



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Équations aux dérivées partielles
et applications

Par

Zerari Amina

Sujet

*Sur l'existence des solutions pour une
équation d'onde dégénérée*

Devant le jury :

Mr. N. Benhamidouche	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. A. Sengouga	MCA. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. N. Amroune	MCB. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2017 / 2018

Remerciements

*Avant tout je remercie ALLAH qui nous a fait de connaître notre
lumière de guidage et après,*

Je tiens avant tout à exprimer ma reconnaissance à mes parents, et

A Mon Encadreur,

Dr. Abdelmouhcene Sengouga.

*J'ai eu l'honneur d'être votre étudiante et de bénéficier de votre riche
enseignement.*

Vos qualités pédagogiques et humaines sont pour moi un modèle.

Votre encadrement a toujours suscité mon profond respect.

Aux membres du Jury.

Président du jury: Nouredine Benhamidouche.

Examineur: Nacereddine Amroune.

*Messieurs les jurys, vous me faites un grand honneur en acceptant de
juger ce travail.*

*Je dois un remerciement à tous les étudiants de ma spécialité pour
leurs encouragements et leurs amitiés.*

*Je tiens à remercier chaleureusement, tous mes proches et tous ceux
qui, de près ou de loin, m'ont aidé pour réaliser ce travail.*

Dédicaces

A Ma très Chère Maman.

Au Meilleur des Pères.

*Dont le mérite, les sacrifices et les qualités humaines m'ont permis de
vivre ce jour.*

A mes Frères

Miloud, Khider, Maned.

A mes Sœurs.

Masseouda, Houria, Bouthiqna, Assma.

A qui je souhaite un avenir radieux plein de réussite.

A mes Amis.

Amina. Z. Amina. CH. Fatima et May

A tous ceux qui me sont chers.

M'ont apporté leurs sollicitudes pour réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Espaces $L^p(0, L), L^p(0, T; X)$	3
1.1.1 Espace $L^p(0, L)$	3
1.1.2 Espace $L^p(0, T; X)$	4
1.2 Espaces de Sobolev	5
1.2.1 Espaces H^1, H^2, H_0^1, H^{-1}	5
1.2.2 Espaces $H_\alpha^1, H_\alpha^*, H_\alpha^2$	5
1.3 Équation d'onde sur l'intervalle $(0, L)$	7
1.3.1 Équations hyperboliques	7
1.3.2 Solutions faibles	7
1.3.3 Existence et unicité	8
1.4 Quelques inégalités utiles	9
2 Équation d'onde dégénérée	11
2.1 Position du problème	11
2.2 Existence et unicité des solutions	11
2.2.1 Formulation faible	12
2.2.2 Équation d'onde perturbée	13
2.2.3 Estimations à priori pour le problème perturbé avec des données régulières	13
2.2.4 Existence de solutions pour le problème dégénéré avec des données régulières	16
2.2.5 Existence de solutions pour le problème dégénéré	18

2.3	L'unicité de la solution du problème dégénéré	19
2.4	Un résultat de régularité	20
2.5	Une estimation d'énergie	21
2.6	Une inégalité directe au point $x = L$	22
3	Résolution numérique	32
3.1	Méthode des différences finies	32
3.1.1	Discrétisation du domaine	32
3.1.2	La solution discrète	33
3.1.3	Remplacement des dérivés par des différences finies	33
3.2	Schéma des différences finies pour $0 < \alpha < 1$	34
3.2.1	Système algébrique	34
3.2.2	Système matricielle	34
3.2.3	Stabilité	35
	Bibliographie	39

Introduction

Dans notre expérience quotidienne on trouve plusieurs types des ondes (sonores, électromagnétiques comme les ondes du radio ou ondes lumineuses, ondes d'eau, ondes élastiques...etc.). Bien que les phénomènes ci-dessus montrent plusieurs différences, ils partagent également de nombreuses similitudes. Le modèle mathématique le plus simple qui modélise de tels phénomènes dans la dimension un est l'équation suivante (dite d'onde)

$$u_{tt} = (c^2 u_x)_x, \quad x \in [0, L], t > 0.$$

La solution $u(x, t)$ peut décrire le déplacement d'une corde élastique étirée à la coordonnée x et l'instant t , L est la longueur de la corde et c indique la vitesse de propagation d'onde. Lorsque la corde est homogène, c'est à dire les propriétés physiques de la corde ne dépend pas de x , la vitesse de propagation $c > 0$ est constante.

Dans ce travail, on s'intéresse au cas où la vitesse de propagation est variable. Plus précisément, on considère que

$$c^2 = x^\alpha, \quad \text{pour } x \in [0, L] \text{ et } 0 < \alpha < 2,$$

et dans ce cas, on a l'équation d'onde suivante

$$u_{tt} = (x^\alpha u_x)_x, \quad x \in [0, L], t > 0.$$

Comme la vitesse de propagation s'annule au voisinage de 0, l'équation est dite dégénérée. L'étude de tels types de problèmes est bien plus compliquée que les problèmes non-dégénérés.

Malgré cette dégénérescence, on peut démontrer que cette équation a une solution unique dans certain espaces de Sobolev avec poids. Ce résultat, démontré dans les travaux [4, 10] a été détailler ici ainsi que quelque résultats de stabilité et de régularité pour la solution. De plus, nous avons fait une étude numérique pour le cas $0 < \alpha < 1$ qui n'a pas été abordée dans les travaux précédents.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques définitions sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev. On présentera ensuite des résultats classiques sur l'existence et l'unicité des solutions pour l'équation d'onde non-dégénérée.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'équation d'onde dégénérée. Pour démontrer l'existence, nous avons utilisé la méthode des perturbations pour obtenir un problème approché non-dégénéré et dont l'existence est déjà assurée. En passant la limite dans le paramètre de perturbation on établit l'existence de la solution pour le problème dégénéré.

Dans le troisième chapitre, une étude numérique du problème est réalisée. On a appliqué un schéma numérique aux différences finies pour ce problème et on a présenté la solution numérique pour différentes valeurs de α .

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats classiques qui seront utilisés tout au long de ce mémoire, pour les démonstrations complètes, voir [1, 4, 8].

1.1 Espaces $L^p(0, L)$, $L^p(0, T; X)$

1.1.1 Espace $L^p(0, L)$

— Soit $L > 0$. Pour $1 \leq p < \infty$, on appelle $L^p(0, L)$ l'espace des fonctions suivant :

$$L^p(0, L) = \left\{ u : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ mesurable et } \int_0^L |u|^p dx < \infty \right\}.$$

Muni de la norme

$$u \mapsto \|u\|_{L^p(0, L)} = \left(\int_0^L |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L^p(0, L)$ est un espace de Banach séparable, qui est réflexive pour $1 < p < +\infty$.

— Pour $p = 2$, on définit $L^2(0, L)$ comme suit

$$L^2(0, L) = \left\{ u : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ mesurable et } \int_0^L |u|^2 dx < \infty \right\}.$$

Muni de produit scalaire

$$(u, v)_0 = \int_0^L uv dx,$$

$L^2(0, L)$ est un espace de Hilbert.

— Pour $p = \infty$, on appelle $L^\infty(0, L)$ l'espace des fonctions qui ont un sup essentiel fini, et on note

$$L^\infty(0, L) = \{u : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ mesurable et } \exists c \geq 0 \text{ telle que } |u(x)| \leq c \text{ p.p. sur } (0, L)\}.$$

Muni de la norme

$$u \mapsto \|u\|_{L^\infty(0,L)} = \inf \{c \geq 0; |u(x)| \leq c \text{ p.p. sur } (0, L)\},$$

$L^\infty(0, L)$ est un espace de Banach.

1.1.2 Espace $L^p(0, T; X)$

Définition 1.1 Soit X un espace de Banach.

i) Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit $L^p(0, T; X)$ comme l'espace des fonctions mesurables définies sur $(0, T)$ à valeurs dans X , telles que $\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < +\infty$, et on note

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u : (0, T) \rightarrow X \text{ mesurable telle que } \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < +\infty \right\}.$$

Muni de la norme

$$u \mapsto \|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach.

ii) Pour $p = 2$,

$$L^2(0, T; X) = \left\{ u : (0, T) \rightarrow X \text{ mesurable telle que } \int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt < +\infty \right\}.$$

Si X est un espace de Hilbert, de produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$, alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire,

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u, v)_X dt.$$

iii) Pour $p = \infty$, on définit $L^\infty(0, T; X)$ comme l'espace des fonctions sur $(0, T)$ à valeurs dans X , qui ont un sup essentiel fini, et on note

$$L^\infty(0, T; X) = \{u : (0, T) \rightarrow X \text{ mesurable} \mid \exists C \geq 0, \|u(t)\|_X < C \text{ p.p. sur } (0, T)\}.$$

Muni de la norme

$$u \mapsto \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf \{c \geq 0; \|u(t)\|_X \leq c \text{ p.p. sur } (0, T)\}.$$

1.2 Espaces de Sobolev

1.2.1 Espaces H^1, H^2, H_0^1, H^{-1}

On rappelle que l'espace de Sobolev classique $H^1(0, L)$ est définie comme l'espace des fonctions dans $L^2(0, L)$, dont les premières dérivées au sens des distributions sont des fonctions dans $L^2(0, L)$

$$\begin{aligned} H^1(0, L) &= \left\{ u \in L^2(0, L) \mid \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0, L) \right\}. \\ H^2(0, L) &= \left\{ u \in L^2(0, L) \mid \frac{\partial u}{\partial x} \in H^1(0, L) \right\}. \end{aligned}$$

Le produit scalaire et la norme dans $H^1(0, L)$ sont donnés, respectivement par

$$(u, v)_1 = \int_0^L uv dx + \int_0^L \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

et

$$\|u\|_{H^1(0, L)}^2 = \int_0^L u^2 dx + \int_0^L |\nabla u|^2 dx.$$

On note par $H_0^1(0, L)$ l'espace des fonctions de $H^1(0, L)$ qui s'annule sur les frontières

$$H_0^1(0, L) = \overline{\mathcal{D}(0, L)}^{\|\cdot\|_{H^1}} \text{ est la fermeture de } \mathcal{D}(0, L) \text{ dans } H^1(0, L).$$

On peut démontrer que

$$H^1(0, L) \subset C([0, L]) \text{ et } H^2(0, L) \subset C^1([0, L]).$$

On note par $H^{-1}(0, L)$ l'espace dual de $H_0^1(0, L)$, i.e.,

$$H^{-1}(0, L) = (H_0^1(0, L))^*.$$

1.2.2 Espaces $H_\alpha^1, H_\alpha^*, H_\alpha^2$

Pour le problème considéré dans les chapitres suivants on a besoin d'introduire quelques espaces de Sobolev avec poids.

Fonction absolument continue dans $[0, L]$

Définition 1.2 Une fonction à valeur réelle u sur un intervalle compact $[0, L]$ est dite absolument continue si u a une dérivée u' presque partout, la dérivée est Lebesgue intégrable, et

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) dt,$$

pour tout x sur $[0, L]$.

Fonction localement absolument continue dans $(0, L]$

Une fonction à valeurs réelles sur $(0, L]$ est dite localement absolument continue sur $(0, L]$ si $\chi_K \cdot u$ est absolument continue sur $[0, L]$, pour tous compact $K \subset (0, L]$.

Espace H_α^1

1. Pour $0 < \alpha < 1$, on définit l'espace de Hilbert $H_\alpha^1(0, L)$ comme suit

$$H_\alpha^1(0, L) = \left\{ u \in L^2(0, L) \left| \begin{array}{l} u \text{ est absolument continue dans } [0, L], \\ x^{\frac{\alpha}{2}} u_x \in L^2(0, L) \text{ et } u(0) = u(L) = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

2. Pour $1 \leq \alpha < 2$, $H_\alpha^1(0, L)$ est défini par

$$H_\alpha^1(0, L) = \left\{ u \in L^2(0, L) \left| \begin{array}{l} u \text{ est localement absolument continue dans } (0, L], \\ x^{\frac{\alpha}{2}} u_x \in L^2(0, L) \text{ et } u(L) = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

De plus $H_\alpha^1(0, L)$ ($\alpha > 0$) est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H_\alpha^1(0, L)} = \int_0^L (uv + x^\alpha u_x v_x) dx, \quad \forall u, v \in H_\alpha^1(0, L),$$

et la norme associé

$$\|u\|_{H_\alpha^1(0, L)} = \left(\|u\|_{L^2(0, L)}^2 + \|x^{\frac{\alpha}{2}} u_x\|_{L^2(0, L)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

Remarque 1.3 Il est clair que $H_0^1(0, L) \subset H_\alpha^1(0, L)$, pour $\alpha \in (0, 2)$.

