الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة محمد بوضياف المسيلة
Université de Mohamed Boudiaf – M'sila

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

قسم: العلوم الاقتصادية
Département de Sciences Economiques

اللجنة العلمية لقسم العلوم الاقتصادية

الرقم: 303/ع ا/2024

المسيلة في: 2024/10/14

مستخرج من محضر اللجنة العلمية لقسم العلوم الاقتصادية

بناء على اجتماع اللجنة العلمية لقسم العلوم الاقتصادية المنعقدة بتاريخ 01اكتوبر 2024، وبناء على تقارير الخبراء الإيجابية للسادة الاساتذة:

أ. د. بن محاد سمير	جامعة المسيلة
أ. د. قرواط يونس	جامعة المسيلة
أ.د. بشيشي وليد	جامعة قالمة

تم اعتماد المطبوعة العائدة للدكتور قطوش عبد الحميد أستاذ محاضر "أ"، والموسومة ب " محاضرات في مقياس احصاء 03"

رئيس اللجنة العلمية

رئيس اللجنة العلمية لقسم العلوم الاقتصادية

لتليطي الأخضر
أستاذ التعليم العالي

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف – المسيلة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

محاضرات في مقياس إحصاء 3

– مدعم بتمارين محلولة ومقترحة –

– حسب المقرر الرسمي الجديد لوزارة التعليم العالي والبحث العلمي –

إعداد الدكتور:

عبد الحميد قطوش

السنة الجامعية : 2024/2023

مقدمـــــــــــــــة

مقدمة

تهدف نظرية الاحتمالات إلى دراسة التجارب العشوائية أو دراسة قوانين الصدفة. وهكذا فإذا كنا بصدد تجربة عشوائية ملموسة، فإننا نعمد إلى تحديد نموذج احتمالي يمكننا من وصف وتحليل هذه التجربة بصورة مقبولة قدر الإمكان، وفي هذا المضمار فإننا، سنستعمل بصورة عامة مفاهيم الاحتمالات، المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية. وبما أنه عمليا بإمكاننا إجراء وتصور ما لا نهاية له من التجارب العشوائية المختلفة في العالم الحقيقي، فإنه يكون من الممكن تكوين ما لا نهاية له من النماذج الاحتمالية المختلفة، بحيث أن كل واحد منها يستخدم متغيرات عشوائية وتوزيعات احتمالية خاصة. إلا أنه في الواقع هناك عدد محدود من التجارب العشوائية التي نصادفها في معظم الأوقات وتكون لها خصائص مشتركة، وهذا ما يمكننا من اختصار عدد النماذج الاحتمالية الضرورية لوصف هذه التجارب.

بناءا على ما تقدم، وانطلاقا من أهمية هذه المادة وضرورتها بالنسبة للطلبة والباحثين، فقد تم تأليف هذه المطبوعة لإثراء مكتباتنا بالمزيد من المؤلفات في هذا المجال.

توفر هذه المطبوعة لطلبة السنة الثانية ل.م.د، مسار العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بصفة خاصة وحتى لطلبة مسارات أخرى، حزمة متكاملة من قوانين التوزيعات الاحتمالية المنفصلة والمتصلة وخواصها، ذات المتغير الواحد، والمتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة ذات المتغيرين (التوزيعات الثنائية)، أو إحصاء 3 حسب التسمية الرسمية للمقياس، وفق المقرر الرسمي لوزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

وقد جاءت المادة العلمية لهذه المطبوعة في ثلاثة محاور. تناول المحور الأول منه، أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، والمتمثلة في: توزيع برنولي، توزيع ثنائي الحدين، توزيع بواسون، التوزيع الهندسي، التوزيع فوق الهندسي، والتوزيع المنتظم. أما المحور الثاني فقد خصص لدراسة أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة، والمتمثلة في: التوزيع المنتظم، التوزيع الأسي، توزيع بيتا، توزيع قاما، التوزيع الطبيعي، توزيع ستودنت، توزيع كاي تربيع، وتوزيع فيشر، بالإضافة إلى التقريب بين التوزيعات الاحتمالية. وخصص الفصل الثالث لدراسة المتغيرات العشوائية الثنائية وخواصها، وقد تم عرض في كل محور، تمارين محلولة وتمارين أخرى مقترحة.

وفي الوقت الذي نضع هذا الجهد العلمي المتواضع بين أيدي زملائنا المدرسين والمتخصصين وأبنائنا الطلبة، فإنه يحذونا الأمل في أن تساهم هذه المطبوعة في الاستيعاب الجيد للمادة بالنسبة لفئة الطلبة الموجهة إليهم بصفة خاصة، والمساهمة كذلك في تزويد الطلبة في طور التخرج والزملاء الأساتذة الباحثين، ببعض الأدوات الإحصائية والمنهجية في إعداد المذكرات والرسائل والبحوث.

نستسمح القارئ الكريم العذر سلفا عن أي نقص ورد في هذه المطبوعة، فالنقص من سمات البشر والكمال لله وحده، ونسأل الله وندعوه سبحانه وتعالى أن يتقبل هذا العمل خالصا لوجهه الكريم.

والله الموفق والهادي إلى سواء السبيل.

الدكتور: عبد الحميد قطوش

المحور الأول

أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

نتطرق من خلال هذ المحور إلى العناصر التالية:

- **تمهيد**

أولا: تذكير بأهم خصائص التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل؛

ثانيا: توزيع برنولي؛

ثالثا: توزيع ثنائي الحدين؛

رابعا: توزيع بواسون؛

خامسا: التوزيع الهندسي؛

سادسا: توزيع فوق الهندسي؛

سابعا: التوزيع المنتظم.

- **تمارين محلولة**
- **تمارين مقترحة**

تمهيد:

تستخدم قوانين التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، عند دراسة متغير عشوائي منفصل، أي غير القابل للتجزئة، مثل عدد الأطفال الذكور ضمن مجموعة تم اختيارها، أو عدد النساء ضمن لجنة معينة... إلخ، ومن أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة التي سنتعرض إليها من خلال هذا المحور، توزيع برنولي، توزيع ثنائي الحدين، التوزيع الهندسي، توزيع بواسون، توزيع فوق الهندسي، والتوزيع المنتظم.

أولا: تذكير بأهم خصائص التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:

1- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل وتمثيله البياني:

إن مجموع قيم مجال تعريف متغير عشوائي منفصل والاحتمالات التي توافق كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X تسمى توزيعا احتماليا، بشرط أن يكون مجموع الاحتمالات الموافقة لكل قيم من مجال تعريف X يساوي 1، وإلا فليس بتوزيع احتمالي، ويعرض جدول التوزيع الاحتمالي على شكل جدول كالتالي:

X	x_1	x_2	....	x_k	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	P_1	P_2	....	P_K	1

ملاحظة: التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل يكون على شكل جدول ويحقق الشرطين التاليين:

$\boxed{P(X=x_i)\geq 0}$ و $\boxed{\sum P(X=x_i)=1}$

كما يتم ذلك بواسطة الأعمدة لأن هذا المتغير من النوع المنفصل.

2- دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل وتمثيلها البياني:

هي دالة عددية نرمز لها بـ $F(x)$، وهي معرفة كالتالي: $\boxed{F(x)=P(X\leq x)=\sum_{i=1}^{k}P(X=x_i)}$

فمثلا: $F(x_5)=P(X\leq x_5)=\sum_{i=1}^{5}P(X=x_i)=P_1+P_2+\cdots+P_5$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<x_1\\ P_1 & x_1\leq x<x_2\\ P_1+P_2 & x_2\leq x<x_3\\ \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots\\ P_1+P_2\ldots+P_{k-1} & x_{K-1}\leq x<x_k\\ 1 & x\geq x_k\end{cases}$$

مما سبق نستنتج ما يلي:

- $F(x)$ دالة عددية متزايدة.
- أدنى قيمة لـ $F(x)$ هي 0، وتترجم رياضيا إلى: $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$
- أقصى قيمة لـ $F(x)$ هي 1، وتترجم رياضيا إلى: $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$
- في حالة المتغير العشوائي المنفصل تسمى $F(x)$ الدالة التجميعية الصاعدة.
- $P(a<X\leq b)=P(X\leq b)-P(X\leq a)=F(b)-F(a)$

كما يتم ذلك بواسطة منحنى سلمي متصاعد.

3- المميزات العددية للمتغير العشوائي المنفصل:

أ- التوقع الرياضي:

في حالة المتغير العشوائي المنفصل، يعطى التوقع الرياضي بالصيغة التالية:

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i}$$

من أهم الخصائص الرياضية للتوقع الرياضي:

- لتكن العلاقة التالية بين متغيرين عشوائيين X ، Y بحيث: $Y = aX + b$، لنحسب $E(Y)$ بدلالة X:

$$E(Y) = E(aX \mp b) = E(aX) \mp E(b) = aE(X) \mp b$$

- لتكن العلاقة التالية بين ثلاث متغيرات عشوائية X، Y ، Z، بحيث: $Z = XY$، إذا كان X و Y مستقلان فإن:

$$E(Z) = E(XY) = E(X)E(Y)$$

ب- التباين والانحراف المعياري:

يعرف التباين $V(X)$ على أنه الأمل الرياضي لمربع الفرق بين المتغير العشوائي X وأمله الرياضي $E(X)$،

أي: $$\boxed{V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]}$$

وفي حالة المتغير العشوائي المنفصل، يعطى التباين بالصيغة التالية:

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{k} P_i\left(x_i - E(X)\right)^2}$$

كما يعطى الانحراف المعياري بالصيغة التالية:

$$\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} P_i\left(x_i - E(X)\right)^2}}$$

توجد صيغة مبسطة للتباين والانحراف المعياري، هي:

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$$

$$\boxed{\delta(X) = \sqrt{E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}}$$

من أهم الخصائص الرياضية للتباين:

- لتكن العلاقة التالية بين متغيرين عشوائيين X، Y بحيث: $Y = aX + b$، لنحسب $V(Y)$ بدلالة X:

$$V(Y) = V(aX \mp b) = V(aX) \mp V(b) = a^2V(X) \mp 0 = a^2V(X)$$

- إذا كان: X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين و $Z = aX + bY$ فإن: $V(Z) = a^2V(X) + b^2V(Y)$
- إذا كان: X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين و $Z = X + Y$ فإن: $V(Z) = V(X) + V(Y)$
- إذا كان: X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين و $Z = X - Y$ فإن: $V(Z) = V(X) + V(Y)$

مثال1: نرمي قطعة نقد متوازنة ثلاث مرات، وليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأوجه F التي تظهر.

1- حدد قيم المتغير العشوائي الممكنة، ثم أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي، ومثله بيانيا.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية ومثلها بيانيا.

3- أحسب كلا من: $E(X)$، $V(X)$، $\delta(Z)$، $E(4X - 2)$، $V(4X - 2)$.

الحل:

1- تحديد قيم المتغير العشوائي الممكنة، وإنشاء جدول التوزيع الاحتمالي، وتمثيله بيانيا:

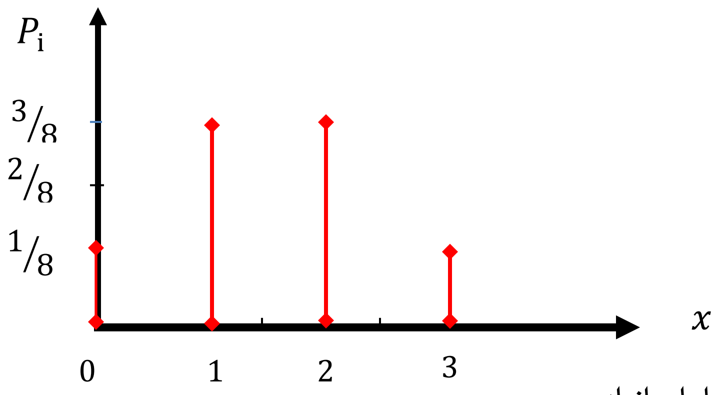
$$E = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$$

نلاحظ أن: $X \in \Omega_X = [0 ,1 ,2, 3]$

$$P(X = 0) = \frac{1}{8} \quad , \quad P(X = 1) = \frac{3}{8} \quad , \quad P(X = 2) = \frac{3}{8} \quad , \quad P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

$\boldsymbol{X}$	**0**	**1**	**2**	**3**	$\sum \boldsymbol{P(X = x_i)}$
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	**1**

يمثل بيانيا هذا التوزيع بواسطة الأعمدة، لأن المتغير العشوائي المدروس الذي يمثل عدد الأوجه من النوع المنفصل.

