MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière Mathématiques**:**

Option : Analyse fonctionnelle

Par

Nakes Nour ehhouda

Sujet

Méthodes de construction des idéaux multilinéaires

Devant le jury :

Mr. DAHIA Elhadj Dr. Univ de M'sila Président

Mr. ACHOUR Dahmane Prof. Univ de M'sila Rapporteur

Mr. TALLAB Abed ehhamid M.A.A. Univ de M'sila Examinateur

Promotion : 2015 / 2016

Remerciements

Avant tout nous tenons à rendre et glorifier Dieu clément et miséricordieux de nous avoir donné la volonté et le courage pour accomplir cette tâche.

Aussi nous expriment gratitudes et nos sincères reconnaissances à notre encadreur Monsieur D.Achour pour son soutien et l'encadrement.

Je tiens à exprimer tous mes respects à mes parents, mon fiancé, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours encouragée.

A tout personne qui nous ont aidé du prés ou de loin pour réaliser notre mémoire.

Merci

Résumé

Dans ce mémoire, on traitera les méthodes de constructions des idéaux multilinéaires, on détaille la méthode de factorisation puis son relation avec la méthode de linéarisation.

Comme conséquence nous montrons que l'idéal m-linéaire $(p_1, ..., p_m)$-dominés peut construire par la méthode de factorisation.

Mots clés: Idéal linéaire, Méthode de factorisation des opérateurs, Opérateurs p-sommants,Opérateurs m-linéaire $(p_1, ..., p_m)$-dominés.

Table des matières

Introduction

Le but de ce travail est de regrouper quelques résultats importants dans la théorie des idéaux multilinéaires. Une grande portion de ce travail est basée sur une thèse de [4], la thèse de Gesse 1984 [9] et le livre de Defant et Floret [6] .

La théorie des idéaux multilinéaires a été introduite par Pietsch en 1983 dans [14]. Leur grande motivation était de trouver des rapports entre les opérateurs linéaires et multilinéaires.

Dans ce sens, il a proposé des méthodes permettant d'obtenir des idéaux multilinéaires à partir d'un idéal linéaire. Certaines classes d'opérateurs multilinéaires peuvent s'exprimer via ces méthodes de Pietsch à savoir la classe des opérateurs multilinéaires $(p_1, ..., p_m)$-dominés.

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques définitions (une norme, quasi normé, p-normé,.....etc.) ensuite, nous discutons sur les idéaux des opérateurs linéaire et on prend l'idéal des opérateurs p-sommant sommant comme un exemple, on donne un aperçu générale sur les espaces de suites p-sommables et faiblement p-sommables.

Dans le deuxième chapitre on donne quelques théorèmes du graphe ferme, Banach Steinhaus, uniformément continue pour les applications multilinéaires, on étudie les idéaux multilinéaires et on prend comme exemple $\mathcal{L}_f$ et $\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$, ensuite nous passons aux méthodes de construction des idéaux multilinéaires ce sont :

La méthode de composition, factorisation et la méthode de linéarisation, puis on détaille la méthode de factorisation, on termine ce chapitre par la relation entre la méthode de linéarisation et la méthode de factorisation.

Dans le troisième chapitre, on étudie l'idéal des opérateurs $(p_1, ..., p_m)$-dominés car sa construction peut s'interpréter par la méthode de factorisation, on détaille les théorèmes de domination et de factorisation de Pietsch.

Chapitre 1

Idéal d'opérateurs linéaire

Dans ce chapitre, nous allons faire une introduction à la théorie des idéaux d'opérateurs, les références principale ont utilisé les livre [7, 1, 12].

1.1 Défintions et propriétés

Définition 1.1.1 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle quasi norme sur X toute application*

$$\begin{aligned} \|.\| \quad &: \quad X \to \mathbb{R}^+ \\ x \quad &\to \quad \|x\| \end{aligned}$$

qui vérifie:

1. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$
2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \forall x \in X.$
3. $\exists c \geq 1$ *tq* $\|x + y\| \leq c(\|x\| + \|y\|) \quad \forall x, y \in X$.

   si $c = 1$, on appelle norme sur X.

Définition 1.1.2 *Soit $(0 < p \leq 1)$, Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ .on dit que $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$ est un $p-$norme s'elle vérifie les propriétés suivants :*

1. $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in X : \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \ : \forall x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p \quad \forall x, y \in X.$

Lemme 1.1.1 *Tout p-normé est quasi-normé, avec une constante* $c = 2^{\frac{1}{p}}$.

Preuve. En effet, pour tous les vecteurs x et y, nous avons

$$\begin{aligned} \|x + y\|^p &\leq \|x\|^p + \|y\|^p \\ \|x + y\| &\leq (\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq ((\|x\| + \|y\|)^p + (\|x\| + \|y\|)^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

D'où

$$\|x + y\| \leq 2^{\frac{1}{p}} (\|x\| + \|y\|)$$

■

Définition 1.1.3 *(Espace de Banach) On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.*

Proposition 1.1.1 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y C'est un espace vectoriel normé pour la norme*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

Si Y est complet alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace de Banach, lorsque $Y = X$. On notera simplement $\mathcal{L}(X)$ l'espace $\mathcal{L}(X, X)$.

Définition 1.1.4 *(Ensemble convexe)*
Soit X un espace vectoriel et A une partie de X. On dit que A est convexe si

$$\forall x, y \in A \ \textit{et} \ \forall \lambda \in]0, 1[: \lambda x + (1 - \lambda) y \in A$$

Définition 1.1.5 *(Semi-continue inférieure)*
Soit X un espace topologique .Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit semi-continue inférieurement si l'une des trois propriétés sont vérifiée:

i) *L'épigraphe $epi(\varphi) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$*

ii) *L'ensemble $\{x \in X, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans X pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

iii) *Pour tout $x \in X$, tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers x, on a:*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} \varphi(x_k)) \geq \varphi(x)$$

Exemple 1.1.1

1. *toute fonction continue est semi-continue inférieurement.*
2. *une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est continue $\Longleftrightarrow$ f et $(-f)$ sont semi-continue inférieurement.*

Définition 1.1.6 *(Convexité) Soit X un espace vectoriel.Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit convexe si son épigraphe est convexe.*

De façon équivalente, on dira que φ est convexe si $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in]0, 1[$

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$$

Maintenant nous présentons le concept d'un idéal d'opérateurs avec un exemple fondamental.

Définition 1.1.7 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est de rang fini s'il est somme fini d'opérateurs de la forme:*

$$\begin{aligned} T_i : \quad & X \longrightarrow Y \\ & x \longrightarrow x^*(x)\, y \end{aligned}$$

où $x^* \in X^*$ et *$y \in Y$. L'espace des opérateurs linéaire de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X, Y)$.*

Définition 1.1.8 *Un idéal d'opérateurs $\mathcal{I}$ est une sous-classe de la classe $\mathcal{L}$ de tous les opérateurs linéaires continue tels que pour tout espaces de Banach X et Y les composants $\mathcal{I}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y) \cap \mathcal{I}$ satisfait*

(i) *$\mathcal{I}(X,Y)$ est sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$ contenant les opérateurs de rang fini*

(ii) *Propriété d'idéal: si $u \in \mathcal{L}(E;X)$,$v \in \mathcal{I}(X,Y)$ et $w \in \mathcal{L}(Y,F)$ alors $w \circ v \circ u \in \mathcal{I}$ (E,F).*

Définition 1.1.9 *Un idéal normé (p-normé) des opérateurs $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ est un idéal des opérateurs $\mathcal{I}$ muni de la norme (p-norme) $\|.\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0,\infty)$ tels que :*

1. *$(\mathcal{I}(X,Y), \|.\|_{\mathcal{I}})$ est un espace normé (p-normé) pour tout espace de Banach X et Y*
2. *$\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$, comme $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $id_{\mathbb{K}}(x) = x$.*
3. *si $u \in \mathcal{L}(E;X)$, $v \in \mathcal{I}\ (X,Y)$ et $w \in \mathcal{L}(Y;F)$ alors $\|w \circ v \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|w\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|u\|$.*

Proposition 1.1.2 *[12, proposition 6.1.4] Soit $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$. Un idéal normé des opérateurs alors pour tout $u \in \mathcal{I}$ on ait*

$$\|u\| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}$$

Preuve. Soient $u \in \mathcal{I}(X,Y), \varphi \in Y'$ et $x \in X$, on définit

$$R : \mathbb{K} \to X : \lambda \to R(\lambda) = \lambda x$$

on a $\|R\| = \|x\|$
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

$$(\varphi \circ u)(x)\, id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda (\varphi \circ u)(x)$$

comme

$$(\varphi \circ u \circ R)(\lambda) = (\varphi \circ u)(\lambda x) = \lambda (\varphi \circ u)(x)$$

il en résulte que

$$\varphi \circ u \circ R = (\varphi \circ u)(x)\, id_{\mathbb{K}} \tag{1.1.1}$$

De (1.1.1) on a

$$\begin{aligned} |(\varphi \circ u)(x)| &= |(\varphi \circ u)(x)| \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|(\varphi \circ u)(x)\, id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|\varphi \circ u \circ R\|_{\mathcal{I}} \leq \|\varphi\| \|u\|_{\mathcal{I}} \|R\| \ \text{(d'après propriété d'idéal)} \end{aligned}$$

par le théorème de Hahn-Banach on a

$$\|u(x)\| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |(\varphi \circ u)(x)| \leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \|\varphi\| \|u\|_{\mathcal{I}} \|R\| = \|u\|_{\mathcal{I}} \|x\|$$

D'où

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}$$

■

Remarque 1.1.1 *Si $\varphi \in X'$, alors $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{\mathcal{I}}$. En effet: comme φ est de rang fini alors $\varphi \in \mathcal{I}$ et*

$$\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{I}} = \|id_{\mathbb{K}} \circ \varphi\|_{\mathcal{I}} \leq \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \|\varphi\| = \|\varphi\| \tag{1.1.2}$$

1.2 Espaces de suites

Soit p un nombre réel tel que $1 \leq p < +\infty$. Rappelons que $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$ est l'espace vectoriel des suites de scalaires $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p$ converge. Alors $\ell_p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_p$ définie par: pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, on a

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace des suites de scalaires $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées muni de la norme

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach noté $\ell_\infty(\mathbb{N})$ ou tout simplement ℓ_∞. On notera $c_0(\mathbb{N})$ ou tout simplement c_0 le sous-espace fermée de ℓ_∞ des suites qui convergent vers zéro.