Espace H_α^*

On définit l'espace $H_\alpha^*(0, L)$ comme l'espace dual de $H_\alpha^1(0, L)$, que l'on muni de la norme

$$\|u\|_{H_\alpha^*(0, L)} = \sup_{\|v\|_{H_\alpha^1(0, L)}=1} \langle u, v \rangle_{H_\alpha^1(0, L) \times H_\alpha^*(0, L)}.$$

Espace H_α^2

1. Pour $0 \leq \alpha < 1$, l'espace $H_\alpha^2(0, L)$ est défini par

$$H_\alpha^2 = \{ u \in H_\alpha^1(0, L) \mid x^\alpha u_x \in H^1(0, L) \}.$$

2. Pour $1 \leq \alpha < 2$, on définit $H_\alpha^2(0, L)$ par

$$\begin{aligned} H_\alpha^2(0, L) &= \{ u \in H_\alpha^1(0, L) \mid x^\alpha u_x \in H^1(0, L), \} \\ &= \left\{ u \in L^2(0, L) \left| \begin{array}{l} u \text{ est localement absolument continue dans } (0, L], \\ x^\alpha u \in H_0^1(0, L), x^\alpha u_x \in H^1(0, L), \text{ et } (x^\alpha u_x)(0) = 0 \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Remarque 1.4 Notons que si $u \in H_\alpha^2(0, L)$, alors

- u satisfait $u(0) = u(L) = 0$, si $0 \leq \alpha < 1$.
- u satisfait $(x^\alpha u_x)(0) = 0$ et $u(L) = 0$, si $1 \leq \alpha < 2$.

1.3 Équation d'onde sur l'intervalle $(0, L)$

On appelle équation des ondes (linéaire) l'EDP d'évolution,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

t est le variable de temps, x est le variable de l'espace et c est un nombre réel positif donné, qui représente la vitesse de propagation de l'onde.

1.3.1 Équations hyperboliques

Nous étudierons le problème avec conditions initiales et aux limites suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + Au = f, & (x, t) \in Q_T, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0, u_t(x, 0) = u_1, & x \in (0, L). \end{cases} \quad (1.2)$$

Le symbole A désigne un opérateur différentiel de second ordre, ayant soit la forme

$$Au = -(a(x)u_x)_x, \quad (1.3)$$

où a est une fonction de classe $C^1(0, L)$.

L'opérateur différentiel partiel $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + A$ est dit (uniformément) hyperbolique, si on suppose qu'il existe une constante $\theta > 0$, telle que

$$a(x) \geq \theta, \quad (1.4)$$

pour tout $x \in (0, L)$.

1.3.2 Solutions faibles

Supposons que A a la forme (1.3) et satisfait (1.4). Cherchons une notion appropriée de solution faible pour le problème (1.2).

Définition 1.5 (Voir [8]) Soient $f \in L^2(0, T; L^2(0, L))$, $u_0 \in H_0^1(0, L)$, et soit $u_1 \in L^2(0, L)$. On dit que $u \in L^2(0, T; H_0^1(0, L))$ est une solution faible du problème (1.2) si

$$u_t \in L^2(0, T; L^2(0, L)) \text{ et } u_{tt} \in L^2(0, T; H^{-1}(0, L)),$$

et

1. Pour toute $v \in L^2(0, T; H_0^1(0, L))$,

$$\int_0^T \langle u_{tt}(t), v(t) \rangle_* dt + \int_0^T \int_0^L a(x) u_x v_x dx dt = \int_0^T \int_0^L f v dx dt. \quad (1.5)$$

2. $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$.

Remarque 1.6 La condition 1 peut être énoncée dans la forme équivalente

1'. Pour toute $v \in H_0^1(0, L)$ et p.p. $t \in (0, T)$,

$$\langle u_{tt}(t), v \rangle_* + (a(x) u_x(t), v_x)_0 = (f(t), v)_0. \quad (1.6)$$

1.3.3 Existence et unicité

Théorème 1.7 (Existence et unicité) Supposons que $u_0 \in H_0^1(0, L)$, $u_1 \in L^2(0, L)$ et $f \in L^2(0, T; L^2(0, L))$, alors il existe une solution faible unique u du problème (1.2) satisfaisant

$$u \in C([0, T]; H_0^1(0, L)), \quad u_t \in C([0, T]; L^2(0, L)) \text{ et } u_{tt} \in L^2(0, T; H^{-1}(0, L)).$$

Démonstration. (Voir [7]) ■

Théorème 1.8 (Régularité) Supposons que $u_0 \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$, $u_1 \in H_0^1(0, L)$ et $f' \in L^2(0, T; L^2(0, L))$, alors il existe une solution faible unique u de problème (1.2) satisfaisant

$$u \in C([0, T]; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)), \quad u_t \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \text{ et } u_{tt} \in L^2(0, T; L^2(0, L)). \quad (1.7)$$

Démonstration. (Voir [7]). ■

1.4 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Young

Supposons que $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p . i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Rappelons l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \quad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0. \quad (1.8)$$

Si $p = p' = 2$

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2), \quad (1.9)$$

qu'on utilisera aussi sous la forme

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)(2\sqrt{2}b) \leq \frac{1}{4}a^2 + 4b^2. \quad (1.10)$$

Inégalité de Hölder

Soient $u \in L^p(0, L)$, $v \in L^{p'}(0, L)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $uv \in L^1(0, L)$ et

$$\int_0^L |uv| dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}. \quad (1.11)$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $u \in L^2(0, L)$, $v \in L^2(0, L)$. Alors $uv \in L^1(0, L)$ et

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}. \quad (1.12)$$

C'est-à-dire

$$\left| \int_0^L u(x)v(x)ds \right| \leq \left(\int_0^L |u(x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |v(x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Inégalité de Gronwall

Lemme 1.9 (Voir [8]) Soient $\Psi(t)$ est une fonction continue sur $[0, T]$ qui satisfait

$$\Psi(t) \leq C_1 \int_0^t \Psi(s)ds + C_2,$$

pour des constantes $C_1, C_2 \geq 0$. Alors

$$\Psi(t) \leq C_2(1 + C_1te^{C_1t}) \text{ p.p. } 0 \leq t \leq T. \quad (1.13)$$

En particulier, si

$$\Psi(t) \leq C_1 \int_0^t \Psi(s)ds,$$

pour p.p. $0 \leq t \leq T$, alors $\Psi(t) = 0$.

Inégalité de Hardy-Poincaré

Hardy-Poincaré est une inégalité importante qui joue un rôle similaire à celui des inégalités de Poincaré. On démontre que ([1])

$$\forall u \in H_\alpha^1(0, L), \quad \int_0^L u^2 dx \leq C \int_0^L x^\alpha u_x^2 dx,$$

pour un certains $C > 0$. Ceci implique que

$$\forall u \in H_\alpha^1(0, L), \quad \|u\|_{L^2(0,L)} \leq C \|x^{\frac{\alpha}{2}} u_x\|_{L^2(0,L)}. \quad (1.14)$$

D'après (1.1) et (1.14), on voit que

$$\forall u \in H_\alpha^1(0, L), \quad \|u\|_{H_\alpha^1(0,L)} = \left(\int_0^L x^\alpha u_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.15)$$

avec $u \mapsto \|x^{\frac{\alpha}{2}} u_x\|_{L^2(0,L)}$ définit une norme équivalente à la norme $u \mapsto \|u\|_{H_\alpha^1(0,L)}$.

Formule de divergence

Théorème 1.10 *Supposons que Ω est un domaine régulier de \mathbb{R} avec \vec{n} est le vecteur d'unité normal à $\partial\Omega$ orienté vers l'extérieur. Pour tout champ de vecteurs régulier \vec{w} dans Ω , nous avons*

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{w} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{w} \cdot \vec{n} d\sigma(x), \quad (1.16)$$

où $d\sigma(x)$ est la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$.

Chapitre 2

Équation d'onde dégénérée

Dans ce chapitre on va faire une étude théorique (existence et unicité) du problème considéré dans ce mémoire.

2.1 Position du problème

Soient $T > 0$, $L > 0$, $\alpha \in (0, 2)$ et l'ensemble $Q = (0, L) \times (0, T)$. On considère l'équation d'onde dégénérée linéaire suivante :

$$\begin{cases} y_{tt} - (x^\alpha y_x)_x = f, & (x, t) \in Q, \\ \begin{cases} y(0, t) = 0, & (0 < \alpha < 1) \\ x^\alpha y_x(0, t) = 0, & (1 \leq \alpha < 2) \end{cases} & t \in (0, T), \\ y(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (2.1)$$

où

$$f \in L^1(0, T; L^2(0, L)) \text{ et } (y_0, y_1) \in H_\alpha^1(0, L) \times L^2(0, L). \quad (2.2)$$

C'est un problème dégénéré, parce que $a(x) = x^\alpha$ ne satisfait pas l'hypothèse (1.4). La condition $x^\alpha y_x(0, t) = 0$, pour $1 \leq \alpha < 2$, veut dire que $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha y_x(0, t) = 0$.

2.2 Existence et unicité des solutions

Dans la suite, nous démontrons que le problème (2.1) est bien posé, et qu'il admet une solution faible unique.

2.2.1 Formulation faible

Nous multiplions l'équation de (2.1) par une fonction test φ satisfaisant

$$\varphi \in L^2(0, T; H_\alpha^1(0, L)) \text{ tel que } \varphi_t \in L^2(Q) \text{ et } \varphi(\cdot, T) = 0.$$

Il vient

$$\int_Q y_{tt} \varphi dx dt - \int_Q (x^\alpha y_x)_x \varphi dx dt = \int_Q f \varphi dx dt.$$

On l'intégrante par partie, on obtient

$$\int_0^L y_t \varphi dx \Big|_0^T - \int_Q y_t \varphi_t dx dt - \int_0^T x^\alpha y_x \varphi dt \Big|_0^L + \int_Q x^\alpha y_x \varphi_x dx dt = \int_Q f \varphi dx dt.$$

En tenant compte du fait que

$$\begin{cases} \int_0^L y_t(x, T) \varphi(x, T) dx = 0, \\ \int_0^T (x^\alpha y_x)(0, t) \varphi(0, t) dt = 0, \\ \int_0^T (x^\alpha y_x)(L, t) \varphi(L, t) dt = 0, \end{cases}$$

on obtient

$$\int_Q (-y_t \varphi_t + x^\alpha y_x \varphi_x) dx dt - \int_0^L y_1 \varphi(x, 0) dx = \int_Q f \varphi dx dt. \quad (2.3)$$

Précisons maintenant le sens de la solution faible du problème (2.1).

Définition 2.1 Une fonction $y \in C([0, T]; H_\alpha^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$ est une solution faible du système (2.1), si $y(x, 0) = y_0(x)$ et dans $(0, L)$ et elle satisfait (2.3) pour toute $\varphi \in L^2(0, T; H_\alpha^1(0, L))$ tel que $\varphi_t \in L^2(Q)$ et $\varphi(\cdot, T) = 0$.

