

Table des matières

Notations générale	iv
Introduction	v
1 Les espaces $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$	1
1.1 L'espace de Lebesgue $L^{p(\cdot)}$	1
1.1.1 L'espace modulaire	1
1.2 Les espaces $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$	5
1.2.1 Rappel sur les distributions tempérées	10
2 L'espace de Besov $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$	14
2.1 L'espace $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$	14
2.2 Inclusions	18
2.3 L'espace de Hölder-Zygmund	24
3 Caractérisation par la fonction maximale de Peetre	27
3.1 Quelques lemmes techniques	27
3.2 Quasi-normes équivalentes	28
Conclusion générale	40
Bibliographie	43
Annexe	44

Notations générale

- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$: est l'ensemble des nombre naturels.
- $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i$: est le produit usuel sur \mathbb{R}^n .
- Si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$, "supp f " est le support de f ,

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

- $f * g(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y)g(y)dy$: est la convolution des fonctions f et g .
- $C(K)$: est l'espace des fonctions continues sur un compact K à valeurs réelles.
- Noté que $\mathcal{L}^{\alpha, p(\cdot)}$ ou $H_{p(\cdot)}^\alpha$ est l'espace de potentiel de Bessel dans $L^{p(\cdot)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $W^{1, p(\cdot)}$: est l'espace de Sobolev avec exposant variable, où

$$\|f\|_{W^{1, p(\cdot)}} = \|f\|_{p(\cdot)} + \|\nabla f\|_{p(\cdot)} < \infty.$$

- Soient $f_\nu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\nu \geq 0$, on définit

$$\|f_\nu\|_{\ell_\nu^{q(\cdot)}} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |f_\nu(x)|^{q(x)} \right)^{\frac{1}{q(x)}}.$$

- Soient $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, alors $\ell^q(L^p)$ est l'espace des suites $\{f_\nu\}_\nu \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|\{f_\nu\}_\nu\|_{\ell^q(L^p)} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \|f_\nu(x)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Introduction

Les espaces de Besov avec des exposants variables, $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$, sont apparus initialement au début dans l'article de **A. Alemeid** et **P. Hästö** [1]. Plusieurs propriétés de base ont été établies telle que la caractérisation analytique de Fourier. Quand p, q, α sont des constantes, ces espaces coïncident avec les espaces fonctionnels usuels de Besov $B_{p,q}^\alpha$.

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter quelques résultats pour ces espaces où en généralisant les résultats classiques sur les espace de Besov.

Dans ce mémoire, on fait une analyse de quelques inégalités et inclusions et la caractérisation de ces espaces.

Plan. Cette thèse de mémoire est organisée en trois chapitres et annexe:

- Dans le premier chapitre, on rappelle quelques propriétés des espaces $L^{p(\cdot)}$ et l'espace $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$ et quelques résultats qu'on utilisera par la suite.

Plus précisément, on donne la définition de l'espace modulaire, l'espace de Schwartz et l'espaces des distributions tempérées.

- Dans le deuxième chapitre, on donne la définition de l'espace $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$ et d'autres espaces et on étudie quelques inclusions de ces espaces.

Plus précisément, on donne une définition de l'espace de Besov avec des exposants variables et quelques inégalités classiques et leurs généralisations dans l'espaces $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$ et on étudie l'espaces de Hölder-Zygmund avec des exposants variables.

- Dans le troisième chapitre, on étudie la caractérisation de ces espaces par la fonction maximale de Peetre.

Plus précisément, on donne quelques lemmes techniques et des quasi-normes équivalentes.

Chapitre 1

Les espaces $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques propriétés fondamentaux et les notations essentielles qui seront utilisées dans la suite de cette mémoire.

Nous définirons quelques notions de l'espace modulaire et semi-modulaire pour définir le variable exposant de Lebesgue et l'espace $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$.

1.1 L'espace de Lebesgue $L^{p(\cdot)}$

Nous donnons ici la définition et les propriétés de l'espace de Lebesgue $L^{p(\cdot)}$.

1.1.1 L'espace modulaire

Définition 1.1.1 Soit X un espace vectoriel sur \mathbb{k} ($\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R}). Une fonction $\varrho : X \rightarrow [0, \infty]$ est dite semi-modulaire sur X si les propriétés suivantes soient vérifiées

- a) $\varrho(0) = 0$.
- b) $\varrho(\lambda x) = \varrho(x)$ pour tout $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{k}$ avec $|\lambda| = 1$.
- c) ϱ est quasi-convexe. i.e. $\forall x, y \in X$

$$\varrho(\theta x + (1 - \theta)y) \leq k(\theta\varrho(x) + (1 - \theta)\varrho(y)), \theta \in [0, 1] \text{ et } k \in [1, \infty).$$

- d) ϱ est continue à gauche.
- e) $\varrho(\lambda x) = 0$ pour tout $\lambda > 0$ implique $x = 0$.

Une semi-modulaire ϱ est dit modulaire si

f) $\varrho(x) = 0 \implies x = 0$.

Une semi-modulaire ϱ est dit continue si

g) La application $\lambda \longrightarrow \varrho(\lambda x)$ est continue sur $[0, \infty)$, pour tout $x \in X$.

Exemple 1.1.1 Si $1 \leq p < \infty$ alors

$$\varrho_p(f) := \int_{\Omega} |f(x)|^p dx,$$

définie un modulaire continue sur $L^0(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Où $L^0(\Omega)$ est l'espace de fonctions mesurables.

Définition 1.1.2 Si ϱ un semi-modulaire ou modulaire sur X , alors

$$X_{\varrho} := \{x \in X : \exists \lambda > 0, \varrho(\lambda x) < \infty\}, \quad (1.1.1)$$

est dit espace semi-modulaire ou espace modulaire.

Théorème 1.1.1 Soit ϱ un semi-modulaire sur X . Alors X_{ϱ} est un espace vectoriel quasi-normé sur \mathbb{k} , muni de la quasi-norme

$$\|x\|_{\varrho} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}. \quad (1.1.2)$$

Preuve. (Voir [10. Théorème 2.1.7, p.24]). ■

Définition 1.1.3 Soit

$$\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) = \{p \text{ mesurable: } p(\cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow [c, \infty), c > 0\}.$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{p \text{ mesurable: } p(\cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow [1, \infty)\}.$$

On pose

$$p^- := \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \text{ess } p(y) \quad \text{et} \quad p^+ := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \text{ess } p(y).$$

Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ alors on définit $p' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, conjugué de p , par $\frac{1}{p(y)} + \frac{1}{p'(y)} = 1$.

Définition 1.1.4 Soit $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Alors on obtient un semi-modulaire,

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx.$$

On définit l'espace de Lebesgue avec exposant variable $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ par

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \text{ mesurable} : \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varrho_{p(\cdot)}(\lambda f) = 0 \right\}, \quad (1.1.3)$$

ou

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \text{ mesurable} : \exists \lambda > 0; \varrho_{p(\cdot)}(\lambda f) < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}. \quad (1.1.4)$$

Lemme 1.1.1 Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1 \iff \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1, \quad \forall f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n). \quad (1.1.5)$$

On a

(a) Si $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, alors $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$.

(b) Si $1 < \|f\|_{p(\cdot)}$, alors $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \varrho_{p(\cdot)}(f)$.

Preuve. * " \Leftarrow " Si $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$ alors par définition on a $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$.

* " \Rightarrow " Si $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, alors $\varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1$, pour tout $\lambda > 1$ comme $\varrho_{p(\cdot)}$ est continue à gauche on a $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$.

• Pour (a), on suppose que $0 < \|f\|_{p(\cdot)} \leq 1 \implies \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq 1$, alors d'après convexité de ϱ , $\varrho(0) = 0$ et $\varrho(\cdot) \geq 0$. On a

$$\frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}} \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq 1, \quad \|f\|_{p(\cdot)} \neq 0.$$

Donc $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$. Le cas $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$ est évidente.

• Pour (b), on suppose que $1 < \|f\|_{p(\cdot)}$ alors $1 < \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right)$ pour tout $1 < \lambda < \|f\|_{p(\cdot)}$ d'après la définition 1.1.1 on a $1 < \frac{1}{\lambda} \varrho_{p(\cdot)}(f)$.

Comme λ est arbitraire, nous concluons que $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \varrho_{p(\cdot)}(f)$. ■

Lemme 1.1.2 Soit $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $s > 0$ telle que $sp^- \geq 1$. Alors

$$\| |f|^s \|_{p(\cdot)} = \| f \|_{sp(\cdot)}^s. \quad (1.1.6)$$

Preuve. En utilisant la formule $t^{sp} = (t^s)^p$ et

$$\begin{aligned} \| f \|_{sp(\cdot)}^s &= \left(\inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_{sp(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \right)^s \\ &= \left(\inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{|f|^s}{\lambda^s} \right) \leq 1 \right\} \right)^s \\ &= \left(\inf \left\{ t^{\frac{1}{s}} > 0 : \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{|f|^s}{t} \right) \leq 1 \right\} \right)^s \\ &= \| |f|^s \|_{p(\cdot)}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Théorème 1.1.2 Si $p \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, alors $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de quasi-Banach.

Preuve. (Voir [10. Théorème 3.2.13, p.78]). ■

Lemme 1.1.3 (Inégalité de Hölder) Soient $p, q, s \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\frac{1}{s(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{q(\cdot)}$. Alors

$$\| fg \|_{s(\cdot)} \leq 2 \| f \|_{p(\cdot)} \| g \|_{q(\cdot)}, \quad (1.1.7)$$

pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. (Voir [10. Lemme 3.2.20, p.81]). ■

Définition 1.1.5 Soit $g \in C(\mathbb{R}^n)$. On dit que g est localement log-Höldérienne continue noté $g \in C_{loc}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, s'il existe $c_{\log} > 0$ telle que

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{c_{\log}}{\log(e + 1/|x - y|)}, \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y.$$

On dit que g est globalement log-Höldérienne continue noté $g \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$, si elle est localement log-Höldérienne continue et il existe $g_{\infty} \in \mathbb{R}$, telle que

$$|g(x) - g_{\infty}| \leq \frac{c_{\log}}{\log(e + |x|)}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 1.1.2 On pose

$$p(x) = \max(1 - e^{3-|x|}, \min(6/5, \max(1/2, 3/2 - x^2))), \quad x \in \mathbb{R},$$

alors $p \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.1.1 La notation $\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ est utilisée pour les variables exposants $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{p} \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$. La classe $\mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n)$ est défini de façon analogue. Si $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, la convolution de fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ est définie comme suivant

$$\|\varphi * f\|_{p(\cdot)} \leq c \|\varphi\|_1 \|f\|_{p(\cdot)}. \quad (1.1.8)$$

Pour la preuve, voir [10. Corollaire 3.6.4, p.96].

1.2 Les espaces $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$

Définition 1.2.1 Soient $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$. On définit l'espace $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$ par le modulaire suivant

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}((f_v)_v) := \sum_{v=0}^{\infty} \inf \left\{ \lambda_v > 0 : \varrho_{p(\cdot)} \left(f_v / \lambda_v^{\frac{1}{q(\cdot)}} \right) \leq 1 \right\}, \quad \forall (f_v)_v \subset L^{p(\cdot)}. \quad (1.2.1)$$

On définit la norme usuel sous la forme suivante

$$\|(f_v)_v\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} := \inf \left\{ \mu > 0 : \varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \left(\frac{1}{\mu} (f_v)_v \right) \leq 1 \right\}. \quad (1.2.2)$$

Si $q^+ < \infty$, alors

$$\inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)} \left(f / \lambda^{\frac{1}{q(\cdot)}} \right) \leq 1 \right\} = \left\| |f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}.$$

D'où

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}((f_v)_v) = \sum_{v=0}^{\infty} \left\| |f_v|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}.$$

Proposition 1.2.1 Si $q \in (0, \infty]$ telle que q constante, alors

$$\|(f_v)_v\|_{\ell^q(L^{p(\cdot)})} = \left\| \left(\|f_v\|_{p(\cdot)} \right)_v \right\|_{\ell^q}. \quad (1.2.3)$$

Preuve. On suppose que $q \in (0, \infty)$, on a

$$\| |f_v|^q \|_{\frac{p(\cdot)}{q}} = \| f_v \|_{p(\cdot)}^q.$$

Et ainsi on a

$$\varrho_{\ell^q(L^{p(\cdot)})}((f_v)_v) = \sum_{v=0}^{\infty} \| f_v \|_{p(\cdot)}^q = \left\| \| f_v \|_{p(\cdot)} \right\|_{\ell^q}^q.$$

Dans le cas $q = \infty$, on trouve

$$\varrho_{\ell^\infty(L^{p(\cdot)})}((f_v)_v) = \sum_{v=0}^{\infty} \inf \{ \lambda_v > 0 : \varrho_{p(\cdot)}(f_v/\lambda_v^0) \leq 1 \}.$$

Ici l'inférieur est zéro, si au moins un ensemble n'est pas vide, dans ce cas inférieure est infini.