On désignera par X, Y deux espaces de Banach et X^*, Y^*sont leurs espaces duaux . Soit $1 \leq p^* \leq \infty$ le conjugue de p telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Définition 1.2.1 *(L'espace des suites p-sommables)*

Tout d'abord, si X un espace de Banach, nous noterons $X^{\mathbb{N}}$ l'espace de toute les suites $(x_i)_i$ d'éléments de X. L'ensemble $X^{\mathbb{N}}$ est espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi d'addition

$$(x_i)_i + (y_i)_i := (x_i + y_i)_i \,,$$

et la loi

$$\lambda.\,(x_i)_i := (\lambda x_i)_i \,,\text{ où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Définition 1.2.2 *(L'espace des suites p-sommables)*
Une suite (x_n) (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est absolument p-sommables si la suite scalaire $(\|x_n\|)$ (resp.$(\|x_i\|)_{1\leq i\leq n}$) est dans ℓ_p.

On note $\ell_p(X)$ (resp.$\ell_p^n\,(X)$) l'espace de suites (x_n) (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X absolument p-sommables muni de la norme:

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_n\|_{\ell_p(X)} &= \|(x_n)_n\|_p &&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} && \text{si } 1 \leq p < \infty \\
\|(x_n)_n\|_{\ell_\infty(X)} &= \|(x_n)_n\|_\infty &&= \sup_n \|x_n\| && \text{si } p = \infty
\end{aligned}$$

L'espace de suites faiblement p-sommables

Définition 1.2.3 *(L'espace de suites faiblement p-sommables) Une suite (x_n) (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est faiblement p-sommables si la suite scalaire $(x^*(x_n))$ (resp.$(x^*(x_i)_{1\leq i\leq n}$) est dans ℓ_p pour tout $x^* \in X^*$.*

On note $\ell_p^w(X)$(resp.$\ell_p^{n\ w}(X)$) l'espace des suites (x_i) (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X faiblement p-sommables telle que

$$\ell_p^w(X) := \{(x_n)_n \subset X : \langle x^*, x_n\rangle_n \in \ell_p, x^* \in X^*\}$$

muni de la norme :

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_n\|_{p,w} = \|(x_n)_n\|_{\ell_p^w(X)} &= \sup_{x^*\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x^*; x_n\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty \\
\|(x_n)_n\|_{\ell_\infty^w(X)} &= \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sup_n |\langle x^*; x_n\rangle| \quad \text{si} \quad p = \infty
\end{aligned}$$

Nous considérons les relations entre les espaces de suites.

Théorème 1.2.1 *[7]*

i) Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\ell_p(X)$ *et* $\ell_p^w(X)$ *sont des espaces de Banach.*

ii) $\ell_\infty^w(X) = \ell_\infty(X)$.

iii) $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$ *pour tout* $1 \leq p < \infty$ *si et seulement si* $\dim(X)$ *est finie..*

1.3 Exemple (l'idéal des opérateurs p-sommant)

Le concept des opérateurs linéaires absolument p-sommant a été introduit par Pietsch [13]. Une étude des opérateurs et de leurs applications, se trouve à Lindenstrauss et Pelczynski's [10] .

Définition 1.3.1 *Soit* T *un opérateur linéaire continu* $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ *. On dira que* T *est* $p-$*sommant* (*ou absolument* $p-$ *sommant*) *pour tout* $1 \leq p < \infty$ *s'il existe une constant positive* C *, telle que pour tout* $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *, on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi \rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.3.1}$$

$$\left(i.e., \left\|T(x_i)_{1 \leq i \leq n}\right\|_p \leq C \left\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{p.w}\right)$$

La classe des opérateurs linéaires continus $p-$*sommant de* X *dans* Y *noté* $\Pi_p(X;Y)$ *est un espace de Banach muni de la norme:*

$$\pi_p(T) \left(\text{ou } \|T\|_{as.p}\right) = \inf\{C \text{ vérifie } (1.3.1)\}.$$

Il est clair que si $T \in \Pi_p(X;Y)$ on a $\|T\| \leq \pi_p(T)$.

Remarque 1.3.1 *La classe des opérateurs* $p-$*sommant est un opérateur linéaire continu qui transforme les suites faiblement* $p-$*sommables en suites dont les normes sont des puissances* $p-$*ieme sommable. (i.e.,* T *est* $p-$*sommant*$\Longleftrightarrow \hat{T}\left(\ell_p^w(X)\right) \subset \ell_p(Y)$*)où*

$$\begin{array}{rccl} \hat{T}: & \ell_p^w(X) & \longmapsto & \ell_p(Y) \\ & (x_n) & \longmapsto & \hat{T}((x_n)) = (T(x_n))_n. \end{array}$$

Proposition 1.3.1 *Soient X, Y, E et F des espaces de Banach quelconques, et soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur $p-$sommant .*

(1) Soient $v : E \longrightarrow X$ un opérateur linéaire continue et $w : Y \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continue $w \in \mathcal{L}(Y; F)$, alors wTv est p-sommant et $\pi_p(wTv) \leq \|w\| \pi_p(T) \|v\|$.

(2) Si $X_1 \subset X$ et $Y_1 \subset Y$ sont des sous-espaces fermés telle que $T(X_1) \subset Y_1$, alors l'opérateur restreint $\hat{T} : X_1 \longrightarrow Y_1$ est p-sommant, et de plus $\pi_p\left(\hat{T}\right) \leq \pi_p(T)$.

(3) $(\Pi_p(X; Y), \pi_p(\cdot))$ est un idéal de Banach.

Théorème 1.3.1 *(Théorème d'inclusion) Soit T un opérateur linéaire $p-$sommant , si $1 \leq p \leq q < \infty$, alors on a*

$$\Pi_p(X; Y) \subset \Pi_q(X; Y) .$$

Ici on a l'exemple fondamental des opérateurs $p-$sommant:

Exemple 1.3.1 *Soit K un compact de Hausdorff , soit μ un mesure positive régulière sur K et soit $1 \leq p < \infty$. Alors l'injection natural*

$$\begin{array}{cccc} J_p : & C(K) & \longmapsto & L_p(\mu) \\ & f & \longmapsto & f \end{array}$$

est $p-$sommant et de plus $\pi_p(J_p) = 1$.

Caractérisation des opérateurs $p-$sommant

Nous donnerons ici le théorème fondamental de factorisation de Pietsch pour les opérateurs $p-$sommant.

Théorème 1.3.2 *[7] (Théorème de factorisation de Pietsch) Soit T un opérateur linéaire enter espace de Banach X dans Y, alors les propriétés suivants sont équivalent on a C positive:*

(1) T est $p-$sommant et $\pi_p(T) \leq C$;

(2) il existe un probabilité de Radon λ sur $K = (B_{X^*}, \delta(X^*, X))$ telle que

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_K |\langle x, \xi \rangle|^p \, d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.3.2}$$

(3) Il existe $\tilde{T} : S_p \longrightarrow Y$ *telle que le diagramme suivant est commutatif* $\tilde{J}_p = J_{p \backslash S}$

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{T} & Y \\
i \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\
S & \xrightarrow{J_{p \backslash S}} & S_p \\
\cap & & \cap \\
C(K) & \underset{J_p}{\longrightarrow} & L_p(K, \mu)
\end{array}
$$

où $\begin{cases} S = \{\varphi_x, x \in X, \text{avec } \varphi_x(\zeta) = \langle \zeta, x \rangle, \zeta \in K\} \text{ est un sous espace fermé de } C(K) \\ \tilde{J}_p = J_{p \backslash S} \text{ est l'opérateur restreint a } S \end{cases}$

Chapitre 2

Idéaux multilinéaires et méthodes de construction

Dans ce chapitre on étudie les idéaux multilinéaires et on prend comme exemple $\mathcal{L}_f$ et $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, ensuite nous passons aux méthodes de construction des idéaux multilinéaires ce sont : la méthode de composition, factorisation et la méthode de linéarisation, puis on détaille la méthode de factorisation.

2.1 Applications multilinéaires continues

Nous allons développer les résultats de base, de la théorie des applications multilinéaires entre les espaces normés. Nous allons voir la version multilinéaires du théorème de graphe fermé et le théorème uniformément continue et théorème de Banach-Steinhaus.

Définition 2.1.1 *Soient $m \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Une application $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ est dite opérateur ou application multilinéaire (ou m-linéaire) si*

$$T(x^1, ..., \alpha x^j + \beta y^j, ..., x^m) = \alpha T(x^1, ..., x^j, ..., x^m) + \beta T(x^1, ..., y^j, ..., x^m)$$

pour tout $1 \leq j \leq m$ et $x^j, y^j \in X_j$,$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). C'est-à-dire T est multilinéaire si et seulement si les opérateurs

$$
\begin{array}{rcll}
T_{(x^1,...,x^{j-1},x^{j+1}...,x^n)} & : & X_j & \longmapsto & Y \\
 & & x & \longmapsto & T_{(x^1,...,x^{j-1},x^{j+1}...,x^n)}(x) = & T\left(x^1,...,x^{j-1},x,x^{j+1}...,x^n\right)
\end{array}
$$

sont linéaires.

Si $Y = \mathbb{K}$, T est dit forme .

En particulier, on dit que T est bilinéaire si $m = 2$, T est trilinéaire si $m = 3$ et forme multilinéaire si $Y = \mathbb{K}$.
Observons que si T est multilinéaire on a

$$T\left(\lambda_1 x^1, \ldots, \lambda_m x^m\right) = \lambda_1 \cdots \lambda_m T\left(x^1, \ldots, x^m\right)$$

On note $L(X_1, ..., X_m; Y)$ l'ensemble des opérateurs multilinéaires de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y.

Définissons les opérations linéaires suivantes:

$$
\begin{aligned}
\left(T_1 + T_2\right)\left(x^1, ..., x^m\right) &= T_1\left(x^1, ..., x^m\right) + T_2\left(x^1, ..., x^m\right) \\
(\alpha T)\left(x^1, ..., x^m\right) &= \alpha T\left(x^1, ..., x^m\right)
\end{aligned}
$$

ce qui donne à $L(X_1, ..., X_m; Y)$ une structure d'espace vectoriel.

Définition 2.1.2 *L'opérateur m-linéaire* $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ *est continue s'il est continue comme une fonction entre deux espaces normés.*

Proposition 2.1.1 (*multilinéaire borné*) *Soit* $T \in L\left(X_1, ..., X_m, Y\right)$ *munissons* $X_1 \times \cdots \times X_m$ *de la norme*

$$\|x\| = \left\|\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| = \max_{1 \le j \le m} \left\|x^j\right\|_j$$

les propriétés suivant sont équivalentes:

(1) T *est continue.*

(2) T *est continue au point* $(0, \ldots, 0)$.