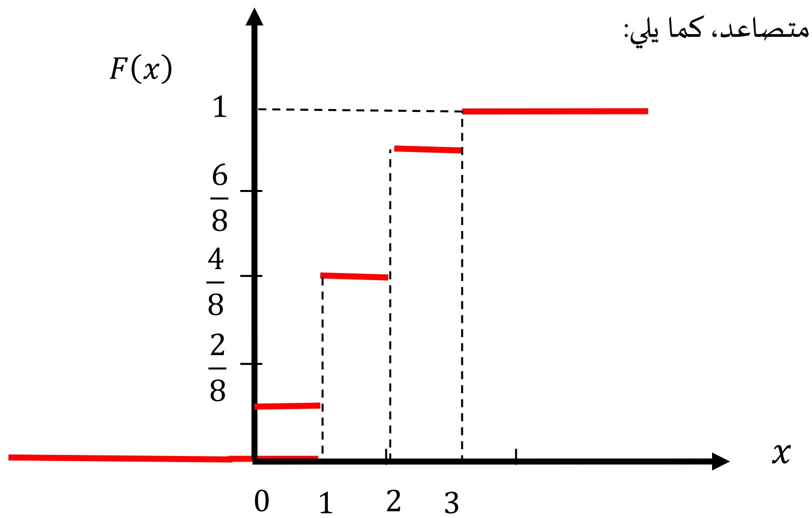


2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية وتمثيلها بيانيا:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

يتم ذلك بواسطة منحنى سلمي متصاعد، كما يلي:



3- حساب كلا من: $E(X)$، $V(X)$، $\delta(Z)$، $E(4X-2)$، $V(4X-2)$:

X	0	1	2	3	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	**1**
$P_i x_i$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$
$\sum x_i^2 p_i$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{8}$

- حساب $E(X)$: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

- حساب $V(X)$: $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = \frac{24}{8} = 3$$

$$V(X) = 3 - (1{,}5)^2 = 0{,}75$$

- حساب $\delta(X)$: $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$

- حساب $E(4X-2)$: $E(4X-2) = 4E(X) - 2 = 4(1{,}5) - 2 = 4$

- حساب $V(4X-2)$: $V(4X-2) = 4^2 E(X) = 16(1{,}5) = 24$

ثانيا: توزيع برنولي $X \to B(1\,;\,p)$

1- شروط استعمال توزيع برنولي:

نقول أن متغير عشوائي X يتبع توزيع برنولي ذو المعلمتين 1 و p إذا كان X يقبل قيمتين فقط هما $X=0$ باحتمال q، و $X=1$ باحتمال p.

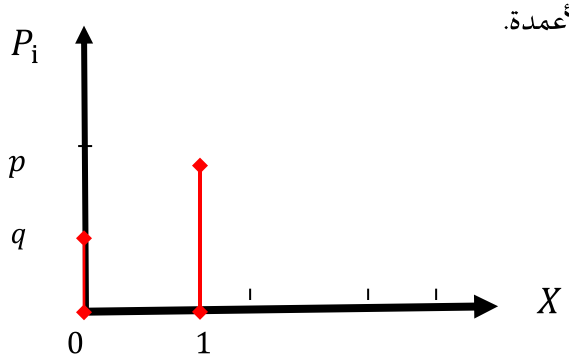
2- التوزيع الاحتمالي:

توزيع برنولي يعبر على تجربة عشوائية تكرر مرة واحدة، ونعبر بـ $X=1$ على النتيجة التي تتحقق فيها الخاصة المدروسة و $X=0$ إذا لم تتحقق الصفة المدروسة، وبالتالي فتوزيعه الاحتمالي يكون بالشكل التالي:

X	**0**	**1**	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	q	p	**1**

3- التمثيل البياني:

يمثل التوزيع الاحتمالي لبرنولي بواسطة الأعمدة.



مثال2: إذا علمت أن نسبة الانتاج الصالح في إنتاج نوع معين من البطاريات بأحد المصانع هي 90%، نختار عشوائيا بطارية من الإنتاج الكلي للمصنع، وليكن X: يمثل عدد البطاريات الصالحة. حدد التوزيع الاحتمالي في هذه التجربة، ما هو قانونه الاحتمالي؟

الحل:

X: يمثل عدد البطاريات الصالحة   البطارية صالحة: $X = 1$ البطارية غير صالحة: $X = 0$

X	0	1	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	0,1	0,9	1

$X \in \Omega_X = [0\,,1]$

$P(X = 1) = 0,9 \quad , \quad P(X = 0) = 0,1$

$X \to B(1\,;\ p) \qquad ، \qquad X \to B(1\,;\ 0,9)$

ملاحظة هامة: توزيع برنولي يعبر على دراسة إحصائية تتم على عينة مشكلة من وحدة واحدة أي: $n = 1$، وعليه فإن هذا التوزيع غير صالح تطبيقيا، لأن العينة المشكلة من وحدة واحدة لا تمثل المجتمع فتكون الاستنتاجات خاطئة، ولكن أهمية توزيع برنولي هي أهمية نظرية إذ يعتبر هو أساس كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى.

4- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = p} \Leftarrow \quad E(X) = \sum x_i\, p_i = 0.q + 1.p = p$

ب- التباين: $\boxed{V(X) = p(1-p) = pq}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{pq}}$

مثال3: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق.

الحل:

- **التوقع الرياضي:** $E(X) = p = 0,9$
- **التباين:** $V(X) = pq = 0,9(0,1) = 0,09$
- **الانحراف المعياري:** $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{pq} = \sqrt{0,09} = 0,3$

ثالثا: توزيع ثنائي الحدين $X \to B(n\,;\ p)$

1- شروط استعمال توزيع ثنائي الحدين:

نقول أن متغير عشوائي X يتبع توزيع ثنائي الحدين ذو المعلمتين n و p إذا كان يعبر على مجموع n متغير عشوائي مستقل لـ برنولي أي: $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$، حيث:

$$X_1 \to B(1\,;\ p),\ X_2 \to B(1\,;\ p)\ \ldots\ldots\ldots\ X_n \to B(1\,;\ p)$$

ملاحظة: صفة الاستقلالية لـ n متغير عشوائي تعني تكرار تجربة بارنولي n مرة مع الإرجاع.

عمليا توزيع ثنائي الحدين يعني إجراء دراسة إحصائية على عينة حجمها n وحدة (n كرية، n طالب، n أسرة...)، بشرط أن يتم سحب العينة مع الإرجاع.

إن احتمال عدد ما X من النجاحات من بين n تجربة برنولية مستقلة، يحسب وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$n = 1,2,3, \dots \qquad X \in \Omega_X = [0,1,2,3, \dots, n] \qquad \boxed{P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}}$$

حيث x: يمثل عدد مرات النجاح، p: يمثل احتمال النجاح في التجربة (يبقى ثابتا عند تكرار التجربة)،

$q = 1 - p$: تمثل احتمال الفشل، n: عدد التجارب.

وبالتالي فإن شروط استخدام قانون توزيع ثنائي الحدين هي:

- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات n.
- احتمال النجاح في التجربة ثابت (تجارب مستقلة).