Par conséquent, dans la définition de la norme on a

$$\| (f_v)_v \|_{\ell^\infty(L^{p(\cdot)})} = \inf \left\{ \mu > 0 : \varrho_{\ell^\infty(L^{p(\cdot)})} \left(\frac{1}{\mu} (f_v)_v \right) \leq 1 \right\},$$

si et seulement si $\varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f_v}{\mu} \right) \leq 1$, pour tout v . Ainsi

$$\inf \mu = \sup \left\{ \| f_v \|_{p(\cdot)} \right\} = \left\| \| f_v \|_{p(\cdot)} \right\|_{\ell^\infty}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Exemple 1.2.1 Soit $(f_v) = (f, 0, 0, \dots)$. On a le modulaire

$$\varrho_{\ell^q(L^{p(\cdot)})} \left(\frac{1}{\mu} (f_v)_v \right) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\mu \lambda^{\frac{1}{q(\cdot)}}} \right) \leq 1 \right\}.$$

Donc

$$\| (f_v)_v \|_{\ell^q(L^{p(\cdot)})} = \inf \left\{ \mu > 0 : \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\mu \lambda^{\frac{1}{q(\cdot)}}} \right) \leq 1 \right\} \leq 1 \right\}.$$

On sait que l'inégalité finale indique que $\lambda \leq 1$, pour $\lambda = 1$ on trouve

$$\| (f_v)_v \|_{\ell^q(L^{p(\cdot)})} = \inf \left\{ \mu > 0 : \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{1}{\mu} f \right) \leq 1 \right\} = \| f \|_{p(\cdot)}.$$

Proposition 1.2.2 Si $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, alors $\varrho_{\ell^q(L^{p(\cdot)})}$ est un semi-modulaire. De plus

- (a) Si $p^+ < \infty$, alors $\varrho_{\ell^q(L^{p(\cdot)})}$ est un modulaire.
- (b) Si $p^+, q^+ < \infty$, alors $\varrho_{\ell^q(L^{p(\cdot)})}$ est continue.

Preuve. (Voir [1. Proposition 3.5]). ■

Théorème 1.2.1 Soient $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Si $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{q(\cdot)} \leq 1$, ou q est une constante, alors $\|\cdot\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}$ est une norme.

Preuve. (Voir [1. Théorème 3.6]). ■

Théorème 1.2.2 Si $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, alors $\|\cdot\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}$ est une quasi-norme sur $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$.

Preuve. Soit $r \in (0, \frac{1}{2} \min\{p^-, q^-, 2\}]$, on définit $\tilde{p} = \frac{p}{r}$ et $\tilde{q} = \frac{q}{r}$, alors on a $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} \leq 1$. Ainsi d'après le théorème 1.1.1 on trouve

$$\begin{aligned}
 \|(f_v)_v + (g_v)_v\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} &= \inf \left\{ \mu > 0 : \varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \left(\frac{(f_v)_v + (g_v)_v}{\mu} \right) \leq 1 \right\} \\
 &= \inf \left\{ \mu > 0 : \varrho_{\ell^{\frac{q(\cdot)}{r}}(L^{\frac{p(\cdot)}{r}})} \left(\frac{|(f_v)_v + (g_v)_v|^r}{\mu^r} \right) \leq 1 \right\} \\
 &= \inf \left\{ \mu^{\frac{1}{r}} > 0 : \varrho_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}(L^{\tilde{p}(\cdot)})} \left(\frac{|(f_v)_v + (g_v)_v|^r}{\mu} \right) \leq 1 \right\} \\
 &= \left(\inf \left\{ \mu > 0 : \varrho_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}(L^{\tilde{p}(\cdot)})} \left(\frac{|(f_v)_v + (g_v)_v|^r}{\mu} \right) \leq 1 \right\} \right)^{\frac{1}{r}} \\
 &= \| |(f_v)_v + (g_v)_v|^r \|_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}(L^{\tilde{p}(\cdot)})}^{\frac{1}{r}} \\
 &\leq \| (|f_v|^r)_v + (|g_v|^r)_v \|_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}(L^{\tilde{p}(\cdot)})}^{\frac{1}{r}} \\
 &\leq \left(\| (|f_v|^r)_v \|_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}(L^{\tilde{p}(\cdot)})} + \| (|g_v|^r)_v \|_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}(L^{\tilde{p}(\cdot)})} \right)^{\frac{1}{r}} \\
 &= \left(\| (f_v)_v \|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}^r + \| (g_v)_v \|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad \left(\text{car: } \| |f|^r \|_{p(\cdot)} = \| f \|_{r p(\cdot)}^r \right) \\
 &\leq 2^{\frac{1}{r}-1} \left(\| (f_v)_v \|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} + \| (g_v)_v \|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \right), \quad \left(\text{car: } \frac{1}{r} \geq 1. \right)
 \end{aligned}$$

Ceci qui termine la preuve. ■

Lemme 1.2.1 (Inégalité de Young)

Soient $p, q, s \in [1, \infty]$ avec $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors pour tout $a, b \geq 0$

$$(ab)^s \leq a^p + b^q. \quad (1.2.4)$$

Preuve. (Voir [10. Lemme 3.2.15, p.80]). ■

Le condition $p, q \geq 1$ n'est pas suffisant pour garantir que le modulaire $\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}$ est convexe. Bien qu'il ne soit pas vrai que le modulaire $\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}$, n'est jamais convexe quand q est non constante, l'exemple suivante prouve que ça peut être seulement quasi-convexe pour des oscillations arbitrairement petites q et pour d'arbitrairement grand p^- .

Exemple 1.2.2 On considère $(f_v)_v = (f, 0, 0, \dots)$ et $(g_v)_v = (g, 0, 0, \dots)$. Soit $p \in [1, \infty)$. On fixe deux cubes unitaire disjoint Q_1 et Q_2 . Soient $a, b \in (0, \infty)$ et $q_1, q_2 \in [1, \infty)$, suppose que $\frac{a}{Q_1} = q_1$ et $\frac{a}{Q_2} = q_2$, et on définit $f = a^{\frac{1}{q_1}} \chi_{Q_1}$ et $g = b^{\frac{1}{q_2}} \chi_{Q_2}$.

Puisque q est une constante avec f est non nulle, d'après le proposition 1.2.1, on conclue que

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^p)}((f_v)_v) = \varrho_{\ell^{q_1}(L^p(Q_1))}((f_v)_v) = \left\| a^{\frac{1}{q_1}} \chi_{Q_1} \right\|_p^{q_1} = a.$$

De même $\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^p)}((g_v)_v) = b$. Alors on considère le modulaire de $\frac{1}{2}(f+g)$:

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^p)}\left(\frac{1}{2}(f_v + g_v)_v\right) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_p\left(\frac{1}{2}(f+g) / \lambda^{\frac{1}{q(\cdot)}}\right) \leq 1 \right\}.$$

En effet,

$$1 \geq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f+g}{2\lambda^{\frac{1}{q(x)}}} \right)^p dx = \frac{1}{2^p} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\frac{a}{\lambda} \right)^{\frac{p}{q_1}} \chi_{Q_1} + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^{\frac{p}{q_2}} \chi_{Q_2} \right) dx = \frac{1}{2^p} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^{\frac{p}{q_1}} + \frac{1}{2^p} \left(\frac{b}{\lambda} \right)^{\frac{p}{q_2}}.$$

Puisque le côté droit continué et décroissante sur λ , on remarque qu'il existe une unique $\lambda_0 > 0$ pour cette nombre est la valeur de le modulaire de $\frac{1}{2}(f+g)$. Alors l'inégalité de convexité pour le modulaire

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^p)}\left(\frac{1}{2}(f_v + g_v)_v\right) \leq \frac{1}{2} (\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^p)}((f_v)_v) + \varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^p)}((g_v)_v)).$$

On peut écrire

$$\lambda_0 \leq \frac{a+b}{2} \text{ quand } \left(\frac{a}{\lambda_0} \right)^{\frac{p}{q_1}} + \left(\frac{b}{\lambda_0} \right)^{\frac{p}{q_2}} = 2^p.$$

On note $x := a/\lambda_0$ et $y := b/\lambda_0$. Alors le condition de convexité devient

$$2 \leq x + y \text{ quand } (x)^{\frac{p}{q_1}} + (y)^{\frac{p}{q_2}} = 2^p.$$

Par monotonies, on a

$$(x)^{\frac{p}{q_1}} + (y)^{\frac{p}{q_2}} \leq 2^p \text{ quand } 2 = x + y. \quad (1.2.5)$$

On va voir pour le maximum de $(x)^{\frac{p}{q_1}} + (2-x)^{\frac{p}{q_2}}$ sur $[0, 2]$.

Supposons que $p = 1$, quand (1.2.5) vérifie l'inégalité dans $x = y = 1$, mais elle n'est pas un maximum si $q_1 \neq q_2$. On remarque que cette égalité $(x)^{1/q_1} + (y)^{1/q_2} \leq 2$ n'est pas vérifiée dans ce cas, c-à-d le modulaire n'est pas convexe pour le petit arbitraire $|q_1 - q_2|$.

D'autre part, on fixe $p > 1$ et choisit $q_1 = 1$, on va choisir $x \in (0, 2)$ est plus grand que $2^p - (x)^{p/q_1} = 1/2$, puisque $y = 2 - x > 0$, on choisit q_2 plus grand lors $y^{p/q_2} > \frac{1}{2}$. On remarque qu'il existe q_1 et q_2 pour tout p telle que l'inégalité (1.2.5) n'est pas vérifiée.

Rappeler que $\eta_{\nu, m}(x) = 2^{\nu} (1 + 2^{\nu} |x|)^{-m}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{N}_0$ et $m > 0$. On a $\eta_{\nu, m} \in L^1$ quand $m > n$ et $\|\eta_{\nu, m}\|_1 = c_m$ est indépendant de ν .

Lemme 1.2.2 Si $\alpha \in C_{loc}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, alors il existe $d \in (n, \infty)$ avec $m > d$, telle que

$$2^{v\alpha(x)} \eta_{v, 2m}(x-y) \leq c 2^{v\alpha(y)} \eta_{v, m}(x-y), \quad (1.2.6)$$

avec $c > 0$ indépendant de $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{N}_0$.

Dans ce cas on obtient

$$2^{v\alpha(x)} \eta_{v, 2m} * |f(x)| \leq c \eta_{v, m} * (2^{v\alpha(\cdot)} |f|)(x).$$

En effet,

$$\begin{aligned} 2^{v\alpha(x)} \eta_{v, 2m} * |f|(x) &= 2^{v\alpha(\cdot)} \eta_{v, 2m} * |f|(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 2^{v\alpha(x)} \eta_{v, 2m}(x-y) |f(y)| dy \stackrel{(1.2.6)}{\leq} c \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{v, m}(x-y) 2^{v\alpha(y)} |f(y)| dy \\ &= c \eta_{v, m} * (2^{v\alpha(\cdot)} |f|)(x). \end{aligned}$$

Preuve. (Voir [9. Lemme 6.1]). ■

Lemme 1.2.3 Soient $r > 0$, $v \in \mathbb{N}_0$ et $m > n$, alors il existe $c = c(r, m, n) > 0$ telle que

$$|g(x)| \leq c (\eta_{v, m} * |g|^r(x))^{\frac{1}{r}}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.7)$$

Pour tout $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \hat{g} \subset \{\xi : |\xi| \leq 2^{v+1}\}$.

Preuve. (Voir [9. Lemme A.7]). ■

1.2.1 Rappel sur les distributions tempérées

Définition 1.2.2 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide si

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^k f(x) = 0. \quad (1.2.8)$$

Définition 1.2.3 Une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dite appartenir à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de Schwartz si $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha f$ est à décroissance rapide. Donc

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, p_{\alpha,k}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^k |\partial^\alpha f(x)| < \infty \right\}. \quad (1.2.9)$$

Exemple 1.2.3 $f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.2.3 (1) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$|f(x)| \leq c(1 + |x|)^{-N}, \forall N > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(2)

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \text{ et } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq +\infty.$$

(3) Une suite $(\varphi_j)_j \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est convergente dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vers $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si

$$p_{\alpha,k}(\varphi_j - \varphi) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

(4) L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(5) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Définition 1.2.4 Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On note $\mathcal{F}f$ la fonction

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x) dx, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Et on a

$$\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ si } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Cette application est appelée transformation de Fourier. Et sa transformée de Fourier inverse est

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \check{f}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} f(x) dx, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.2.5 On dite que T est une distributions tempérées s'il existe $c > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ telle que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\beta|, |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.10)$$

Définition 1.2.6 Soit $(T_j)_j$ une suite distribution tempérée. On dite que $(T_j)_j$ converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si $(\langle T_j, \varphi \rangle)_j$ converge vers $\langle T, \varphi \rangle$, pour tout fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.2.7 Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On note $\mathcal{F}T$ la distribution tempérée définie par

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Lemme 1.2.4 Si $v_0, v_1 \geq 0$ et $m > n$, alors

$$\eta_{v_0, m} * \eta_{v_1, m} \approx \eta_{\min\{v_0, v_1, m\}}, \quad (1.2.11)$$

avec la constante dépendant de m et n .