(3) $\|T(x^1,\ldots,x^m)\|$ *est borné sur le produit des boules unité* $\|x^1\| \leq 1, ..., \|x^m\| \leq 1$.

(4) $\exists \;\; M \in \mathbb{R}^+$ *tq* $\forall (x^1,\ldots,x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$.

$$\left\|T\left(x^1,\ldots,x^m\right)\right\| \leq M \left\|x^1\right\| \ldots \|x^m\|.$$

Dans ce cas, on pose

$$\|T\| \quad = \quad \sup_{\|x^j\|_{X^j} \leq 1} \|T(x^1,\ldots,x^m)\|$$

et on peut dire que T *est borné.*

Notation 2.1.1 *On notera* $\mathcal{F}(X_1,\ldots,X_m;Y)$ *l'ensemble de tous les applications de* $\prod_{j=1}^{m} X_j$ *dans* Y, $L(X_1,\ldots,X_m;Y)$ *l'ensemble de tous les applications multilinéaires et on note* $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)$ *l'ensemble de tous les opérateurs multilinéaires continus de* $\prod_{j=1}^{m} X_j$ *dans* Y*.*

Si $X_1 = \ldots = X_m = X$ on note

$$\begin{aligned} L(X_1,\ldots,X_m;Y) &= L({}^mX;Y), \\ \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y) &= \mathcal{L}({}^mX;Y). \end{aligned}$$

Si $X_1 = \ldots = X_m = X$ et $Y = \mathbb{K}$ on note

$$L({}^mX;Y) = L({}^mX),$$

$$\mathcal{L}({}^mX;Y) = \mathcal{L}({}^mX).$$

Si $m = 1, Y = \mathbb{K}$ alors

$$\begin{aligned} L(X;\mathbb{K}) &= L(X) = X^*(\text{le dual algébrique}), \\ \mathcal{L}(X;\mathbb{K}) &= \mathcal{L}(X) = X^*(\text{le dual topologique}). \end{aligned}$$

Proposition 2.1.2 *L'espace vectoriel* $\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ $(1 \leq j \leq m)$ *est un espace de Banach muni de la norme* $\|T\|$ *telle que*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x^j\|_{X^j} \leq 1} \left\| T\left(x^1, \ldots, x^m\right) \right\| \\ &= \sup_{\|x^j\| \neq 0} \frac{\left\| T\left(x^1, \ldots, x^m\right) \right\|}{\|x^1\| \cdots \|x^m\|} \\ &= \inf \left\{ k : \left\| T\left(x^1, \ldots, x^m\right) \right\| \leq k \left\| x^1 \right\| \cdots \left\| x^m \right\| \right\} \end{aligned}$$

Théorème 2.1.1 *[4] L'application $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m, Y)$ est continue si et seulement si T est continue pour chaque variable.*

Corollaire 2.1.1 *Si $X_1, ..., X_m$ sont de dimensions finies alors les applications multilinéaires de $\prod_{j=1}^{m} X_j$ vers Y sont continues.*

Théorème 2.1.2 *[8, 4](**Théorème du graphe fermé pour les applications multilinéaire)** Soit $E_1, ..., E_m$ et F des espace de Banach et $A : E_1 \times \ldots \times E_m \to F$ une application m-linéaire de graphe fermé, alors A est continue.*

Preuve. Soit $x_1 \in E_1$ fixé, on montrer que $A_{(x_2,\ldots,x_m)} : E_1 \to F$ de graphe fermé. Soit $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dans E_1 comme $y_n \to y$ dans E_1 et $A_{(x_2,\ldots,x_m)}(y_n) \to z \in F$. Comme $y_n \to y \in E_1$ on a

$$\begin{aligned} \left\| (y_n, x_2, \ldots, x_m) - (y, x_2, \ldots, x_m) \right\| &= \left\| (y_n - y), 0, \ldots, 0) \right\| \\ &= \left\| y_n - y \right\| \end{aligned}$$

est aussi

$$\lim_{n \to \infty} (y_n, x_2, \ldots, x_m) = (y, x_2, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m$$

comme $A(y_n, x_2, \ldots, x_m) = A_{(x_2,\ldots,x_m)}(y_n) \to z \in F$. On a $\left((y_n, x_2, \ldots, x_m), A(y_n, x_2, \ldots, x_m)\right)_{n=1}^{\infty}$est une suite de graphe A converge vers $((y, x_2, \ldots, x_m), z)$. Comme le graphe de A est fermé, alors

$$z = A(y, x_2, \ldots, x_m) = A_{(x_2,\ldots,x_m)}(y)$$

et comme $A_{(x_2,\ldots,x_m)}$ est un graphe fermé, alors $A_{(x_2,\ldots,x_m)}$ est continue.

De même, $A_{(x_1,x_3,\ldots,x_m)}, \ldots, A_{(x_1,\ldots,x_{m-1})}$ sont continues. Par conséquent le théorème 2.1.1 assure que A est continue. ■

2.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 2.2.1 *[3]**(Théorème uniformément continue pour les applications multilinéaires)** Soit $E_1, ..., E_m$ espaces de Banach et F espace vectoriel normé et $\{T_i\}_{i\in I}$, une famille des applications m-linéaire continues de $E_1 \times \ldots \times E_m$ dans F. Si*

$$\sup_{i\in I} \|T_i (x_{1,} \ldots , x_m)\| < \infty \; \forall (x_1, \ldots , x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m \tag{2.2.1}$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$$

Preuve. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit

$$A_n = \left\{ (x_{1,} \ldots , x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m ;\ \sup_{i\in I} \|T_i (x_{1,} \ldots , x_m)\| < n \right\}$$

Il est facile de voir que chaque A_n est fermé. L'hypothèse (2.2.1) signifie que:

$$E = E_1 \times \ldots \times E_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Puisque E est un espace métrique complet, le théorème de Baire dit qu'il existe un entier positif n_0 tel que $int\,(A_{n_0}) \neq \phi$. Soit $(a_1, \ldots , a_m) \in int\,(A_{n_0})$ et $r \succ 0$ tels que la boule ouverte $B_{\,E_1\times\ldots\times E_m} ((a_1, \ldots , a_m) ; r)$ dans A_{n_0}. Ainsi,

$$\|T_i (x_{1,} \ldots , x_m)\| \leq n_0$$

pour tout $i \in I$ et tous $(x_{1,} \ldots , x_m) \in B_{E_1\times\ldots\times E_m} ((a_1, \ldots , a_m) ; r)$. On a

$\|T_i (a_1 + ry_1 \ldots , a_m + ry_m)\| \leq n_0, \forall i \in I, \forall y = (y_{1,} \ldots , y_m) \in B_{\,E_1\times\ldots\times E_m} (0; 1)$

Alors

$$\|T_i (y_{1,} \ldots , y_m)\| \leq \frac{2^m n_0}{r^m} \tag{2.2.2}$$

pour tout $i \in I$ et tous $(y_{1,} \ldots , y_m) \in B_{\,E_1\times\ldots\times E_m} (0; 1)$.

Donc

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| \leq \frac{2^m n_0}{r^m}$$

■

Le corollaire suivant est une version naturelle de Banach -Steinhaus pour le cas des applications multilinéaires.

Corollaire 2.2.1 ***(théorème de Banach-Steinhaus pour des applications multilinéaires)*** *Soit* $E_1, ..., E_m$ *espaces de Banach et* F *un espace vectoriel normé et* $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(\ E_1, \ldots, E_m; F)$ *tels que pour tous* $x_j \in E_j$*, la suite* $(A_n(x_1, \ldots, x_m))_{n=1}^{\infty}$ *est convergent. Si*

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \lim_{n \to \infty} A_n(x_1, \ldots, x_m)$$

alors $A \in \mathcal{L}(\ E_1, \ldots, E_m; F)$.

Preuve. Il est claire que A est $m-$linéaire. Comme $(A_n(x_1, \ldots, x_m))_{n=1}^{\infty}$est convergent Donc

$$\sup_n \|A_n(x_1, \ldots, x_m)\| < \infty \ \ \forall (x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m$$

D'après le théorème 2.2.1, il existe un nombre réel $C > 0$ tels que

$$\sup_n \|A_n\| < C.$$

Ainsi,

$$\|A_n(x_1, \ldots, x_m)\| \leq \|A_n\| \|x_1\| \ldots \|x_m\| \leq C \|x_1\| \ldots \|x_m\|$$

quand $n \to \infty$ on obtient

$$\|A(x_1, \ldots, x_m)\| \leq C \|x_1\| \ldots \|x_m\|$$

Donc A est continue. ■

2.3 Idéaux des opérateurs multilinéaires

Définition 2.3.1 *(Opérateur de rang fini) Soient* $X_1, ..., X_m$ *et* Y *des espaces normés, on dit que* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ *est de rang fini s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$T(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}(x_1) \ldots \varphi_i^{(m)}(x_m)\, y_i.$$

où $\varphi_i^{(j)} \in X_j^*$*et* $y_i \in Y$,$i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$. *L'espace des opérateurs multilinéaires de rang fini sera noté* $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_m; Y)$.

Proposition 2.3.1 $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_m; Y)$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.

