonction potentielle  $\phi$  et la fonction ligne de courant  $\psi$  et vérifient l'équation de Laplace. Un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible, non visqueux est écoulement potentiel.

### 1.6.4 Théorème de Bernoulli :

Le théorème de Bernoulli peut être considérée comme un principe de conservation d'énergie adapté aux fluides en mouvement .

#### Premier théorème de Bernoulli

Dans un écoulement stationnaire, le long d'une trajectoire on a conservation de la charge

$$B = \frac{\hat{p}}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = cte$$

$$\hat{p} = p + \rho g z$$

## Second théorème de Bernoulli :

Dans un écoulement potentiel l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho \left[ \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \frac{u^2}{2} \right] = -\nabla \hat{p} \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} = \frac{\hat{p}}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{\partial \phi}{\partial t} + gB$$

### 1.6.5 Équation de continuité :

Soit une partie d'un fluide de masse volumique  $\rho$  délimitée par une surface fermée S (de volume V ).

Soit dS le vecteur de base de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée.

La partie de fluide a une masse :

$$m = \int \int_V \rho dV$$

Le débit massique sortant de la surface S est égal  $\int \int_S \rho \vec{u} dS$  .

La conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial m_s}{\partial S} - \int \int_S \rho \vec{u} dS = \int \int_V \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Où  $\frac{\partial m_s}{\partial S}$  représente le débit massique de fluide interne au volume considéré, compté positive s'il s'agit d'une source et négative s'il s'agit d'un puits, compte tenu du théorème d'Ostrogradsky pour transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume.

$$\int \int_S \vec{u} dS = \int \int_V \int \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dV$$

L'équation de conservation de la masse écrite :

$$\frac{\partial m_s}{\partial S} = \int \int_V \int \left( \operatorname{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

L'égalité écrite ci-dessus est valide quel que soit le volume V considéré et l'intégrale est nulle, ce qui conduit à l'expression locale de la conservation de la masse :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Deux cas particuliers sont alors à considérer :

1. Si le fluide est incompressible la masse volumique ne change pas dans le temps et l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

2. Le cas d'un écoulement stationnaire  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  alors :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 = \rho \operatorname{div} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho$$

### 1.6.6 Équation du mouvement des fluides

Pendant la relation fondamentale de la dynamique, la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un élément de volume  $V$  est égale à la somme des forces qui s'exercent sur cet élément de volume, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho u dx \right) = \int_V f dx + \int_{\Sigma} \sigma \cdot n dS$$

Où

$\Sigma$  est la surface délimitant le volume  $V$  .

$dS$  est un élément de surface de normale  $n$ .

$f$  est la force exercée par unité de volume et  $\sigma$  le tenseur des contraintes.

La masse de l'élément de fluide  $\rho dx$  reste constante dans ce mouvement. Donc, il est supportable d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho u dx \right) = \int_V \rho \frac{du}{dt} dx$$

L'intégrale des forces de surface peut s'écrire, à l'aide du théorème d'Ostrogradsky sous la forme  $\int_V \operatorname{div} \sigma dx$  . En faisant tendre le volume  $V$  vers zéro l'équation de mouvement devient :

$$\rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) = f + \operatorname{div} \sigma \quad (1.9)$$

### 1.6.7 Les équations de Stokes :

L'équation de Navier–Stokes :

$$\begin{cases} -v\Delta u + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

En négligeant dans l'équation de Navier–Stokes incompressible stationnaire les termes proportionnels à la masse volumique du fluide  $(u \cdot \nabla)u$  , on obtient l'équation de Stokes

$$\begin{cases} -v\Delta u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Plus la vitesse de l'écoulement est petite en regard des dimensions de  $\Omega$  et de la valeur de la viscosité, plus le modèle de Stokes est une approximation valable des équations de Navier–Stokes. La différence fondamentale entre les deux équations est que le terme non linéaire en vitesse a disparu, l'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles linéaire.

# Chapitre 2

## *Solution exacte*

### 2.1 Quelques transformations classiques[6]

#### Transformation linéaire

Une transformation linéaire  $w = Az$ , avec  $A = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$  est une double transformation : expansion / contraction liée au coefficient et rotation d'un angle  $\alpha$ .

#### Transformation inverse

Une transformation linéaire  $w = z^{-1}$  pour  $z$  non nul transforme les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

#### Transformation linéaire fractionnelle

La transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec  $a, b, c, d$  des complexes, transforme les cercles en droites et réciproquement.

## Transformation de Joukowski

D'autres transformations utiles existent, telles que celle développée par Joukowski qui est fréquemment utilisée dans l'aviation. Cette transformation est définie par :

$$\omega = z + \frac{a^2}{z}$$

avec  $a \in \mathbb{R}$

La transformation change un cercle centré à l'origine en une ellipse dans le plan  $w$  ; un cas particulier est le cercle de rayon  $r = a$  qui est transformé en segment de droite (ellipse dégénérée de petit axe nul). Les conditions à l'infini ne sont pas modifiées. Par ailleurs un cercle décentré mais dont le centre reste sur l'axe  $x$  est transformé en un profil symétrique évoquant une forme d'aile, appelé profil de Joukowski

## Transformation d'hodographe

Cette transformation est basée sur l'idée d'introduire la fonction complexe  $\Omega$  définie par :

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u - iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta \quad (2.1)$$

$\theta$  est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et  $U$  est la vitesse de référence qui peut être considérée comme unité de vitesse .

## Transformations conformes

Une transformation  $z = x + iy \rightarrow Z(z) = X(x, y) + iY(x, y)$  ,est dite conforme si elle conserve les angles. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit conforme est que la fonction  $Z(z)$  soit analytique.

## 2.2 Transformation de Schwartz-Christoffel[6]

On considéra un polygone dans le plan  $\Omega$ , ayant pour sommets  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et pour angle intérieurs respectivement à  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Soit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  les points correspondant respectivement à  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de l'axe réel du plan  $\lambda$  . Transformation de Schwarz-Christoffel, transforme l'intérieur d'un polygone en demi-plan supérieur (ou inférieur) d'un autre plan. La transformation est donnée par :

$$\Omega = M \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} d\lambda + N$$

Où :  $M$  et  $N$  sont des constantes complexes.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  des nombres réels.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  les angles intérieurs au polygone.