On ne peut pas obtenir l'existence d'une solution pour le problème (2.1) à partir du théorème 1.7, parce que nous perdons la coercivité dans le terme $(x^\alpha y_x)_x$, i.e.,

$$\nexists \theta > 0 \text{ telle que } x^\alpha \geq \theta, \text{ pour } x \in (0, L).$$

On utilisant une méthode de perturbation, on veut démontrer le théorème suivant

Théorème 2.2 Sous l'hypothèse (2.2), le système (2.1) a une solution faible unique

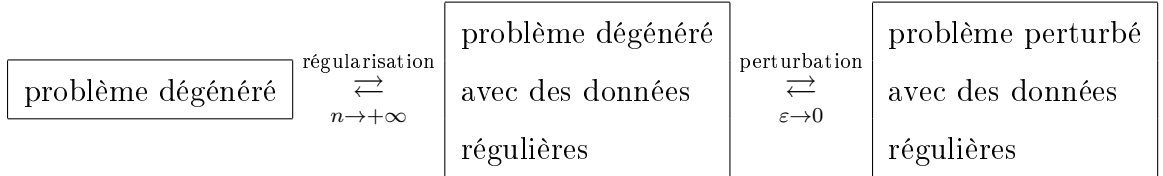
$$y \in C([0, T]; H_\alpha^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L)).$$

De plus, il existe une constante $C = C(T, L, \alpha)$ tel que

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_t\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|x^{\frac{\alpha}{2}} y_x\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 \\ \leq C(\|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_0\|_{H_\alpha^1(0, L)}^2 + \|y_1\|_{L^2(0, L)}^2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour démontrer ce théorème, on divise la démonstration à plusieurs étapes

- On considère le même problème mais avec des données régulières.
- On introduit un petit paramètre de perturbation ε pour que le problème devient non dégénéré et dont l'existence et l'unicité qui sont assuré par le théorème 1.8.
- En passe à la limite dans ε .
- Enfin, en passe à la limite dans les données régulières du problème et déduit le théorème 2.2.



2.2.2 Équation d'onde perturbée

Supposons que f et (y_0, y_1) satisfait

$$f' \in L^1(0, T; L^2(0, L)), y_0 \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \text{ et } y_1 \in H_0^1(0, L). \quad (2.5)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons le problème suivant

$$\begin{cases} y_{tt}^\varepsilon - ((x^\alpha + \varepsilon)y_x^\varepsilon)_x = f, & (x, t) \in Q, \\ y^\varepsilon(0, t) = y^\varepsilon(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y^\varepsilon(x, 0) = y_0(x), y_t^\varepsilon(x, 0) = y_1(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (2.6)$$

C'est un problème non dégénéré puisque

$$\exists \theta = \varepsilon, x^\alpha + \varepsilon \geq \varepsilon, \forall x \in (0, L).$$

D'après le théorème 1.8, le système (2.6) admet une solution unique y^ε satisfaisant (1.7).

Dans toutes les démonstrations suivantes, la constante C peut varier d'une ligne à l'autre.

2.2.3 Estimations a priori pour le problème perturbé avec des données régulières

Lemme 2.3 *Sous l'hypothèse (2.5), il existe une constante $C = C(T, L, \alpha)$ tel que*

$$\begin{aligned} \|y^\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_t^\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|\sqrt{x^\alpha + \varepsilon} |y_x^\varepsilon|\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 \\ \leq C(\|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_0\|_{H_\alpha^1(0, L)}^2 + \|y_1\|_{L^2(0, L)}^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Démonstration. Comme y^ε satisfait (1.7), on peut multiplier les deux côtés de la première équation dans (2.6) par $y_t^\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(0, L))$ et en intègre sur $Q_s = (0, L) \times (0, s)$

$$\int_{Q_s} y_{tt}^\varepsilon y_t^\varepsilon dx dt - \int_{Q_s} ((x^\alpha + \varepsilon) y_x^\varepsilon)_x y_t^\varepsilon dx dt = \int_{Q_s} f y_t^\varepsilon dx dt.$$

On intégrant par partie dans le deuxième intégrale, on obtient

$$\int_0^s \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |y_t^\varepsilon|^2 dx dt - \int_0^s (x^\alpha + \varepsilon) y_x^\varepsilon y_t^\varepsilon dt \Big|_0^L + \int_{Q_s} (x^\alpha + \varepsilon) y_x^\varepsilon y_{tx}^\varepsilon dx dt = \int_{Q_s} f y_t^\varepsilon dx dt.$$

Comme $y_t^\varepsilon \in H_0^1(0, L)$, alors $\int_0^s (x^\alpha + \varepsilon) y_x^\varepsilon y_t^\varepsilon dt \Big|_0^L = 0$, il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^s \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (|y_t^\varepsilon|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon|^2) dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L |y_t^\varepsilon(x, s)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, s)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L |y_t^\varepsilon(x, 0)|^2 - (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, 0)|^2 dx \\ &= \int_{Q_s} f y_t^\varepsilon dx dt. \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le deuxième terme, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, s)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, s)|^2) dx \\ & \leq \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, 0)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, 0)|^2) dx + 2 \int_0^s \|f\|_{L^2(0, L)} \|y_t^\varepsilon\|_{L^2(0, L)} dt \\ & \leq \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, 0)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, 0)|^2) dx + 2 \max_{s \in [0, T]} \|y_t^\varepsilon\|_{L^2(0, L)} \int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} & \max_{s \in [0, T]} \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, s)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, s)|^2) dx \\ & \leq \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, 0)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, 0)|^2) dx + 2 \max_{s \in [0, T]} \|y_t^\varepsilon\|_{L^2(0, L)} \int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young (1.10), on obtient

$$\begin{aligned} & \max_{s \in [0, T]} \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, s)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, s)|^2) dx \\ & \leq \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, 0)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, 0)|^2) dx + \frac{1}{4} \max_{s \in [0, T]} \|y_t^\varepsilon\|_{L^2(0, L)}^2 + 4 \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2 \\ & \leq \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, 0)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, 0)|^2) dx + \frac{1}{4} \max_{s \in [0, T]} \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, s)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, s)|^2) dx \\ & + 4 \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2. \end{aligned}$$

On fait la soustraction de $\left(\frac{1}{4} \max_{s \in [0, T]} \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, s)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, s)|^2) dx\right)$ de les deux côtés d'inégalité, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \max_{s \in [0, T]} \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, s)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, s)|^2) dx \\ & \leq \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, 0)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, 0)|^2) dx + 4 \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \max_{s \in [0, T]} \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, s)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, s)|^2) dx \\ & \leq C \int_0^L (|y_t^\varepsilon(x, 0)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, 0)|^2) dx + C \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2. \quad (2.8) \end{aligned}$$

D'autre part, on note que

$$\begin{aligned} y^\varepsilon(x, s) &= y^\varepsilon(x, 0) + \int_0^s y_t^\varepsilon(x, \sigma) d\sigma \\ (y^\varepsilon(x, s))^2 &= \left(y^\varepsilon(x, 0) + \int_0^s y_t^\varepsilon(x, \sigma) d\sigma \right)^2. \end{aligned}$$

Comme $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, il vient

$$(y^\varepsilon(x, s))^2 \leq 2(y^\varepsilon(x, 0))^2 + 2 \left(\int_0^s y_t^\varepsilon(x, \sigma) d\sigma \right)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$(y^\varepsilon(x, s))^2 \leq 2(y^\varepsilon(x, 0))^2 + 2 \left(\int_0^s 1^2 d\sigma \right) \left(\int_0^s y_t^{\varepsilon 2}(x, \sigma) d\sigma \right),$$

et en l'intégrant sur $(0, L)$, il vient

$$\int_0^L |y^\varepsilon(x, s)|^2 dx \leq 2 \int_0^L |y^\varepsilon(x, 0)|^2 dx + 2s \int_0^s \int_0^L |y_t^\varepsilon(x, \sigma)|^2 dx d\sigma. \quad (2.9)$$

Par l'addition de (2.8), (2.9) et de $\int_0^s \int_0^L (|y^\varepsilon|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon|^2) dx d\sigma$, à le deuxième terme, on obtient

$$\begin{aligned} & \max_{s \in [0, T]} \int_0^L (|y^\varepsilon(x, s)|^2 + |y_t^\varepsilon(x, s)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, s)|^2) dx \\ & \leq C \left[\int_0^L (|y^\varepsilon(x, 0)|^2 + |y_t^\varepsilon(x, 0)|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon(x, 0)|^2) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^T \int_0^L (|y^\varepsilon|^2 + |y_t^\varepsilon|^2 + (x^\alpha + \varepsilon) |y_x^\varepsilon|^2) dx d\sigma + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned} & \|y^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}^2 + \|y_t^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}^2 + \|\sqrt{x^\alpha + \varepsilon} y_x^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}^2 \\ & \leq C(\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}^2 + \|y_0\|_{H_\alpha^1(0,L)}^2 + \|y_1\|_{L^2(0,L)}^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

■

2.2.4 Existence de solutions pour le problème dégénéré avec des données régulières

Maintenant, on va passer à la limite dans ε , i.e., $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lemme 2.4 *Sous l'hypothèse (2.5), le système (2.1) a une solution faible*

$$y \in C([0, T]; H_\alpha^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; H_\alpha^1(0, L)),$$

de plus

$$\begin{aligned} & \|y\|_{C(0,T;H_\alpha^1(0,L))}^2 + \|y_t\|_{C(0,T;L^2(0,L))}^2 \\ & \leq C(\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}^2 + \|y_0\|_{H_\alpha^1(0,L)}^2 + \|y_1\|_{L^2(0,L)}^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Démonstration. Par (2.10) on trouve

$$\left\{ \begin{array}{ll} (y^\varepsilon)_\varepsilon & \text{est borné dans } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\ (y_t^\varepsilon)_\varepsilon & \text{est borné dans } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\ (\sqrt{x^\alpha + \varepsilon} y_x^\varepsilon)_\varepsilon & \text{est borné dans } L^\infty(0, T; L^2(0, L)). \end{array} \right.$$

Donc, il existe une fonction $y \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$ satisfait $y_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$, et on peut extraire des sous-suites notée (y^{ε_j}) , $(y_t^{\varepsilon_j})$ et $(\sqrt{x^\alpha + \varepsilon} y_x^{\varepsilon_j})$ qui convergent faiblement, tel que lorsque $j \rightarrow +\infty$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} y^{\varepsilon_j} \rightharpoonup y & \text{dans } L^2(Q), \\ y_t^{\varepsilon_j} \rightharpoonup y_t & \text{dans } L^2(Q), \\ \sqrt{x^\alpha + \varepsilon} y_x^{\varepsilon_j} \rightharpoonup \sqrt{x^\alpha} y_x & \text{dans } L^2(Q). \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Rappelons que (y^{ε_j}) est la solution faible du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{tt}^{\varepsilon_j} - ((x^\alpha + \varepsilon) y_x^{\varepsilon_j})_x = f, & (x, t) \in Q, \\ y^{\varepsilon_j}(0, t) = y^{\varepsilon_j}(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y^{\varepsilon_j}(x, 0) = y_0(x), y_t^{\varepsilon_j}(x, 0) = y_1(x), & x \in (0, L). \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Soit $\varphi \in C^\infty(\overline{Q})$, avec $\varphi = 0$ au voisinage de $\{0\} \times (0, T)$, $\{L\} \times (0, T)$ et $(0, L) \times \{T\}$. On multiplie l'équation de (2.13) par φ et en l'intégrant sur Q

$$\int_Q y_{tt}^{\varepsilon_j} \varphi dx dt - \int_Q ((x^\alpha + \varepsilon) y_x^{\varepsilon_j})_x \varphi dx dt = \int_Q f \varphi dx dt.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_0^L y_t^{\varepsilon_j} \varphi dx \Big|_0^T - \int_Q y_t^{\varepsilon_j} \varphi_t dx dt - \int_0^T (x^\alpha + \varepsilon) y_x^{\varepsilon_j} \varphi dt \Big|_0^L + \int_Q (x^\alpha + \varepsilon) y_x^{\varepsilon_j} \varphi_x dx dt \\ = \int_Q f \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Comme $\left(\int_0^T (x^\alpha + \varepsilon) y_x^{\varepsilon_j} \varphi dt \Big|_0^L = 0 \right)$ et $\left(\int_0^L y_t^{\varepsilon_j}(x, T) \varphi(x, T) dx = 0 \right)$, alors

$$\int_Q [-y_t^{\varepsilon_j} \varphi_t + (x^\alpha + \varepsilon) y_x^{\varepsilon_j} \varphi_x] dx dt - \int_0^L y_1(x) \varphi(x, 0) dx = \int_Q f \varphi dx dt.$$

D'après (2.12), lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve

$$\int_Q [-y_t \varphi_t + x^\alpha y_x \varphi_x] dx dt - \int_0^L y_1(x) \varphi(x, 0) dx = \int_Q f \varphi dx dt.$$

On obtient que y satisfait (2.3) pour tout $\varphi \in L^2(0, T; H_\alpha^1(0, L))$ avec $\varphi_t \in L^2(Q)$ et $\varphi(\cdot, T) = 0$. D'après [10] on a de plus $y \in C([0, T]; H_\alpha^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$. Donc y est une solution faible du système (2.1) associé avec les fonctions régulières (y_0, y_1) et f .