Preuve. i) soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}_f\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ alors:
$\exists n \in \mathbb{N} : T\left(x_1, ..., x_m\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}\left(x_1\right) ... \varphi_i^{(m)}\left(x_m\right) y_i$ où $\varphi_i^{(j)} \in X_j^*$ et $y_i \in Y$, on ait

$$\begin{aligned}
\lambda T\left(x_1, ..., x_m\right) &= (\lambda T)\left(x_1, ..., x_m\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda \varphi_i^{(1)}\left(x_1\right) ... \varphi_i^{(m)}\left(x_m\right) y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda \varphi_i^{(1)})\left(x_1\right) ... \varphi_i^{(m)}\left(x_m\right) y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \psi_i\left(x_1\right) ... \psi_i^{(m)}\left(x_m\right) y_i
\end{aligned}$$

Comme $(\lambda \varphi_i^{(1)}) = \psi_i \in X_i^*$. Donc $\lambda T \in \mathcal{L}_f\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$
ii) Soient $T, S \in \mathcal{L}_f\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ alors

$$\begin{cases}
\exists n \in \mathbb{N} : \quad T\left(x_1, ..., x_m\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}\left(x_1\right) ... \varphi_i^{(m)}\left(x_m\right) a_i \quad \text{ou } \varphi_i^{(j)} \in X_j^* \ et \ a_i \in Y \\
\exists L \in \mathbb{N} : \quad S\left(x_1, ..., x_m\right) = \sum_{i=1}^{L} \phi_i^{(1)}\left(x_1\right) ... \phi_i^{(m)}\left(x_m\right) b_i \quad \text{ou } \phi_i^{(j)} \in X_j^* \ et \ b_i \in Y
\end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned}
(T+S)\left(x_1, ..., x_m\right) &= T\left(x_1, ..., x_m\right) + S\left(x_1, ..., x_m\right) \\
&= \sum_{i=}^{n} \varphi_i^{(1)}\left(x_1\right) ... \varphi_i^{(m)}\left(x_m\right) a_i + \sum_{i=1}^{L} \phi_i^{(1)}\left(x_1\right) ... \phi_i^{(m)}\left(x_m\right) b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n+L} \psi_i\left(x_1\right) ... \psi_i^{(m)}\left(x_m\right) y_i \\
&= \sum_{i=1}^{K} \psi_i\left(x_1\right) ... \psi_i^{(m)}\left(x_m\right) y_i \text{ où } k = n + L
\end{aligned}$$

donc $T + S \in \mathcal{L}_f\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$. D'ou $\mathcal{L}_f\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ est un sous espace véctoriel de $\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$. ■

Définition 2.3.2 *(idéal des opérateurs multilinéaires). Un idéal des opérateurs multilinéaires (ou multi-idéal) est la classe $\mathcal{M}$ des opérateurs multilinéaires bornés entre des espaces de Banach tels que pour tous n∈ $\mathbb{N}$, $X_1, ..., X_m$ et Y des espaces de Banach, l'ensemble*

$\mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) \cap \mathcal{M}$ *satisfait :*

(1) *$\mathcal{M}(X_1,...,X_m;Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ qui contient $\mathcal{L}_f$*

(2) *Propriété d'idéal: si $T \in \mathcal{M}(X_1,...,X_m;Y)$, $u_j \in \mathcal{L}(E_j;X_j)$ pour $j = 1,...,m$ et $v \in \mathcal{L}(Y;F)$, alors $v \circ T \circ (u_1,...,u_m) \in \mathcal{M}(E_1,...,E_m;F)$.*

De plus, si $\|.\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$satisfait

(1′) *$(\mathcal{M}(X_1,...,X_m;Y), \|.\|_{\mathcal{M}})$ est un espace normé (quasi normé)*

(2′) $\|A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}\ ;\ A(x_1,...,x_m) = x_1...x_m\|_{\mathcal{M}} = 1.$

(3′) *Si $T \in \mathcal{M}(X_1,...,X_m;Y), u_j \in \mathcal{L}(E_j;X_j)$ pour $j = 1,...,m$ et $v \in \mathcal{L}(Y;F)$*

$$\|v \circ T \circ (u_1,...,u_m)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \, \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|u_1\| \dots \|u_m\| .$$

Alors $(\mathcal{M}; \|.\|_{\mathcal{M}})$ s'appelle idéal normé (quasi normé) des opérateurs multilinéaires.

Exemple 2.3.1 *$\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ et $\mathcal{L}_f$ sont des idéaux des applications multilinéaires.*

Proposition 2.3.2 *Soit $(\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}})$ un idéal normé des applications multilinéaires, on a :*

$$\|T\| \leqslant \|T\|_{\mathcal{M}} \text{ pour tout } T \in \mathcal{M}$$

Preuve. Soient $T \in \mathcal{M}(X_1,...,X_m;Y), \varphi \in Y^*$ et $x_i \in X_j$ $\quad j = 1,...,m$
On définit :

$$\begin{array}{rcl} R_j & : & \mathbb{K} \longrightarrow X_j \\ \lambda & \longmapsto & R_j(\lambda) = \lambda x_j \end{array}$$

alors $\|R_j\| = \|x_j\|$ et

$$\begin{aligned} \varphi \circ T \circ (R_{1,}...., R_m)(\lambda_1,...,\lambda_m) &= \varphi \circ T(R_1(\lambda_1),...,R_m(\lambda_m)) \\ &= \varphi \circ T(\lambda_1 x_1,...,\lambda_m x_m) \\ &= \varphi(\lambda_1...\lambda_m T(x_1,...,x_m)) \\ &= \lambda_1...\lambda_m(\varphi \circ T)(x_1,...,x_m) \end{aligned}$$

comme

$$id_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(\lambda_1, .., \lambda_m) \longrightarrow \lambda_1 ... \lambda_n$$

alors

$$\varphi \circ T \circ (R_1, ..., R_m) = (\varphi \circ T)(x_1, ..., x_m) \, id_{\mathbb{K}^m}. \tag{2.3.1}$$

D'après (2.3.1) on a:

$$\begin{aligned} |(\varphi \circ T)(x_1, ..., x_m)| &= |(\varphi \circ T)(x_1, ..., x_m)| \, \|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|(\varphi \circ T)(x_1, ..., x_m) \, id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|\varphi \circ T \circ (R_1, ..., R_m)\|_{\mathcal{M}} \\ &\leqslant \|\varphi\| \, \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|R_1\| ... \|R_m\| \end{aligned}$$

Par le théorème de Hahn-Banach:

$$\begin{aligned} \|T(x_1, ..., x_m)\| &= \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} \|(\varphi \circ T)(x_1, ..., x_m)\| \\ &\leqslant \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} \|\varphi\| \, \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|R_1\| ... \|R_m\| \\ &\leqslant \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|R_1\| ... \|R_m\| \\ &\leqslant \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|x_1\| ... \|x_m\| \end{aligned}$$

Donc

$$\|T\| = \sup_{\|x_j\| \leqslant 1} \|T(x_1, ..., x_m)\| \leqslant \|T\|_{\mathcal{M}}$$

■

Proposition 2.3.3 *Soit $\mathcal{M}$ un idéal normé des applications multilinéaires, pour $\varphi_j \in X_j^*$, $y \in Y$ et $T = \varphi_1(.) ... \varphi_m(.) y \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ on ait*

$$\|T\|_{\mathcal{M}} = \|T\| = \|y\| \, \|\varphi_1\| ... \|\varphi_m\|$$

Preuve. Comme $T(x_1, ..., x_m) = \varphi_1(x_1) ... \varphi_m(x_m) y$, alors

$$\begin{aligned} \|T(x_1, ..., x_m)\| &= \|\varphi_1(x_1) ... \varphi_m(x_m) y\| \\ &= |\varphi_1(x_1) ... \varphi_m(x_m)| \, \|y\| \\ &= |\varphi_1(x_1)| ... |\varphi_m(x_m)| \, \|y\| \end{aligned}$$

donc

$$\|T\| = \sup_{\|x_j\| \leqslant 1} \|T(x_1, ..., x_m)\| = \|y\| \|\varphi_1\| ... \|\varphi_m\|$$

D'autre part, on a : $T = v \circ id_{\mathbb{K}^m}(\varphi_1, ..., \varphi_m)$ où $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; Y), v(k) = ky$,$T \in \mathcal{M}$ et $id_{\mathbb{K}^m} \in \mathcal{M}$, alors

$$\|T\|_{\mathcal{M}} \leqslant \|v\| \|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{M}} \|\varphi_1\| ... \|\varphi_m\| \leqslant \|y\| \|\varphi_1\| ... \|\varphi_m\| = \|T\|$$

D'après la Proposition 2.3.2 on a

$$\|T\| \leqslant \|T\|_{\mathcal{M}}$$

D'où

$$\|T\|_{\mathcal{M}} = \|T\| = \|y\| \|\varphi_1\| ... \|\varphi_m\|$$

■

2.4 Méthodes de construction des idéaux multilinéaires

Il y a différentes manières de construire un idéal des opérateurs multilinéaires à partir d'un idéal linéaire $\mathcal{I}$, i.e., qui vérifie la Définition 1.1.8. Nous étudions les méthodes de factorisation, de composition et de linéarisation qui ont été introduites premièrement dans [14] pour $Y = \mathbb{K}$.

2.4.1 Méthode de linéarisation

Définition 2.4.1 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal linéaire. Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est dit de type $\mathcal{L}[\mathcal{I}]$ et on écrit $T \in \mathcal{L}[\mathcal{I}](X_1, ..., X_m; Y)$ si $T_j \in \mathcal{I}\left(X_j; \mathcal{L}(X_1, .^{[j]}.., X_m; Y)\right)$ pour tout $j = 1, ..., m$, où $T_j(x^j)(x^1, ...^{[j]}.., x^m) = T(x^1, ..., x^m)$.*

Si $\mathcal{I}$ est normé, on définit pour tout $T \in \mathcal{L}[\mathcal{I}](X_1, ..., X_m; Y)$

$$\|T\|_{\mathcal{L}[\mathcal{I}]} = \max \|T_j\|_{\mathcal{I}}$$

Notation 2.4.1 *Soient $\mathcal{I}_j$, $1 \leq j \leq m$ des idéaux d'opérateurs linéaires. On note $\mathcal{L}[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]$ l'idéal multilinéaire construit par la méthode de linéarisation, i.e., on a*

$$T_j \in \mathcal{I}_j \left(X_j ; \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m ; Y) \right), \quad j = 1, ..., m$$

Proposition 2.4.1 *[5, 9]Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Alors,*

(1) *L'espace $\mathcal{L}[\mathcal{I}]$ est un idéal des opérateurs multilinéaires.*

(2) *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de Banach, alors $\left(\mathcal{L}[\mathcal{I}] \; ; \|.\|_{\mathcal{L}[\mathcal{I}]}\right)$ est un idéal de Banach.*

2.4.2 Méthode de composition

Définition 2.4.2 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal linéaire, Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de type $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$, et on écrit $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, s'il existe un espace de Banach G,un opérateur linéaire $u \in \mathcal{I}(G; Y)$ et un opérateur multilinéaire borné $S \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$ tels que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \ldots \times X_m \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "S"'] & Y \\ & G \arrow[u, "u"] \end{tikzcd}$$

en d'autres termes $T = u \circ S$. Si $\mathcal{I}$ est normé $\|T\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}} = \inf \|u\|_{\mathcal{I}} \|S\|$, où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles de $T = u \circ S$ avec $u \in \mathcal{I}$.