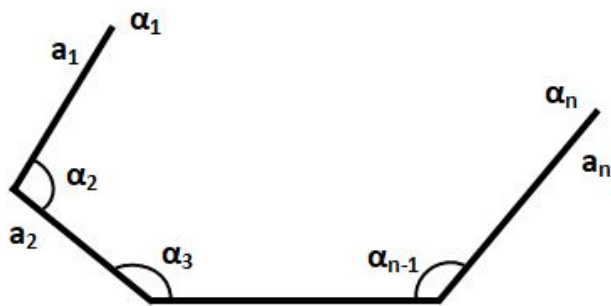


FIGURE 2.1 – Le plan de variable  $\Omega$

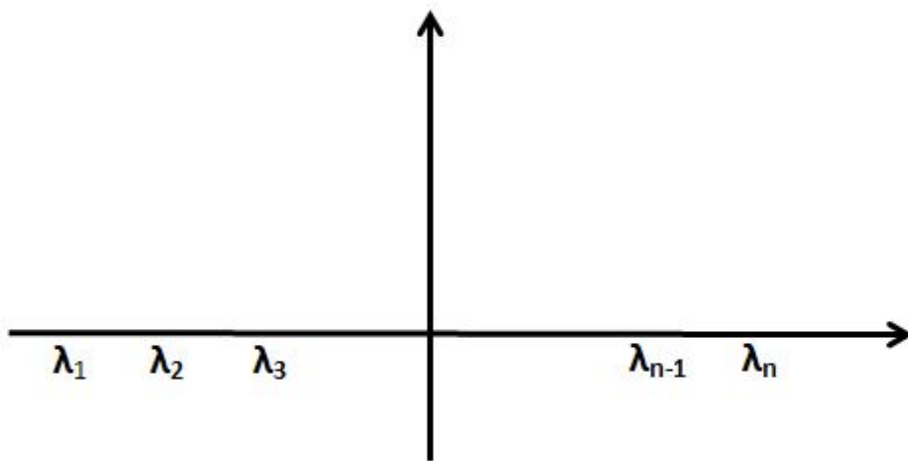


FIGURE 2.2 – le plan de variable  $\lambda$

## 2.3 Position du problème

Considérons un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux devant un obstacle incliné forme avec l'axe ( $x'$  o  $x$ ) un angle  $\beta = \frac{\pi}{4}$  et avec une largeur  $2H$ , en négligeant les forces de la gravité et les effets de la tension de la surface (Figure 2.3).

Supposons que l'écoulement est uniforme de vitesse  $U$  et d'élévation  $2H$ . Le problème consiste à déterminer la fonction potentielle de vitesse  $\varphi(x, y)$ , qui satisfait l'équation de Laplace donnée par :

$$\Delta\phi = 0, \text{ dans le domaine de l'écoulement}$$

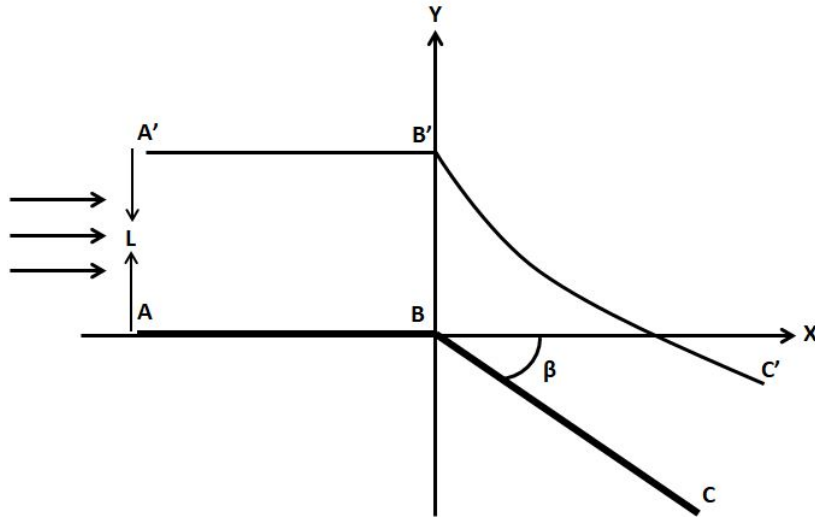


FIGURE 2.3 – Schéma d'un écoulement bidimensionnel

Pour trouver la solution exacte de ce problème, on va appliquer la méthode des lignes de courant et la transformation de Schwartz-Christoffel.

$$\frac{dx}{u(x, y, t)} = \frac{dy}{v(x, y, t)} \quad (2.2)$$

et la transformation de Schwartz-Christoffel donnée par :

$$\Omega = M \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} d\lambda + N \quad (2.3)$$

## 2.4 Les étapes de la solution

### 1<sup>ère</sup> étape

Par la transformation hodographe  $\Omega$  on transforme le domaine d'écoulement réel  $(x, y)$  en un domaine polygonale du plan  $(\log(\frac{u}{q}), \theta)$  comme suit :

les points	le plan $\Omega$
A=A'	(0, 0)
B , B'	$(-\infty, 0)$ , $(-\infty, \frac{-\pi}{4})$
C=C'	$(0, -\frac{i\pi}{4})$

TABLE 2.1 – Transformation le domaine d'écoulement de plan Z à la plan  $\Omega$

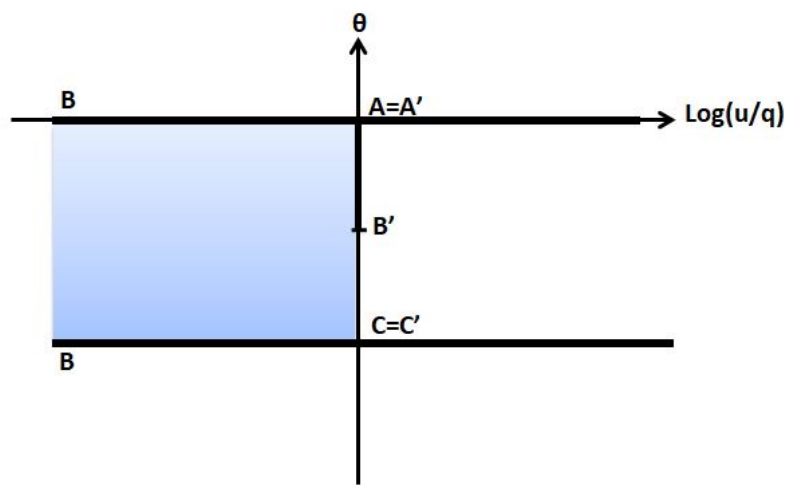


FIGURE 2.4 – Plan  $\Omega$

## 2<sup>ème</sup> étape

Le domaine d'écoulement dans le plan  $\Omega$  est transformé au demi plan supérieur de la variable complexe  $\lambda$ .