En utilisant la semi-continuité inférieure des normes, i.e.,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\| \geq \|u\|, \text{ si } u^\varepsilon \rightharpoonup u, \quad (2.14)$$

et en passant à la limite inférieure dans (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_t\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|x^{\frac{\alpha}{2}} |y_x|\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 \\ \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|y\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|y_t\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\sqrt{x^\alpha + \varepsilon} |y_x|\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 \\ \leq C(\|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_0\|_{H_\alpha^1(0, L)}^2 + \|y_1\|_{L^2(0, L)}^2). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_t\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|x^{\frac{\alpha}{2}} |y_x|\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 \\ \leq C(\|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_0\|_{H_\alpha^1(0, L)}^2 + \|y_1\|_{L^2(0, L)}^2), \end{aligned}$$

qui peut être aussi écrit comme

$$\|y\|_{C(0, T; H_\alpha^1(0, L))}^2 + \|y_t\|_{C(0, T; L^2(0, L))}^2 \leq C(\|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_0\|_{H_\alpha^1(0, L)}^2 + \|y_1\|_{L^2(0, L)}^2),$$

où y est la solution du problème (2.1) avec des données régulières. ■

2.2.5 Existence de solutions pour le problème dégénéré

Maintenant, on démontre l'existence du solution faible de (2.1) pour tout

$$(y_0, y_1) \in H_\alpha^1(0, L) \times L^2(0, L) \text{ et } f \in L^1(0, T; L^2(0, L)).$$

Lemme 2.5 *Sous l'hypothèse (2.2), le système (2.1) a une solution faible*

$$y \in C([0, T]; H_\alpha^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L)).$$

Démonstration. Soient (y_0^n) , (y_1^n) et (f^n) des suites des fonctions satisfaisants (2.5), tel que lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{cases} y_0^n \rightarrow y_0 & \text{dans } H_\alpha^1(0, L), \\ y_1^n \rightarrow y_1 & \text{dans } L^2(0, L), \\ f^n \rightarrow f & \text{dans } L^1(0, T; L^2(0, L)). \end{cases} \quad (2.15)$$

En particulier ces suites sont nécessairement des suites de Cauchy. On note par y^p , y^q deux solutions de (2.1) associée aux données (y_0^p, y_1^q) , f^p et (y_0^q, y_1^q) , f^q (respectivement), donc $(y^p - y^q)$ est une solution du problème suivant

$$\begin{cases} (y^p - y^q)_{tt} - ((x^\alpha + \varepsilon)(y^p - y^q)_x)_x = f^p - f^q, & (x, t) \in Q, \\ (y^p - y^q)(0, t) = (y^p - y^q)(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ (y^p - y^q)(x, 0) = y_0^p - y_0^q, (y^p - y^q)_t(x, 0) = y_1^p - y_1^q, & x \in (0, L). \end{cases}$$

D'après le lemme 2.4 $(y^p - y^q)$ satisfait aussi

$$\begin{aligned} & \|y^p - y^q\|_{C([0, T]; H_\alpha^1(0, L))}^2 + \|y_t^p - y_t^q\|_{C([0, T]; L^2(0, L))}^2 \\ & \leq C(\|f^p - f^q\|_{L^1(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_0^p - y_0^q\|_{H_\alpha^1(0, L)}^2 + \|y_1^p - y_1^q\|_{L^2(0, L)}^2). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Par les convergences (2.15), lorsque $q, p \rightarrow +\infty$ le second membre de (2.16) tends vers zéro, ce qui donne

$$\begin{cases} \|y^p - y^q\|_{C([0, T]; H_\alpha^1(0, L))}^2 \rightarrow 0, \\ \|y_t^p - y_t^q\|_{C([0, T]; L^2(0, L))}^2 \rightarrow 0. \end{cases}$$

D'où, y^n et y_t^n sont des suites de Cauchy dans les espaces complets $C([0, T]; H_\alpha^1(0, L))$, $C([0, T]; L^2(0, L))$ (respectivement), donc elles sont converges vers des limites y et y_t

$$\begin{cases} y^n \rightarrow y & \text{dans } C([0, T]; H_\alpha^1(0, L)), \\ y_t^n \rightarrow y_t & \text{dans } C([0, T]; L^2(0, L)). \end{cases}$$

D'autre part, on a y^n solution de (2.1), satisfait

$$\int_Q [-y_t^n \varphi_t + x^\alpha y_x^n \varphi_x] dxdt - \int_0^L y_1^n(x) \varphi(x, 0) dx = \int_Q f \varphi dxdt.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, la limite y satisfait

$$\int_Q [-y_t \varphi_t + x^\alpha y_x \varphi_x] dxdt - \int_0^L y_1(x) \varphi(x, 0) dx = \int_Q f \varphi dxdt.$$

On voit que y est une solution faible de (2.1) pour $(y_0, y_1) \in H_\alpha^1(0, L) \times L^2(0, L)$ et $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$. De plus si on prend $y_0^q = y_1^q = f^q = 0$, ce qui implique que $y^q = 0$, et on remplaçons dans (2.16), on obtient

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_t\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|x^{\frac{\alpha}{2}} y_x\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 \\ \leq C(\|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|y_0\|_{H_\alpha^1(0, L)}^2 + \|y_1\|_{L^2(0, L)}^2). \end{aligned}$$

■

2.3 L'unicité de la solution du problème dégénéré

Lemme 2.6 *Sous l'hypothèse (2.2), la solution du problème (2.1) est unique.*

Démonstration. Soient \tilde{y}, \bar{y} deux solutions faibles du système (2.1), et soit $w = \tilde{y} - \bar{y}$.

Alors $w \in C([0, T]; H_\alpha^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$ et satisfait

$$\begin{cases} w_{tt} - (x^\alpha w_x)_x = 0, & (x, t) \in Q, \\ \begin{cases} w(0, t) = 0, & (0 < \alpha < 1) \\ x^\alpha w_x(0, t) = 0, & (1 \leq \alpha < 2) \end{cases} & t \in (0, T), \\ w(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ w(x, 0) = 0, w_t(x, 0) = 0, & x \in (0, L). \end{cases} \quad (2.17)$$

On multiplie l'équation de (2.17) par $\varphi \in L^2(0, T; H_\alpha^1(0, L))$ avec $\varphi_t \in L^2(Q)$ et $\varphi(\cdot, T) = 0$, et en l'intégrant sur Q . On obtient

$$\int_Q [-w_t \varphi_t + x^\alpha w_x \varphi_x] dxdt = 0, \quad \forall \varphi \in L^2(0, T; H_\alpha^1(0, L)). \quad (2.18)$$

Pour tout $\ell \in \mathcal{D}(Q)$, considérons le problème de l'équation d'onde dégénérée suivant :

$$\begin{cases} \psi_{tt} - (x^\alpha \psi_x)_x = \ell, & (x, t) \in Q, \\ \begin{cases} \psi(0, t) = 0, & (0 < \alpha < 1) \\ x^\alpha \psi_x(0, t) = 0, & (1 \leq \alpha < 2) \end{cases} & t \in (0, T), \\ \psi(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \psi(x, 0) = 0, \psi_t(x, 0) = 0, & x \in (0, L), \end{cases} \quad (2.19)$$

alors $\psi \in C([0, T]; H_\alpha^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$ est une solution faible de (2.19). Ceci implique que

$$\int_Q [-\psi_t \varphi_t + x^\alpha \psi_x \varphi_x] dx dt = \int_Q \ell \varphi dx dt. \quad (2.20)$$

D'un part , on peut prendre $\varphi = \psi$ et en le remplaçant dans (2.18)

$$\int_Q [-w_t \psi_t + x^\alpha w_x \psi_x] dx dt = 0, \quad (2.21)$$

D'autre part, si $\varphi = w$ et en le remplaçons dans (2.20), on obtient

$$\int_Q [-\psi_t w_t + x^\alpha \psi_x w_x] dx dt = \int_Q \ell w dx dt, \quad \forall \ell \in \mathcal{D}(Q). \quad (2.22)$$

De (2.21) et (2.22), on déduit que

$$\int_Q \ell w dx dt = 0, \quad \forall \ell \in \mathcal{D}(Q),$$

donc $w(x, t) = 0$ p.p. dans Q . Ceci implique que

$$\tilde{y}(x, t) = \bar{y}(x, t).$$

D'où l'unicité de la solution. ■

2.4 Un résultat de régularité

Pour $\alpha \in (0, 1)$ et pour des données initiales régulières on a une solution plus régulière

Théorème 2.7 *Soit $0 < \alpha < 1$ supposons que*

$$(y_0, y_1) \in H_\alpha^2(0, L) \times H_\alpha^1(0, L) \text{ et } f \in L^1(0, T; H_\alpha^1(0, L)), \quad (2.23)$$

alors il existe une solution unique pour (2.1) qui satisfait

$$y \in C([0, T]; H_\alpha^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; H_\alpha^1(0, L)),$$

de plus

$$\|y\|_{L^\infty(0, T; H_\alpha^2(0, L))}^2 + \|y_t\|_{L^\infty(0, T; H_\alpha^1(0, L))}^2 \leq C(\|f\|_{L^1(0, T; H_\alpha^1(0, L))}^2 + \|y_0\|_{H_\alpha^2(0, L)}^2 + \|y_1\|_{H_\alpha^1(0, L)}^2).$$

Démonstration. Ce résultat est démontré dans [4, Proposition 4.2] en utilisant la théorie des semi-groupes. ■

2.5 Une estimation d'énergie

Dans la suite on établit une estimation de l'énergie des solutions de l'équation d'onde dégénérée

$$\begin{cases} y_{tt} - (x^\alpha y_x)_x = f, & (x, t) \in Q, \\ \begin{cases} y(0, t) = 0, & (0 < \alpha < 1) \\ x^\alpha y_x(0, t) = 0, & (1 \leq \alpha < 2) \end{cases} & t \in (0, T), \\ y(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (2.24)$$

avec

$$f \in L^1(0, T; L^2(0, L)) \text{ et } (y_0, y_1) \in H_\alpha^1(0, L) \times L^2(0, L). \quad (2.25)$$

On définit la fonctionnelle d'énergie comme suit

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [y_t^2(x, t) + x^\alpha y_x^2(x, t)] dx. \quad (2.26)$$

On démontre le résultat suivant.