Proposition 2.4.2 *[5, 9]Soit $\mathcal{I}$ un idéal linéaire, Alors*

(1) *$\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ est un idéal m-linéaire*

(2) *si $\mathcal{I}$ est un idéal de Banach, Alors il en est de même pour $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L} \; ; \|.\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}})$.*

2.4.3 Méthode de factorisation:

On explique la méthode de factorisation car il donne l'espace des opérateurs m-linéaires $(p_1, ..., p_m)$-dominés à partir de l'idéal des opérateurs linéaires $p-$ sommant.

Définition 2.4.3 *Soient $\mathcal{I}$ un idéal linéaire, une application $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est dit de type $\mathcal{L}(\mathcal{I})$, et on écrit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$, s'il existe des espaces de Banach $G_1, ..., G_m$*

, des opérateurs linéaires $u_j \in \mathcal{I}(X_j; G_j)$, $j = 1, ..., m$ et une application m-linéaire continue $S \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ tel que le diagramme suivante:

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \times & ... & \times & X_m & \underrightarrow{T} & Y \\ \downarrow u_1 & & & & \downarrow u_m & S \nearrow & \\ G_1 & \times & ... & \times & G_m & & \end{array}$$

En d'autres termes $T = S \circ (u_1, ..., u_m)$. Si $\mathcal{I}$ est normé, on définit pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} = \inf \|s\| \prod_{j=1}^{m} \|u_j\|_{\mathcal{I}}$$

Où l'infimun porte sur touts les factorisations possibles de $T = S \circ (u_1, ..., u_m)$ avec $u_j \in \mathcal{I}$.

Notation 2.4.2 *Soient $\mathcal{I}_j$,$1 \leq j \leq m$ des idéaux d'opérateurs linéaires. On note $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ...\mathcal{I}_m)$ l'idéal des opérateurs multilinéaires construit par la méthode de factorisation, i.e., dans la factorisation $T = S \circ (u_1, ..., u_m)$, on a*

$$u_j \in \mathcal{I}_j (X_j; G_j) \ \ 1 \leq j \leq m$$

Proposition 2.4.3 *[5, 9]Soit $\mathcal{I}$ un idéal linéaire. Si $\mathcal{I}$ est un idéal de Banach, alors $\left(\mathcal{L}(\mathcal{I}) \ ; \|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}\right)$ est un idéal quasi-normé des opérateurs multilinéaires.*

Preuve.

1. $\mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.

i) Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$. Alors, il existe des espaces de Banach $G_1, ..., G_m$; $H_1, ..., H_m$, des opérateurs Linéaires $u_j \in \mathcal{I}(X_j, G_j)$, $v_j \in \mathcal{I}(X_j, H_j)$ tq: $j = 1, ..., m$, et des applications multilinéaires continues $S_1 \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$, $S_2 \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_m; Y)$, telle que :

$T_1(x_1, ..., x_m) = S_1(u_1(x_1), ..., u_m(x_m))$ et $T_2(x_1, ..., x_m) = S_2(v_1(x_1), ..., v_m(x_m))$

On définit :

$$\begin{array}{ccccc} h_j & : & G_j & \longrightarrow & G_j \times H_j \\ & & x & \longmapsto & (x, 0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} f_j & : & H_j & \longrightarrow & G_j \times H_j \\ & & y & \longmapsto & (0, y) \end{array}$$

Il est claire que h_j et f_j sont des applications linéaires continues.

On considère l'application $w_j : X_j \longrightarrow G_j \times H_j$ définit par :

$$w_j(x) = (h_j \circ u_j)(x) + (f_j \circ v_j)(x).$$

Comme h_j, f_j sont linéaires continues, $u_j \in \mathcal{I}(X_j, G_j)$ et $v_j \in \mathcal{I}(X_j, H_j)$ $(j = 1, ..., m)$, alors $h_j \circ u_j \in \mathcal{I}(X_j, G_j \times H_j)$ et $f_j \circ v_j \in \mathcal{I} \in (X_j, G_j \times H_j)$ et comme $\mathcal{I}$ est un sous espace vectoriel alors, $w_j \in \mathcal{I}(X_j, G_j \times H_j)$.

On définit :

$$\begin{array}{rcccc} R & : & ((G_1 \times H_1) \times ... \times (G_m \times H_m)) & \longrightarrow & Y \\ & & (z_1, ..., z_m) & \longmapsto & R(z_1, ..., z_m) \end{array}$$

où $z_j = (e_j, \delta_j) \in G_j \times H_j$ et

$$R(z_1, ..., z_m) = (S_1(\pi_1, ..., \pi_m) + S_2(\pi'_1, ..., \pi'_m))(z_1, ..., z_m)$$

tel que :

$$\pi_j : G_j \times H_j \longrightarrow G_j : (e_j, \delta_j) \to e_j \tag{2.4.1}$$

et

$$\pi'_j : G_j \times H_j \longrightarrow H_j : (e_j, \delta_j) \longrightarrow \delta_j \tag{2.4.2}$$

R est un opérateur multilinéaire

$$\begin{aligned} R((e_1, \delta_1), ..., (e_m, \delta_m)) &= S_1(\pi_1(e_1, \delta_1), ..., \pi_m(e_m, \delta_m)) + S_2(\pi'_1(e_1, \delta_1), ..., \pi'_m(e_m, \delta_m)) \\ &= S_1(e_1, ..., e_m) + S_2(\delta_1, ..., \delta_m) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} R(w_1, ..., w_m)(x_1, ..., x_m) &= R(w_1(x_1), ..., w_m(x_m)) \\ &= R((h_1 \circ u_1)(x_1) + (f_1 \circ v_1)(x_1), ..., (h_m \circ u_m)(x_m) + (f_m \circ v_m)(x_m)) \\ &= R((u_1(x_1), v_1(x_1)), ..., (u_m(x_m), v_m(x_m))) \\ &= S_1(\pi_1(u_1(x_1), v_1(x_1)), ..., \pi_m(u_m(x_m), v_m(x_m))) \\ &\quad + S_2(\pi'_1(u_1(x_1), v_1(x_1)), ..., \pi'_m(u_m((x_m)), v_m((x_m)))) \\ &= S_1(u_1(x_1), ..., u_m(x_m)) + S_2(v_1(x_1), ..., v_m(x_m)) \\ &= (T_1 + T_2)(x_1, ..., x_m) \end{aligned}$$

D'où

$$(T_1 + T_2) = R(w_1, ..., w_m)$$

Comme $w_j \in \mathcal{I}(X_j, G_j \times H_j)$ et $R \in \mathcal{L}((G_1 \times H_1), ..., (G_m \times H_m); Y)$ alors

$$T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$$

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$

$$\lambda T(x_1, ..., x_m) = \lambda S(u_1(x_1), ..., u_m(x_m))$$

Comme $S \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ alors $\lambda S \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$, d'où $\lambda T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$.
Donc de $i)$ et $ii)$ $\mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.

2. Comme $\mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$ est un sous espace vectoriel, il suffit de montrer que l'opérateur $T = \varphi_1(.)....\varphi_m(.).y$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$ où $\varphi_j \in X_j^*$, $j = 1, ..., m$ et $y \in Y$.

On définit l'application multilinéaire

$$S : \mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K} \to Y : (\lambda_1, ..., \lambda_m) \longmapsto \lambda_1 ... \lambda_m . y$$

On a:

$$\begin{aligned} S \circ (\varphi_1, ..., \varphi_m)(x_1, ..., x_m) &= S(\varphi_1(x_1), ..., \varphi_m(x_m)) \\ &= \varphi_1(x_1) ... \varphi_m(x_m) . y \\ &= T(x_1, ..., x_m) \end{aligned}$$

Comme $\varphi_j \in \mathcal{I}(X_j, \mathbb{K})$ $(1 \leq j \leq m)$ et $S \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, ..., \mathbb{K}; Y)$, on a

$$T = S \circ (\varphi_1, ..., \varphi_m) \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y).$$

3. **Propriété d'idéal:**

$$\begin{array}{ccccccc} G_1 & \times & ... & \times & G_m & & \\ v_1 \uparrow & & & & v_m \uparrow & \searrow S & \\ X_1 & \times & ... & \times & X_m & \underrightarrow{T} & Y \\ u_1 \uparrow & & & & u_m \uparrow & & \downarrow w \\ H_1 & \times & ... & \times & H_m & \longrightarrow & F \end{array}$$

Soient $w \in \mathcal{L}(Y;F)$, $u_j \in \mathcal{L}(H_j, X_j)$ $(j = 1, ..., m)$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$, alors

il existe des espaces de Banach $G_1, ..., G_m$, des opérateurs lineaires $v_j \in \mathcal{I}(X_j; G_j)$ et $S \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ tels que $T = S \circ (v_1, ..., v_m)$.

Donc

$$\begin{aligned} w \circ T \circ (u_1, ..., u_m)(h_1, ..., h_m) &= w \circ S \circ (v_1, ..., v_m)(u_1, ..., u_m)(h_1, ..., h_m) \\ &= w \circ S \circ (v_1, ..., v_m)(u_1(h_1), ..., u_m(h_m)) \\ &= w \circ S \circ (v_1(u_1(h_1)), ..., v_m(u_m(h_m))) \\ &= w \circ S \circ ((v_1 \circ u_1)(h_1), ..., (v_m \circ u_m)(h_m)) \\ &= w \circ S(v_1 \circ u_1, ..., v_m \circ u_m)(h_1, ..., h_m) . \end{aligned}$$

D'où

$$w \circ T \circ (u_1, ..., u_m) = (w \circ S)(v_1 \circ u_1, ..., v_m \circ u_m)$$

où $w \circ S \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; F)$ et $v_j \circ u_j \in \mathcal{I}(H_j, G_j)$.

D'où

$$w \circ T \circ (u_1, ..., u_m) \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(H_1, ..., H_m; F)$$

Alors $\mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$ est un idéal multilinéaire.

(I) $\mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$ est un idéal quasi normé. Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ on a:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \geq 0$$

car: $\|S\| \geq 0$ et $\|v_j\|_{\mathcal{I}} \geq 0$ $j = 1, ..., m$ pour toute les factorisation de T

Si $T = 0$ il est claire que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} = 0.$$

On suppose que $T \neq 0$ et $T = S(v_1, ..., v_m)$,d'après la Proposition (1.1.2) on a

$$\|T\| \leq \|S\| \|v_1\| ... \|v_m\| \leq \|S\| \|v_1\|_{\mathcal{I}} ... \|v_m\|_{\mathcal{I}}$$

pour tout les factorisation de T

Alors:

$$\|T\| \leq \inf \|S\| \, \|v_1\|_{\mathcal{I}} ... \|v_m\|_{\mathcal{I}}$$

Donc

$$0 \neq \|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} ,$$

ce qui donne, si $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} = 0$ implique que $T = 0$.