Preuve. (Voir [9. Lemme A.3]). ■

Théorème 1.2.4 Soient $p, q \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$. Si $m > n$, alors il existe $c > 0$ telle que

$$\|(\eta_{v, 2m} * f_v)_v\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \leq c \|f_v\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}. \quad (1.2.12)$$

Preuve. Il suffit de considère le cas $\|f_v\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} = 1$ et on montre que

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left\| |c\eta_{v, 2m} * f_v|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq 2 \quad \text{quand} \quad \sum_{v=0}^{\infty} \left\| |f_v|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} = 1.$$

Donc il est claire que de démontrer l'inégalité suivante

$$\left\| |c\eta_{v, 2m} * f_v|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq \left\| |f_v|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + 2^{-v} =: \delta.$$

Ce implique que

$$\left\| \delta^{-1} |c\eta_{v, 2m} * f_v|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq 1.$$

C'est-à-dire

$$\left\| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} c\eta_{v, 2m} * f_v \right\|_{p(\cdot)} \leq 1.$$

Puisque $\frac{1}{q} \in C_{loc}^{\log}$ et $\delta \in [2^{-v}, 1 + 2^{-v}]$, on utilise le lemme 1.2.2 on trouve

$$\delta^{-\frac{1}{q(x)}} |\eta_{v,2m} * f_v| (x) \leq c \eta_{v,m} * \left| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} f_v \right| (x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Car la convolution est borné dans $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ quand $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\left\| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} c \eta_{v,2m} * f_v \right\|_{p(\cdot)} \leq \left\| c \eta_{v,m} * \left| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} f_v \right| \right\|_{p(\cdot)} \leq \left\| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} f_v \right\|_{p(\cdot)},$$

avec $c > 0$. Alors

$$\left\| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} f_v \right\|_{p(\cdot)} \leq 1 \iff \left\| \left| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} f_v \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq 1,$$

donc immédiatement d'après la définition de δ . ■

Dans le lemme précédent nous avons eu besoin de que $p, q \geq 1$. Cette restriction peut souvent être évitée par le lemme 1.2.3 combiné avec l'identité suivante, qui suit directement de la définition

$$\|(f_v)_v\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} = \|(|f_v|^r)_v\|_{\ell^{\frac{q(\cdot)}{r}}\left(L^{\frac{p(\cdot)}{r}}\right)}^{\frac{1}{r}}.$$

Définition 1.2.8 *A toute fonction localement intégrable f sur \mathbb{R}^n ($f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$). On associe sa fonction maximale de Littlewood-Hardy $\mathcal{M}f(x)$ telle que*

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

où $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}$.

On pose $\mathcal{M}_t f = \mathcal{M}|f|^t$ pour tout $0 < t \leq 1$.

Remarque 1.2.1 *Si $f, g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda > 0$, alors*

$$\mathcal{M}(f+g) \leq \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g), \quad \mathcal{M}(\lambda f) = |\lambda| \mathcal{M}(f).$$

Remarque 1.2.2 *On pose*

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{r>0} \sup_{x \in B(y,r)} \frac{r}{|B(y,r)|} \int_{B(y,r)} |f(z)| dz \\ &= \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(z)| dz. \end{aligned}$$

Donc on a $\mathcal{M}f(x) \approx Mf(x)$.

Théorème 1.2.5 *La fonction maximale M en voie L^p dans L^p , pour $1 < p \leq \infty$,*

$$\|Mf\|_p \leq c \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ et } 1 < p \leq \infty.$$

Remarque 1.2.3 *On a $M : L^{p(\cdot)} \longrightarrow L^{p(\cdot)}$ si $p \in \mathcal{P}^{\log}$ et $p^- > 1$. Pour la preuve voir [10. Théorème 4.3.8, p.113], et aussi [6] et [8].*

Exemple 1.2.4 *En générale M n'est pas borné sur $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})$. Contre exemple, l'espace $\ell^{q(\cdot)}(L^2)$. Soient q, q_1, q_2, Q_1 et Q_2 pour être comme dans l'exemple 1.2.2. Soit $f_\nu := a_\nu \chi_{Q_1}$ pour constante $a_\nu > 0$, alors*

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^2)}((f_\nu)_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\| |f_\nu|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{2}{q(\cdot)}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{q_1},$$

et

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^2)}(\lambda(Mf_\nu)_\nu) \geq \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\| |\lambda c a_\nu \chi_{Q_2}|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{2}{q(\cdot)}} = c \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda a_\nu)^{q_2}.$$

(La constante c dépendant de la distance entre Q_1 et Q_2 , mais est toujours positive). Si $q_1 > q_2$, alors $(a_\nu)_\nu \in \ell^{q_1} \setminus \ell^{q_2}$. Mais on a

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^2)}((f_\nu)_\nu) < \infty \text{ et } \varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^2)}(\lambda(Mf_\nu)_\nu) = \infty, \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Donc

$$M : \ell^{q(\cdot)}(L^2) \not\rightarrow \ell^{q(\cdot)}(L^2).$$

Chapitre 2

L'espace de Besov $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$

Le but de ce chapitre est donner l'espace de Besov $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$ et quelques espaces, et la relation entre l'espace de Hölder-Zygmund.

2.1 L'espace $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$

Définition 2.1.1 Soit ψ est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ satisfait

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 2. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

On pose $\mathcal{F}\varphi_0(x) = \psi(x)$, $\mathcal{F}\varphi_1(x) = \psi(x) - \psi(2x)$ et

$$\mathcal{F}\varphi_\nu(x) = \mathcal{F}\varphi_1(2^{-\nu}x) \quad \text{pour } \nu = 2, 3, \dots$$

Alors $\{\mathcal{F}\varphi_\nu(x)\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ est une partition de l'unité, telle que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{F}\varphi_\nu(x) = 1, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1.2)$$

On obtient la décomposition de Littlewood-Paley

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu * f, \quad (2.1.3)$$

pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$).

Exemple 2.1.1 *Un exemple de ce type de suite est donné par*

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \psi(x), \\ \varphi_1(x) = \psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi(x), \\ \varphi_\nu(x) = \varphi_1(2^{-\nu+1}x), \nu \geq 2. \end{cases}$$

Où $0 \leq \psi(x) \leq 1$, $\psi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\psi(x) = 0$ pour $|x| \geq \frac{3}{2}$.

Il est facile de voir que $\text{supp } \varphi_\nu \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{\nu-1} \leq |x| \leq 3 \cdot 2^{\nu-1}\}$, $\varphi_\nu(x) = 1$ pour $3 \cdot 2^{\nu-2} \leq |x| \leq 2^\nu$ et $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

En effet,

$$\sum_{\nu=2}^k \varphi_\nu(x) = \sum_{\nu=2}^k (\psi(2^{-\nu}x) - \psi(2^{1-\nu}x)) = \sum_{\nu=2}^k \psi(2^{-\nu}x) - \sum_{\nu=2}^k \psi(2^{1-\nu}x),$$

et on a

$$\sum_{\nu=2}^k \psi(2^{1-\nu}x) = \sum_{i=2}^{k-1} \psi(2^{-i}x), \nu - 1 = i.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=2}^k \varphi_\nu(x) &= \sum_{\nu=2}^k \psi(2^{-\nu}x) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \psi(2^{-\nu}x) \\ &= \psi(2^{-k}x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^k \varphi_\nu(x) &= \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \sum_{\nu=2}^k \varphi_\nu(x) \\ &= \psi(2^{-k}x), \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^k \varphi_\nu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(2^{-k}x) \\ &= \psi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-k}x\right), \text{ (car } \psi \text{ est continue)} \\ &= \psi(0) = 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) = 1.$$

Remarque 2.1.1 • En utilisant le partition de l'unité $(\varphi_\nu)_\nu$, pour définir les normes suivante

$$\|f\|_{B_{p,q}^\alpha} := \left\| \left\| 2^{\nu\alpha} \varphi_\nu * f \right\|_p \right\|_{\ell^q} \quad \text{et} \quad \|f\|_{F_{p,q}^\alpha} := \left\| \left\| 2^{\nu\alpha} \varphi_\nu * f \right\|_{\ell^q} \right\|_p, \quad (2.1.4)$$

avec les constantes $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p, q \in (0, \infty]$ (excluant $p = \infty$ pour le cas scalaire).

• L'espace de Besov $B_{p,q}^\alpha$ et l'espace $F_{p,q}^\alpha$ de Lizorkin-Triebel est constitué par toutes les distributions tempérées $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pour $\|f\|_{B_{p,q}^\alpha} < \infty$ et $\|f\|_{F_{p,q}^\alpha} < \infty$.

Définition 2.1.2 Soit $(\varphi_\nu)_\nu$ comme la définition précédente. Pour $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $p, q \in \mathcal{P}_0$, l'espace de Besov $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$ est l'ensemble des distributions tempérées $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f\|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} = \left\| \left(2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f \right)_\nu \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} < \infty. \quad (2.1.5)$$

Pour l'espace de Besov on peut aussi associé le modulaire

$$\varrho_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}(f) := \varrho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \left(\left(2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f \right)_\nu \right). \quad (2.1.6)$$

Corollaire 2.1.1 Si q est une constante, alors

$$\|f\|_{B_{p(\cdot),q}^{\alpha(\cdot)}} = \left\| \left\| 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f \right\|_{p(\cdot)} \right\|_{\ell^q}. \quad (2.1.7)$$

Si α, p, q sont constantes alors $B_{p,q}^\alpha$ est l'espace de Besov usuel.

Soit $F_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$ l'espace des distributions tempérées $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f\|_{F_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} = \left\| \left\| 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f \right\|_{\ell^{q(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)} < \infty. \quad (2.1.8)$$

Cette espace est appelé Lizorkin-Triebel avec des exposants variables.

Proposition 2.1.1 Si $p \in \mathcal{P}_0$ et $\alpha \in L^\infty$, alors

$$B_{p(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} = F_{p(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}. \quad (2.1.9)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \varrho_{B_{p(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}(f) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\| \left\| 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f \right\|^{p(\cdot)} \right\|_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |2^{\nu\alpha(x)} \varphi_\nu * f(x)|^{p(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\nu=0}^{\infty} |2^{\nu\alpha(x)} \varphi_\nu * f(x)|^{p(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\| 2^{\nu\alpha(x)} \varphi_\nu * f(x) \right\|_{\ell^{p(x)}}^{p(x)} dx = \varrho_{F_{p(\cdot),p(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}(f). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.1 *Si $p, q \in \mathcal{P}_0^{\log}$ et $\alpha \in C_{loc}^{\log} \cap L^\infty$, alors l'espace $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$ ne dépend pas des partitions de l'unité $(\varphi_\nu)_\nu$.*

Preuve. Soit $(\varphi_\nu)_\nu$ et $(\psi_\nu)_\nu$ deux partitions de l'unité. Par la symétrie, il suffit de prouvé que

$$\|f\|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}^\varphi \leq c \|f\|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}^\psi.$$

On définit $K := \{-1, 0, 1\}$, et on utilise que $\hat{\varphi}_\nu \hat{\psi}_\mu = 0$ quand $|\mu - \nu| > 1$, on a

$$\varphi_\nu * f = \sum_{k \in K} \varphi_\nu * \psi_{\nu+k} * f.$$

On fixé $r \in (0, \min\{1, p^-\})$ et $m > n$, puisque $|\varphi_\nu| \leq c\eta_{\nu,2m/r}$, avec $c > 0$ indépendante de ν , on obtient

$$|\varphi_\nu * \psi_{\nu+k} * f| \leq c\eta_{\nu,2m/r} * |\psi_{\nu+k} * f| \leq c\eta_{\nu,2m/r} * (\eta_{\nu+k,2m} * |\psi_{\nu+k} * f|^r)^{\frac{1}{r}},$$

donc d'après l'inégalité de Minkowski (avec un exposant $\frac{1}{r} > 1$) et le lemme 1.2.4, on a

$$|\varphi_\nu * \psi_{\nu+k} * f|^r \leq c \left[\eta_{\nu,2m/r} * \eta_{\nu+k,2m}^{1/r} \right]^r * |\psi_{\nu+k} * f|^r \approx \eta_{\nu+k,2m} * |\psi_{\nu+k} * f|^r.$$

Alors d'après le lemme 1.2.2 et le théorème 1.2.4, on a

$$\begin{aligned} \|(2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f)_\nu\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} &= \|(2^{\nu\alpha(\cdot)r} |\varphi_\nu * f|^r)_\nu\|_{\ell^{\frac{q(\cdot)}{r}}(L^{\frac{p(\cdot)}{r}})}^{1/r} \\ &\leq c \sum_{k \in K} \|(2^{\nu\alpha(\cdot)r} \eta_{\nu+k,2m} * |\psi_{\nu+k} * f|^r)_\nu\|_{\ell^{\frac{q(\cdot)}{r}}(L^{\frac{p(\cdot)}{r}})}^{1/r} \\ &\leq c \sum_{k \in K} \|(\eta_{\nu+k,m} * (2^{\nu\alpha(\cdot)r} |\psi_{\nu+k} * f|^r))_\nu\|_{\ell^{\frac{q(\cdot)}{r}}(L^{\frac{p(\cdot)}{r}})}^{1/r} \\ &\leq c \sum_{k \in K} \|(2^{\nu\alpha(\cdot)r} |\psi_{\nu+k} * f|^r)_\nu\|_{\ell^{\frac{q(\cdot)}{r}}(L^{\frac{p(\cdot)}{r}})}^{1/r} \\ &\leq c \sum_{k \in K} \|(2^{\nu\alpha(\cdot)} \psi_{\nu+k} * f)_\nu\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}, \end{aligned}$$

donc la dernière somme égales $3 \|f\|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}^\psi$. Ce qui termine la preuve. ■

2.2 Inclusions

Le théorème suivante donne quelques inclusions élémentaires.

Théorème 2.2.1 Soient $\alpha, \alpha_0, \alpha_1 \in L^\infty$, et $p, q_0, q_1 \in \mathcal{P}_0$.