Lemme 2.8 *Sous l'hypothèse (2.25), il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$E(t) \leq C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2 \right), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.27)$$

Démonstration. Pour toute $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$, on multiplie (formellement) la première équation de (2.24) par y_t et en l'intégrant sur $(0, L)$, on obtient

$$\int_0^L y_{tt} y_t dx - x^\alpha y_x y_t \Big|_0^L + \int_0^L x^\alpha y_x y_{tx} dx = \int_0^L f y_t dx.$$

Comme $x^\alpha y_x y_t \Big|_0^L = 0$, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (|y_t|^2 + x^\alpha |y_x|^2) dx = \int_0^L f y_t dx.$$

Puis, en l'intégrant sur $(0, t)$

$$\frac{1}{2} \int_0^L (y_t^2(x, t) + x^\alpha y_x^2(x, t)) dx - \frac{1}{2} \int_0^L (y_t^2(x, 0) + x^\alpha y_x^2(x, 0)) dx = \int_0^t \int_0^L f y_t dx ds.$$

Donc

$$E(t) = E(0) + 2 \int_0^t \int_0^L f y_t dx ds.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.12), on obtient

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0) + 2 \int_0^t \left(\int_0^L f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L y_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq E(0) + 2 \int_0^t \|f\|_{L^2(0,L)} \|y_t\|_{L^2(0,L)} ds. \end{aligned}$$

On prend le max de $\|y_t(s)\|_{L^2(0,L)}$ sur $[0, T]$

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0) + 2 \max_{t \in [0, T]} \|y_t\|_{L^2(0,L)} \int_0^t \|f\|_{L^2(0,L)} dt \\ &\leq E(0) + 2 \max_{t \in [0, T]} \|y_t\|_{L^2(0,L)} \int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young (1.10), et par l'addition de $\left(\frac{1}{4} \max_{t \in [0, T]} \|x^{\frac{\alpha}{2}} y_x\|_{L^2(0,L)}^2 \right)$ au 2^{ième} côté, il vient

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} E(t) &\leq E(0) + \frac{1}{4} \max_{t \in [0, T]} \left(\|y_t\|_{L^2(0,L)}^2 + \|x^{\frac{\alpha}{2}} y_x\|_{L^2(0,L)}^2 \right) + 4 \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt \right)^2 \\ &\leq E(0) + \frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} E(t) + 4 \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt \right)^2. \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} E(t) \leq E(0) + 4 \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt \right)^2.$$

Ce qui veut dire

$$E(t) \leq C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt \right)^2 \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

■

2.6 Une inégalité directe au point $x = L$

La proposition suivante donne un résultat de régularité pour la trace de la solution y de (2.24) sur la frontière $\{L\} \times (0, T)$.

Proposition 2.9 *Pour tout $0 < \alpha < 1$, toute solution faible y de (2.24) satisfait $y_x(L, \cdot) \in L^2(0, L)$. De plus,*

$$\int_0^T y_x^2(L, t) dt \leq C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt \right)^2 \right). \quad (2.28)$$

Démonstration. Il suffit de montrer (2.28) pour les solutions régulières de (2.24). Supposons que f et (y_0, y_1) satisfait (2.23). Alors d'après le théorème 2.7, le système (2.24) admet une solution unique $y \in C([0, T]; H_\alpha^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; H_\alpha^1(0, L))$. On pose

$$q(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{L}{2}), \\ -2x + \frac{3}{2}L, & x \in (\frac{L}{2}, L], \end{cases}$$

et multiplions les deux côtés de la première équation de (2.24) par qy_x , on obtient

$$y_{tt}qy_x - (x^\alpha y_x)_x qy_x = f qy_x. \quad (2.29)$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(y_t qy_x) &= y_{tt}qy_x + y_t qy_{xt}, \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha qy_x^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha y_x qy_x) = (x^\alpha y_x)_x qy_x + x^\alpha y_x (qy_x)_x, \end{aligned}$$

alors

$$y_{tt}qy_x = \frac{\partial}{\partial t}(y_t qy_x) - y_t qy_{xt}, \quad (2.30)$$

$$(x^\alpha y_x)_x qy_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha qy_x^2) - x^\alpha y_x (qy_x)_x. \quad (2.31)$$

En remplaçons (2.30) et (2.31) dans (2.29), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(y_t qy_x) - y_t qy_{xt} - \frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha qy_x^2) + x^\alpha y_x (qy_x)_x = f qy_x.$$

Notons que

$$\frac{\partial}{\partial x}(-x^\alpha qy_x^2) + \frac{\partial}{\partial t}(y_t qy_x) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} -x^\alpha qy_x^2 \\ y_t qy_x \end{pmatrix},$$

alors (2.29) s'écrit

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} -x^\alpha qy_x^2 \\ y_t qy_x \end{pmatrix} - y_t qy_{xt} + x^\alpha y_x (qy_x)_x = f qy_x. \quad (2.32)$$

En l'intégrant (2.32) sur Q , on a

$$\underbrace{\int_Q \operatorname{div} \begin{pmatrix} -x^\alpha qy_x^2 \\ y_t qy_x \end{pmatrix} dxdt}_{I_1} + \underbrace{\int_Q -y_t qy_{xt} dxdt}_{I_2} + \underbrace{\int_Q x^\alpha y_x (qy_x)_x dxdt}_{I_3} = \int_Q f qy_x dxdt. \quad (2.33)$$

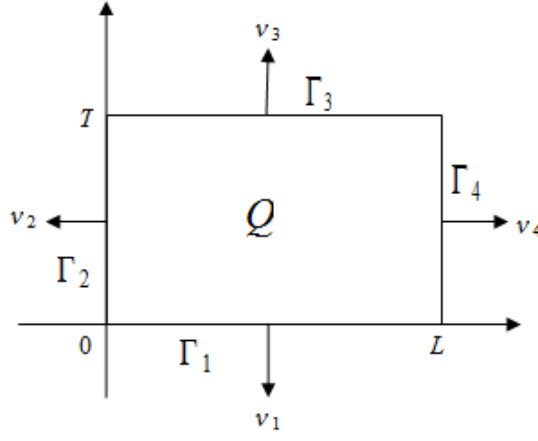


FIGURE 2.1 – Domaine Q_T

On applique la formule de divergence (1.16), pour calculer l'intégrale I_1 , i.e.,

$$I_1 = \int_Q \operatorname{div} \begin{pmatrix} -x^\alpha q y_x^2 \\ y_t q y_x \end{pmatrix} dx dt = \int_\Gamma \begin{pmatrix} -x^\alpha q y_x^2 \\ y_t q y_x \end{pmatrix} \cdot \nu d\sigma, \quad (2.34)$$

où ν la normale vers l'extérieur et $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, avec

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x, 0) : 0 \leq x \leq L\}; \quad \nu_1 = (0, -1); \\ \Gamma_2 &= \{(0, t) : 0 \leq t \leq T\}; \quad \nu_2 = (-1, 0); \\ \Gamma_3 &= \{(x, T) : 0 \leq x \leq L\}; \quad \nu_3 = (0, +1); \\ \Gamma_4 &= \{(L, t) : 0 \leq t \leq T\}; \quad \nu_4 = (+1, 0). \end{aligned}$$

Donc (2.34) s'écrit

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} -x^\alpha q y_x^2 \\ y_t q y_x \end{pmatrix} \cdot \nu_1 dx + \int_{\Gamma_2} \begin{pmatrix} -x^\alpha q y_x^2 \\ y_t q y_x \end{pmatrix} \cdot \nu_2 dt \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \begin{pmatrix} -x^\alpha q y_x^2 \\ y_t q y_x \end{pmatrix} \cdot \nu_3 dx + \int_{\Gamma_4} \begin{pmatrix} -x^\alpha q y_x^2 \\ y_t q y_x \end{pmatrix} \cdot \nu_4 dt, \end{aligned}$$

et il vient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^L \begin{pmatrix} (-x^\alpha q y_x^2)(x, 0) \\ (y_t q y_x)(x, 0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx + \int_0^T \begin{pmatrix} (-x^\alpha q y_x^2)(0, t) \\ (y_t q y_x)(0, t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &\quad + \int_0^L \begin{pmatrix} (-x^\alpha q y_x^2)(x, T) \\ (y_t q y_x)(x, T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx + \int_0^T \begin{pmatrix} (-x^\alpha q y_x^2)(L, t) \\ (y_t q y_x)(L, t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$I_1 = - \int_0^L (y_t q y_x)(x, 0) dx + \int_0^T (x^\alpha q y_x^2)(0, t) dt + \int_0^L (y_t q y_x)(x, T) dx - \int_0^T (x^\alpha q y_x^2)(L, t) dt,$$

d'où

$$I_1 = \int_0^L q y_t y_x dx \Big|_0^T - \int_0^T x^\alpha q y_x^2 dt \Big|_0^L.$$

D'autre part, pour calculer I_2 , nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x} (y_t q y_t) = (y_t q)_x y_t + y_t q y_{xt},$$

alors

$$y_t q y_{xt} = \frac{\partial}{\partial x} (q y_t^2) - (y_t q)_x y_t.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_Q y_t q y_{xt} dx dt = - \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L q y_t^2 dx dt + \int_Q (y_t q)_x y_t dx dt \\ &= - \int_0^T q y_t^2 dt \Big|_0^L + \int_Q (y_{xt} q + q_x y_t) y_t dx dt \\ &= - \int_0^T q y_t^2 dt \Big|_0^L + \underbrace{\int_Q y_t q y_{xt} dx dt}_{A=I_2} + \int_Q q_x y_t^2 dx dt. \end{aligned}$$

En transférant le terme A vers l'autre part, il vient

$$\begin{aligned} 2I_2 &= - \int_0^T q y_t^2 dt \Big|_0^L + \int_Q q_x y_t^2 dx dt \\ I_2 &= - \frac{1}{2} \int_0^T q y_t^2 dt \Big|_0^L + \frac{1}{2} \int_Q q_x y_t^2 dx dt. \end{aligned}$$

Reste à calculer I_3 , on a

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_Q x^\alpha y_x (q y_x)_x dx dt \\ &= \int_0^T x^\alpha q y_x^2 dx \Big|_0^L - \int_Q (x^\alpha y_x)_x q y_x dx dt \\ &= \int_0^T x^\alpha q y_x^2 dx \Big|_0^L - \int_Q \alpha x^{\alpha-1} q y_x^2 dx dt - \int_Q x^\alpha y_{xx} q y_x dx dt. \end{aligned} \tag{2.35}$$

On a besoin de calculer $\int_Q x^\alpha y_{xx} q y_x dx dt$, on a

$$\begin{aligned} x^\alpha y_x (q y_x)_x &= x^\alpha y_x (q_x y_x + q y_{xx}) = x^\alpha q_x y_x^2 + x^\alpha y_x q y_{xx} \\ x^\alpha y_x q y_{xx} &= x^\alpha y_x (q y_x)_x - x^\alpha q_x y_x^2. \end{aligned}$$

Ceci donne que

$$\int_Q x^\alpha y_x q y_{xx} dx dt = \int_Q x^\alpha y_x (q y_x)_x dx dt - \int_Q x^\alpha q_x y_x^2 dx dt. \quad (2.36)$$

Remplaçant (2.36) dans (2.35), il vient

$$I_3 = \int_0^T x^\alpha q y_x^2 dx \Big|_0^L - \int_Q \alpha x^{\alpha-1} q y_x^2 dx dt - \underbrace{\int_Q x^\alpha y_x (q y_x)_x dx dt}_{B=I_3} + \int_Q x^\alpha q_x y_x^2 dx dt.$$

En transférant le terme B vers l'autre part, on obtient

$$2I_3 = \int_0^T x^\alpha q y_x^2 dx \Big|_0^L - \int_Q \alpha x^{\alpha-1} q y_x^2 dx dt + \int_Q x^\alpha q_x y_x^2 dx dt,$$

d'où

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_0^T x^\alpha q y_x^2 dx \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_Q \alpha x^{\alpha-1} q y_x^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_Q x^\alpha q_x y_x^2 dx dt.$$

On remplaçons I_1 , I_2 et I_3 dans (2.33), il vient

$$\begin{aligned} \int_0^L q y_t y_x dx \Big|_0^T - \int_0^T x^\alpha q y_x^2 dt \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^T q y_t^2 dt \Big|_0^L + \frac{1}{2} \int_Q q_x y_t^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T x^\alpha q y_x^2 dx \Big|_0^L \\ - \frac{1}{2} \int_Q \alpha x^{\alpha-1} q y_x^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_Q x^\alpha q_x y_x^2 dx dt = \int_Q f q y_x dx dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T x^\alpha q y_x^2 dt \Big|_0^L = \int_0^L q y_t y_x dx \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q q_x (y_t^2 + x^\alpha y_x^2) dx dt \\ - \frac{1}{2} \int_Q \alpha x^{\alpha-1} q y_x^2 dx dt - \int_Q q f y_x dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T q y_t^2 dt \Big|_0^L, \quad (2.37) \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T L^\alpha \left(-\frac{L}{2}\right) y_x^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^T (x^{\alpha+1} y_x^2)(0, t) dx = \int_0^L q y_t y_x dx \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q q_x (y_t^2 + x^\alpha y_x^2) dx dt \\ - \frac{1}{2} \int_Q \alpha x^{\alpha-1} q y_x^2 dx dt - \int_Q q f y_x dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T q y_t^2 dt \Big|_0^L. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \frac{L^{\alpha+1}}{2} \int_0^T y_x^2(L, t) dt + \int_0^T (x^{\alpha+1} y_x^2)(0, t) dx = -2 \int_0^L q y_t y_x dx \Big|_0^T - \int_Q q_x (y_t^2 + x^\alpha y_x^2) dx dt \\ + \int_Q \alpha x^{\alpha-1} q y_x^2 dx dt + 2 \int_Q q f y_x dx dt + \int_0^T q y_t^2 dt \Big|_0^L. \quad (2.38) \end{aligned}$$

On veut démontrer que $\int_0^T (x^{\alpha+1}y_x^2)(0, t)dx = 0$ et $\int_0^T qy_t^2 dt \Big|_0^L = 0$.