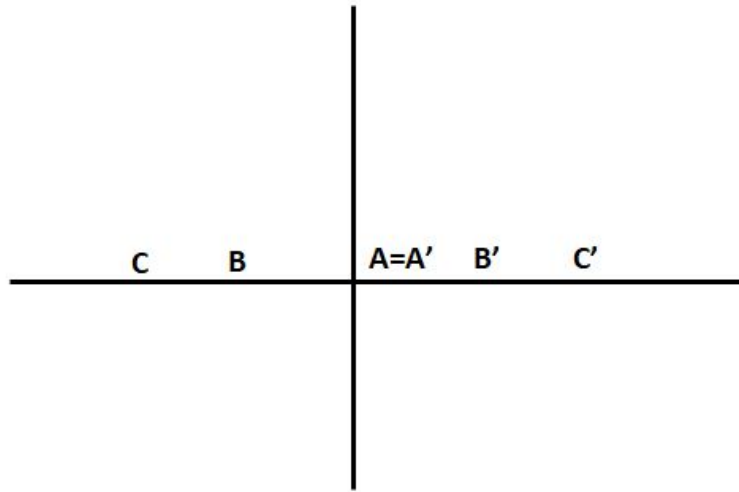


FIGURE 2.5 – Plan  $\lambda$

D'après la transformation de Schwartz-Christoffel[2]

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\lambda} &= M(\lambda - \lambda_A)^{\frac{\alpha_A}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_c)^{\frac{\alpha_c}{\pi}-1} \\ \frac{d\lambda}{d\Omega} &= M(\lambda - 0)^{\frac{1}{2}-1}(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}-1} \\ \frac{d\lambda}{d\Omega} &= M(\lambda)^{-\frac{1}{2}}(\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{d\lambda}{d\Omega} &= \frac{M}{(\sqrt{\lambda})(\sqrt{\lambda - 1})} \\ \int d\Omega &= M \int \frac{d\lambda}{(\sqrt{\lambda})(\sqrt{\lambda - 1})} \end{aligned}$$

Après l'intégration on a :

$$\Omega = \frac{-2M}{i} \arcsin(\sqrt{1 - \lambda}) + N$$

Pour déterminer les constantes M et N on a :

lorsque :  $A \rightarrow \lambda = 0, \theta = 0$

lorsque :  $C' \rightarrow \lambda = 1, \theta = \frac{-i\pi}{4}$

$$\begin{cases} M = \frac{1}{4} \\ N = \frac{-i\pi}{4} \end{cases}$$

Alors :

$$\Omega = \frac{i}{2} \arcsin(\sqrt{1-\lambda}) - \frac{i\pi}{4}$$

où bien

$$\Omega = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda}) - \frac{i\pi}{4} \quad (2.4)$$

### 3<sup>ème</sup> étape

Le domaine d'écoulement dans le plan  $\lambda$  est transformé à une bande de largeur  $2H$  dans le plan de variable  $f = \phi + i\psi$ .

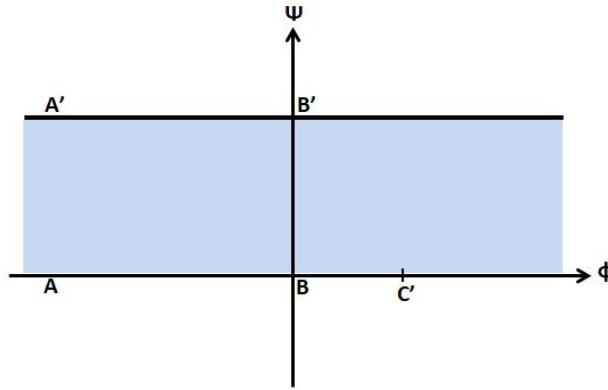


FIGURE 2.6 – Plan f

D'après la transformation de Schwartz-Christoffel[2]

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= a(\lambda-1)^{-1}(\lambda)^{-1} \\ \int df &= a \int (\lambda-1)^{-1}(\lambda)^{-1} d\lambda \\ f &= a \int \frac{1}{(\lambda-1)\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

Par un simple calcul, on trouve :

$$f = a(\ln(\lambda) - \ln(\lambda-1)) + b$$

$$f = a \ln \left( \frac{\lambda}{\lambda-1} \right) + b$$

a et b sont des constantes qu'on peut les trouver simplement comme :

$$\begin{cases} a = \frac{-LU}{\pi} \\ b = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$f = \frac{-LU}{\pi} \ln \left( \frac{\lambda}{\lambda-1} \right) \quad (2.5)$$

4<sup>ème</sup> étape

On utilisant la relation :  $\frac{dz}{d\lambda} = \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda}$

on a :  $\Omega = \log \left( u \cdot \frac{dz}{df} \right)$

$$\Rightarrow \frac{dz}{df} = e^{\frac{-i\pi}{4}} (\sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda})^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

et

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{-LU}{\pi\lambda(\lambda-1)} \quad (2.7)$$

Donc

$$\int dz = \frac{-LUe^{\frac{-i\pi}{4}}}{\pi} \int \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} (\sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda})^{\frac{1}{2}} d\lambda$$

Alors

$$z = \frac{-LUe^{\frac{-i\pi}{4}}}{\pi} \int \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} (\sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda})^{\frac{1}{2}} d\lambda \quad (2.8)$$

Alors la forme de surface libre est donné paramétriquement par la forme :

$$\begin{cases} x = \text{Réal} \left( \frac{-LUe^{\frac{-i\pi}{4}}}{\pi} \int \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} (\sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda})^{\frac{1}{2}} d\lambda \right) \\ y = \text{imag} \left( \frac{-LUe^{\frac{-i\pi}{4}}}{\pi} \int \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} (\sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda})^{\frac{1}{2}} d\lambda \right) \end{cases}$$

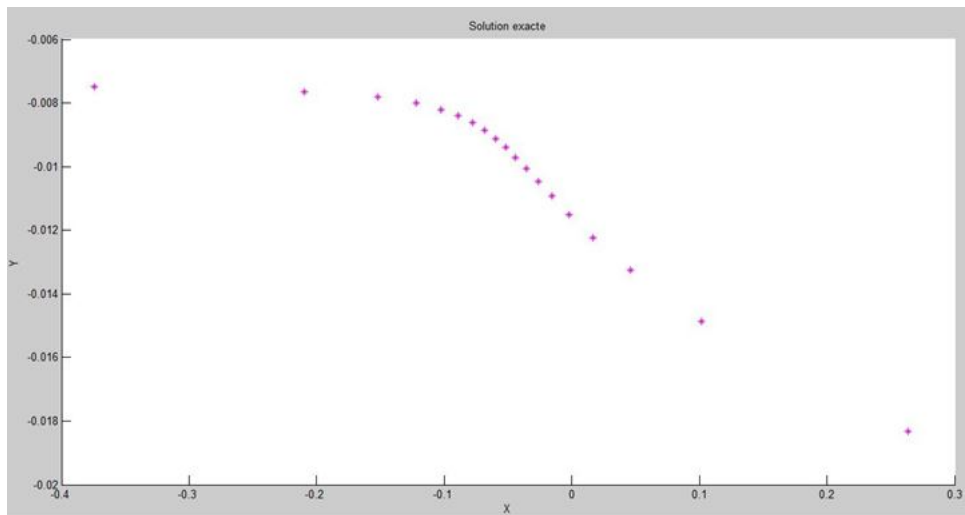


FIGURE 2.7 – La forme de la surface libre

# Chapitre 3

## *Simulation*

### 3.1 Présentation de code (Gambit , Fluent)[18]

Les logiciels commercialement autorisés Gambit et Fluent permettent l'exécution de simulations de mécanique des fluides 2D ou 3D allant de la génération du filet avec Gambit à la résolution des équations de Navier Stokes et au post-traitement avec Fluent.