(i) Si $q_0 \leq q_1$, alors

$$B_{p(\cdot), q_0(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow B_{p(\cdot), q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}. \quad (2.2.1)$$

(ii) Si $(\alpha_0 - \alpha_1)^- > 0$, alors

$$B_{p(\cdot), q_0(\cdot)}^{\alpha_0(\cdot)} \hookrightarrow B_{p(\cdot), q_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot)}. \quad (2.2.2)$$

(iii) Si $p^+, q^+ < 0$, alors

$$B_{p(\cdot), \min\{p(\cdot), q(\cdot)\}}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow F_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow B_{p(\cdot), \max\{p(\cdot), q(\cdot)\}}^{\alpha(\cdot)}. \quad (2.2.3)$$

Preuve. (i) Supposons que $q_0 \leq q_1$, alors $\lambda^{\frac{1}{q_0(x)}} \leq \lambda^{\frac{1}{q_1(x)}}$ quand $\lambda \leq 1$. Donc d'après la définition on a

$$\varrho_{B_{p(\cdot), q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}(f/\mu) \leq \varrho_{B_{p(\cdot), q_0(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}(f/\mu), \quad \forall \mu > 0.$$

Ce qui implique

$$\|(2^{\nu\alpha(\cdot)}\varphi_\nu * f)_\nu\|_{\ell^{q_1(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \leq c \|(2^{\nu\alpha(\cdot)}\varphi_\nu * f)_\nu\|_{\ell^{q_0(\cdot)}(L^{p(\cdot)})},$$

c-à-d

$$\|f\|_{B_{p(\cdot), q_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \leq c \|f\|_{B_{p(\cdot), q_0(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}.$$

(ii) D'après (i), on a

$$B_{p(\cdot), q_0(\cdot)}^{\alpha_0(\cdot)} \hookrightarrow B_{p(\cdot), q_0^+}^{\alpha_0(\cdot)} \quad \text{et} \quad B_{p(\cdot), q_1^-}^{\alpha_1(\cdot)} \hookrightarrow B_{p(\cdot), q_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot)}.$$

Donc il suffit de prouvé que q_0^+ et q_1^- , ce qu'indique encore par $q_0, q_1 \in (0, \infty]$ pour le simplifie. En effet,

$$\left\| \left\| 2^{\nu\alpha_1(\cdot)}\varphi_\nu * f \right\|_{p(\cdot)} \right\|_{\ell^{q_1}} \leq c_1 \left\| \left\| 2^{\nu\alpha_0(\cdot)}\varphi_\nu * f \right\|_{p(\cdot)} \right\|_{\ell^\infty} \leq c_1 \left\| \left\| 2^{\nu\alpha_0(\cdot)}\varphi_\nu * f \right\|_{p(\cdot)} \right\|_{\ell^{q_0}},$$

ce qui implique

$$\|(2^{\nu\alpha_1(\cdot)}\varphi_\nu * f)_\nu\|_{\ell^{q_1}(L^{p(\cdot)})} \leq c \|(2^{\nu\alpha_0(\cdot)}\varphi_\nu * f)_\nu\|_{\ell^{q_0}(L^{p(\cdot)})},$$

avec $c_1^{q_1} = \sum_{\nu \geq 0} 2^{-\nu q_1 (\alpha_0 - \alpha_1)^-} < \infty$.

(iii) • On montre que la première inclusion, soit $r := \min \{p, q\}$ et $f_\nu(x) := 2^{\nu \alpha(x)} |\varphi_\nu * f(x)|$.

On suppose que $\varrho_{B_{p(\cdot), r(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}(f) \leq 1$, et il suffit de démontrer que $\varrho_{F_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}(f) \leq c$.

Puisque $\ell^{r(x)} \hookrightarrow \ell^{q(x)}$, on obtient

$$\varrho_{p(\cdot)}(\|f_\nu\|_{\ell^{q(x)}}) \leq \varrho_{p(\cdot)}(\|f_\nu\|_{\ell^{r(x)}}) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{r(x)} \right)^{\frac{p(x)}{r(x)}} dx = \varrho_{\frac{p(\cdot)}{r(\cdot)}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{r(\cdot)} \right).$$

Il vient

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{r(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{r(\cdot)}} \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \|f_\nu^{r(\cdot)}\|_{\frac{p(\cdot)}{r(\cdot)}} = \varrho_{B_{p(\cdot), r(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}(f) \leq 1.$$

• Pour démontrer la deuxième inclusion, on utilise la même méthode avec $s = \max \{p, q\}$.

On suppose que $\varrho_{F_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}(f) \leq 1$, et on utilise l'estimation de modulaire dans l'espace de Besov, et puisque $p/s \leq 1$ on a

$$\varrho_{B_{p(\cdot), s(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}(f) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \|f_\nu^{s(\cdot)}\|_{\frac{p(\cdot)}{s(\cdot)}} \leq \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{s(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{s(\cdot)}} = \left\| \|f_\nu\|_{\ell^{s(\cdot)}}^{s(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{s(\cdot)}}.$$

Le côté à droite est borné si et seulement si le modulaire correspondant est borné. En fait

$$\varrho_{\frac{p(\cdot)}{s(\cdot)}} \left(\|f_\nu\|_{\ell^{s(\cdot)}}^{s(\cdot)} \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \|f_\nu\|_{\ell^{s(x)}}^{p(x)} dx = \varrho_{F_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}(f) \leq 1.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Remarque 2.2.1 On considère l'inclusion de type Sobolev, pour des exposants constantes il bien connu que

$$B_{p_0, q}^{\alpha_0} \hookrightarrow B_{p_1, q}^{\alpha_1}. \quad (2.2.4)$$

Si $\alpha_0 - \frac{n}{p_0} = \alpha_1 - \frac{n}{p_1}$, où $0 < p_0 \leq p_1 \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $-\infty < \alpha_1 \leq \alpha_0 < \infty$ pour la preuve voir [19. Théorème 2.7.1, p.129]. Cette inclusion base sur l'inégalité de Plancherel-Polya-Nikolskij (Bernstien).

Le but de cette partie est de généraliser l'inclusion de Sobolev dans les espaces $B_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$.

Lemme 2.2.1 Soient $p_0, p_1, q \in \mathcal{P}_0$ avec $\alpha - n/p_1$ et $1/q \in C_{loc}^{\log}$. Si $p_1 \geq p_0$, alors il existe $c > 0$ telle que

$$\left\| |c 2^{\nu \alpha(\cdot)} g|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p_1(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq \left\| \left| 2^{\nu \left(\alpha(\cdot) + \frac{n}{p_0(\cdot)} - \frac{n}{p_1(\cdot)} \right)} g \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p_0(\cdot)}{q(\cdot)}} + 2^{-\nu}, \quad (2.2.5)$$

pour tout $\nu \in \mathbb{N}_0$ et $g \in L^{p_0(\cdot)} \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \hat{g} \subset \{\xi : |\xi| \leq 2^{\nu+1}\}$ telle que la norme de côté droit au plus un.

Preuve. On pose $\beta := \alpha - n/p_1$ et

$$\lambda := \left\| \left\| 2^{\nu(\beta(\cdot) + \frac{n}{p_0(\cdot)})} g \right\|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p_0(\cdot)}{q(\cdot)}} + 2^{-\nu}.$$

Il est clair que $\lambda \in [2^{-\nu}, 1 + 2^{-\nu}]$, on utilise le lemme 1.2.3 et le lemme 1.2.2, on obtient

$$\lambda^{-\frac{r}{q(x)}} 2^{\nu r \beta(x)} |g(x)|^r \leq c \lambda^{-\frac{r}{q(x)}} 2^{\nu r \beta(x)} (\eta_{\nu, 2m} * |g|^r)(x) \leq c \eta_{\nu, m} * \left(\lambda^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{\nu \beta(\cdot)} |g| \right)^r(x),$$

avec $m > n$. Fixe $r \in (0, p_0^-)$ donc $s = p_0/r \in \mathcal{P}_0$. On applique l'inégalité de Hölder avec exposant s , on trouve que

$$\lambda^{-\frac{1}{q(x)}} 2^{\nu \beta(x)} |g(x)| \leq c \left\| 2^{-\frac{\nu n}{s(\cdot)}} \eta_{\nu, m}(x - \cdot) \right\|_{s'(\cdot)}^{1/r} \left\| \lambda^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{\nu(\beta(\cdot) + \frac{n}{p_0(\cdot)})} g \right\|_{p_0(\cdot)}.$$

La deuxième norme de côté droite est borne par 1 avec le choix λ . Pour la première norme, on sait que

$$\begin{aligned} \varrho_{s'(\cdot)} \left(2^{-\frac{\nu n}{s(\cdot)}} \eta_{\nu, m}(x - \cdot) \right) &= \int_{\mathbb{R}^n} 2^{\nu n} (1 + 2^\nu |x - y|)^{-ms'(y)} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |2^\nu x - z|)^{-m(s')^-} dz < \infty, \end{aligned}$$

car $m(s')^- > n$. Maintenant on choisit $c_0 \in (0, 1]$, on trouve que

$$\begin{aligned} \left(c_0 \lambda^{-\frac{1}{q(x)}} 2^{\nu \alpha(x)} |g(x)| \right)^{p_1(x)} &= c_0^{p_0(x)} \left[c_0 \frac{2^{\nu \beta(x)} |g(x)|}{\lambda^{-\frac{1}{q(x)}}} \right]^{p_1(x) - p_0(x)} \left(\lambda^{-\frac{1}{q(x)}} 2^{\nu(\beta(x) + \frac{n}{p_0(x)})} |g(x)| \right)^{p_0(x)} \\ &\leq \left(\lambda^{-\frac{1}{q(x)}} 2^{\nu(\beta(x) + \frac{n}{p_0(x)})} |g(x)| \right)^{p_0(x)}. \end{aligned}$$

On passe l'intégrale sur \mathbb{R}^n et on utilise la définition de λ , on obtient la résulta. ■

Théorème 2.2.2 (Inclusion de Sobolev)

Soient $p_0, p_1, q \in \mathcal{P}_0$ et $\alpha_0, \alpha_1 \in L^\infty$ avec $\alpha_0 \geq \alpha_1$. Si $1/q$ et

$$\alpha_0(x) - \frac{n}{p_0(x)} = \alpha_1(x) - \frac{n}{p_1(x)},$$

est localement log-Höldérienne continue, alors

$$B_{p_0(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha_0(\cdot)} \hookrightarrow B_{p_1(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot)}. \quad (2.2.6)$$

Preuve. Supposons que $\|g\| \leq 1$, c-à-d $\varrho_{B_{p_0(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha_0(\cdot)}}(g) \leq 1$. On pose $\alpha(x) = \alpha_1(x)$ et $g = \varphi_\nu * f$, et il suffit de démontrer que $\varrho_{B_{p_1(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot)}}(g) \leq c$.

D'après le lemme précédent on a

$$\left\| |c2^{\nu\alpha_1(\cdot)}g|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p_1(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq \left\| 2^{\nu\left(\alpha_1(\cdot) + \frac{n}{p_0(\cdot)} - \frac{n}{p_1(\cdot)}\right)}g \right\|_{\frac{p_0(\cdot)}{q(\cdot)}}^{q(\cdot)} + 2^{-\nu}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Ce qui implique

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\| |c2^{\nu\alpha_1(\cdot)}g|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p_1(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\| 2^{\nu\left(\alpha_1(\cdot) + \frac{n}{p_0(\cdot)} - \frac{n}{p_1(\cdot)}\right)}g \right\|_{\frac{p_0(\cdot)}{q(\cdot)}}^{q(\cdot)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} < \infty,$$

avec $\alpha_0(x) - n/p_0(x) = \alpha_1(x) - n/p_1(x) \in C_{loc}^{\log}$. ■

Corollaire 2.2.1 Soient $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \mathcal{P}_0$ et $\alpha_0, \alpha_1 \in L^\infty$ avec $\alpha_0 \geq \alpha_1$. Si

$$\alpha_0(x) - \frac{n}{p_0(x)} = \alpha_1(x) - \frac{n}{p_1(x)} + \varepsilon(x),$$

est localement log-Höldérienne continue et $\varepsilon^- > 0$, alors

$$B_{p_0(\cdot),q_0(\cdot)}^{\alpha_0(\cdot)} \hookrightarrow B_{p_1(\cdot),q_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot)}. \quad (2.2.7)$$

Preuve. D'après le théorème 2.2.1 (i) et le théorème 2.2.2, on a

$$B_{p_0(\cdot),q_0(\cdot)}^{\alpha_0(\cdot)} \hookrightarrow B_{p_0(\cdot),\infty}^{\alpha_0(\cdot)} \hookrightarrow B_{p_1(\cdot),\infty}^{\alpha_1(\cdot) + \varepsilon(\cdot)}.$$

Mais $B_{p_1(\cdot),\infty}^{\alpha_1(\cdot) + \varepsilon(\cdot)} \hookrightarrow B_{p_1(\cdot),q_1(\cdot)}^{\alpha_1(\cdot)}$ par le théorème 2.2.1 (ii). Ce qui termine la preuve. ■

Soit C_u l'espace de tous les fonctions borné uniformément continue de \mathbb{R}^n muni de la norme sup. Concerne l'inclusion en C_u , on a le résultat suivant.

Corollaire 2.2.2 Soient $\alpha \in C_{loc}^{\log}$, $p \in \mathcal{P}^{\log}$ et $q \in \mathcal{P}_0$. Si

$$\alpha(x) - \frac{n}{p(x)} \geq \delta \max \left\{ 1 - \frac{1}{q(x)}, 0 \right\},$$

avec fixer $\delta > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors

$$B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow C_u. \quad (2.2.8)$$

Preuve. Soit $\gamma(x) := \alpha(x) - n/p(x)$. D'après le théorème 2.2.1 (i), on remplace q par le plus grand exposant $\max\{1, \delta/\delta - \gamma\} \in \mathcal{P}^{\log}$.