(II) On montrer que

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} = |\lambda| \, \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}$$

Si $\lambda = 0$ immédiate. Supposons que $\lambda \neq 0$. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout les factorisations de $T = S \circ (v_1, ..., v_m)$ avec S une application m-linéaire continue et $v_j \in \mathcal{I}$.

Nous pouvons écrire $\lambda T = (\lambda S) \circ (v_1, ..., v_m)$, il est donc

$$\begin{aligned} \|\lambda T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} &\leq \|\lambda S\| \, \|v_1\|_{\mathcal{I}} ... \|v_m\|_{\mathcal{I}} \\ &= |\lambda| \, \|S\| \, \|v_1\|_{\mathcal{I}} ... \|v_m\|_{\mathcal{I}} \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Comme (2.4.3) , il applique a tout les factorisations de $T = S \circ (v_1, ..., v_m)$ de (2.4.3)

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \leq |\lambda| \, \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} . \tag{2.4.4}$$

Supposons que $\lambda T = M(u_1, ..., u_m)$ tels que M application m-linéaire et $u_j \in \mathcal{I} \quad j = 1, ..., m$.

Nous avons

$$T = \frac{M}{\lambda} (u_1, ..., u_m)$$

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \leq \left\| \frac{M}{\lambda} \right\| \|u_1\|_{\mathcal{I}} ... \|u_m\|_{\mathcal{I}}$$

Alors

$$|\lambda| \, \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \leq \|M\| \, \|u_1\|_{\mathcal{I}} ... \|u_m\|_{\mathcal{I}}$$

D'où

$$|\lambda| \, \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \leq \|\lambda T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \tag{2.4.5}$$

De (2.4.4)et (2.4.5) nous avons

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} = |\lambda| \, \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}$$

(III) Soit M et N de $\mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1,...,X_m;Y)$

Supposons que M,N non nulle. Soit $\varepsilon>0$, il existe des espaces de Banach $G_1,...,G_m;H_1,...,H_m$, des opérateurs linéaires $u'_j\in\mathcal{I}(X_j;G_j),v'_j\in\mathcal{I}(X_j;H_j)$,$j=1,...,m$ et deux applications multilinéaires continues $M'_0\in\mathcal{L}(G_1,...,G_m;Y)$, $N'_0\in\mathcal{L}(H_1,...,H_m;Y)$ telle que

$$M(x_1,...,x_m)=M'_0\left(u'_1(x_1),...,u'_m(x_m)\right)$$

et

$$N(x_1,...,x_m)=N'_0\left(v'_1(x_1),...,v'_m(x_m)\right)$$

on sait que

$$\begin{aligned}\left\|M'_0\right\|\left\|u'_1\right\|_{\mathcal{I}}...\left\|u'_m\right\|_{\mathcal{I}} &\leq (1+\varepsilon)\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}\\ \left\|N'_0\right\|\left\|v'_1\right\|_{\mathcal{I}}...\left\|v'_m\right\|_{\mathcal{I}} &\leq (1+\varepsilon)\|N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}\end{aligned}$$

on considère

$$u_j=\frac{u'_j}{\left\|u'_j\right\|_{\mathcal{I}}}\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}^{\frac{1}{m}}\qquad\forall j=1,...,m.$$

et

$$M_0=\left(\frac{\left\|u'_1\right\|_{\mathcal{I}}...\left\|u'_m\right\|_{\mathcal{I}}}{\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}}\right)M'_0$$

alors $M=M_0(u_1,...,u_m)$ et

$$\|M_0\|\leq 1+\varepsilon.,\ \|u_j\|_{\mathcal{I}}=\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}^{\frac{1}{m}}\tag{2.4.6}$$

pour tout $1\leq j\leq m$.

Il existe $N_0\in\mathcal{L}(H_1,...,H_m;Y)$ et $v_j\in\mathcal{I}(X_j;H_j)$ tel que: pour tout $1\leq j\leq m$, $N=N_0(v_1,...,v_m)$ et

$$\|N_0\|\leq 1+\varepsilon.,\|v_j\|_{\mathcal{I}}=\|N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}^{\frac{1}{m}}\tag{2.4.7}$$

on définit :

$$\begin{aligned}w_j &: X_j\to G_j\times H_j\\ w_j(x) &= (h_j\circ u_j)(x)+(f_j\circ v_j)(x)\qquad\qquad j=1,...,m\end{aligned}$$

telle que

$$h_j:G_j\to G_j\times H_j:x\longmapsto(x,0)$$

$$f_j : H_j \to G_j \times H_j : x \longmapsto (0, y)$$

on considère l'application:

$$\begin{aligned} S &: ((G_1 \times H_1) \times ... \times (G_m \times H_m)) \to Y \\ S &= M_0 (\pi_1, ..., \pi_m) + N_0 \left(\pi_1', ..., \pi_m'\right) \end{aligned}$$

tels que π_j, π_j' donné dans (2.4.1) et (2.4.2).

donc $S (w_1, ..., w_m) = M + N$ et comme $w_j \in \mathcal{I} (X_j; G_j \times H_j)$ on a:

$$\|w_j\|_{\mathcal{I}} \leq \|h_j \circ u_j\|_{\mathcal{I}} + \|f_i \circ v_j\|_{\mathcal{I}} \leq \|h_j\| \|u_j\|_{\mathcal{I}} + \|f_i\| \|v_j\|_{\mathcal{I}} = \|u_j\|_{\mathcal{I}} + \|v_j\|_{\mathcal{I}} \tag{2.4.8}$$

$$\begin{aligned} \|S ((e_1, \delta_1), ..., (e_m, \delta_m))\| &= \left\| \begin{array}{c} M_0 (\pi_1, ..., \pi_m) ((e_1, \delta_1), ..., (e_m, \delta_m)) \\ +N_0 \left(\pi_1', ..., \pi_m'\right) ((e_1, \delta_1), ..., (e_m, \delta_m)) \end{array} \right\| \\ &= \|M_0 (e_1, ..., e_m) + N_0 (\delta_1, ..., \delta_m)\| \\ &\leq \|M_0 (e_1, ..., e_m)\| + \|N_0 (\delta_1, ..., \delta_m)\| \\ &\leq \|M_0\| \|e_1\| ... \|e_m\| + \|N_0\| \|\delta_1\| ... \|\delta_m\| \\ &\leq (1 + \varepsilon) (\|e_1\| ... \|e_m\| + \|\delta_1\| ... \|\delta_m\|) \\ &\leq (1 + \varepsilon) (\|e_1\| + \|\delta_1\|) ... (\|e_m\| + \|\delta_m\|) \end{aligned}$$

donc $\|S\| \leq (1 + \varepsilon)$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|M + N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} &= \|S (w_1, ..., w_m)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \\ &\leq \|S\| \|w_1\|_{\mathcal{I}} ... \|w_m\|_{\mathcal{I}} \\ &\overset{(2.4.8)}{\leq} (1 + \varepsilon) (\|u_1\|_{\mathcal{I}} + \|v_1\|_{\mathcal{I}}) ... (\|u_m\|_{\mathcal{I}} + \|v_m\|_{\mathcal{I}}) \\ &\overset{(2.4.6) \text{ et } (2.4.7)}{\leq} (1 + \varepsilon) \left(\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}^{\frac{1}{m}} + \|N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}^{\frac{1}{m}}\right)^m \end{aligned}$$

$$\|M + N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}^{\frac{1}{m}} \leq (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{m}} \left(\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}^{\frac{1}{m}} + \|N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}^{\frac{1}{m}}\right)$$

comme $\varepsilon > 0$, on trouve

$$\|M + N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}^{\frac{1}{m}} \leq \|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}^{\frac{1}{m}} + \|N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}^{\frac{1}{m}}$$

Donc $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}$ est $\frac{1}{m}$-normé, d'après le lemme (1.1.1) $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}$ est quasi normé.

Finalement, il reste à vérifier que $\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} = 1$
et $\|w \circ T \circ (u_1, ..., u_m)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \leq \|w\| \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \|u_1\| ... \|u_m\|$.
Soit

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{K}^m} &: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K} \\ id_{\mathbb{K}^m}(x_1, ..., x_m) &= x_1 ... x_m \end{aligned}$$

on a $id_{\mathbb{K}^m} = id_{\mathbb{K}^m}(id, ..., id)$

$$\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \leq \|id_{\mathbb{K}^m}\| \|id\|_{\mathcal{I}} ... \|id\|_{\mathcal{I}} = 1 \tag{2.4.9}$$

D'autre part $id_{\mathbb{K}^m} = A(u_1, ..., u_m)$, nous avons

$$1 = \|A(u_1, ..., u_m)\| \leq \|A\| \|u_1\| ... \|u_m\| \leq \|A\| \|u_1\|_{\mathcal{I}} ... \|u_m\|_{\mathcal{I}}$$

Alors

$$1 \leq \|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \tag{2.4.10}$$

De (2.4.9) et (2.4.10) on trouve

$$\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} = 1$$

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$, il existe des espaces de Banach $G_1, ..., G_m$,des opérateurs linéaires $v_j \in \mathcal{I}(X_j; G_j)$ et $S \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ $(1 \leq j \leq m)$ tels que $T = S \circ (v_1, ..., v_m)$ et $\|S\| \|v_1\|_{\mathcal{I}} ... \|v_m\|_{\mathcal{I}} \leq (1 + \varepsilon) \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}$.