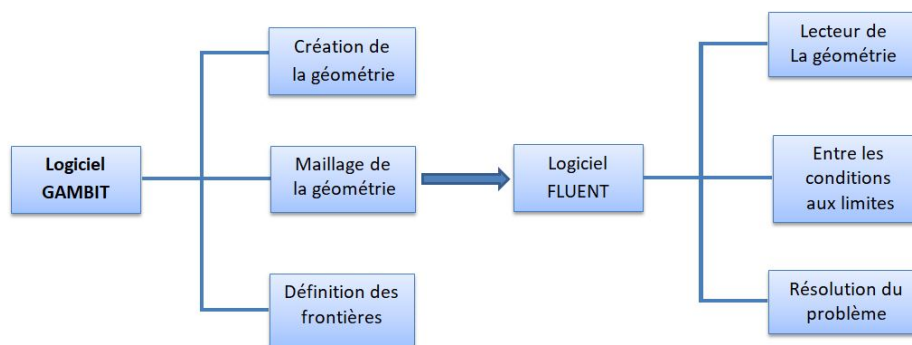


FIGURE 3.1 – Schéma d'une simulation complètement en utilisant logiciel Gambit et Fluent.

#### 3.1.1 Le role de logiciel Gambit

Le logiciel Gambit est un préprocesseur qui permet de réaliser ou d'importer des géométries (surface ou volume) en 2D ou 3D simple ou complexes, il permet de créer plusieurs types de maillage (structuré, non structuré ou hybrides) en coordonnées cartésiennes, polaire, cylindrique ou axisymétriques et de spécifier le types de matériau (fluide ou solide) selon le bon vouloir de l'utilisateur. Le préprocesseur permet aussi de définir les conditions aux limites appropriées aux frontières du domaine de calcul.

Il possède en outre de nombreuses possibilités d'extraction qui permettent l'utilisation de ses maillages par des logiciels industriels comme par exemple FLUENT.

Il est judicieux de suivre le processus suivant lors de la construction d'un maillage :

- Définir la géométrie.
- Réaliser le maillage.
- Définir les paramètres des zones de calcul.

### 3.1.2 Capacité de Fluent

Les capacités de modélisation suivantes sont rendues possibles par FLUENT.

- débit 2D ou 3D.
- débit stationnaire ou instationnaire.
- débit en milieu poreux.
- débit avec changements de phases .
- débit non visqueux, laminaires ou turbulents.

FLUENT est une formule électronique pour simuler le flux de fluide et les transferts d'énergie thermique dans des géométries complexes. Avec une bonne quantité de facilité, il est possible de résoudre les problèmes de flux avec des mailles non structurales qui peuvent être produites pour des géométries compliquées.

Le logiciel FLUENT permet aux utilisateurs de résoudre et de simuler la mécanique des fluides et les problèmes de transfert thermique en utilisant la méthode des volumes finis.

FLUENT est utilisé à travers une interface graphique, l'utilisateur avancé peut adapter ou augmenter l'interface aux besoins en écrivant des macros et des fonctions de menu, afin d'automatiser certaines procédures.

Dans le mode "double précision" : les nombres à virgule flottante sont représentés en utilisant 64 bits, alors que le mode "simple précision" : utilise une représentation à 32 bits. Le revers de cette précision est que le premier mode requiert beaucoup plus de mémoire. En outre, Le mode "double précision" est préconisé, pour les écoulements impliquant des longueurs d'échelles très disparates, comme dans le cas d'un canal très long et mince.

## 3.2 L'utilisation des logiciels (Gambit,Fluent)[10]

### 3.2.1 GAMBIT

#### début du programme

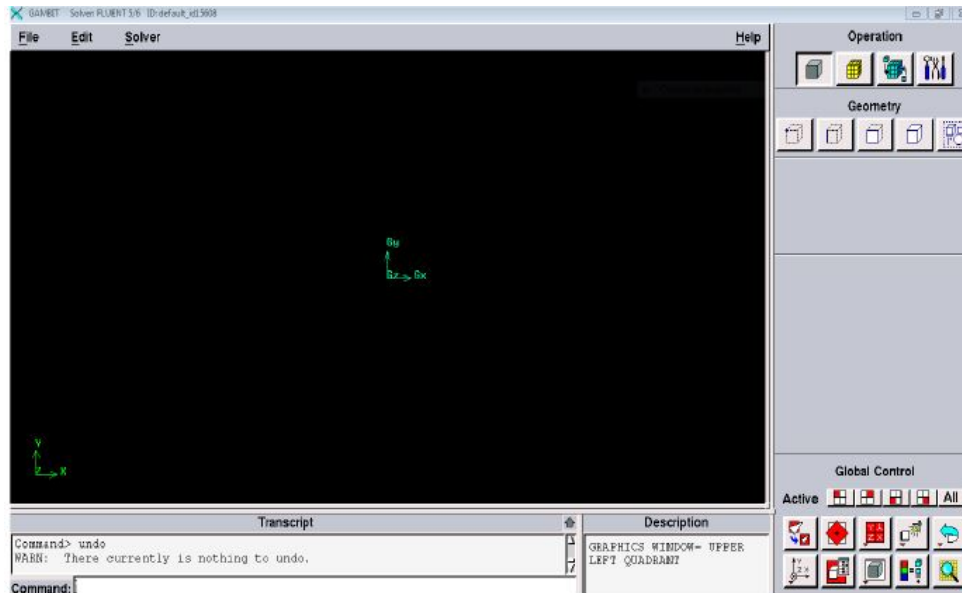


FIGURE 3.2 – Fenêtre principale.

Une fois que GAMBIT est ouvert, on retrouve les différentes opérations que l'on peut réaliser sur ce logiciel.

-La première opération est la géométrie. Ce menu permet de créer des volumes, des surfaces, des lignes et des points.

-La deuxième opération est le maillage de la géométrie. Ce menu permet de mailler des volumes, des surfaces et aussi discrétiser des lignes.

-La troisième opération permet de définir les conditions aux limites.

-La quatrième opération est un menu d'outil.