Donc d'après l'inclusion de Sobolev on a

$$B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow B_{\infty,q(\cdot)}^{\gamma(\cdot)}.$$

Puisque $B_{\infty,1}^0 \hookrightarrow C_u$ pour la preuve de cet résultat classique voir [19. Proposition 2.5.7, p.89], donc il suffit de démontrer que

$$B_{\infty,q(\cdot)}^{\gamma(\cdot)} \hookrightarrow B_{\infty,1}^0.$$

C-à-d,

$$\|f_\nu\|_{B_{\infty,1}^0} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_x |f_\nu| \leq c \|f_\nu\|_{B_{\infty,q(\cdot)}^{\gamma(\cdot)}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_x |2^{\nu\gamma(x)} f_\nu|^{q(x)}.$$

On pose $f_\nu = \varphi_\nu * f$, on utilise l'homogénéité comme la manière usuel, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_x |f_\nu| \leq c \quad \text{quand} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_x |2^{\nu\gamma(x)} f_\nu|^{q(x)} \leq 1.$$

On choisit x_ν telle que

$$\sup_x |f_\nu| \leq 2 |f_\nu(x_\nu)|, \quad \forall \nu \geq 0.$$

Alors d'après l'inégalité de young, on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_x |f_\nu| \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} |f_\nu(x_\nu)| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |2^{\nu\gamma(x_\nu)} f_\nu(x_\nu)|^{q(x_\nu)} + 2^{-\nu\gamma(x_\nu)q'(x_\nu)} \leq 1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu\delta} \leq c.$$

Ce qui implique

$$B_{\infty,q(\cdot)}^{\gamma(\cdot)} \hookrightarrow B_{\infty,1}^0 \hookrightarrow C_u.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Définition 2.2.1 Soit $\mathcal{L}^{\alpha,p(\cdot)}$ l'espace de potentiel de Bessel dans $L^{p(\cdot)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$, et $p \in \mathcal{P}^{\log}$, alors

$$F_{p(\cdot),2}^\alpha = \mathcal{L}^{\alpha,p(\cdot)}, \quad \forall \alpha \geq 0. \quad (2.2.9)$$

La démonstration de cet résultat dans [9, théorème 4.5].

Dans les mêmes suppositions sur p , d'après le théorème 2.2.1. On obtient l'inclusion

$$B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow \mathcal{L}^{\sigma,p(\cdot)}, \quad \forall \alpha^- > \sigma \geq 0. \quad (2.2.10)$$

En particulier, on a $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow L^{p(\cdot)}$ si $\alpha^- > 0$. Cf. [2. Corollaire 6.2] ou [12. Théorème 6.1].

Soit la définition

$$\sigma_p(x) := n \left(\frac{1}{\min\{1, p(x)\}} - 1 \right) \text{ et } \bar{p}(x) := \max\{1, p(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2.11)$$

Si $\alpha - n/p = \alpha - \sigma_p - n/\bar{p} \in C_{loc}^{\log}$, et $p, q \in \mathcal{P}_0$, $\alpha \in L^\infty$ et $(\alpha - \sigma_p)^- > 0$, alors d'après le corollaire 2.2.1. On obtient

$$B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow B_{\bar{p}(\cdot),1}^0. \quad (2.2.12)$$

On déduit que

$$\|f\|_{\bar{p}(\cdot)} \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \|\varphi_\nu * f\|_{\bar{p}(\cdot)} = \|f\|_{B_{\bar{p}(\cdot),1}^0} \leq c \|f\|_{B_{\bar{p}(\cdot),1}^{\alpha(\cdot) - \sigma_p(\cdot)}}.$$

Proposition 2.2.1 Supposons que $p, q \in \mathcal{P}_0$ et $\alpha \in L^\infty$ avec $\alpha - n/p \in C_{loc}^{\log}$. Soit σ_p et \bar{p} trouvé dans (2.2.11), si $(\alpha - \sigma_p)^- > 0$, alors

$$B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow L^{\bar{p}(\cdot)}. \quad (2.2.13)$$

Soient $p, q \in \mathcal{P}_0$ et $\alpha \in L^\infty$. On définit $\alpha_0 := \left(\alpha - \frac{n}{p}\right)^-$, alors $\alpha \geq \alpha_0 + \frac{n}{p} =: \alpha_1 \in L^\infty$. Il est clair que $\alpha_1 - \frac{n}{p} = \alpha_0 \in C_{loc}^{\log}$. Par conséquent, d'après le théorème 2.2.2, on obtient

$$B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow B_{p(\cdot),\infty}^{\alpha_1(\cdot)} \hookrightarrow B_{\infty,\infty}^{\alpha_1(\cdot) - \frac{n}{p(\cdot)}} = B_{\infty,\infty}^{\alpha_0} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (2.2.14)$$

Théorème 2.2.3 Si $p, q \in \mathcal{P}_0$ et $\alpha \in L^\infty$, alors

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (2.2.15)$$

Remarque 2.2.2 Comme dans le cas classique voir [19. Théorème 2.3.3, p.48], on utilise le théorème précédent, on peut prouver la complémentaire de l'espace de Besov $B_{p(\cdot),q}^{\alpha(\cdot)}$. Par conséquent c'est l'espace est (quasi) Banach.

2.3 L'espace de Hölder-Zygmund

Définition 2.3.1 Soit $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, 1]$. On dite que $\mathcal{C}^{\alpha(\cdot)}$ l'espace de Zygmund pour tout $f \in C_u$ telle que

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha(\cdot)}} < \infty,$$

où

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha(\cdot)}} := \|f\|_{\infty} + \sup_{x \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|\Delta_h^2 f(x)|}{|h|^{\alpha(x)}}. \quad (2.3.1)$$

L'espace de Hölder $C^{\alpha(\cdot)}$ est définie de la même façon analogue mais avec la norme suivante

$$\|f\|_{C^{\alpha(\cdot)}} := \|f\|_{\infty} + \sup_{x \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|\Delta_h^1 f(x)|}{|h|^{\alpha(x)}}, \quad \forall \alpha < 1. \quad (2.3.2)$$

On définit

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta_h^2 f = \Delta_h^1(\Delta_h^1 f), \dots, \quad \Delta_h^{k+1} f = \Delta_h^1(\Delta_h^k f), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N},$$

telle que

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j f(x+hj), \quad C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}.$$

On peut facilement trouver l'inégalité suivante

$$\sup_h |h|^{-\alpha(x)} |\Delta_h^1 f(x)| \leq \frac{1}{2-2^{\alpha^+}} \sup_h |h|^{-\alpha(x)} |\Delta_h^2 f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Donc on trouve

$$\mathcal{C}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow C^{\alpha(\cdot)}, \quad \forall \alpha^+ < 1. \quad (2.3.3)$$

En fait, les deux espaces coïncident pour α .

Théorème 2.3.1 Pour $\alpha \in C_{loc}^{\log}$ avec $\alpha^- > 0$,

$$B_{\infty, \infty}^{\alpha(\cdot)} = \mathcal{C}^{\alpha(\cdot)} \quad (\alpha \leq 1) \quad \text{et} \quad B_{\infty, \infty}^{\alpha(\cdot)} = C^{\alpha(\cdot)} \quad (\alpha^+ < 1). \quad (2.3.4)$$

Combinant ce résultat avec l'espace de Sobolev telle que

$$W^{1,p(\cdot)} = F_{p(\cdot), 2}^1 \hookrightarrow B_{p(\cdot), \infty}^1 \hookrightarrow B_{\infty, \infty}^{1-\frac{n}{p(\cdot)}} = C^{1-\frac{n}{p(\cdot)}}.$$

Corollaire 2.3.1 Si $p \in \mathcal{P}^{\log}$ avec $n < p^- \leq p^+ < \infty$, alors

$$W^{1,p(\cdot)} \hookrightarrow C^{1-\frac{n}{p(\cdot)}}. \quad (2.3.5)$$

Et on a

$$B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)+\frac{n}{p(\cdot)}} \hookrightarrow \mathcal{C}^{\alpha(\cdot)}, \quad (2.3.6)$$

dans le cas $\alpha^- > 0$ pour $p, q \in \mathcal{P}_0^{\log}$ et $\alpha \in C_{loc}^{\log}$.

Preuve de Théorème (2.3.1). La preuve sur les deux parties.

Parté 1. On considère que

$$\mathcal{C}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow B_{\infty,\infty}^{\alpha(\cdot)} \quad (\alpha \leq 1) \quad \text{et} \quad C^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow B_{\infty,\infty}^{\alpha(\cdot)} \quad (\alpha^+ < 1).$$

Alors

$$\|f\|_{B_{\infty,\infty}^{\alpha(\cdot)}} = \sup_{\nu} \sup_x |2^{\nu\alpha(x)} \varphi_{\nu} * f(x)| \leq c \|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha(\cdot)}}.$$

La limite $\nu = 0$, est facilement estimé en terme de $\|f\|_{\infty}$, ainsi on considère $\nu > 0$.

Puisque l'espace de Besov est indépendant de choix les partitions de l'unité $(\varphi_{\nu})_{\nu}$, on suppose $\varphi_{\nu}(-y) = \varphi_{\nu}(y)$, alors

$$\varphi_{\nu} * f(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\nu}(h) [f(x+h) + f(x-h)] dh = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\nu}(h) \Delta_h^2 f(x-h) dh.$$

On utilise comme $\int \varphi_{\nu}(y) dy = \hat{\varphi}_{\nu}(0) = 0$ dans deuxième étape, par la définition on a

$$|\Delta_h^2 f(x-h)| \leq \|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha(\cdot)}} |h|^{\alpha(x-h)}.$$

Pour le petite h , log-Höldérienne continue est implique que $|h|^{\alpha(x-h)} \leq c |h|^{\alpha(x)}$, on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi_{\nu} * f(x)| &\leq c \int_{|h|<1} |\varphi_{\nu}(h)| |h|^{\alpha(x)} dh + c \int_{|h|\geq 1} |\varphi_{\nu}(h)| |h|^{\alpha^+} dh \\ &= c \int_{|h|<2^{\nu}} |\varphi_{\nu}(h)| |2^{-\nu}h|^{\alpha(x)} dh + c \int_{|h|\geq 2^{\nu}} |\varphi_{\nu}(h)| |2^{-\nu}h|^{\alpha^+} dh \\ &\leq c 2^{-\nu\alpha(x)} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_{\nu}(h)| \left[|h|^{\alpha^+} + |h|^{\alpha^-} \right] dh < \infty. \end{aligned}$$

Parté 2. On considère que

$$B_{\infty,\infty}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow \mathcal{C}^{\alpha(\cdot)} \quad (\alpha \leq 1) \quad \text{et} \quad B_{\infty,\infty}^{\alpha(\cdot)} \hookrightarrow C^{\alpha(\cdot)} \quad (\alpha^+ < 1).$$

Alors

$$\sup_{0 < |h| \leq 1} \sup_x \frac{|\Delta_h^M f(x)|}{|h|^{\alpha(x)}} \leq 2^{\alpha^+} \sup_{k \geq 0} \sup_{|h| \leq 2^{-k}} \sup_x |2^{k\alpha(x)} \Delta_h^M f(x)|.$$

Pour $\alpha > 0$ et $M \geq 1$, il existe $c > 0$ telle que

$$|\Delta_h^M (\varphi_\nu * f)(x)| \leq c \min \{1, 2^{(\nu-k)M}\} (\varphi_\nu^* f)_a(x),$$

pour tout ν , et tout $k \in \mathbb{N}_0$ et $|h| \leq 2^{-k}$, où

$$(\varphi_\nu^* f)_a(x) := \sup_y \frac{|\varphi_\nu * f(x-y)|}{1 + |2^\nu y|^a},$$

est une fonction maximale de Peetre. Cf. [19, (2.5.12/8), p.111]. Puisque

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu * f,$$

est la convergence dans L^∞ , on obtient l'estimation suivante

$$\sup_{|h| \leq 2^{-k}} |2^{k\alpha(x)} \Delta_h^M f(x)| \leq c \sum_{\nu < k} 2^{(\nu-k)(M-\alpha(x))} 2^{\nu\alpha(x)} (\varphi_\nu^* f)_a(x) + c \sum_{\nu \geq k+1} 2^{(k-\nu)\alpha(x)} 2^{\nu\alpha(x)} (\varphi_\nu^* f)_a(x). \quad (2.3.7)$$

Par conséquent, pour l'estimation $2^{\nu\alpha(x)} (\varphi_\nu^* f)_a(x)$. On note $K := \sup_x 2^{\nu\alpha(x)} |\varphi_\nu * f(x)|$, alors

$$2^{\nu\alpha(x)} (\varphi_\nu^* f)_a(x) = \sup_y 2^{\nu\alpha(x)} \frac{|\varphi_\nu * f(x-y)|}{1 + |2^\nu y|^a} \leq K \sup_y \frac{2^{\nu(\alpha(x)-\alpha(x-y))}}{1 + |2^\nu y|^a}.$$

* Quand $|y| < 2^{-\frac{\nu}{2}}$, et $\alpha \in C_{loc}^{\log}$ on a $\nu(\alpha(x) - \alpha(x-y)) \leq c$.

* Quand $|y| \geq 2^{-\frac{\nu}{2}}$, le côté droit est borné par $K 2^{\nu(\alpha^+ - \alpha^- - \frac{a}{2})}$, et le reste est borné pour choisir $\alpha > 2(\alpha^+ - \alpha^-)$. Alors

$$2^{\nu\alpha(x)} (\varphi_\nu^* f)_a(x) \leq c \sup_x 2^{\nu\alpha(x)} |\varphi_\nu * f(x)| \leq c \|f\|_{B_{\infty,\infty}^{\alpha(\cdot)}}.$$

On utilisé l'inégalité (2.3.7). On trouve que

$$\sup_{|h| \leq 2^{-k}} |2^{k\alpha(x)} \Delta_h^M f(x)| \leq c \left[\sum_{\nu < k} 2^{(\nu-k)(M-\alpha^+)} + \sum_{\nu \geq k+1} 2^{(k-\nu)\alpha^-} \right] \|f\|_{B_{\infty,\infty}^{\alpha(\cdot)}}.$$

Si $M = 1$, alors on pose $\alpha^+ < 1$. Pour $M = 2$, $M - \alpha^+ \geq 1$.

$$\sup_{|h| \leq 2^{-k}} |2^{k\alpha(x)} \Delta_h^M f(x)| \leq c \|f\|_{B_{\infty,\infty}^{\alpha(\cdot)}}, \quad (\text{car: } \|f\|_\infty \leq c \|f\|_{B_{\infty,\infty}^{\alpha(\cdot)}}, \quad \forall \alpha^- > 0).$$

Ce qui termine la preuve. ■

Chapitre 3

Caractérisation par la fonction maximale de Peetre

Le but de ce chapitre l'espace $B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$ est de donner quelques résultats principaux de cette espace.