Comme $0 < \alpha < 1$, on a $x^\alpha y_x \in H^1(0, L) \subset C([0, L])$, d'où $x^\alpha y_x$ est borné et en particulier $(x^\alpha y_x)^2$ aussi. Comme $x^{1-\alpha}$ tend vers 0, on obtient

$$(x^{\alpha+1}y_x^2)(0, t) = x^{1-\alpha}(x^\alpha y_x)^2(0, t) = 0,$$

donc

$$\int_0^T (x^{\alpha+1}y_x^2)(0, t)dx = 0.$$

On a aussi $\int_0^T qy_t^2 dt \Big|_0^L = 0$, car

$$\int_0^T qy_t^2 dt \Big|_0^L = \underbrace{\int_0^T q(L)y_t^2(L, t)dt}_C - \underbrace{\int_0^T (xy_t^2)(0, t)dt}_D.$$

$C = 0$, car la condition au limite $x = L$ dans le problème (2.24) donne

$$y(L, t) = 0 \Rightarrow y_t(L, t) = 0 \Rightarrow y_t^2(L, t) = 0, \forall t \in [0, T].$$

$D = 0$, car pour $0 < \alpha < 1$, la condition au limite $x = 0$ dans le problème (2.24) donne

$$y(0, t) = 0 \Rightarrow (xy_t^2)(0, t) = 0.$$

Donc (2.38) devient

$$\begin{aligned} \frac{L^{\alpha+1}}{2} \int_0^T y_x^2(L, t)dt &= -2 \underbrace{\int_0^L qy_t y_x dx \Big|_0^T}_{I_4} \\ &\quad - \underbrace{\int_Q q_x(y_t^2 + x^\alpha y_x^2) dx dt}_{I_5} + \underbrace{\int_Q \alpha x^{\alpha-1} qy_x^2 dx dt}_{I_6} + 2 \underbrace{\int_Q qf y_x dx dt}_{I_7}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

On a

$$I_4 = -2 \underbrace{\int_0^{\frac{L}{2}} qy_t y_x dx \Big|_0^T}_{I_8} - 2 \underbrace{\int_{\frac{L}{2}}^L qy_t y_x dx \Big|_0^T}_{I_9}.$$

En remplaçant q par ses valeurs sur $\left(0, \frac{L}{2}\right)$ et $\left(\frac{L}{2}, L\right)$, on obtient

$$I_8 = -2 \int_0^{L/2} x^{1-\frac{\alpha}{2}} y_t(x^{\frac{\alpha}{2}} y_x) dx \Big|_0^T = -2 \int_0^{L/2} x^{1-\frac{\alpha}{2}} y_t(x^{\frac{\alpha}{2}} y_x)(x, T) dx + 2 \int_0^{L/2} x^{1-\frac{\alpha}{2}} y_t(x^{\frac{\alpha}{2}} y_x)(x, 0) dx.$$

Comme $x^{1-\frac{\alpha}{2}}$ prend son valeur maximale sur l'intervalle $\left[0, \frac{L}{2}\right]$ dans $\frac{L}{2}$, alors

$$I_8 \leq 2 \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{L}{2}} |y_t x^{\frac{\alpha}{2}} y_x| (x, T) dx + 2 \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{L}{2}} |y_t x^{\frac{\alpha}{2}} y_x| (x, 0) dx.$$

En appliquant l'inégalité de Young (1.9), on trouve

$$I_8 \leq \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{L}{2}} (y_t^2 + x^\alpha y_x^2) (x, T) dx + \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{L}{2}} (y_t^2 + x^\alpha y_x^2) (x, 0) dx. \quad (2.40)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} I_9 &= -2 \int_{L/2}^L y_t \left(-2x + \frac{3}{2}L\right) y_x dx \Big|_0^T \\ &= -2 \int_{L/2}^L y_t(x, T) \left(-2x + \frac{3}{2}L\right) y_x(x, T) dx + 2 \int_{L/2}^L y_t(x, 0) \left(-2x + \frac{3}{2}L\right) y_x(x, 0) dx. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} &\leq x \leq L, \\ -\frac{L}{2} &\leq -2x + \frac{3}{2}L \leq \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\left| -2x + \frac{3}{2}L \right| \leq \frac{L}{2}, \quad (2.41)$$

comme $\alpha \geq 0$, alors

$$\left(\frac{L}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq x^{\frac{\alpha}{2}}.$$

En multiplie les deux termes par $\left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}$, on obtient

$$\left| -2x + \frac{3}{2}L \right| \leq \frac{L}{2} \leq \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Alors

$$I_9 \leq 2 \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{L}{2}}^L |y_t x^{\frac{\alpha}{2}} y_x| (x, T) dx + 2 \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{L}{2}}^L |y_t x^{\frac{\alpha}{2}} y_x| (x, 0) dx.$$

Par l'inégalité de Young (1.9), on obtient

$$I_9 \leq \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{L}{2}}^L (y_t^2 + x^\alpha y_x^2) (x, T) dx + \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_{\frac{L}{2}}^L (y_t^2 + x^\alpha y_x^2) (x, 0) dx. \quad (2.42)$$

Par l'addition de (2.40) et (2.42), on obtient

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^L (y_t^2 + x^\alpha y_x^2)(x, T) dx + \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^L (y_t^2 + x^\alpha y_x^2)(x, 0) dx \\ &\leq \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} (E(T) + E(0)). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.8, on a

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \left(C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt \right)^2 \right) + E(0) \right) \\ &\leq C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

De même manière, on montre que

$$\begin{aligned} - \int_Q q_x (y_t^2 + x^\alpha y_x^2) dx dt + \int_Q \alpha x^{\alpha-1} q y_x^2 dx dt + 2 \int_Q q f y_x dx dt \\ \leq C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt \right)^2 \right). \end{aligned}$$

On a

$$q_x = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{L}{2}), \\ -2, & x \in [\frac{L}{2}, L], \end{cases}$$

alors $|q_x| \leq 2$, on prend

$$I_{10} = - \int_Q q_x (y_t^2 + x^\alpha y_x^2) dx dt \leq 2 \int_Q |y_t^2 + x^\alpha y_x^2| dx dt \leq C \int_0^T E(t) dt \leq CTE(T).$$

D'après le lemme 2.8

$$I_{10} \leq C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt \right)^2 \right). \quad (2.44)$$

Notons que

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_Q \alpha x^{\alpha-1} q y_x^2 dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^{L/2} \alpha x^{\alpha-1} x y_x^2 dx dt + \int_0^T \int_{L/2}^L \alpha x^{\alpha-1} \left(-2x + \frac{3}{2}L \right) y_x^2 dx dt \\ &\leq \int_0^T \int_0^{L/2} \alpha x^\alpha y_x^2 dx dt + \int_0^T \int_{L/2}^L \alpha x^\alpha x^{-1} \left(-2x + \frac{3}{2}L \right) y_x^2 dx dt. \end{aligned}$$

D'après (2.41), et lorsque $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ alors $x^{-1} \leq \frac{2}{L}$. Ceci implique que

$$\begin{aligned} I_{11} &\leq \int_0^T \int_0^{L/2} \alpha x^\alpha y_x^2 dx dt + \left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{2}{L}\right) \int_0^T \int_{L/2}^L |\alpha x^\alpha y_x^2| dx dt \\ &\leq \alpha \int_0^T \int_0^{L/2} |x^{\frac{\alpha}{2}} y_x|^2 dx dt + \alpha \int_0^T \int_{L/2}^L |x^{\frac{\alpha}{2}} y_x|^2 dx dt. \end{aligned}$$

En ajoutant $\int_Q y_t^2 dxdt$ à le 2^{eme} côté, on obtient

$$I_{11} \leq C \int_0^T \int_0^L (x^\alpha y_x^2 + y_t^2) dxdt.$$

Par (2.26), il vient

$$I_{11} \leq C \int_0^T E(t)dt \leq C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt \right)^2 \right). \quad (2.45)$$

Posons

$$I_7 = 2 \underbrace{\int_0^T \int_0^{\frac{L}{2}} qf y_x dxdt}_{I_{12}} + 2 \underbrace{\int_0^T \int_{L/2}^L qf y_x dxdt}_{I_{13}}.$$

Dans I_{12} on remplaçons $q = x$ par $x^{1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}$, on obtient

$$I_{12} = 2 \int_0^T \int_0^{L/2} x^{1-\frac{\alpha}{2}} (x^{\frac{\alpha}{2}} y_x) f dxdt.$$

Comme $x^{1-\frac{\alpha}{2}}$ est prend son valeur maximale sur l'intervalle $\left[0, \frac{L}{2}\right]$ dans $\frac{L}{2}$, alors

$$I_{12} \leq 2 \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^T \int_0^{L/2} |x^{\frac{\alpha}{2}} y_x f| dxdt. \quad (2.46)$$

D'autre part, on a

$$I_{13} = 2 \int_0^T \int_{L/2}^L \left(-2x + \frac{3}{2}L\right) f y_x dxdt.$$

De même manière précédente $-2x + \frac{3}{2}L \leq \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}}$ et il vient

$$I_{13} \leq 2 \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^T \int_{L/2}^L |x^{\frac{\alpha}{2}} y_x f| dxdt. \quad (2.47)$$

Par l'addition de (2.46) et (2.47), on obtient

$$I_7 \leq 2 \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^T \int_0^L |x^{\frac{\alpha}{2}} y_x f| dxdt.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$I_7 \leq \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^T \|x^{\frac{\alpha}{2}} y_x\|_{L^2(0,L)} \|f\|_{L^2(0,L)} dt,$$

et on prend le max de $x^{\frac{\alpha}{2}} y_x$ sur $[0, T]$, on a

$$I_7 \leq \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} T \left(\max_{t \in [0, T]} \|x^{\frac{\alpha}{2}} y_x\|_{L^2(0,L)} \right) \int_0^T \|f\|_{L^2(0,L)} dt.$$

En appliquant l'inégalité de Young, on a

$$I_7 \leq \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{T}{2} \left(\max_{t \in [0, T]} \|x^{\frac{\alpha}{2}} y_x\|_{L^2(0, L)}^2 + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2 \right).$$

Par l'addition de $\max_{t \in [0, T]} \|y_t\|_{L^2(0, L)}^2$ à le deuxième terme, on obtient

$$\max_{t \in [0, T]} \|x^{\frac{\alpha}{2}} y_x\|_{L^2(0, L)}^2 \leq \max_{t \in [0, T]} \|x^{\frac{\alpha}{2}} y_x + y_t\|_{L^2(0, L)}^2.$$

D'après le lemme 2.8, on a

$$\max_{t \in [0, T]} \|x^{\frac{\alpha}{2}} y_x\|_{L^2(0, L)}^2 \leq 2 \max_{t \in [0, T]} E(t) \leq C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2 \right),$$

et on déduit

$$\begin{aligned} I_7 &\leq C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2 \right) + C \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2 \\ &\leq C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2 \right). \end{aligned} \tag{2.48}$$

On remplaçons (2.43), (2.44), (2.45) et (2.48) dans (2.39) on trouve

$$\int_0^T y_x^2(L, t) dt \leq C \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(0, L)} dt \right)^2 \right).$$

■

Chapitre 3

Résolution numérique

Le but de ce chapitre est de trouver une solution numérique approchée pour l'équation d'onde dégénérée pour $0 < \alpha < 1$.