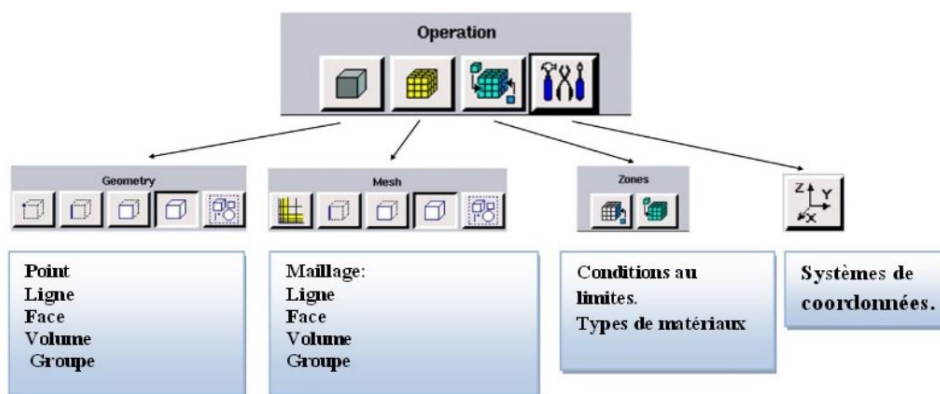


FIGURE 3.3 – Menu principale de Gambit.

## Générer un maillage

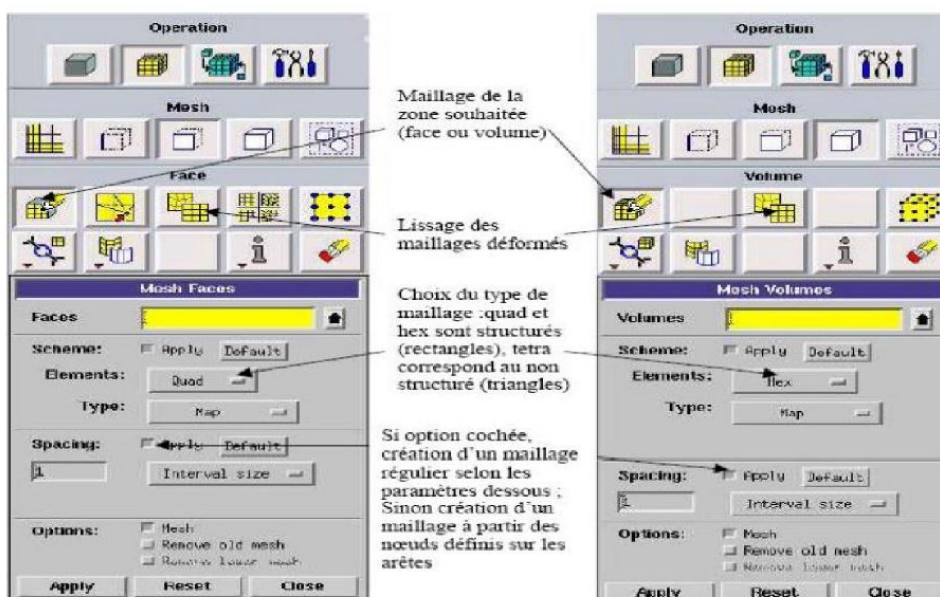


FIGURE 3.4 – Maillage sur Logiciel Gambit.

### 3.2.2 FLUENT

#### Ouvrir le fichier crée par Gambit

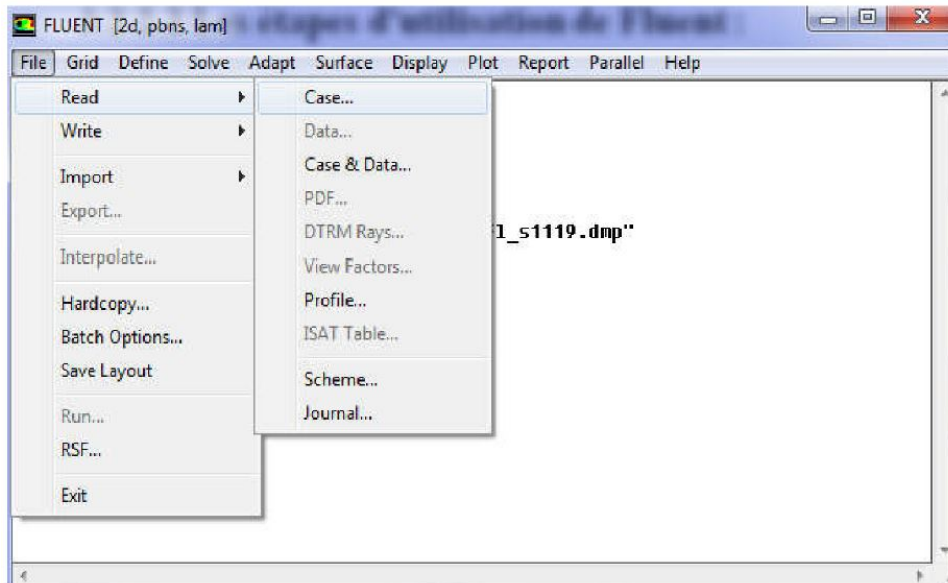


FIGURE 3.5 – Ouvrir le fichier (msh).

#### Définir le modèle mathématique

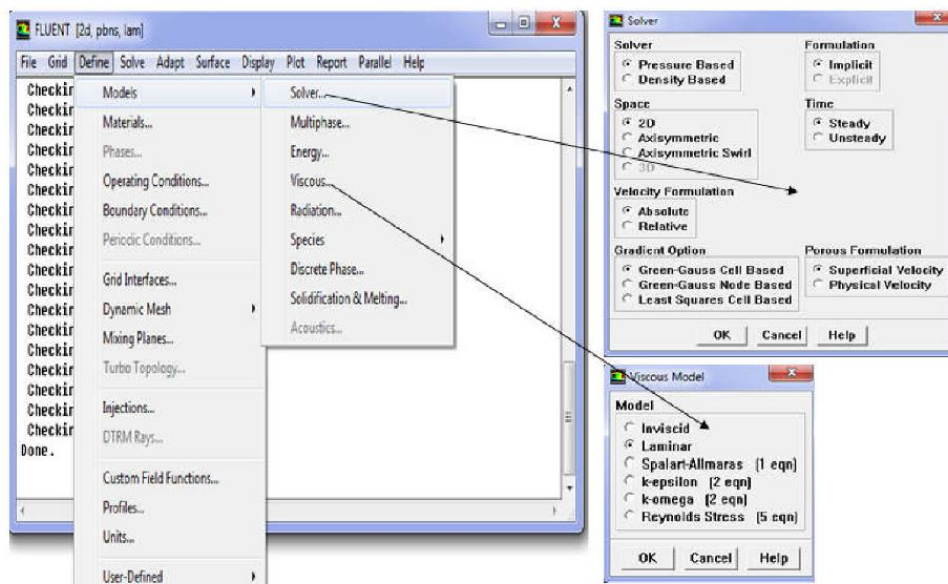


FIGURE 3.6 – Définir le modèle mathématique, le type d'écoulement et le fluide.