2- التوزيع الاحتمالي:

التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين يكون وفق الجدول التالي:

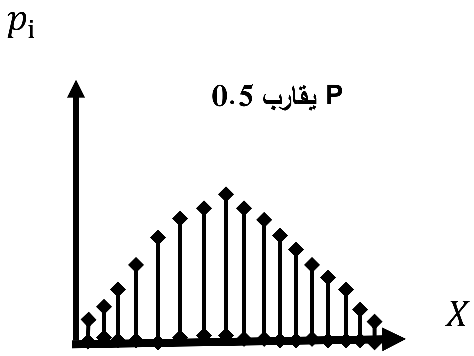
X	0	1	....	x	....	n	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	q^n	.....	....	$C_n^x p^x q^{n-x}$	....	p^n	1

ملاحظة: التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين يكون على شكل جدول ويحقق الشرطين التاليين:

$\boxed{p_i \geq 0}$ و $\boxed{\sum P(X = x_i) = 1}$

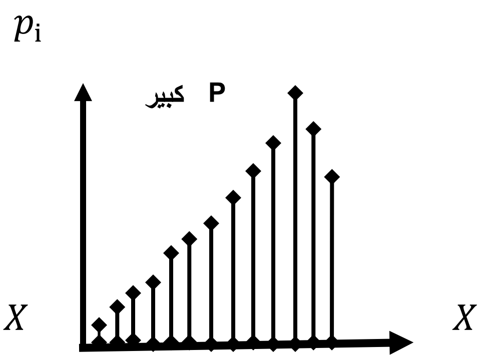
3- التمثيل البياني:

يمثل التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين بواسطة الأعمدة، حيث يأخذ أشكالا مختلفة حسب قيمة p.



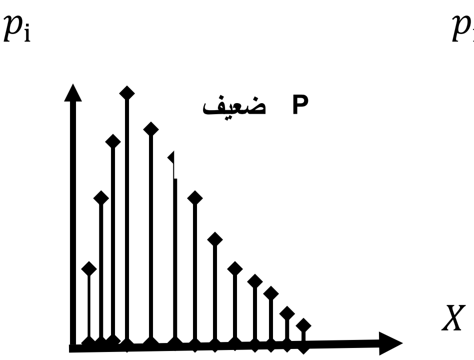
توزيع متماثل

ظاهرة طبيعية



إلتواء إلى اليسار

ظاهرة شائعة



إلتواء إلى اليمين

ظاهرة نادرة

مثال4: في تجربة رمي قطعة نقدية متوازنة 5 مرات، ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الصور التي تظهر.

المطلوب: أحسب احتمال الحصول على: ولا مرة صورة، مرة واحدة، مرتين، 3 مرات، 4 مرات، 5 مرات.

الحل:

بما أن التجربة برنولية (مكررة 5 مرات)، احتمال النجاح ثابت في كل تجربة $p = \frac{1}{2}$ (التجارب مستقلة)، فإن المتغير

العشوائي X يتبع قانون ثنائي الحدين:

$$n = 5 \qquad X = 0,1,2,3,4,5 \qquad P(X = x) = C_n^x P^x q^{n-x} \qquad X \to B\left(5\ ;\ \frac{1}{2}\right)$$

وبالتالي:

$$P(X = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = 0{,}3125 \quad ، \quad P(X = 0) = C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = 0{,}0313$$

$$P(X = 4) = C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = 0{,}1563 \quad ، \quad P(X = 1) = C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 0{,}1562$$

$$P(X = 5) = C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = 0{,}0312 \quad ، \quad P(X = 2) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = 0{,}3125$$

ملاحظة: يمكن استخراج الاحتمالات عن طريق جدول التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين (أنظر الملحق1).

4- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_1) + \cdots + E(X_n) \\ &= p + p + \cdots + p \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = np}$$

ب- التباين:

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= V(X_1) + V(X_1) + \cdots + V(X_n) \\ &= Pq + Pq + \cdots + Pq \end{aligned}$$

$$\boxed{V(X) = npq}$$

ج- الانحراف المعياري:

$$\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq}}$$

مثال5: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق؟

الحل:

- التوقع الرياضي: $E(X) = np = 5\left(\frac{1}{2}\right) = 2{,}5$
- التباين: $V(X) = npq = 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}25$
- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{1{,}25} = 1{,}12$

النموذج العلمي لقانون ثنائي الحدين

لدينا صندوق يحتوي على كريات بيضاء بنسبة p وكريات ليست سوداء بنسبة $q = 1 - p$.

- نسحب عشوائيا عينة من n كرية من هذا الصندوق مع الارجاع.
- نعرف المتغير العشوائي X: عدد الكريات البيضاء من بين n.
- X متغير عشوائي منفصل يتبع قانون ثنائي الحدين: $X \to B(n\,,p)$
- p هو احتمال أن تكون الكرية الأولى المسحوبة بيضاء (هو نفس الاحتمال لكل الكريات لأن السحب يتم مع الارجاع وبالتالي كل الأحداث مستقلة).
- مجال التعريف: $X \in \Omega_X = [0,1,2,3, \dots, n]$
- القانون الاحتمالي:

$$P(X = x) = P(\underbrace{BB \dots \dots B}_{x \text{ مرة}}\ \underbrace{\bar{B}\bar{B} \dots \dots \bar{B}}_{(n-x) \text{ مرة}})$$

$$= \underbrace{p.p \dots \dots p}_{x \text{ مرة}} . \underbrace{q.q \dots \dots . q}_{(n-x) \text{ مرة}}$$

$$= p^x . q^{n-x}$$

هذه حالة واحدة من الحالات التي يمكن أن نركب بها تشكيلة الكريات البيضاء والكريات التي ليست بيضاء، مثلا: $(\bar{B}\bar{B} \dots \dots \bar{B}\ \ BB \dots \dots B)$ ، $(B\bar{B} \dots \dots B\ \ \bar{B}B \dots \dots \bar{B})$ ، .....

عدد الطرق الممكنة لتركيب الكريات هو: C_n^x

وبالتالي: $$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

رابعا: توزيع بواسون: $X \to P(\lambda)$

1- شروط استعمال توزيع بواسون:

نقول أن متغيرا عشوائيا منفصلا X يتبع توزيع بواسون ذو المعلمة λ إذا كان:

- **مجال التعريف:** $X \in \Omega_X = [0,1,2,3, \dots ,n]$
- **القانون الاحتمالي:** $P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

حيث: e: العدد النيبري $(e = 2,71828)$ و $\lambda > 0$

ملاحظة:

توزيع بواسون يعبر على تجربة برنولية مكررة عددا كبيرا أو لانهائيا من المرات يكون فيها احتمال النجاح ضعيفا (p ضعيفا)، فنقول أنها ظاهرة نادرة واحتمال تحققها ضعيفا.

عمليا يطبق توزيع بواسون على ظاهرة محصورة في فترة زمنية قصيرة، فيصبح احتمال تحققها ضعيفا، مثل: عدد السيارات التي تدخل مضخة بنزين خلال ساعة، عدد المكالمات التي يتلقاها مركز هاتفي خلال نصف ساعة...