3.1 Quelques lemmes techniques

Lemme 3.1.1 *Soit $0 < a < 1$ et $0 < q \leq \infty$. Soit $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ une suite des nombres réelle positives, telle que*

$$\|\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}\|_{\ell^q} = I < \infty.$$

Alors la suite $\left\{\delta_k : \delta_k = \sum_{j=0}^{\infty} a^{|k-j|} \varepsilon_j\right\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ est dans ℓ^q , avec

$$\|\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}\|_{\ell^q} \leq cI,$$

c dépend a et q.

Les lemmes suivants sont de [16. Lemme 1. Lemme 3].

Lemme 3.1.2 *Soient $\omega, \mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $M \geq -1$, un nombre entier telle que $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \mu(x) dx = 0$ pour tout $|\alpha| \leq M$. Alors pour tout $N > 0$, il y a un constant $c_N > 0$ de sorte*

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} |t^{-n} \mu(t^{-1} \cdot) * \omega(z)| (1 + |z|)^N \leq c_N t^{M+1}. \quad (3.1.1)$$

Lemme 3.1.3 Soit $0 < r \leq 1$, et soient $\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}, \{d_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ deux suites à des valeurs dans $(0, +\infty)$. Supposons que pour certains $N_0 > 0$

$$d_j = O(2^{jN_0}), \quad j \longrightarrow \infty, \quad (3.1.2)$$

et que pour tout $N > 0$

$$d_j \leq C_N \sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)N} b_k d_k^{1-r}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Alors pour tout $N > 0$

$$d_j^r \leq C_N \sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)Nr} b_k, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

avec les mêmes constantes.

3.2 Quasi-normes équivalentes

Dans cette section nous caractérisons les espaces $B_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$ par la fonction maximale de Peetre. Nous suivons de près la méthode présentée par V.S.Rychkov [16]. Par conséquent, on définit pour $a > 0, \alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la fonction maximale de Peetre.

$$\varphi_{\nu}^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{2^{\nu\alpha(y)} |\varphi_{\nu} * f(y)|}{(1 + 2^{\nu} |x - y|)^a}, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

On présente maintenant une caractérisation fondamentale des espaces $B_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$. Les théorèmes suivants sont de [7. Théorème 1. Théorème 2].

Théorème 3.2.1 Si $\alpha \in C_{loc}^{\log}$, $p, q \in \mathcal{P}_0^{\log}$ et $a > \frac{n}{p^-}$, alors

$$\|(\varphi_{\nu}^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f)_{\nu}\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}, \quad (3.2.1)$$

est une quasi-norme équivalente dans $B_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$.

Preuve. La preuve sur les deux étapes.

Étape 1. Il est facile de voir que pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$2^{\nu\alpha(x)} |\varphi_{\nu} * f(x)| \leq \varphi_{\nu}^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(x).$$

Donc

$$\left\| (2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f)_\nu \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \leq c \left\| (\varphi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f)_\nu \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}.$$

Étape 2. On démontre dans cette étape qu'il y a un constant $c > 0$ telle que pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left\| (\varphi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f)_\nu \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \leq c \left\| (2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f)_\nu \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}.$$

Donc il suffit de considérer le cas

$$\left\| (2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f)_\nu \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} = 1,$$

et on montre que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\| |c\varphi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq C \text{ quand } \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\| |2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} = 1.$$

Donc il est claire que de démontre l'inégalité suivante

$$\left\| |c\varphi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq \left\| |2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + 2^{-\sigma\nu} =: \delta, \quad \sigma > 0.$$

Ce qui implique

$$\left\| \delta^{-1} |c\varphi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq 1,$$

qui est équivalent à

$$\left\| c\delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} \varphi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f \right\|_{p(\cdot)} \leq 1.$$

On choisit $t > 0$ telle que $a > \frac{n}{t} > \frac{n}{p^-}$. D'après le lemme 1.2.3 et le lemme 1.2.2, on a l'estimation suivante

$$2^{\nu\alpha(y)} |\varphi_\nu * f(y)| \leq C 2^{\nu\alpha(y)} (\eta_{\nu,2m} * |\varphi_\nu * f|^t(y))^{1/t} \leq C \left(\eta_{\nu,m} * (2^{\nu\alpha(\cdot)} |\varphi_\nu * f|)^t(y) \right)^{1/t}, \quad (3.2.2)$$

pour $y \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{N}_0$ et tout $m > d$ (avec $d \in (n, \infty)$). On diviser les deux côtés de (3.2.2) sur $(1 + 2^\nu |x - y|)^a$, et on a

$$(1 + 2^\nu |x - y|)^{-a} \leq (1 + 2^\nu |x - z|)^{-a} (1 + 2^\nu |y - z|)^a, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n,$$

alors on obtient pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, tout $x \in \mathbb{R}^n$, $m > \max(d, at)$ et tout $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} (\varphi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(x))^t &\leq C 2^{\nu n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{\nu\alpha(z)t} |\varphi_\nu * f(z)|^t}{(1 + 2^\nu |x - z|)^{at}} dz \\ &= C \int_{B(x, 2^{-\nu/2})} \dots dz + C \sum_{i=0}^{\infty} \int_{B(x, 2^{-\nu/2+i+1}) \setminus B(x, 2^{-\nu/2+i})} \dots dz \\ &= J_\nu^1(x) + \sum_{i \geq 0} J_{\nu-i}^2(x), \end{aligned}$$

d'où $C > 0$ est indépendant de x, ν et f . On choisit $\sigma > 0$ telle que

$$0 < \sigma < \frac{a - n/t}{4 \left(\frac{1}{q^-} - \frac{1}{q^+} \right)}.$$

Puisque $1/q \in C_{loc}^{\log}$ et $\delta \in [2^{-\sigma\nu}, 1 + 2^{-\sigma\nu}]$, on trouve que

$$\delta^{\left(\frac{1}{q(z)} - \frac{1}{q(x)}\right)} \leq (2^{\sigma\nu} \delta)^{\left|\frac{1}{q(z)} - \frac{1}{q(x)}\right|} 2^{\nu\sigma \left|\frac{1}{q(z)} - \frac{1}{q(x)}\right|} \leq c 2^{2c_{\log}(q)\sigma\nu / \log(e+1/|x-z|)} \leq c, \quad (3.2.3)$$

pour tout $z \in B(x, 2^{-\nu/2})$. Donc

$$\delta^{-\frac{t}{q(x)}} J_\nu^1(x) \leq C 2^{\nu n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^{-\frac{t}{q(z)}} 2^{\nu\alpha(z)t} |\varphi_\nu * f(z)|^t}{(1 + 2^\nu |x - z|)^{at}} dz.$$

Maintenant la fonction $z \mapsto \frac{1}{(1+|z|)^{at}} \in L^1$ (puisque $a > \frac{n}{t}$). Alors on utilise la propriété de l'opérateur maximale de Littlewood-Hardy pour majorant \mathcal{M} , voir E.M. Stein et G. Weiss [18, chapitre 2, (3.9)],

$$\left(|g|^t * \frac{1}{(1+|\cdot|)^{at}} \right) (x) \leq C \left\| \frac{1}{(1+|\cdot|)^{at}} \right\|_1 \mathcal{M}_t(g)(x),$$

il en suit que

$$\delta^{-\frac{t}{q(x)}} J_\nu^1(x) \leq C \mathcal{M}_t \left(\delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f \right) (x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

avec la constante $C > 0$ est indépendant de x et ν . Puisque $|x - z| \geq 2^{-\nu/2+i}$ et le côté droit de (3.2.3) est estimé par $c 2^{2\nu\sigma(1/q^- - 1/q^+)}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\nu \in \mathbb{N}_0$, $\delta^{-\frac{t}{q(x)}} J_{\nu-i}^2(x)$ est borné par

$$\begin{aligned} & C 2^{\nu t (2\sigma(1/q^- - 1/q^+) - a/2 + n/t)} 2^{-iat} \int_{B(x, 2^{-\nu/2+i+1})} \delta^{-\frac{t}{q(z)}} 2^{\nu\alpha(z)t} |\varphi_\nu * f(z)|^t dz \\ & \leq C 2^{\nu t (2\sigma(1/q^- - 1/q^+) - a/2 + n/2t)} 2^{i(n-at)} \mathcal{M}_t \left(\delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f \right) (x) \\ & \leq C 2^{i(n-at)} \mathcal{M}_t \left(\delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_\nu * f \right) (x), \end{aligned}$$

en raison de notre choix de σ . Donc,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta^{-\frac{t}{q(x)}} J_{\nu-i}^2(x) \leq C \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(n-at)} \mathcal{M}_t \left(\delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_{\nu} * f \right) (x) \leq C \mathcal{M}_t \left(\delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_{\nu} * f \right) (x),$$

depuis encore $a > n/t$. En conséquence nous avons prouvé que

$$\left(\delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} \varphi_{\nu}^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(x) \right)^t \leq C \mathcal{M}_t \left(\delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_{\nu} * f \right) (x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Prise la norme de $L^{\frac{p(\cdot)}{t}}$ et en utilisant le fait qui $M : L^{\frac{p(\cdot)}{t}} \rightarrow L^{\frac{p(\cdot)}{t}}$ est borné, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| c \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} \varphi_{\nu}^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f \right\|_{p(\cdot)}^t &= \left\| \left| c \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} \varphi_{\nu}^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f \right|^t \right\|_{\frac{p(\cdot)}{t}} \\ &\leq \left\| \delta^{-\frac{t}{q(\cdot)}} 2^{\nu\alpha(\cdot)t} |\varphi_{\nu} * f|^t \right\|_{\frac{p(\cdot)}{t}} \\ &= \left\| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_{\nu} * f \right\|_{p(\cdot)}^t, \end{aligned}$$

avec $c > 0$. Alors

$$\left\| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_{\nu} * f \right\|_{p(\cdot)}^t \leq 1 \iff \left\| \left| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{\nu\alpha(\cdot)} \varphi_{\nu} * f \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq 1,$$

Donc immédiatement d'après la définition de δ . Ce qui termine la preuve. ■

Dans cette section, considérons $k_0, k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et un nombre entier $S \geq -1$ telle que pour $\varepsilon > 0$ on a

$$|\mathcal{F}k_0(\xi)| > 0 \quad \text{pour } |\xi| < 2\varepsilon, \quad (3.2.4)$$

$$|\mathcal{F}k(\xi)| > 0 \quad \text{pour } \frac{\varepsilon}{2} < |\xi| < 2\varepsilon, \quad (3.2.5)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha k(x) dx = 0 \quad \text{pour tout } |\alpha| \leq S. \quad (3.2.6)$$

Ici (3.2.4) et (3.2.5) sont les conditions taubérien, avec (3.2.6) sont les conditions moment sur k . On rappelle que la notation

$$k_t(x) = t^{-n} k(t^{-1}x), \quad k_j(x) = k_{2^{-j}}(x), \quad \forall t > 0, j \in \mathbb{N}.$$

Pout tout $a > 0$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on note

$$k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{2^{j\alpha(y)} |k_j * f(y)|}{(1 + 2^j |x - y|)^a}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (3.2.7)$$

Habituellement $k_j * f$ est appelé le moyen local.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.2.2 Soit $\alpha \in C_{loc}^{\log}$ et $p, q \in \mathcal{P}_0^{\log}$ avec $q^+ < \infty$. Si $a > \frac{n}{p^-}$ et $\alpha^+ < S + 1$, alors

$$\left\| f \left| B_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \right. \right\|' = \left\| (k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f)_j \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}, \quad (3.2.8)$$

et

$$\left\| f \left| B_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \right. \right\|'' = \left\| (2^{j\alpha(\cdot)} k_j * f)_j \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}, \quad (3.2.9)$$

sont des quasi-normes équivalentes sur $B_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$.

Preuve. Le premier H. Kempka [13] a prouvé ce résultat, mais seulement le cas de q constante était inclus. J.-S. Xu [24] a prouvé ce résultat avec p variable, mais q et α est fixé. H. Kempka et J. Vybíral [15, Théorème 14], indépendant, avéré ce résultat avec $2^{j\alpha(\cdot)} k_j^{*,a} f$, $\frac{n+c_{\log}(1/q)}{p^-} + c_{\log}(\alpha)$ au lieu de $k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f$, $\frac{n}{p^-}$, respectivement. L'idée de la preuve est de V.S. Rychkov [16].