## Définir les conditions aux limites

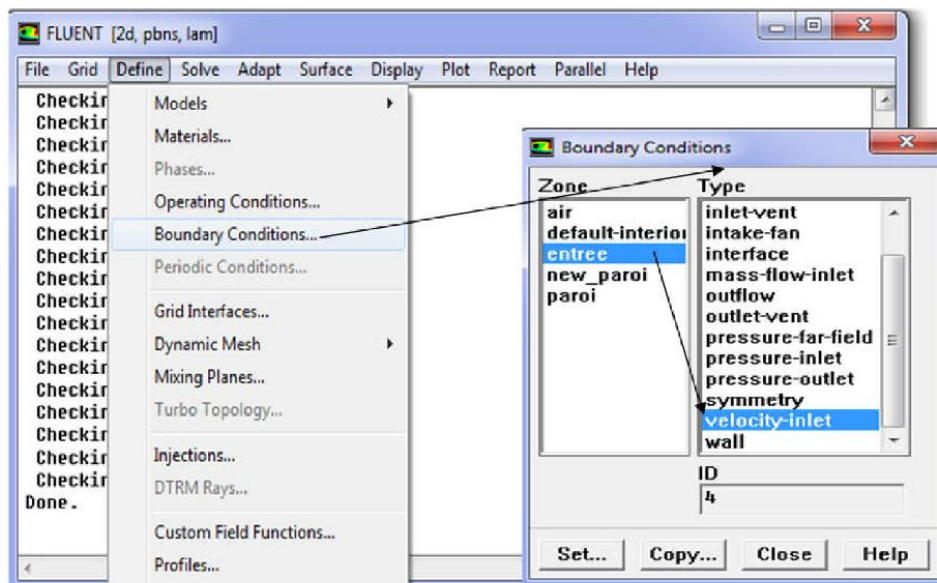


FIGURE 3.7 – Fenêtre des conditions aux limites.

## Initialisation

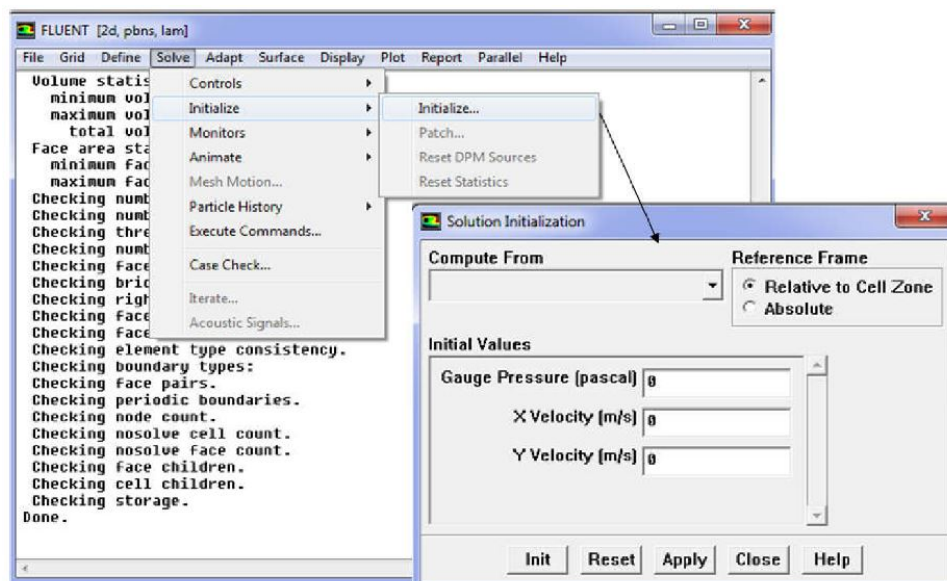


FIGURE 3.8 – Initialisation des variables.

### 3.3 La simulation du problème dans le cas ( $g=0$ , $T=0$ )

#### 3.3.1 Le maillage

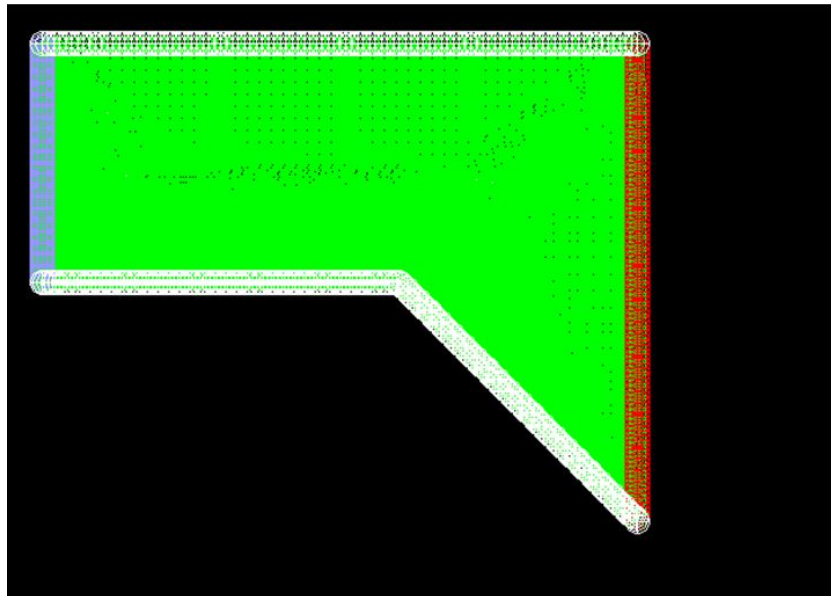


FIGURE 3.9 – Maillage de domaine d'écoulement.

#### 3.3.2 La fonction de courant

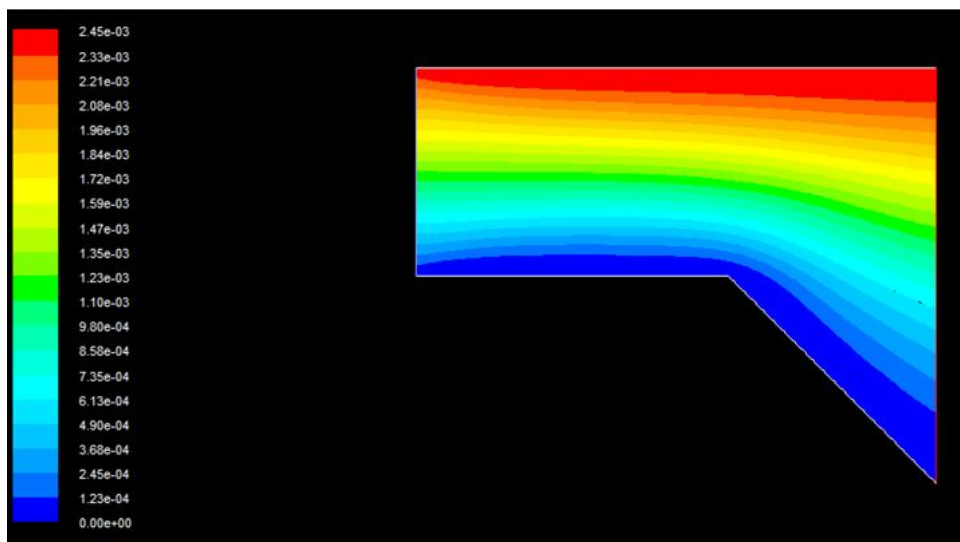


FIGURE 3.10 – Contour de la fonction de courant.