2- التوزيع الاحتمالي:

التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون يكون وفق الجدول التالي:

X	**0**	**1**	....	x	....	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$e^{-\lambda}$	.....	....	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	....	**1**

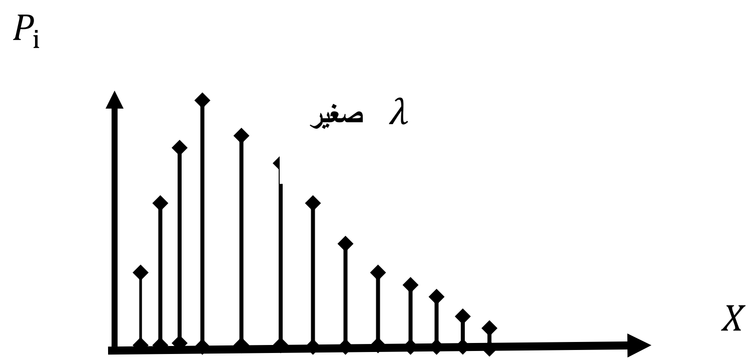
ملاحظة: التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون يكون على شكل جدول ويحقق الشرطين التاليين:

$\boxed{p_i \geq 0}$ و $\boxed{\sum P(X = x_i) = 1}$

3- التمثيل البياني:

يمثل التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون بواسطة الأعمدة، حيث يعتبر من النوع الملتوي نحو اليمين.

ملاحظة: كلما كبر λ ضعف الالتواء إلى اليمين، ويميل التوزيع إلى التماثل فتصبح الظاهرة طبيعية.



إلتواء إلى اليمين

مثال6: يشير تحقيق قام به صاحب محطة بنزين إلى أن متوسط عدد السيارات التي تتوقف للتزود بالوقود خلال ساعة واحدة هو 8 سيارات. أحسب احتمال توقف 4 سيارات على الأقل للتزود خلال ساعة ما؟ احتمال توقف 4 سيارات بالضبط للتزود بالبنزين؟

الحل: لدينا ظاهرة (توقف السيارات للتزود بالوقود) منسوبة إلى وحدة زمنية (الساعة) وبالتالي فهي تخضع لتوزيع بواسون $\lambda = 8$

- احتمال توقف 4 سيارات على الأقل للتزود خلال ساعة ما:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}0424 = 0{,}9576 \\
&= 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\big) \\
&= 1 - \left(e^{-8}\,\frac{8^0}{0!} + e^{-8}\,\frac{8^1}{1!} + e^{-8}\,\frac{8^2}{2!} + e^{-8}\,\frac{8^3}{3!}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{8^0}{0!} + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!} + \frac{8^3}{3!}\right)e^{-8} \\
&= 1 - \left(1 + 8 + 32 + \frac{512}{6}\right)e^{-8} \\
&= 1 - 0{,}0424 = 0{,}9576
\end{aligned}$$

- احتمال توقف 4 سيارات بالضبط للتزود خلال ساعة ما:

$$P(X = 4) = e^{-8}\,\frac{8^4}{4!} = 0{,}0572$$

4- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \lambda}$

ب- التباين: $\boxed{V(X) = \lambda}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}}$

مثال7: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق؟

الحل:

- التوقع الرياضي: $E(X) = \lambda = 8$

- التباين: $V(X) = \lambda = 8$

- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ملاحظة: يمكن استخراج الاحتمالات عن طريق جدول التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون (أنظر الملحق2).

خامسا: التوزيع الهندسي $X \to G(p)$

1- شروط استعمال التوزيع الهندسي:

نقول أن متغير عشوائي X يتبع التوزيع الهندسي، إذا كانت التجربة برنولية، وأردنا الحصول على احتمال تحقيق أول نجاح بعد x من المحاولات، في هذه الحالة فإن احتمال تحقق x ، يحسب وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$\boxed{P(X = x) = q^{x-1}p} \qquad X \in \Omega_X = [1,2,3, \dots]$$

مثال8: صندوق به 6 كريات مرقمة من 1 إلى 6، نسحب 5 كريات عشوائيا، الواحدة تلوى الأخرى مع الإرجاع من هذا الصندوق.

1- ما احتمال الحصول على رقم زوجي بعد السحبة الثالثة.

2- ما احتمال الحصول على رقم زوجي بعد السحبة الثالثة على الأكثر.

الحل: احتمال تحقق x، يحسب وفق القانون الهندسي التالي:

$$P(X = x) = q^{x-1}p \qquad X \in \Omega_X = [1,2,3,4,5]$$

حيث: $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ تمثل احتمال الحصول على رقم زوجي، و $q = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ تمثل احتمال الحصول على رقم فردي.

X : عدد المحاولات للحصول على أول رقم زوجي (أول نجاح).

1- احتمال الحصول على رقم زوجي بعد السحبة الثالثة: أي $X = 3$

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

2- احتمال الحصول على رقم زوجي بعد السحبة الثالثة على الأكثر: أي $X \le 3$

$$P(X \le 3) = P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

2- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$

ب – التباين: $\boxed{V(X) = \frac{q}{p^2}}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{q}{p^2}}}$

مثال9: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق؟

الحل:

- **التوقع الرياضي:** $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

- **التباين:** $V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$

- **الانحراف المعياري:** $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2} = 1{,}41$

سادسا: توزيع فوق الهندسي $X \rightarrow H(N\,; n\,;\,p)$

1- شروط استعمال توزيع فوق الهندسي:

نقول أن متغير عشوائي X يتبع توزيع فوق الهندسي ذو المعالم N و n و p إذا كان يعبر على مجموع n متغير عشوائي غير مستقل لـ: برنولي، أي أن صفة عدم الاستقلالية لـ n متغير عشوائي تعني تكرار تجربة برنولي n مرة مع عدم الإرجاع (السحب في آن واحد).

عمليا توزيع فوق الهندسي يعني إجراء دراسة إحصائية على عينة حجمها n وحدة (n كرية، n طالب، n أسرة...)، بشرط أن يتم سحب العينة مع عدم الإرجاع (السحب في آن واحد).

إن احتمال عدد ما X من النجاحات من بين n تجربة برنولية غير مستقلة يحسب وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$n = 1,2,3,\dots \qquad X \in \Omega_X = [0,1,2,3,\dots,n] \qquad \boxed{P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x}\, C_{N_2}^{n-x}}{C_N^{n}}}$$

حيث:

x: يمثل عدد مرات النجاح، N: حجم المجتمع، N_1: حجم المجتمع الذي تتوفر فيه الخاصة المدروسة،

N_2: حجم المجتمع الذي لا تتوفر فيه الخاصة المدروسة ، n: عدد التجارب (حجم العينة).

وبالتالي فإن شروط استخدام توزيع فوق الهندسي هي:

- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات n.
- احتمال النجاح في التجربة غير ثابت (تجارب غير مستقلة)[1].