Soient $w \in \mathcal{L}(Y; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(H_j, X_j)$ on a

$$w \circ T \circ (u_1, ..., u_m) \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(H_1, ..., H_m; F)$$

comme

$$w \circ T \circ (u_1, ..., u_m) = (w \circ S)(v_1 \circ u_1, ..., v_m \circ u_m).$$

Donc

$$\begin{aligned} \|w \circ T \circ (u_1, ..., u_m)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} &\leq \|w \circ S\| \|v_1 \circ u_1\|_{\mathcal{I}} ... \|v_m \circ u_m\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|w\| \|S\| \|v_1\|_{\mathcal{I}} ... \|v_m\|_{\mathcal{I}} \|u_1\| ... \|u_m\| \\ &\leq \|w\| (1 + \varepsilon) \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \|u_1\| ... \|u_m\|, \end{aligned}$$

comme $\varepsilon > 0$, arbitraire

Donc $\left(\mathcal{L}(\mathcal{I}) ; \|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}\right)$ est un idéal quasi-normé des opérateurs multilinéaires. ∎

2.5 La relation entre la méthode de factorisation et la méthode de linéairisation

Proposition 2.5.1 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal linéaire, alors*

$$\mathcal{L}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{L}[\mathcal{I}] \text{ et } T_{\mathcal{L}[\mathcal{I}]} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(I)} \text{ pour tout } T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$, alors $\forall \varepsilon \succ 0, \exists S \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ et $u_j \in \mathcal{I}(X_j; G_j)$ telle que:

$$T = S \circ (u_1, ..., u_m)$$

et

$$\|S\| \|u_1\|_{\mathcal{I}} ... \|u_m\|_{\mathcal{I}} \leq (1+\varepsilon) \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \tag{2.5.1}$$

on définit, pour $j = 1, ..., m$

$$\begin{array}{rcl} \psi_j & : & G_j \to \mathcal{L}\left(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; Y\right) \\ \psi_j(z)\left(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m\right) & = & S(u_1(x_1), ..., z, ..., u_m(x_m)) \end{array}$$

On remarque que:

$$\left\|\psi_j\right\| \leq \|S\| \|u_1\| \overset{[j]}{\ldots} \|u_m\|. \tag{2.5.2}$$

Pour tout $x_j \in X_j$ on a:

$$\begin{array}{rcl} \left(\psi_j \circ u_j\right)(x_j)\left(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m\right) & = & \psi_j(u_j(x_j))\left(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m\right) \\ & = & S(u_1(x_1), ..., u_m(x_m)) \\ & = & T(x_1, ..., x_m) \\ & = & T_j(x_j)\left(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m\right) \end{array}$$

Donc $\left(\psi_j \circ u_j\right) = T_j$ et comme $u_j \in \mathcal{I}(X_j; G_j)$ pour tout $j = 1, ..., m$, alors

$$T_j \in \mathcal{I}\left(X_j; \mathcal{L}\left(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; Y\right)\right)$$

Donc $\mathcal{L}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{L}[\mathcal{I}]$

Pour tout $j = 1, ..., m$

$$\begin{array}{rcl} \|T_j\|_{\mathcal{I}} & = & \left\|\psi_j \circ u_j\right\|_{\mathcal{I}} \leq \left\|\psi_j\right\| \|u_j\|_{\mathcal{I}} \\ & \overset{(2.5.2)}{\leq} & \left(\|S\| \|u_1\|_{\mathcal{I}} \overset{[j]}{\cdots} \|u_m\|_{\mathcal{I}}\right) \|u_j\|_{\mathcal{I}} \\ & \leq & \|S\| \|u_1\|_{\mathcal{I}} ... \|u_m\|_{\mathcal{I}} \\ \overset{(2.5.1)}{\leq} (1+\varepsilon) \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} & = & \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} \qquad\qquad (\varepsilon \to 0) \end{array}$$

d'où

$$\|T\|_{\mathcal{L}[\mathcal{I}]} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} .$$

■

Chapitre 3

Applications

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de la classe importante d'opérateurs multilinéaires $(p_1, ..., p_m)$-dominés (voir [2, 9]), elles sont multi-idéal. Sa construction peut s'interpréter par la méthode de factorisation.

3.1 Les opérateurs m-linéaires $(p_1, ..., p_m)$-dominés

Définition 3.1.1 *(Opérateur m-linéaire $(p_1, ..., p_m)$-dominé)*

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq p_1, ..., p_m \leq \infty$, *avec* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$ *et* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.

On dira que T *est* $(p_1, ..., p_m)$*-dominés s'il existe une constante* C *telle que pour tous* $x_i^j, ..., x_n^j \in X_j$ $(1 \leq j \leq m)$, *on a*

$$\left\| \left(T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right) \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_p \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{p_j, \omega} \tag{3.1.1}$$

La classe des opérateurs m-linéaires $(p_1, ..., p_m)$*-dominés de* $X_1, ..., X_m$ *dans* Y , *notée* $\mathcal{L}_{d(p_1,...,p_m)}(X_1, ..., X_m; Y)$, *et on note*

$$\|T\|_{d(p_1,...,p_m)} = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité } (3.1.1)\}$$

Théorème de domination

On présente maintenant le théorème de domination de Pietsch. Avant ceci, on donne le lemme de Kay Fan.

Lemme 3.1.1 *(Lemme de Ky Fan) Soient E un espace vectoriel topologique séparé, C une partie convexe compacte de E. Soit M un ensemble des fonctions définit sur C à valeurs dans $[-\infty; +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes:*

a. *Tout $f \in M$ est convexe et semi-continue inférieurement.*

b. *Si $g \in conv(M)$, il existe $f \in M$ telle que $g(x) \leq f(x), \forall x \in C$.*

c. *Il existe $r \in \mathbb{R}$ telle que pour toute $f \in M$ prend une valeur $\leq r$.*

Alors il existe $x_0 \in C$ telle que $f(x_0) \leq r$, $\forall\ f \in M$.

Théorème 3.1.1 *(théorème de Domination de Pietsch)*

Soient $0 \leq p, p_1, ..., p_m < \infty$, avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$. Un opérateur $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ est $(p_1, ..., p_m)$-dominé si et seulement s'il existe $C > 0$, et des mesures de probabilités

de radon $\mu_j \in C\left(B_{X_j^*}\right)^*$,$(1 \leq j \leq m)$ telle que pour toute $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ on ait

$$\left\|T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \leq C \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right) \right)^{\frac{1}{p_j}} \tag{3.1.2}$$

Preuve. ($\Leftarrow$)Supposons que (3.1.2) est vérifier pour tout $1 \leq i \leq n$. D'après l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} \left\|T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \mathbf{C}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{m}\left(\int\limits_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j\right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right)^{\frac{1}{p_j}}\right]^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j\right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right)^{\frac{1}{p_j}}\right) \\
&= C\prod_{j=1}^{m}\left(\int\limits_{B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j\right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right)^{\frac{1}{p_j}} \\
&\leq C\prod_{j=1}^{m}\left(\sup_{\varphi_j \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}\left(\int\limits_{B_{X_j^*}} d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right)^{\frac{1}{p_j}} \\
&= C\prod_{j=1}^{m}\left\|\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{p_j,\omega}.
\end{aligned}$$

Donc T est $(p_1, ..., p_m)$-dominé et $\|T\|_{d(p_1,...,p_m)} \leq C$.

($\Longrightarrow$) Pour la première implication, on suppose que T est $(p_1, ..., p_m)$-dominé et on considère l'ensemble C des probabilités de Radon μ_j sur $C\left(B_{X_j^*}\right)^*$. Soit M un ensemble des fonctions définies sur C a valeur dans $\mathbb{R}$ de la forme:

$$f\left(\mu_1, ..., \mu_m\right) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{p}\left\|T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right)\right\|^p - C^p\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j\right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right\} \quad (3.1.3)$$

(a) Soit $f \in M$. Il est claire que f est continue, alors est semi continue inférieurement, on montrer que f est convexe.

Soient $\mu = (\mu_1, ..., \mu_m)$; $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ et $\alpha \in]0, 1[$

$$f(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\lambda_1, ..., \alpha\mu_m + (1-\alpha)\lambda_m)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \tfrac{1}{p} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \tfrac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\left(\alpha\mu_j + (1-\alpha)\lambda_j\right)(\varphi_j) \right\}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} \tfrac{1}{p} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p - \alpha C^p \sum_{j=1}^{m} \tfrac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j(\varphi_j) \\ -(1-\alpha) C^p \sum_{j=1}^{m} \tfrac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\lambda_j(\varphi_j) \end{array} \right\}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} \tfrac{\alpha+(1-\alpha)}{p} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p - \alpha C^p \sum_{j=1}^{m} \tfrac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j(\varphi_j) \\ -(1-\alpha) C^p \sum_{j=1}^{m} \tfrac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\lambda_j(\varphi_j) \end{array} \right\}$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} \left\{ \tfrac{1}{p} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \tfrac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\mu_j(\varphi_j) \right\} +$$
$$(1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} \left\{ \tfrac{1}{p} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \tfrac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^{p_j} d\lambda_j(\varphi_j) \right\}$$
$$= \alpha f(\mu) + (1-\alpha) f(\lambda)$$

Donc f est convexe.

(b) Il suffit de voir que M est convexe. Soient f, g dans M telles que

$$\alpha f(\mu_1, ..., \mu_m) = \sum_{i=1}^{k_1} \left\{ \frac{1}{p} \left\| T\left(\alpha^{\frac{1}{p_1}} x_i'^1, ..., \alpha^{\frac{1}{p_m}} x_i'^m\right) \right\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle \alpha^{\frac{1}{p_j}} x_i'^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\mu_j(\varphi_j) \right\}$$

$$(1-\alpha) g(\mu_1, ..., \mu_m) = \sum_{i=1}^{k_2} \left\{ \begin{array}{c} \tfrac{1}{p} \left\| T\left((1-\alpha)^{\frac{1}{p_1}} x_i''^1, ..., (1-\alpha)^{\frac{1}{p_m}} x_i''^m\right) \right\|^p \\ -C^p \sum_{j=1}^{m} \tfrac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle (1-\alpha)^{\frac{1}{p_j}} x_i''^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\mu_j(\varphi_j) \end{array} \right\}$$

$$(\alpha f + (1-\alpha) g)(\mu_1, ..., \mu_m) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{p} \left\| T(x_i^1, ..., x_i^m) \right\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\mu_j(\varphi_j) \right\}$$

avec $n = k_1 + k_2$

$$x_i^j = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha^{\frac{1}{p_j}} x_i'^j & si\ 1 \le i \le k_1 \\ (1-\alpha)^{\frac{1}{p_j}} x_i''^j & si\ \ k_1 + 1 \le i \ \le n \end{array} \right\}$$

(c) Soient $\varphi_j^0 \in B_{X_j^*}$ $(1 \leq j \leq m)$ tq

$$\sup_{\|\varphi_j\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle x_i^j, \varphi_j^0 \right\rangle \right|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}}. \qquad \text{(comp)}$$