3.1 Méthode des différences finies

3.1.1 Discrétisation du domaine

Soit le problème suivant, pour $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{cases} u_{tt} - (x^\alpha u_x)_x = 0, & (x, t) \in Q, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (3.1)$$

Le domaine temporel $[0, T]$ est représenté par un nombre fini des points de maillage

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N_t-1} < t_{N_t} = T.$$

De même, le domaine spatial $[0, L]$ est remplacé par un ensemble des points de maillage

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N_x-1} < x_{N_x} = L.$$

On peut voir le maillage est bidimensionnel dans le plans x, t , constitué de points (x_i, t_j) , avec $i = 0, \dots, N_x$ et $j = 0, \dots, N_t$.

Maillages uniformes Pour des points de mailles distribués uniformément, nous pouvons introduire un pas de Discrétisation en espace $\Delta x = h = \frac{L}{N_x}$ et un pas de Discrétisation en temps $\Delta t = k = \frac{T}{N_t}$, nous avons que

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, \dots, N_x, \quad t_j = j\Delta t, \quad j = 0, \dots, N_t.$$

Nous avons aussi que

$$\begin{cases} \Delta x = x_i - x_{i-1}, & i = 1, \dots, N_x. \\ \Delta t = t_j - t_{j-1}, & j = 1, \dots, N_t. \end{cases}$$

3.1.2 La solution discrète

La solution $u(x, t)$ est recherché aux points de maillage. Nous introduisons la maillage u_i^j , qui est une approximation de la solution exacte aux points (x_i, t_j) pour $i = 0, \dots, N_x$ et $j = 0, \dots, N_t$. En utilisant la méthode des différences finies, nous développerons des équations algébriques pour calculer la fonction de maillage.

3.1.3 Remplacement des dérivés par des différences finies

Les dérivées de second ordre peuvent être remplacées par des différences centrales. L'approximation de différence fini de la dérivée du second ordre dans la direction t le plus utilisée est

$$u_{tt}(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{k^2}. \quad (3.2)$$

Une approximation similaire de la dérivée du second ordre dans la direction x est

$$u_{xx}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}. \quad (3.3)$$

En utilisant pour la dérivée u_x l'approximation centré suivante

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}. \quad (3.4)$$

Nous choisissons évidemment

$$u_i^0 = f(x_i) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_x.$$

Afin d'obtenir des approximations u_i^1 et en utilisant pour $u(x, k)$ nous utilisons une expansion de Taylor par rapport au temps pour obtenir

$$\begin{aligned} u(x, k) &= u(x, 0) + ku_t(x, 0) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x, 0) + \mathcal{O}(k^3) \\ &= f(x) + kg(x) + \frac{k^2}{2}(x^\alpha f')_x(x) + \mathcal{O}(k^3). \end{aligned} \quad (3.5)$$

D'après la première équation et la dernière égalité du problème (3.1), alors

$$u_{tt}(x, 0) = (x^\alpha u_x)_x(x, 0) = (x^\alpha f')_x(x) = \alpha x^{\alpha-1} f' + x^\alpha f''. \quad (3.6)$$

On remplace les approximations (3.3), (3.4) dans (3.6), on obtient

$$u_i^1 = u_i^0 + kg(x_i) + \left(1 + \frac{\alpha}{2i}\right) \beta_i u_{i+1}^0 - 2\beta_i u_i^0 + \left(1 - \frac{\alpha}{2i}\right) \beta_i u_{i-1}^0, \quad (3.7)$$

avec $\beta_i = \frac{k^2}{2h^2}(ih)^\alpha$.

3.2 Schéma des différences finies pour $0 < \alpha < 1$

3.2.1 Système algébrique

On remplace (3.2), (3.3) et (3.4) dans (3.1), et en prend

$$g(x) = 0, f(x) = \chi_{[3/8, 5/8]} \sin(8\pi x).$$

On obtient

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{k^2} - (ih)^\alpha \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} - \alpha(ih)^{\alpha-1} \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} = 0, \\ u_0^j = u_{N_x}^j = 0, \\ u_i^0 = \chi_{[3/8, 5/8]} \sin(8\pi x_i), \\ u_i^1 = u_i^0 = u_i^0 + kg(x_i) + \left(1 + \frac{\alpha}{2i}\right) \beta_i u_{i+1}^0 - 2\beta_i u_i^0 + \left(1 - \frac{\alpha}{2i}\right) \beta_i u_{i-1}^0. \end{cases} \quad (3.8)$$

On connaît les u_i^0 , et en déduit les u_i^1 et ainsi des suites jusqu'aux u_i^j . Ce schéma est dit explicite car les u_i^{j+1} se déduisant directement des u_i^j et u_i^{j-1} . Où encore

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + (ih)^\alpha \frac{k^2}{h^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \frac{\alpha}{2i} (ih)^\alpha \frac{k^2}{h^2} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j), \quad j = 1, 2, \dots, N_t.$$

Supposons que u_i^j et u_i^{j-1} sont disponibles pour $i = 0, \dots, N_x$. Donc le seul inconnu dans (3.8) est u_i^{j+1} , qui nous pouvons maintenant résoudre pour

$$u_i^{j+1} = \left(1 + \frac{\alpha}{2i}\right) c_i u_{i+1}^j + 2(1 - c_i) u_i^j + \left(1 - \frac{\alpha}{2i}\right) c_i u_{i-1}^j - u_i^{j-1}, \quad (3.9)$$

avec $c_i = i^\alpha \frac{k^2}{h^{2-\alpha}} = i^\alpha \lambda$, avec $\lambda = \frac{k^2}{h^{2-\alpha}}$.

3.2.2 Système matricielle

Nous changeons le i de 1 jusqu'à N_x dans (3.9), alors on peut écrire le système des équations comme suit

$$U_i^{j+1} = AU_i^j - U_i^{j-1}.$$

Avec

$$U_i^{j+1} = \begin{pmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{j+1} \\ u_N^{j+1} \end{pmatrix}, U_i^j = \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ u_{N-1}^j \\ u_N^j \end{pmatrix} \text{ et } U_i^{j-1} = \begin{pmatrix} u_1^{j-1} \\ u_2^{j-1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{j-1} \\ u_N^{j-1} \end{pmatrix},$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 2(1-c_1) & (1+\frac{\alpha}{2})c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ (1-\frac{\alpha}{4})c_2 & 2(1-c_2) & (1+\frac{\alpha}{4})c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & (1+\frac{\alpha}{2})c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & (1-\frac{\alpha}{2N})c_N & 2(1-c_N) \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Stabilité

Condition de stabilité CFL

Pour l'équation d'onde avec une vitesse constante c , les schémas explicites sont stables sous la condition CFL. Ceci revient à supposer que

$$c\Delta t \leq \Delta x.$$

Ce type de condition, majorant le pas de temps en fonction du pas d'espace, est appelé condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL en abrégé). Par extension, le nombre $c\frac{\Delta t}{\Delta x}$ est souvent appelé nombre CFL.

Si la vitesse est variable, i.e., $c = c(x)$, le critère de stabilité dépendra de la variable spatiale. Nous devons donc choisir un Δt assez petit pour qu'aucune cellule de maillage n'ait $\Delta t > \Delta x/c(x)$. Autrement dit, nous devons utiliser la plus grande valeur de c dans le critère

$$\Delta t \leq \beta \frac{\Delta x}{\max_{x \in [0,L]} c(x)}.$$

Le paramètre β est inclus comme facteur de sécurité : dans certains problèmes avec un variant c il s'avère que l'on doit choisir $\beta < 1$ pour avoir des solutions stables ($\beta = 0.9$ peut agir comme une valeur globale), voir [5].

ALGORITHME

Initialisation :

- N_t : (nombre de Discrétisation de temps).
- N_x : (nombre de Discrétisation d'espace).
- L : (longueur).
- T : (temps final).
- Epsilon.
- dt : (pas de temps).
- dx : (pas d'espace).
- Alpha: (entre 0 et 1).
- f : (condition initiale).
- g : (vitesse initiale).

Résolution :

Pour $j = 1, 2, \dots, N_t$

Pour $i = 1, 2, \dots, N_x$

$$U_i^{i+1} \leftarrow \left(1 + \frac{\alpha}{2i}\right)c_i U_{i+1}^j + 2(1 - c_i)U_i^j + \left(1 - \frac{\alpha}{2i}\right)c_i U_{i-1}^j - U_i^{j-1}.$$

Écrire et dessiner

U_i^{i+1} .

Stop

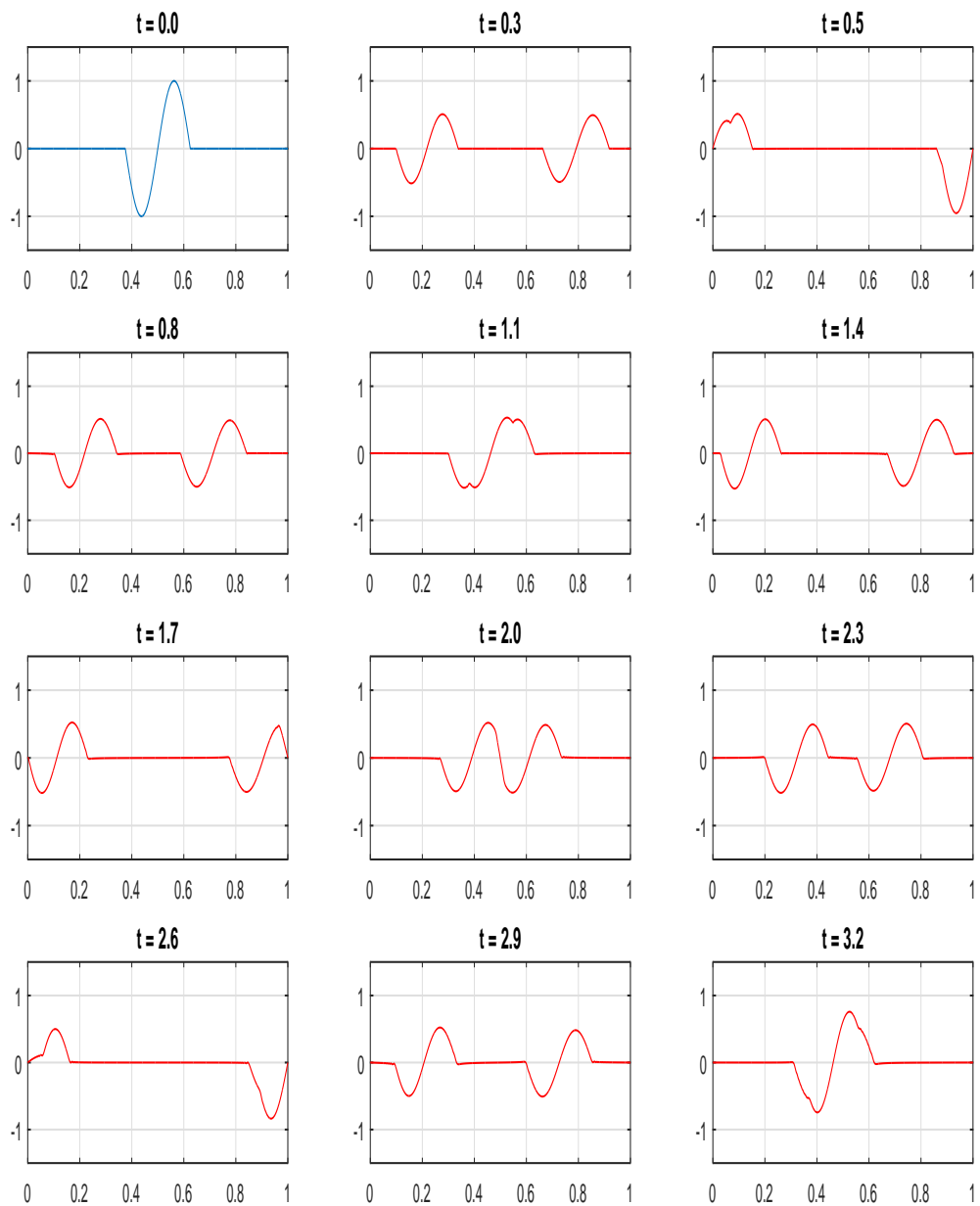


FIGURE 3.1 – Solution numérique pour $\alpha = 0.1$.