2- التوزيع الاحتمالي:

التوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي يكون وفق الجدول التالي:

X	0	1	....	x	....	n	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$\frac{C_{N_2}^{n}}{C_N^{n}}$	.....	....	$\frac{C_{N_1}^{x}\, C_{N_2}^{n-x}}{C_N^{n}}$	....	$\frac{C_{N_1}^{n}}{C_N^{n}}$	1

ملاحظة: التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون يكون على شكل جدول ويحقق الشرطين التاليين:

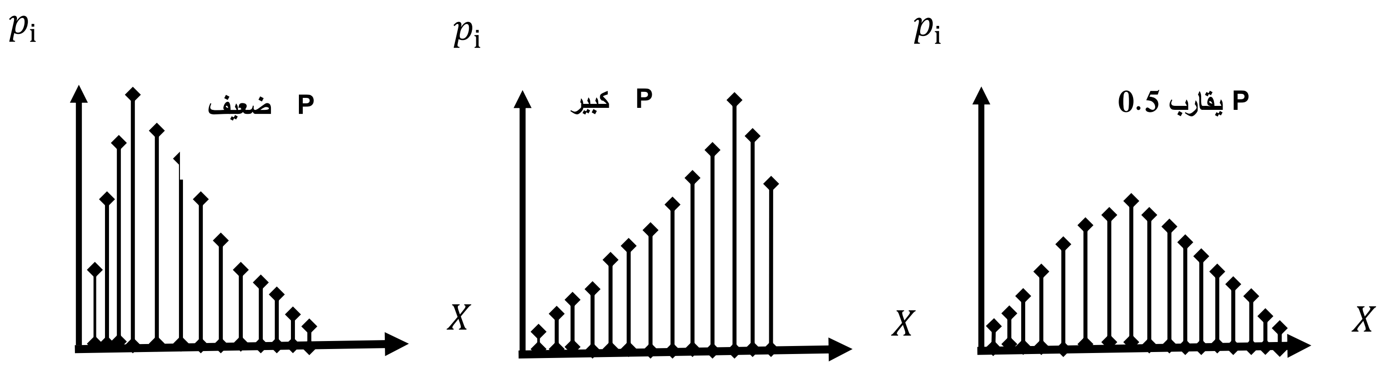
$$\boxed{p_i \geq 0} \quad \text{و} \quad \boxed{\sum P(X = x_i) = 1}$$

(1)- ماذا تمثل المعلمة p في الصيغة العامة لقانون فوق الهندسي؟

p تمثل احتمال النجاح في السحب الأول أي: $p = \frac{N_1}{N}$، أما في باقي السحبات فسيتغير p بسبب عدم الارجاع (احتمالات شرطية).

3- التمثيل البياني:

يمثل التوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي بواسطة الأعمدة، حيث يأخذ أشكالا مختلفة حسب قيمة p.



توزيع متماثل	إلتواء إلى اليسار	إلتواء إلى اليمين
ظاهرة طبيعية	ظاهرة شائعة	ظاهرة نادرة

مثال10: صندوق به 6 كريات منها 4 بيضاء و2 حمراء، نسحب بدون إرجاع 3 كريات، أحسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين، 3 كريات بيضاء، كرية واحدة بيضاء، ولا كرية بيضاء؟

الحل: بما أن التجربة برنولية (مكررة 3 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X يتبع قانون فوق الهندسي:

$$n = 3 \qquad X \in \Omega_X = [0,1,2,3, \dots, n] \qquad P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x} C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \qquad X \to H\left(6\,; 3\,; \frac{2}{3}\right)$$

وبالتالي:

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = 0,6 \qquad P(X = 0) = \frac{C_4^0 C_2^3}{C_6^3} = 0$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = 0,2 \qquad P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = 0,2$$

X	0	1	2	3	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	0	0,2	0,6	0,2	1

4- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = np}$

ب – التباين: $\boxed{V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$

$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ **:** يسمى معامل الشمولية، ويعني أنه كلما كان حجم العينة n كبيرا فإنه يؤول إلى حجم المجتمع N، وتصبح الدراسة شاملة وتنعدم عشوائية X، فيصبح أكيدا أي: $X = N_1$

$$lim_{n \to N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \to 0 \quad \Rightarrow \quad V(X) = 0$$

مثال11: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق؟

الحل:

- التوقع الرياضي: $E(X) = np = 3\left(\frac{2}{3}\right) = 2$

- التباين: $V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4-3}{4-1}\right) = \frac{2}{9}$

- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

النموذج العملي لقانون فوق الهندسي

لدينا صندوق يحتوي على إجمالي N كرة، منها N_1 كرة بيضاء و N_2 كرية ليست بيضاء.

- نسحب من هذا الصندوق عينة من n كرية مع عدم الإرجاع.
- نعرف X : عدد الكريات البيضاء من بين n .
- X: متغير عشوائي منفصل يتبع قانون فوق الهندسي: $X \rightarrow H(N\,; n\,;\, p)$
- p هو احتمال أن تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء:

N_2: عدد الكريات الغيربيضاء، N_1: عدد الكريات البيضاء و $P(B) = p = \frac{N_1}{N}$

- مجال التعريف: $X \in \Omega_X = [0,1,2,3, \dots, x_{max}]$

- إذا كان $\boldsymbol{n < N_1}$: $X \in \Omega_X = [0,1,2,3, \dots, n]$

- إذا كان $\boldsymbol{n > N_1}$: $X \in \Omega_X = [0,1,2,3, \dots, N_1]$

- القانون الاحتمالي: $P(X = x) = P(\underbrace{BB \dots\dots B}_{x \text{ مرة}}\ \underbrace{\bar{B}\bar{B} \dots\dots \bar{B}}_{(n-x) \text{ مرة}})$
- عدد الطرق الممكنة للحصول على x كرية بيضاء من N_1 و $(n-x)$ كرية ليست بيضاء من بين N_2 هي: $C_{N_1}^{x}\, C_{N_2}^{n-x}$
- عدد الطرق الممكنة لإختيار n كرية ممكنة من بين العدد الاجمالي للكريات N هي: C_N^n

وبالتالي: $P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x} C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$

سابعا: التوزيع المنتظم $X \to U(p)$

1- شروط استعمال التوزيع المنتظم:

نقول أن متغير عشوائي X يتبع التوزيع المنتظم، إذا كان يأخذ جميع القيم الممكنة $1\,,2\,,\ldots\ldots,n$ باحتمالات متساوية أي: $P(X=1)=P(X=2)=\cdots=P(X=n)$

من الخاصية: $\sum P(X=x)=1$، نستنتج مايلي:

$$\sum P(X=x)=1 \Leftrightarrow P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=n)=1$$
$$\Leftrightarrow P(X=x)+P(X=x)+\cdots+P(X=x)=1$$
$$\Leftrightarrow nP(X=x)=1$$
$$\Leftrightarrow P(X=x)=\frac{1}{n} \qquad , \quad \forall x=1,2,\ldots,n$$