### 3.3.3 Pr ession statique

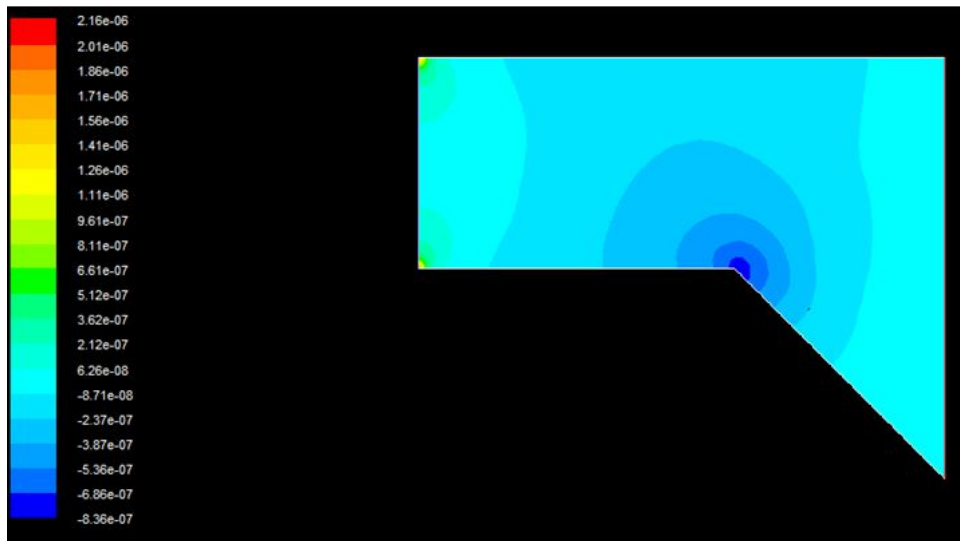


FIGURE 3.11 – Contour de la pr ession statique.

### 3.3.4 Pr ession dynamique

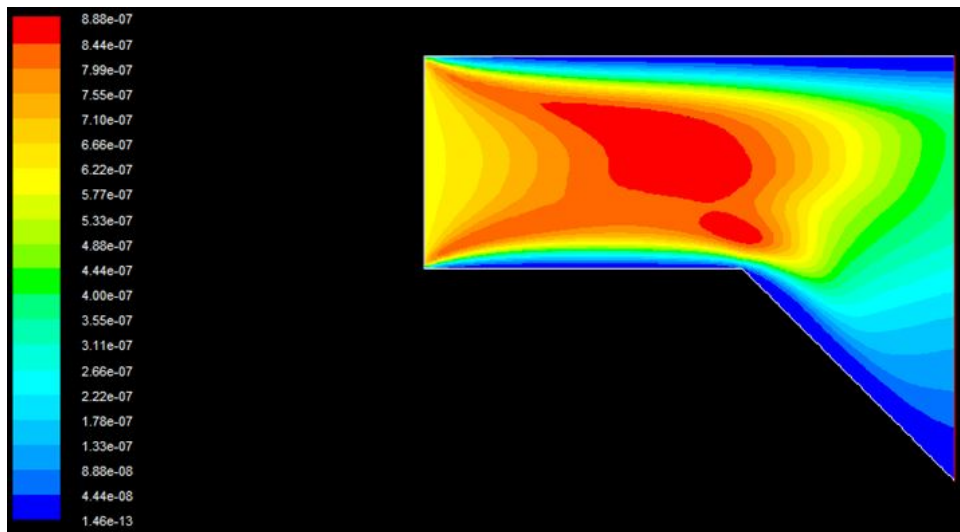


FIGURE 3.12 – Contour de la pr ession dynamique.

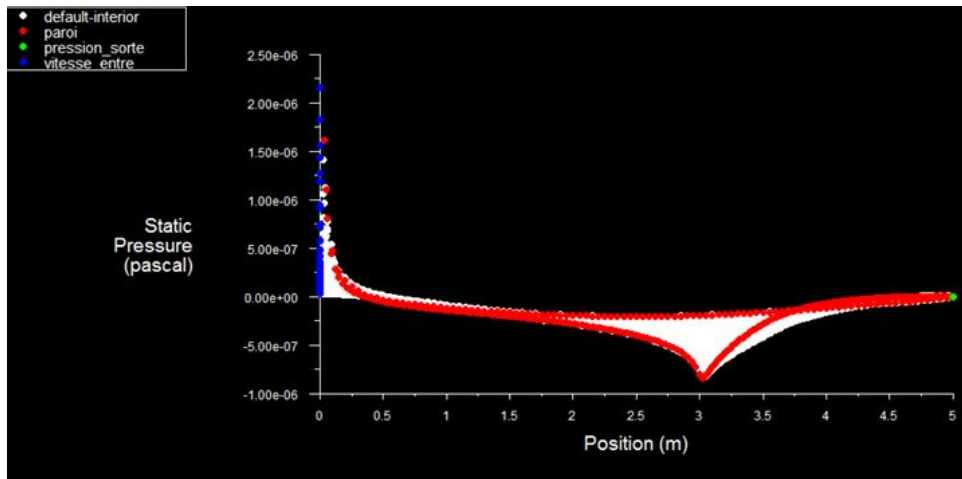


FIGURE 3.13 – Prèssion statique.

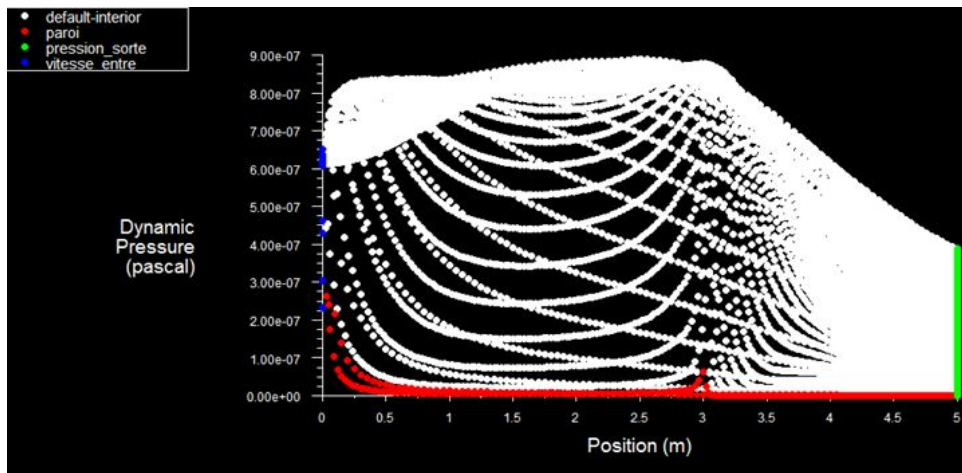


FIGURE 3.14 – Prèssion dynamique.