Soient $\delta_{\varphi_1^0},...,\delta_{\varphi_m^0}$ les mesures de Dirac aux points $\varphi_1^0,...,\varphi_m^0$, on a

$$\begin{aligned}
f\left(\delta_{\varphi_1^0},...,\delta_{\varphi_m^0}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{p} \left\| T\left(x_i^1,...,x_i^m\right) \right\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle x_i^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\delta_{\varphi_j^0}\left(\varphi_j\right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} \left\| T\left(x_i^1,...,x_i^m\right) \right\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_j} \left| \left\langle x_i^j, \varphi_j^0 \right\rangle \right|^{p_j} \\
\text{d'après } (comp) \quad &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} \left\| T\left(x_i^1,...,x_i^m\right) \right\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \left\| \left(x_i^j\right) \right\|_{p_j,\omega}^{p_j} \\
(\text{car } T \text{ est } (p_1,...,p_m)\text{-dominé}) \quad &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} \left\| T\left(x_i^1,...,x_i^m\right) \right\|^p - C^p \frac{1}{p} \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right) \right\|_{p_j,\omega}^{p} \leq 0.
\end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme de Ky Fan, il existe $(\mu_1,...,\mu_m) \in C$ telles que $f\left(\delta_{\varphi_1^0},...,\delta_{\varphi_m^0}\right) \leq 0$, pour toute $f \in M$. Si on prend $x = (x^1,...,x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ on a

$$f\left(\mu_1,...,\mu_m\right) = \frac{1}{p} \left\| T\left(x^1,...,x^m\right) \right\|^p - C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\mu_j$$

$$\frac{1}{p} \left\| T\left(x^1,...,x^m\right) \right\|^p \leq C^p \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \int_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\mu_j \qquad (3.1.4)$$

Posons pour $(1 \leq j \leq m)$

$$\alpha_j = \left(\int_{B_{X_j^*}} \left| \left\langle x^j, \varphi_j \right\rangle \right|^{p_j} d\mu_j \right)^{\frac{1}{p_j}} \neq 0.$$

En remplaçant le vecteur $(x^1,...,x^m)$ par $\left(\frac{x^1}{\alpha_1},...,\frac{x^m}{\alpha_m}\right)$ on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\left\|T\left(\frac{x^1}{\alpha_1},...,\frac{x^m}{\alpha_m}\right)\right\|^p &\leq C^p\sum_{j=1}^m\frac{1}{p_j}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle\frac{x^j}{\alpha_j},\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j \\
&\leq C^p\sum_{j=1}^m\frac{1}{p_j}\frac{1}{\alpha_j^{p_j}}\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j \\
&= C^p\sum_{j=1}^m\frac{1}{p_j}=C^p\frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\left\|T\left(x^1,...,x^m\right)\right\|\leq C\alpha_1\cdots\alpha_m$$

D'où

$$\left\|T\left(x^1,...,x^m\right)\right\|\leq C\prod_{j=1}^m\left(\int\limits_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

■

3.2 Théorème de factorisation

Théorème 3.2.1 *(Théorème de factorisation) Soient* $1\leq p,p_1,...,p_m<\infty$ *avec* $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_m}$. *Alors* $T\in\mathcal{L}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$ *est* $(p_1,...,p_m)$*-dominé si et seulement s'il existe des espaces de Banach* $G_1,...,G_m$, $u_j\in\Pi_{p_j}\left(X_j;G_j\right)$ *des opérateurs linéaires absolument* p_j-*sommants et* $S\in\mathcal{L}\left(G_1,...,G_m;Y\right)$ *un opérateur m-linéaire tels que*

$$T=S\circ\left(u_1,...,u_m\right)$$

de plus

$$\|T\|_{d(p_1,...,p_m)}=\inf\left\{\|S\|\prod_{j=1}^m\pi_{p_j}\left(u_j\right)\ :T=S\circ\left(u_1,...,u_m\right)\right\}.$$

Preuve. Premièrement on montre l'inverse. Soit T possède la factorisation (i.e.,$T=S\left(u_1,\ldots,u_m\right)$), soit $x^1,\ldots,x^m\in X_1\times\cdots\times X_m$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|T\left(x^1,...,x^m\right)\right\| &= \left\|S\left(u_1\left(x^1\right),...,u_m\left(x^m\right)\right)\right\| \\ &\leq \|S\|\prod_{j=1}^{m}\left\|u_j\left(x^j\right)\right\|\end{aligned}$$

et on a d'après le théorème de domination de Pietsch des opérateurs linéaires p_j-sommants (1.3.2)

$$\left\|u_j\left(x^j\right)\right\| \leq \pi_{p_j}\left(u_j\right)\left(\int_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right)^{\frac{1}{p_j}}.$$

Maintenant on a

$$\left\|T\left(x^1,...,x^m\right)\right\| \leq \|S\|\prod_{j=1}^{m}\pi_{p_j}\left(u_j\right)\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

Donc T est $(p_1,...,p_m)$-dominé

et

$$\|T\|_{d(p_1,...,p_m)} \leq \|S\|\prod_{j=1}^{m}\pi_{p_j}\left(u_j\right).$$

$(\Rightarrow)$ Pour la première implication, soit $T\in\mathcal{L}_{d(p_1,...,p_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$, on a d'après 3.1.1 il existe des mesures de probabilités $\mu_j\in C\left(B_{X_j^*}\right)^*$, $(1\leq j\leq m)$

tel que pour tout $(x^1,...,x^m)\in X_1\times...\times X_m$, on ait

$$\left\|T\left(x^1,...,x^m\right)\right\| \leq \|T\|_{d(p_1,...,p_m)}\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j\left(\varphi_j\right)\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

Maintenant, nous considérons les opérateurs

$$\begin{aligned}u_j^0 &: X_j\to L_{p_j}\left(\mu_j\right) \\ x^j &\to u_j^0\left(x^j\right):=\left\langle x^j,.\right\rangle.\end{aligned}$$

On remarque que

$$\left\|u_j^0\left(x^j\right)\right\| = \left(\int_{B_{X_j^*}}\left|\left\langle x_k^j,\varphi_j\right\rangle\right|^{p_j}d\mu_j\right)^{\frac{1}{p_j}} \leq \left\|x^j\right\| \text{ pour tout } x^j\in X_j,$$

Soit $G_j := \overline{u_j^0(X_j)}^{L_{q_j}}$ et soit $u_j : X_j \longrightarrow G_j$ l'opérateur induit , observons que u_j est p_j-*sommant et* $\pi_{p_j}(u_j) \leq 1$.

Soit S_0 définit sur $u_1^0(X_1) \times \cdots \times u_m^0(X_m)$ par

$$S_0\left(u_1^0(x^1), \ldots, u_m^0(x^m)\right) \quad := \quad T\left(x^1, \ldots, x^m\right)$$

On obtient

$$\|S_0(u_1^0(x^1), \ldots, u_m^0(x^m))\| \quad \leq \quad \|T\|_{d,(p_1,\ldots,p_m)} \prod_{j=1}^{m} \left\|u_j^0(x^j)\right\|$$

S_0 est continue sur $u_1^0(X_1) \times \cdots \times u_m^0(X_m)$ et il existe une extension unique S sur $\overline{u_1^0(X_1)} \times \cdots \times \overline{u_m^0(X_m)} = G_1 \times \cdots \times G_m$.

De plus on a

$$\|S\| = \|S_0\| \leq \|T\|_{d(p_1,\ldots,p_m)}.$$

Finalement, $T = S \circ (u_1, ..., u_m)$ avec $S \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ et $u_j \in \Pi_{p_j}(X_j; G_j)$ et

$$\|S\| \prod_{j=1}^{m} \pi_{p_j}(u_j) \leq \|T\|_{d(p_1,\ldots,p_m)}$$

ce qui termine la démonstration. ■

Enfin, nous pouvons déduire le corollaire suivant qui est conséquence directe du théorème 3.2.1 .

Corollaire 3.2.1 $\mathcal{L}_{d(p_1,\ldots,p_m)} = \mathcal{L}(\Pi_{p_1}, ..., \Pi_{p_m})$ *(i.e., $T \in \mathcal{L}_{d(p_1,\ldots,p_m)}$ si et seulement s'il existe des espaces de Banach $G_1, ..., G_m$, des opérateurs linéaires absolument p_j- sommants $u_j \in \mathcal{L}(X_j; G_j)$ et $S \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ un opérateur m-linéaire tels que $T = S \circ (u_1, ..., u_m)$).*

Remarque 3.2.1 *Comme $\mathcal{L}$ est un idéal multilinéaire de Banach et Π_{p_j} est un idéal de Banach des opérateurs linéaires p_j-sommants $(1 \leq j \leq m)$ alors, d'après la Proposition 2.4.3, l'espace $\mathcal{L}_{d(p_1,\ldots,p_m)}$ est un idéal multilinéaire de Banach.*

Bibliographie

[1] D. Achour. Espaces de suites et leurs opérateurs. Université de M'sila, 2012.

[2] R.Alencar and M.C.Matos. Some classes of multilinear mappings between Banach spaces, Publ. Dep. An. Mat.Univ. Complutense de Madrid 12 (1989).

[3] A. T. Bernardino. A simple natural approach to the uniform boundedness principle for multilinear mappings, Proyecciones Journal of MathematicsVol. 28, No 3, pp. 203-207, December (2009).

[4] A. T. Bernardino. Ideais de Multilineaires e polinomis entre espaços de Banach,2008

[5] G.Botelho, D.M.Pellegrino and P.Rueda, On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials, Publ. RIMS, Kyoto Univ.43, 1139–1155(2007).

[6] A. Defant, K. Floret, Tensor norms and operator ideals, in: North-Holland Mathematics Studies, vol. 176, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

[7] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. Absolutely Summing Operators.Cambridage University press, Cambridage. 1995.

[8] Cecilia S. Fernandez. The closed graph theorem for multilinear mappings. Internat. J. Math. & Math. Sci. VOL. 19 NO. 2. 407-408 (1996).

[9] S. Geiss. Ideale multilinearer Abbildungen. Diplomarbeit (1984).

[10] J. Lindenstrauss and A. Pelczynski, Absolutely summing operators in Lp spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968), 275-326.

[11] M. C. Matos. On multilinear mappings of nuclear type. Rev.Mat. Univ. Complut. Madr. 6, 61–81 (1993).

[12] A. Pietsch. Operator Ideals. Deutsch, Berlin (1978). 2nd edn.: North-Holland, Amsterdam (1980).

[13] A. Pietsch. Absolut p-summierende Abbildungen in normieten Räumen. Stud. Math. 27, 333–353 (1967).

[14] A. Pietsch. Ideals of multilinear functionals (designs of a theory). In: Proceedings of the Second International

Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics, Leibzig.Teubner-Texte, pp. 185–199 (1983).

[15] I. Sandberg. Multilinear maps and uniform boudedness. IEEE Transactions Circuits and Systems. 32 (1985) 332-336.