Le comportement de l'onde pour $\alpha = 0.1$ est très proche du comportement de l'onde pour une vitesse constante $c = 1$, mais les vibrations arrive à la frontière $x = 1$ un peut plus vite que la frontière $x = 0$.

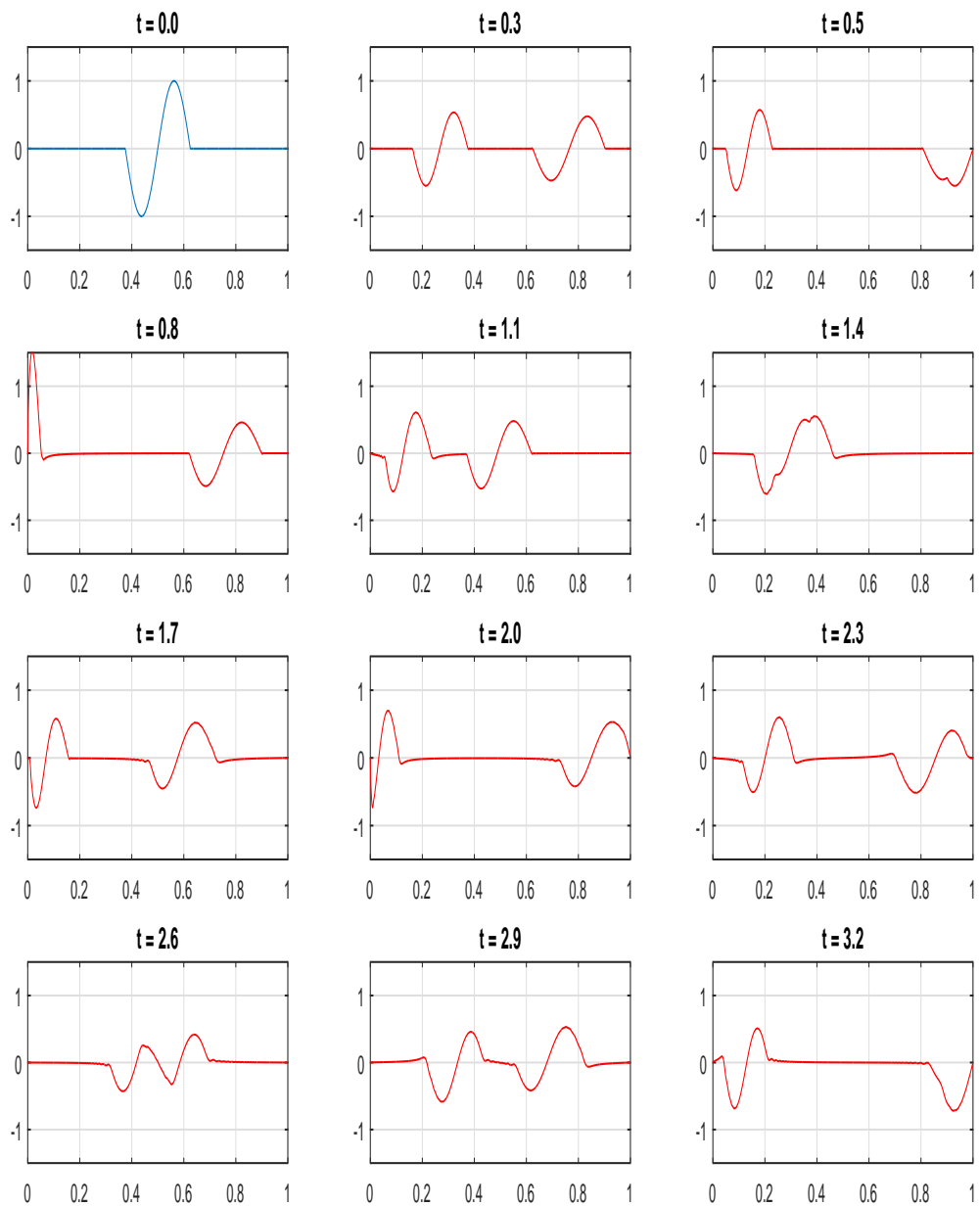


FIGURE 3.2 – Solution numérique pour $\alpha = 0.5$.

La vitesse de propagation de l'onde est plus faible au voisinage de $x = 0$ pour $\alpha = 0.5$, les vibrations arrivent à la frontière $x = 1$ plus vite que la frontière $x = 0$.

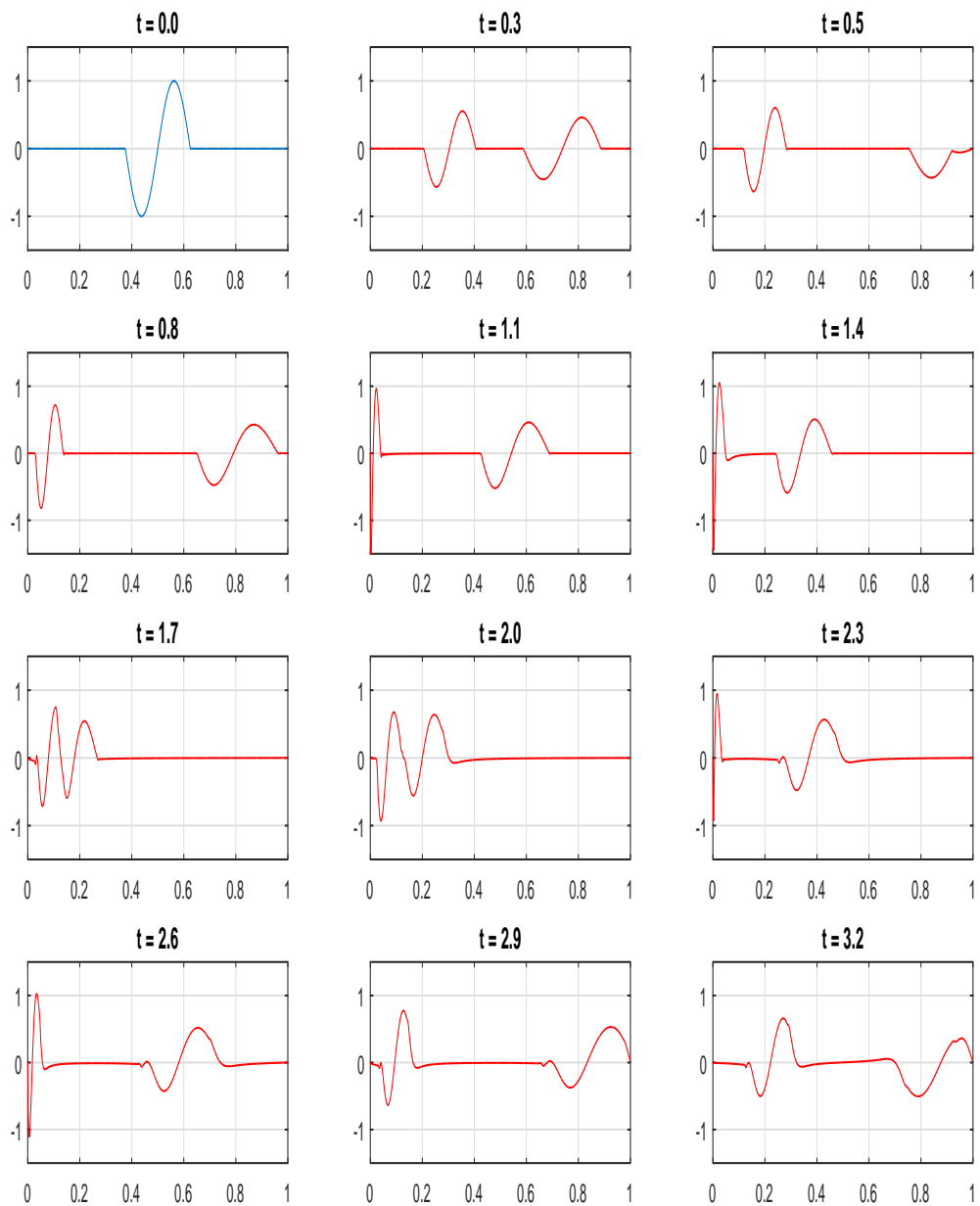


FIGURE 3.3 – Solution numérique pour $\alpha = 0.9$.

Pour $\alpha = 0.9$, la vitesse de propagation de l'onde devient très faible au voisinage de $x = 0$. Par conséquent, les vibrations de la corde s'accroissent dans ce voisinage et l'amplitude de l'onde augmente dans cette région.

Bibliographie

- [1] F. ALABAU-BOUSSOUIRA, P. CANNARSA, AND G. FRAGNELLI, *Carleman Estimates for Degenerate Parabolic Operators with Applications to null Controllability*, Journal of Evolution Equations, 6(2) :161–204, 2006.
- [2] P. CANNARSA, P. MARTINEZ, AND J. VANCOSTENOBLE, *Carleman Estimates for a class of degenerate parabolic opérateurs*, SIAM Journal on Control and Optimization, 47(1) : 1-19, 2008.
- [3] C. EVANS. *Partial Differential Equation*, AMS, 2 ed, 2010.
- [4] M. GUEYE, *Exact Boundary Controllability Of 1-D Parabolic And Hyperbolic Degenerate Equations*, SIAM Journal on Control and Optimization, 52(4) : 2037-2054, 2014.
- [5] H. P. LANGTANGEN ET S. LINGE, *Finite Difference Computing with PDEs :A Modern Software Approach*.Vol 16. Springer, 2017.
- [6] R. J. LEVEQUE, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations : steady-state end time-dependent problems*. Vol 98. Siam, 2007.
- [7] J. L. LIONS ET E. MAGENES, . *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*. Vol. 1. Dunod, Paris, 1968.
- [8] S. SALSA, *Partial Differential Equations in Action*. Springer, 2016.
- [9] A. TVEITO ET R. WINTHER, *Introduction to partial differenteal equations :a computational approach*. Vol 29. Springer Science & Business Media, 2004.
- [10] M. ZHANG, H. GAO, *Null Controllability of Some Degenerate Wave Equations*. Journal of Systems Science and Complexity, 30(5) : 1027-1041, 2017.

ملخص:

نهتم في هذا العمل بمعادلة موجة خطية منحلة في المجال $(0, L)$, $L > 0$. باستخدام تقديرات أولية جنباً إلى جنب مع طريقة الاضطرابات, نبين وجود حل وحيد للمعادلة. علاوة على ذلك, نعطي بعض الأمثلة العددية باستخدام طريقة الفروق المحدودة.

كلمات مفتاحية :

معادلة موجة منحلة, تقديرات أولية, طريقة اضطراب, الفروق المحدودة.

Résumé:

Nous considérons dans ce travail une équation d'onde linéaire dégénérée dans l'intervalle $(0, L)$, $L > 0$. En utilisant des estimations à priori combinées avec une méthode de perturbation, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution. De plus, quelques exemples numériques sont donnés en utilisant la méthode des différences finies.

Mots clés:

Équation d'onde dégénérée, estimation à priori, méthode de perturbation, différences finies.

Abstract:

We consider in this work a linear degenerate wave equation in the interval $(0, L)$, $L > 0$. Using a priori estimates combined with a perturbation method, we show the existence and the uniqueness of the solution. Moreover, some numerical example are given using the finite differences method

Key words:

Degenerate wave equation, a priori estimates, perturbation method, finite differences.