Étape 1. Soient $\phi_0, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}\phi_0(\xi)| &> 0 \text{ pour } |\xi| < 2\varepsilon, \\ |\mathcal{F}\phi(\xi)| &> 0 \text{ pour } \frac{\varepsilon}{2} < |\xi| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On montre que il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\left\| f \left| B_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \right. \right\|' \leq c \left\| (\phi_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f)_j \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}. \quad (3.2.10)$$

Donc il suffit de considère le cas

$$\left\| (\phi_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f)_j \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} = 1,$$

et on montre que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\| |c k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq C \text{ quand } \sum_{j=0}^{\infty} \left\| |\phi_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} = 1.$$

Soient $\Lambda, \lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\text{supp } \mathcal{F}\Lambda \subset \{ \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < 2\varepsilon \}, \quad \text{supp } \mathcal{F}\lambda \subset \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \varepsilon/2 < |\xi| < 2\varepsilon \},$$

$$\mathcal{F}\Lambda(\xi) \mathcal{F}\phi_0(\xi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{F}\lambda(2^{-\nu}\xi) \mathcal{F}\phi(2^{-\nu}\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2.11)$$

En particulier, pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a

$$f = \Lambda * \phi_0 * f + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} * \phi_{\nu} * f. \quad (3.2.12)$$

Donc on peut écrire

$$k_j * f = k_j * \Lambda * \phi_0 * f + \sum_{\nu=1}^{\infty} k_j * \lambda_{\nu} * \phi_{\nu} * f.$$

Nous avons

$$2^{j\alpha(y)} |k_j * \lambda_{\nu} * \phi_{\nu} * f(y)| \leq 2^{j\alpha(y)} \int_{\mathbb{R}^n} |k_j * \lambda_{\nu}(z)| |\phi_{\nu} * f(y-z)| dz. \quad (3.2.13)$$

Soit $\nu \leq j$. On écrit

$$k_j * \lambda_{\nu}(z) = 2^{\nu n} k_{2^{\nu-j}} * \lambda(2^{\nu} z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Alors d'après le lemme 3.1.2, et pour tout nombre entier $S \geq -1$ et tout $N > 0$ il existe une constante $c > 0$ indépendante de j et ν , on a

$$|k_j * \lambda_{\nu}(z)| \leq c \frac{2^{(\nu-j)(S+1)+\nu n}}{(1+2^{\nu}|z|)^{2N}}, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi le côté droit de (3.2.13) est estimé par

$$c 2^{j\alpha(y)+(\nu-j)(S+1)+\nu n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+2^{\nu}|z|)^{-2N} |\phi_{\nu} * f(y-z)| dz = c 2^{(\nu-j)(S+1)} 2^{j\alpha(y)} \eta_{\nu,2N} * |\phi_{\nu} * f|(y).$$

D'après le lemme 1.2.2 on a l'estimation

$$\begin{aligned} 2^{j\alpha(y)} \eta_{\nu,2N} * |\phi_{\nu} * f(y)| &\leq 2^{(j-\nu)\alpha^+} \eta_{\nu,N} * (2^{\nu\alpha(\cdot)} |\phi_{\nu} * f|)(y) \\ &\leq 2^{(j-\nu)\alpha^+} \phi_{\nu}^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(y) \|\eta_{\nu,N-a}\|_1 \\ &\leq c 2^{(j-\nu)\alpha^+} \phi_{\nu}^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(y), \end{aligned}$$

cette estimation est vraie pour $N > \max(d, n+a)$ et tout $\nu \leq j$ (avec $d \in (n, \infty)$).

Soit maintenant $\nu \geq j$. Alors, d'après le lemme 3.1.2 nous avons pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ et tout $L > 0$

$$|k_j * \lambda_{\nu}(z)| = 2^{jn} |k * \lambda_{2^{j-\nu}}(2^j z)| \leq c \frac{2^{(j-\nu)(M+1)+jn}}{(1+2^j|z|)^{2L}},$$

avec un nombre entier $M \geq -1$ est pris arbitrairement grand, puisque $D^\alpha \mathcal{F}\lambda(0) = 0$ pour tout α . Alors, pour $\nu \geq j$, le côté droit de (3.2.13) est estimé par

$$c2^{j\alpha(y)+(j-\nu)(M+1)+jn} \int_{\mathbb{R}^n} (1+2^j|z|)^{-2L} |\phi_\nu * f(y-z)| dz = c2^{j\alpha(y)+(j-\nu)(M+1)} \eta_{j,2L} * |\phi_\nu * f|(y).$$

Et on a

$$(1+2^j|z|)^{-2L} \leq 2^{2(\nu-j)L} (1+2^\nu|z|)^{-2L}, \quad \forall \nu \geq j.$$

Alors, encore, le côté droit de (3.2.13) est dominé par

$$\begin{aligned} c2^{j\alpha(y)+(j-\nu)(M-2L+1+n)} \eta_{\nu,2L} * |\phi_\nu * f|(y) &\leq c2^{(j-\nu)(M-2L+1+\alpha^-+n)} \eta_{\nu,L} * (2^{\nu\alpha(\cdot)} |\phi_\nu * f|)(y) \\ &\leq c2^{(j-\nu)(M-2L+1+\alpha^-+n)} \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(y) \|\eta_{\nu,L-a}\|_1 \\ &\leq c2^{(j-\nu)(M-2L+1+\alpha^-+n)} \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(y), \end{aligned}$$

là où dans la première inégalité nous avons employé le lemme 1.2.2 (en prenant $L > \max(d, n+a)$). Puisque $M > 2L - \alpha^- + a - n$ on estimé la dernière expression par

$$c2^{(j-\nu)(a+1)} \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(y),$$

avec $c > 0$ est indépendant de j, ν et f . De plus, noter que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $j, \nu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(y) &\leq \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(x) (1+2^\nu|x-y|)^a \\ &\leq \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(x) \max(1, 2^{(\nu-j)a}) (1+2^j|x-y|)^a. \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{2^{j\alpha(y)} |k_j * \lambda_\nu * \phi_\nu * f(y)|}{(1+2^j|x-y|)^a} \leq C \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(x) \times \begin{cases} 2^{(\nu-j)(S+1-\alpha^+)} & \text{si } \nu \leq j, \\ 2^{j-\nu} & \text{si } \nu \geq j. \end{cases}$$

En utilisant le fait que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, tout $N > 0$ et tout nombre entier $S \geq -1$

$$|k_j * \Lambda(z)| = |k_{2^{-j}} * \Lambda(z)| \leq c \frac{2^{-j(S+1)}}{(1+|z|)^{2N}},$$

on obtient

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{2^{j\alpha(y)} |k_j * \Lambda * \phi_0 * f(y)|}{(1+2^j|x-y|)^a} \leq C 2^{-j(S+1-\alpha^+)} \phi_0^{*,a} f(x), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Donc avec $\delta = \min(1, S + 1 - \alpha^+) > 0$ pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$ on a

$$k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f(x) \leq C 2^{-j\delta} \phi_0^{*,a} f(x) + C \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-|j-\nu|\delta} \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(x) = C \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-|j-\nu|\delta} \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(x).$$

Aussi pour $j = 0$, en utilisant le fait pour $\nu \geq 1$, $z \in \mathbb{R}^n$, $N > 0$ et tout nombre entier $M \geq -1$

$$|k_0 * \lambda_\nu(z)| = |k_0 * \lambda_{2^{-\nu}}(z)| \leq c \frac{2^{-\nu(M+1)}}{(1+|z|)^{2N}},$$

et

$$|k_0 * \Lambda(z)| \leq c \frac{1}{(1+|z|)^{2N}},$$

pour obtenir

$$k_0^{*,a} f(x) \leq C \phi_0^{*,a} f(x) + C \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu\delta} \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(x) = C \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu\delta} \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $\tau > \max\left(q^+, \frac{q^+}{p^-}\right)$. Alors d'après le lemme 3.1.1, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \left| c k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \left| c k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f \right|^{q(\cdot)/\tau} \right\|_{\frac{\tau p(\cdot)}{q(\cdot)}}^\tau \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-|j-\nu|\delta} \left\| \left| \phi_\nu^{*,a} 2^{\nu\alpha(\cdot)} f \right|^{q(\cdot)/\tau} \right\|_{\frac{\tau p(\cdot)}{q(\cdot)}} \right)^\tau \\ &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \left| \phi_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f \right|^{q(\cdot)/\tau} \right\|_{\frac{\tau p(\cdot)}{q(\cdot)}}^\tau = C \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \left| \phi_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq C, \end{aligned}$$

avec $c > 0$.

Étape 2. On montre que dans cette étape que il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\left\| f \Big|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \right\|' \leq c \left\| f \Big|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \right\|'' . \quad (3.2.14)$$

Dans même façon analogue à (3.2.11), (3.2.12), soient $\Lambda, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\text{supp } \mathcal{F}\Lambda \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < 2\varepsilon\}, \quad \text{supp } \mathcal{F}\psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \varepsilon/2 < |\xi| < 2\varepsilon\},$$

et on a

$$f = \Lambda_j * (k_0)_j * f + \sum_{m=j+1}^{\infty} \psi_m * k_m * f, \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Donc

$$k_j * f = \Lambda_j * (k_0)_j * k_j * f + \sum_{m=j+1}^{\infty} k_j * \psi_m * k_m * f.$$

Il suffit de considérer le cas

$$\left\| f \Big| B_{p(\cdot), q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} \right\|'' = 1,$$

et on montre que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\| |c k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq C \text{ quand } \sum_{j=0}^{\infty} \left\| |2^{j\alpha(\cdot)} k_j * f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} = 1.$$

On peut écrire

$$k_j * \psi_m(z) = 2^{jn} (k * \psi_{2^{j-m}})(2^j z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

alors d'après le lemme 3.1.2, et pour tout nombre entier $K \geq -1$ et tout $M > 0$ il existe une constante $c > 0$ indépendant de j et m , on a

$$|k_j * \psi_m(z)| \leq c \frac{2^{(j-m)(K+1)+jn}}{(1+2^j|z|)^{2M}}, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

L'estimation analogue

$$\left| \Lambda_j * (k_0)_j(z) \right| \leq c \frac{2^{jn}}{(1+2^j|z|)^{2M}}, \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

est évident. De ceci il suit que

$$\begin{aligned} 2^{j\alpha(y)} |k_j * f(y)| &\leq c \sum_{m=j}^{\infty} 2^{(j-m)(K+1+\alpha^-)} 2^{m\alpha(y)} \eta_{j,2M} * |k_m * f|(y) \\ &= c \sum_{m=j}^{\infty} 2^{(j-m)(K+1+\alpha^-)+jn} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{m\alpha(y)} |k_m * f(z)|}{(1+2^j|y-z|)^{2M}} dz. \end{aligned}$$

Puisque

$$(1+2^j|y-z|)^{-2M} \leq 2^{2(m-j)M} (1+2^m|y-z|)^{-2M},$$

alors d'après le lemme 1.2.2 on trouve

$$\begin{aligned} 2^{j\alpha(y)} |k_j * f(y)| &\leq c \sum_{m=j}^{\infty} 2^{(j-m)(K+1+\alpha^- - 2M+n)} 2^{m\alpha(y)} \eta_{m,2M} * |k_m * f|(y) \quad (3.2.15) \\ &\leq c \sum_{m=j}^{\infty} 2^{(j-m)(K+1+\alpha^- - 2M+n)} \eta_{m,a} * (2^{m\alpha(\cdot)} |k_m * f|)(y), \end{aligned}$$

avec prendre $M > \max(d, a)$. On utilise l'estimation élémentaire

$$\begin{aligned} (1 + 2^j |x - y|)^{-a} &\leq (1 + 2^j |x - z|)^{-a} (1 + 2^j |y - z|)^a \\ &\leq c 2^{(m-j)a} (1 + 2^m |x - z|)^{-a} (1 + 2^m |y - z|)^a, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

pour obtenir

$$k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f(x) \leq c \sum_{m=j}^{\infty} 2^{(j-m)(K+1-a-\alpha^- - 2M+n)+mn} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{m\alpha(z)} |k_m * f(z)|}{(1 + 2^m |x - z|)^a} dz.$$

En fixé $r \in (0, 1]$. On trouve que

$$\begin{aligned} 2^{m\alpha(z)} |k_m * f(z)| &= (2^{m\alpha(z)} |k_m * f(z)|)^r (2^{m\alpha(z)} |k_m * f(z)|)^{1-r} \\ &= (2^{m\alpha(z)} |k_m * f(z)|)^r \left(\frac{2^{m\alpha(z)} |k_m * f(z)|}{(1 + 2^m |x - z|)^a} \right)^{1-r} (1 + 2^m |x - z|)^{a(1-r)} \\ &\leq (2^{m\alpha(z)} |k_m * f(z)|)^r (k_m^{*,a} 2^{m\alpha(\cdot)} f(x))^{1-r} (1 + 2^m |x - z|)^{a(1-r)}. \end{aligned}$$

Alors

$$k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f(x) \leq c \sum_{m=j}^{\infty} 2^{(j-m)N'+mn} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{m\alpha(z)} |k_m * f(z)|^r}{(1 + 2^m |x - z|)^{ar}} dz (k_m^{*,a} 2^{m\alpha(\cdot)} f(x))^{1-r},$$

d'où $N' = K + 1 - a + n - \alpha^- - 2M$ est toujours pris arbitrairement grand. Tout à fait de façon analogue on prouve pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'estimation

$$k_0^{*,a} f(x) \leq C \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-mN'+mn} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{m\alpha(z)} |k_m * f(z)|^r}{(1 + 2^m |x - z|)^{ar}} dz (k_m^{*,a} 2^{m\alpha(\cdot)} f(x))^{1-r}.$$

Maintenant en fixe tout $x \in \mathbb{R}^n$ et appliquer le lemme 3.1.3 avec

$$\begin{aligned} d_j &= k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f(x), \quad j \in \mathbb{N}_0, \\ b_m &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{m\alpha(z)+mn} |k_m * f(z)|^r}{(1 + 2^m |x - z|)^{ar}} dz, \quad m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Supposons (3.1.2) est satisfaite de $N_0 = N_1 + n + [\max(0, \alpha^+)] + 1$, avec N_1 est l'ordre de distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ($[a]$ est la partie entier de nombre réelle a). On conclue que pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $N > 0$ et $j \in \mathbb{N}_0$

$$(k_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f(x))^r \leq C \sum_{m=j}^{\infty} 2^{(j-m)Nr+mn} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{m\alpha(z)} |k_m * f(z)|^r}{(1 + 2^m |x - z|)^{ar}} dz, \quad r > 1.$$

Il suffit pour prendre (3.2.15) avec $a + n$ au lieu de a , on appliqué l'inégalité de Hölder en m et z , et finalement l'inégalité (3.2.16). Nous omettons les détails.