## 3.4 Discussion des résultats

### 3.4.1 La fonction de courant

D'après la figure (3.10) et concernant le contour de fonction de courant on remarque que cette fonction est presque nulle de paroi rigide (ABC) et elle prend le maximum au centre du fluide ( $1.23 \times 10^{-4} Kg/s$ ), elle augmente et atteint sa valeur maximale estimée par ( $2.45 \times 10^{-3} Kg/s$ ).

### 3.4.2 La Pression Statique

D'après la figure de la pression statique (3.11) on peut remarquer qu'elle est presque nulle ( $-8.36 \times 10^{-7} Pa$ ) juste au point d'angle B et elle prend sa grande valeur ( $1.56 \times 10^{-6} Pa$ ) à l'entrée de l'écoulement.

### 3.4.3 La pression dynamique

D'après la figure de contour de la pression dynamique (3.12) on remarque que la pression dynamique prend sa grande valeur au milieu d'obstacle ( $8.88 \times 10^{-7} Pa$ ) et sa petite valeur ( $1.46 \times 10^{-13} Pa$ ) au bord de l'obstacle c'est-à-dire juste près des parois rigides (ABC) et au bout de l'écoulement.

# Conclusion générale

Dans ce travail , on a étudié un écoulement potentiel bidimensionnel et non visqueux devant un obstacle incliné d'un angle  $\beta = \frac{\pi}{4}$  avec l'axe  $(x'ox)$  c'est la forme de la surface libre, on a trouvé la solution exacte par la méthode des lignes de courant et la transformation de Schawartz-Christoffel, en négligeant l'effet de la gravité et la tension de surface.

On a fait aussi, une simulation numérique en utilisant le code de calcul FLUENT pour vérifier les caractéristiques de fluide comme (la pression dynamique, la fonction de courant , la vitesse ,...). où , on a aboutit à des bons résultats .

Notre perspectives est de calculer numériquement la forme de surface libre en utilisant d'autres méthodes numériques comme celle des volumes finis, les éléments finis et aussi de calculer la forme de la surface libre dans d'autres domaines d'écoulement (la géométrie de l'écoulement).

# Bibliographie

- [1] A.AMARA , "Calcul numérique d'un jet bidimensionnel d'un fluide devant un mur de forme quelconque" Thèse de doctorat, Université Mohamed Boudiaf - M'sila (2018).
- [2] A. Gasmi and H. Mekias, A jet from a container and flow past a vertical plate, Appl.Math, Sci, 1(2007) ; 2687-2698.
- [3] A.MERZOUGUI, "sur quelques problèmes d'écoulements à surfaces libres avec tension de surface" Thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas-Setif(2007).
- [4] A.Sakir , Jean-Luc Battaglia,"Mécanique des Fluides", Dunod, Paris, 2011 .
- [5] B.Bouderah and H.Mekias, A cybernetic approach to the problem of cusp free-surface flow caused by a line sink on a sloping bottom ,Kybernetes, 31(2)(2002) ; 305-316.
- [6] C.ANCEY , "Analyse différentielle outils mathématiques pour la dynamique des fluides", École Polytechnique Fédérale de Lausanne Écublens , CH-1015 Lausanne .
- [7] C. Grossetête. Mécanique des fluides, Ellipses, Paris, (1991).
- [8] D.TITOUNA , "Dynamique des fluides ( Cours pour Masters)", Université Batna 2.
- [9] F.Dias and J.M. Vanden-Broeck, Flows emerging from a nozzle and filling under gravity.J. Fluid, Mech ,213(1990) ; 465-477.
- [10] FLUENT 6.0 Documentation. User's guide. Fluent. Inc. (2001).
- [11] J.Bico, M.Fermigier, M.Reyssat , "Mécanique des Fluides" Paris 2020.
- [12] J-M.Vanden-Brock,Free streamline model for a rising bubble, phys.fluids,29(9)(1986); 2798-2801.
- [13] J. Roussel-E. N. S. C. R. Mécanique des fluides (2010).
- [14] M. Damou. Mécanique des fluides, (O. P. U), (1993).
- [15] N.Bounab, Simulation Numérique de Quelques écoulements potentiels en 2D "Curved Nozzle" Thèse de doctorat, Université Mohamed Boudiaf M'sila , (2015).
- [16] S.RAVIER ,M.RIGAUT , "Mécanique des Fluides" ,Ecole Normale Supérieure de LYON,janvier 2000 .
- [17] S.YOUCEFI , "Polycopié de Mécanique des Fluides I (Cours et applications)", université des sciences et de la technologie mohamed boudiaf oran (2017).
- [18] T.Tayebi,Cours Gambit et Fluent,Université Mohamed Boudiaf M'sila,2017/2018.
- [19] Y.A. Çengel ,J.M. Cimbala , "Fluid Mechanics. Fundamentals and Applications",The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved 2010 .

## ملخص

في هذا البحث قمنا بإيجاد الحل الدقيق لمشكلة ثنائية الأبعاد لتدفق أمام حاجز يصنع زاوية  $\pi/4$  مع محور الفواصل. قمنا باعتبار أننا السائل لا يتأثر بالجاذبية ولا توتر السطح و غير قابل للانضغاط ؛ و للوصول للمطلوب طبقنا نظرية خطوط الكمون و تحويل شوارتز-كريستوفال .

**كلمات المفتاح :** سطح حر ؛ تدفق كموني ؛ تحويل شوارتز- كريستوفال ؛ برنامج الفليانت .

## Abstract

In this research, we have found the exact solution to a two-dimensional problem of fluid flow past an obstacle making an angle  $\beta=\pi/4$  with the axis ( $x'o x$ ). We have considered the fluid to be incompressible and non-viscous, neglecting the forces of gravity and surface tension, for which we apply the theorem of latency lines and Schwartz-Christoffel transformation.

**Key-words:** free surface, potential flow , Schwartz-Christovel transform , code Fluent .

## Résumé

Dans cette recherche , nous avons trouvé la solution exacte à un problème bidimensionnel d'écoulement de fluide devant un obstacle fait un angle  $\beta=\pi/4$  avec l'axe ( $x'o x$ ) . Nous avons considéré que le fluide est incompressible et non visqueux en négligent les forces de la gravité et la tension de la surface, pour sela on appliquent la théorème de ligne de courant et transformation de Schwartz-Christoffel.

**Mots-clés :** surface libre, écoulement potentiel , transformation de Schwartz-Christoffel , code Fluent .