Puisque $a > \frac{n}{p^-}$, il possible de prendre $\frac{n}{a} < r < p^-$. Soit $\tau > \frac{q^+}{r}$. Alors

$$\begin{aligned} \left\| |ck_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} &= \left\| |ck_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f|^{rq(\cdot)/r} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \\ &= \left\| |ck_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f|^{rq(\cdot)/r\tau} \right\|_{\frac{\tau p(\cdot)}{q(\cdot)}}^\tau \\ &\leq C \left(\sum_{m=j}^{\infty} 2^{(j-m)Nq^-/\tau} \left\| c\eta_{m,ar} * (2^{m\alpha(\cdot)} |k_m * f|)^r \right\|_{\frac{\tau p(\cdot)}{q(\cdot)}}^{q(\cdot)/r\tau} \right)^\tau. \end{aligned}$$

Par la même méthode donnée dans la preuve de théorème 3.2.1 (avec $m, q(\cdot)/\tau, r$ au lieu de $\nu, q(\cdot), t$ respectivement) nous pouvons prouver que

$$\begin{aligned} \left\| |c\eta_{m,ar} * (2^{m\alpha(\cdot)} |k_m * f|)^r|^{q(\cdot)/r\tau} \right\|_{\frac{\tau p(\cdot)}{q(\cdot)}} &\leq \left\| |2^{m\alpha(\cdot)} k_m * f|^{q(\cdot)/\tau} \right\|_{\frac{\tau p(\cdot)}{q(\cdot)}} + 2^{-m\sigma} \\ &= \left\| |2^{m\alpha(\cdot)} k_m * f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}^{1/\tau} + 2^{-m\sigma}, \end{aligned}$$

avec $c > 0$ et $0 < \sigma < \frac{a-n/r}{4r(\frac{1}{q^-} - \frac{1}{q^+})}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $j \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\left\| |ck_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq C \left(\sum_{m=j}^{\infty} 2^{(j-m)Nq^-/\tau} \left(\left\| |2^{m\alpha(\cdot)} k_m * f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}^{1/\tau} + 2^{-m\sigma} \right) \right)^\tau.$$

D'après le lemme 3.1.1 on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left\| |ck_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} &\leq c \sum_{j=0}^{\infty} \left(\left\| |2^{j\alpha(\cdot)} k_j * f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}^{1/\tau} + 2^{-j\sigma} \right)^\tau \\ &\leq c \sum_{j=0}^{\infty} \left\| |2^{j\alpha(\cdot)} k_j * f|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\sigma\tau} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Étape 3. On montre dans cette étape que pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on a l'estimation suivante

$$\left\| f \Big|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \right\|' \leq c \left\| f \Big|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \right\| \leq c \left\| f \Big|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \right\|''.$$

Soit $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ est comme dans la définition 2.1.1 et soit $\phi_j = \varphi_j$. La première inégalité est prouvée par la chaine des estimations

$$\left\| f \Big|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \right\|' \leq c \left\| (\varphi_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f)_j \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \leq c \left\| (2^{j\alpha(\cdot)} \phi_j * f)_j \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \leq c \left\| f \Big|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \right\|,$$

là où la première inégalité est (3.2.10), voir l'étape 1, la deuxième inégalité est (3.2.14) (avec ϕ et ϕ_0 au lieu de k et k_0), voir l'étape 2, et finalement la troisième inégalité est évidente. Maintenant la deuxième inégalité est obtenue par la chaîne suivante

$$\left\| f \Big|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \right\| \leq c \left\| (\varphi_j^{*,a} 2^{j\alpha(\cdot)} f)_j \right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \leq c \left\| f \Big|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \right\|' \leq c \left\| f \Big|_{B_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \right\|'',$$

là où la première inégalité est évidente, la deuxième inégalité est (3.2.10), voir l'étape 1, avec les rôles de k_0 et k respectivement φ_0 et φ échangé, et finalement la dernière inégalité est (3.2.14), voir l'étape 2. Ce qui termine la preuve. ■

Conclusion générale

A la fin de ce travail, on conclut que cet espace conserve quelques propriétés de l'espace Besov usuel et plus. L'espace de Besov avec exposants variables est important dans l'analyse harmonique.

Quelques des inégalités et les inclusions dans l'espace de Besov avec exposants variables reste la même comme dans le cas classique de l'espace de Besov usuel.

Bibliographie

- [1] **A. Almeida, P. Hästö**, *Besov spaces with variable smoothness and integrability*, J. Func. Anal. 258 (2010) 1628-1655.
- [2] **A. Almeida, S. Samko**, *Characterization of Riesz and Bessel potentials on variable Lebesgue spaces*, J. Funct. Spaces Appl. 4 (2) (2006) 113-144.
- [3] **A. Almeida, S. Samko**, *Pointwise inequalities in variable Sobolev spaces and applications*, Z. Anal. Anwend. 26 (2) (2007) 179-193.
- [4] **O. Besov**, *On spaces of functions of variable smoothness defined by pseudodifferential operators* (Issled. po Teor. Differ. Funkts. Mnogikh Perem. i ee Prilozh.), Tr. Mat. Inst. Steklova 18 (1999) 56-74 (in Russian), English transl. in Proc. Steklov Inst. Math. 227 (4) (1999) 50-69.
- [5] **O. Besov**, *Equivalent normings of spaces of functions of variable smoothness* (Funkts. Prostran., Priblizh., Differ. Uravn.), Tr. Mat. Inst. Steklova 243 (2003) 87-95 (in Russian), English transl. in Proc. Steklov Inst. Math. 243 (4) (2003) 80-88.
- [6] **D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. M. Martell, C. Pérez**, *The boundedness of classical operators in variable L^p spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 13 (2006) 239-264.
- [7] **D. Drihem**, *Atomic decomposition of Besov spaces with variable smoothness and integrability*. J. Math. Anal. Appl. 389 (2012) 15-31.
- [8] **L. Diening**, *Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$* , Math. Inequal. Appl. 7 (2) (2004) 245-253.

-
- [9] **A. Diening, P. Hästö, S. Roudenko**, *Function spaces of variable smoothness and integrability*, J. Func. Anal. 256(2009) 1731-1768.
- [10] **L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička**, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Math., vol. 2017, Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [11] **M. Frazier, B. Jawerth**, *Decomposition of Besov spaces*, Indiana Univ. Math. J. 34 (1985) 777-799.
- [12] **P. Gurka, P. Harjulehto, A. Nekvinda**, *Bessel potential spaces with variable exponent*, Math. Inequal. Appl. 10 (3) (2007) 661-676.
- [13] **H. Kempka**, *2-Microlocal Besov and Triebel-Lizorkin spaces of variable integrability*, Rev. Mat. Complut. 22 (1) (2009) 227-251.
- [14] **H. Kempka**, *Atomic, molecular and wavelet decomposition of generalized 2-microlocal Besov and Triebel-Lizorkin spaces of variable integrability*, Funct. Approx. 43 (2) (2010) 171-208.
- [15] **H. Kempka, J. Vybíral**, *Spaces of variable smoothness and integrability: Characterizations by local means and ball means of differences*, arXiv: 1103.5357v1 [math. FA] 28 Mar 2011.
- [16] **V.S. Rychkov**, *On a theorem of Bui, Paluszynski, and Taibleson*, Proc. Steklov Inst. Math. 227 (1999) 280-292.
- [17] **R. Schneider, O. Reichmann, C. Schwab**, *Wavelet solution of variable order pseudodifferential equations*, Calcolo 47 (2) (2010) 65-101.
- [18] **E.M. Stein, G. Weiss**, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [19] **H. Triebel**, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.
- [20] **H. Triebel**, *Theory of Function Spaces, II*, Birkhäuser, Basel, 1992.

- [21] **H. Triebel**, *Fractals and Spectra*, Birkhäuser, Basel, 1997.
- [22] **H. Triebel**, *Theory of Function Spaces, III*, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [23] **J. Vybíral**, *Sobolev and Jawerth embeddings for spaces with variable smoothness and integrability*, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 34 (2) (2009) 529-544.
- [24] **J.-S. Xu**, *Variable Besov and Triebel-Lizorkin spaces*, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 33 (2008) 511-522.
- [25] **J.-S. Xu**, *An atomic decomposition of variable Besov and Triebel-Lizorkin spaces*, *Armenian J. Math.* 2 (1) (2009) 1-12.

Annexe

Cet annexe est consacré à introduire une bibliographié mathématique de la vie scientifique de quelques mathématiciens célèbres.

Besov Oleg Vladimirovich :

Mathématicien Russe, est né le 27 mai 1933. Docteur en sciences mathématique et physique. En 1990, il était élu membre correspondant de l'académie des sciences de russe, professeur MTPI, chef de la théorie d'es fonctions de l'institut de math Steklov. En 1977, lauréat du prix d'état de l'URSS. Il a travaillé sur l'analyse mathématique, analyse harmonique, est l'auteur de plus de 80 articles, et obtenu compléments importants à la théorie des espaces de Sobolev (l'espace de Besov).



Bernstein Sergei Natanovich :

Mathématicien Swede (soviétique), né le 5 mars 1880 à odessa et mort le 26 octobre 1968 à moscou. Sa thèse de doctorat soumise en 1904 à la sorbonne, résout le 19 problème de Hilbert. Ses travaux portent l'approximation de fonction et la théorie des probabilités.



Fourier Jean-Baptiste (1768-1830) :

Mathématicien et physicien Français, un des créateurs de la physique mathématique. Il modélisa la propagation de la Chaleur en utilisant une série trigonométrique qui deviendra célèbre.



Hölder Otto Ludwig :

Mathématicien Allemand, est né le 22 décembre 1859 à stuttgart et mort le 29 août 1937 à Leipzig. Il a travaillé sur la convergence des séries de Fourier et a découvert, en 1884, cette inégalité qui porte aujourd'hui son nom. On lui doit d'importants résultats en analyse fonctionnelle, en logique et en structures algébriques.

**Hardy Godfrey Harold (1877-1947) :**

Mathématicien britannique. Connu pour ses travaux majeurs en théorie des nombres et en analyse. Il reconnut immédiatement le génie inclassable de Ramanujan.

**Lebesgue Henri Léon :**

Mathématicien Français, né le 28 juin 1875 à Beauvais et mort le 26 juillet 1941 à paris. Il soutient sa thèse en 1902 sous le titre: Intégrale, longueun, aire. Dans sa thèse, Lebesgue présente la théorie d'une nouvelle intégrale, qui porte son nom de jours. Simplifier et amplifier la recherche en analyse de Fourier.

**Littlewood John Edensor (1885-1977) :**

Mathématicien Anglais. Il a travaillé sur le théorie de séries, la fonction de Zéta de Riemann, les inégalités, et la théorie des fonctions. Ses contributions en analyse harmonique (il a aussi une importante contributions dans l'opérateur maximale de Littlewood-Hardy et décomposition de Littlewood-Paley dans les espace fonctionnels).

**Nikolskij Sergueï Mikhailovitch :**

Mathématicien Russe, est né le 30 avril 1905 à talitsa et mort le 09 novembre 2012 à moscou. Il est membre de l'académie de science d'URSS (puis de Russe). En 2005, il travaille encore pour l'institut de physique et de technologie de Moscou.



Paley Raymond (1907-1933) :

Mathématicien Anglais. Ses contributions en analyse harmonique furent nombreuses et décisives.

**Jaak Peetre :**

Mathématicien Suédois, est né le 29 juillet 1935 à Tallinn, en Estonie. En 1958, il a en poche son diplôme dans l'université de Lund, et était un professeur de mathématique (1963-1988). Il a été en 1983 membre de l'académie des sciences. Il a travaillé sur EDP, les opérateur d'intrepolation, la géométrie différentielle.

**Sobolev Sergueï (1908-1989) :**

Mathématicien et physicien Russe. Auteur de nombreux travaux sur les équations aux dérivées appliquées à la physique. Il introduisit la notion des fonctions des dérivées "généralisées" qui est à l'origine de la théorie des distributions.

**Schwartz Laurent (1915-2002) :**

Mathématicien Français. Inventeur de la théorie des distributions qui joue un rôle crucial notamment dans la théorie des équations aux dérivées partielles. On lui doit également de remarquable résultats en géométrie des espaces de Banach et probabilités. Premier Français à avoir obtenu la prestigieuse médaille Fields.



Triebel Hans :

Mathématicien Allemand, est né le 7 février 1936 à Dessau, il a obtenu son diplôme en 1959. En 1962 il a obtenu son doctorat sur l'équation de Lamé. En 1970, il a été professeur d'analyse à l'école technique de Leipzig. Ses travaux portent essentiellement sur l'analyse fonctionnelle, l'analyse harmonique et les équations de la physique mathématique. Sa plus célèbre découverte est l'espace Lizorkin-Triebel.

**Zygmund Antoni :**

Mathématicien Polonais, est né le 25 décembre 1900 à Varsovie et mort le 30 mars 1992 à Chicago. Il a étudié le doctorat avec Alberto Calderón. Il a travaillé sur les opérateurs intégraux singuliers dans le domaine de l'analyse harmonique.