وبالتالي، إذا كان المتغير العشوائي X يأخذ جميع القيم الممكنة $1\,,2\,,\ldots\ldots,n$ باحتمالات متساوية، فإن احتمال تحقق x، يحسب وفق القانون الاحتمالي التالي:

$$\boxed{P(X=x)=\frac{1}{n}} \qquad X\in\Omega_X=[1,2,3,\ldots,n]$$

2- التوزيع الاحتمالي:

التوزيع الاحتمالي للقانون المنتظم، يكون وفق الجدول التالي:

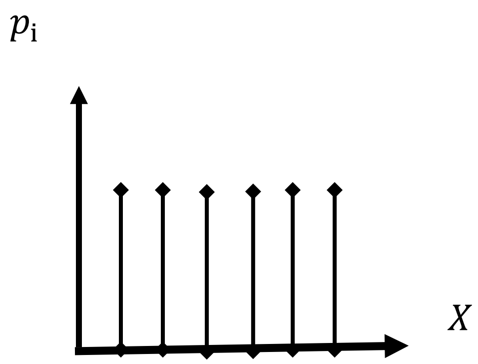
X	1	2	....	n	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	....	$\frac{1}{n}$	1

ملاحظة: التوزيع الاحتمالي للقانون المنتظم يكون على شكل جدول ويحقق الشرطين التاليين:

$$\boxed{p_i \geq 0} \quad \text{و} \quad \boxed{\sum P(X=x_i)=1}$$

3- التمثيل البياني:

يمثل التوزيع الاحتمالي للقانون المنتظم بواسطة الأعمدة متساوية في الطول، حيث يأخذ أشكالا مختلفة حسب قيمة p.



مثال12: صندوق به 6 كريات مرقمة من 1 إلى 6، نسحب كرية واحدة من هذا الصندوق، نهتم بالرقم الظاهر على الكرية المسحوبة. أوجد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي، ثم مثله بيانيا.

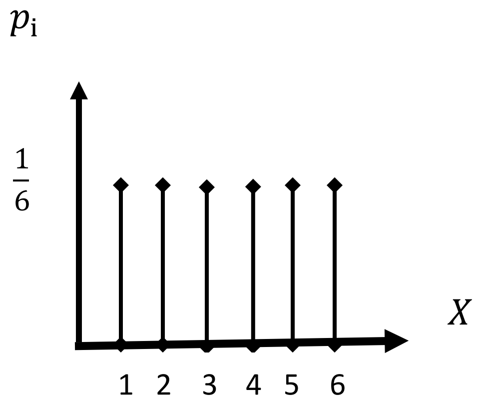
الحل: بما أن المتغير العشوائي X يأخذ جميع القيم الممكنة $1 , 2 , \ldots\ldots , 6$ باحتمالات متساوية، فإن احتمال تحقق x، يحسب وفق القانون المنتظم التالي:

$$P(X = x) = \frac{1}{6} \qquad X \in \Omega_X = [1,2,3, \ldots ,6]$$

التوزيع الاحتمالي للقانون المنتظم، يكون وفق الجدول التالي:

X	1	2	3	4	5	6	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

يمثل التوزيع الاحتمالي للقانون المنتظم بواسطة الأعمدة متساوية في الطول، كما يلي:



4- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$

ب – التباين: $\boxed{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}}$

مثال13: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق؟

الحل:

- التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 3,5$

- التباين: $V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} = 2,92$

- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,92} = 1,71$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

تفيد احصائيات مصلحة استشفائية، أن احتمال بقاء المصابين بفيروس معين على قيد الحياة تقدر بـ 90%، نختار عشوائيا عينة من 5 مصابين بهذا الفيروس ممن هم متواجدين بالمصلحة الاستشفائية، وليكن X: عدد المصابين المتوفين.

1- ما هو القانون الاحتمالي لـ X. حدد التوزيع الاحتمالي.

2- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X = 0)$، $P(X = 5)$، $P(X < 2)$، $P(X \geq 1)$.

3- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$.

4- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري بطريقتين مختلفتين.

التمرين الثاني:

يتكون مخبر علمي للدراسات الاقتصادية من 8 أساتذة و4 أستاذات ، نختار من بينهم بطريقة عشوائية 3 أشخاص للمشاركة في تظاهرة علمية، ليكن X: عدد الأستاذات ضمن الوفد المشارك من بين 3.

1- ما هو القانون الاحتمالي لـ X؟ برر ذلك.

2- حدد التوزيع الاحتمالي لــ X (مجال التعريف، حساب الاحتمالات).

3- تأكد أنه فعلا توزيع احتمالي.

4- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري، بطريقتين مختلفتين.

التمرين الثالث:

ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد مرات تعطل جهاز كهربائي في الأسبوع، حيث $X \rightarrow \lambda(0,6)$.

1- حدد مجال التعريف والتوزيع الاحتمالي.

2- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري، ثم استنتج: $E(0,3X + 0,2)$ ، $V(0,3X + 0,2)$.

3- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X = 3)$، $P(X > 2)$، $P(1 < X \leq 4)$.

4- ما هي أقصى قيمة ممكنة لــ X؟

التمرين الرابع:

ناد به 10 أعضاء، 6 رجال و4 نساء، نريد أن نختار عشوائيا 5 منهم للتمثيل في خمسة أفلام مختلفة (يمكن لنفس الشخص أن يمثل في أكثر من فيلم)، ليكن X: عدد النساء من بين الخمسة أشخاص الذين تم اختيارهم.

1- ما هي طبيعة X؟ علل ذلك.

2- ما هو القانون الاحتمالي لـ: X؟ علل ذلك.

3- عين التوزيع الاحتمالي لـ: X .

4- أحسب العدد المتوسط للنساء والانحراف المعياري؟

5- ما هو احتمال أن يكون عدد النساء من بين الخمسة الذين تم اختيارهم:

- يساوي 0. - أقل من 3. - يفوق أو يساوي 2. - محصورا بين 2 و 5.

التمرين الخامس:

تفيد تقارير الشرطة أنه خلال إحصائيات السنوات الماضية يقدر العدد المتوسط لحوادث المرور التي تقع في ولاية المسيلة يوميا بـ 3 حوادث، إذا علم أن هذه الظاهرة تتبع قانون بواسون *Poisson*.

1- عرف المتغير العشوائي ونوعه في هذه المسألة.

2- عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.

3- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

4- ما هو احتمال أن يقع في اليومين المقبلين بولاية المسيلة:

- ثلاث حوادث مرور. - سبعة حوادث مرور. - أكثر من ستة حوادث.

5- ما هو أقصى عدد ممكن لحوادث المرور بالولاية؟

التمرين السادس:

عجلة الحظ تحتوي على سبعة تدريجات مرقمة من 1 إلى 7، نقوم بتدوير العجلة مرة واحدة، نهتم بالرقم الذي يتوقف عنده المؤشر.

1- ما هو القانون الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي؟

2- عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.

3- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

4- ما هو احتمال أن يتوقف المؤشر عند: - الرقم 4. – رقم يقل عن 3.

التمرين السابع:

ليكن المتغير العشوائي X توزيعه الاحتمالي يخضع للقانون التالي: $P(X=x)=\frac{1}{n}$ ، حيث: $X=1,2,\dots,n$

1- ما هو القانون الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي؟

2- أوجد قيمة n علما أن الانحراف المعياري يساوي $\sqrt{2}$. ثم أوجد الأمل الرياضي.

التمرين الثامن:

نرمي زهرة نرد متوازنة 6 مرات متتالية، نهتم بظهور رقم من مضاعفات 3.

1- ما احتمال ظهور رقم من مضاعفات 3 وذلك أربعة مرات.

2- ما احتمال ظهور رقم من مضاعفات 3 بعد الرمية الرابعة.

3- ما احتمال ظهور رقم من مضاعفات 3 بعد الرمية الرابعة على الأكثر.

التمرين التاسع:

عند إنتاج قطع من الغيار كانت نسبة المعيب 5%، تم اختيار عينة بحجم 5 قطع من مجموع الانتاج الكلي، أحسب الاحتمالات التالية:

1- أن تكون قطعة فاسدة في العينة.

2- أن تكون قطعتان فاسدتان في العينة.

3- أن تكون قطعتان فاسدتان على الأقل.

التمرين العاشر:

يتلقى مركز استقبال المكالمات الهاتفية في المتوسط 300 مكالمة في ساعة واحدة، لنفرض أن عدد المكالمات يخضع لقانون بواسون. عند دقيقتين فقط، أحسب احتمال:

1- أن يتلقى ثلاث مكالمات فقط.

2- أن يتلقى مكالمة واحدة.

3- أن يتلقى مكالمتين على الأكثر.

التمرين الحادي عشر:

تملك إحدى المحلات التجارية المتخصصة في بيع الأجهزة الكهرو منزلية 20 جهازتلفاز، معها شهادة ضمان سنتين، باعت منها 4 أجهزة، وهي تعلم بأن عدد الأجهزة التي تملكها بها 15 جهازا يبقى صالحا خلال فترة الضمان.

1- أوجد احتمال أن لا يتم ارجاع خلال فترة الضمان:

أ- كل الأجهزة المباعة، مع شرح النتيجة،

ب- على الأقل ثلاثة أجهزة مباعة، مع شرح النتيجة،

2- أوجد احتمال أن يتم ارجاع جميع الأجهزة المباعة خلال فترة الضمان، مع شرح النتيجة.

3- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين الثاني عشر:

ليكن لدينا X متغير عشوائي، معرف بالقانون الاحتمالي التالي: $\boldsymbol{P(X=x)=\frac{4^x}{x!}e^{-4}}$

1- ما هو نوع المتغير العشوائي X؟ وما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه؟

2- إذا كان المتغير العشوائي X المعرف بالقانون الاحتمالي السابق، يمثل عدد مرات تعطل آلة صناعية في مصنع معين خلال سنة.

أ- حدد معلمة هذا المتغير.

ب- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X>1)$ ، $P(2\leq X<4)$، $F(3)$.

ج- أحسب قيمة كلا من: التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

3- إذا كان 80% من منتجات هذه الآلة سليما، وسحبنا 7 وحدات من الإنتاج الكلي لهذه الآلة.

أ- ما احتمال أن يكون بها ثلاث وحدات معيبة.

ب- ما احتمال أن نحصل على وحدة معيبة بعد سحبتين على الأكثر.

ج- أحسب العدد المتوقع للوحدات المعيبة، والانحراف المعياري.

الحلول

حل التمرين الأول:

1- القانون الاحتمالي لـ X. وتحديد التوزيع الاحتمالي:

أ- بما أن المجتمع غير محدود ونكرره 5 مرات ($n = 5$) فهو قانون ثنائي الحدين أي: $X \to B(n\ ,p)$

حيث $n = 5$ و $p = 0{,}1$ لأن المتغير العشوائي يمثل عدد المتوفين، أي: $X \to B(5\ ;\ 0{,}1)$

مجال التعريف: $n = 5 \quad \Rightarrow X \in \Omega = [0, 1, \dots ,5]$

$$P(X = x) = C_5^x(0{,}1)^x(0{,}9)^{5-x}$$

ب- التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يمثل بجدول، نرفق فيه كل قيمة باحتمالها، التي تحسب من خلال قانون ثنائي الحدين.

$$P(X = 0) = C_5^0(0{,}1)^0(0{,}9)^{5-0} = 0{,}59049$$
$$P(X = 1) = C_5^1(0{,}1)^1(0{,}9)^{5-1} = 0{,}32805$$
$$P(X = 2) = C_5^2(0{,}1)^2(0{,}9)^{5-2} = 0{,}0729$$
$$P(X = 3) = C_5^3(0{,}1)^3(0{,}9)^{5-3} = 0{,}0081$$
$$P(X = 4) = C_5^4(0{,}1)^4(0{,}9)^{5-4} = 0{,}00045$$
$$P(X = 5) = C_5^5(0{,}1)^5(0{,}9)^{5-5} = 0{,}00001$$

كما يمكن الحصول على هذه الاحتمالات من خلال جدول توزيع ثنائي الحدين، المرفق بالملحق رقم 1.

وعليه يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي التالي:

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	3	4	5	$\sum \boldsymbol{P(X = x_i)}$
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001	**1**

2- حساب الاحتمالات:

$$* P(X = 0) = C_5^0(0{,}1)^0(0{,}9)^{5-0} = 0{,}59049$$
$$* P(X = 5) = C_5^5(0{,}1)^5(0{,}9)^{5-5} = 0{,}00001$$
$$* P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}59049 + 0{,}32805 = 0{,}91854$$
$$* P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - 0{,}5905 = 0{,}40951$$

3- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}59049 & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}91854 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}99144 & 2 \leq x < 3 \\ 0{,}99954 & 3 \leq x < 4 \\ 0{,}99999 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

4- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري بطريقتين مختلفتين:

أ- الأمل الرياضي:

- الطريقة الأولى:

X	0	1	2	3	4	5	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001	1
$x_i p_i$	0	0,32805	0,1458	0,0243	0,0018	0,00005	0,5

$$E(X) = \sum x_i p_i = 0,5$$

- الطريقة الثانية: $E(X) = np = 5(0,1) = 0,5$

ب- الإنحراف المعياري:

- الطريقة الأولى:

X	0	1	2	3	4	5	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001	1
$x_i^2 p_i$	0	0,32805	0,2916	0,0729	0,0072	0,00025	0,7

$$\delta(X) = \sqrt{E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 0,7$$

- $$\delta(X) = \sqrt{0,7 - (0,5)^2} = 0,67$$

- الطريقة الثانية: $\delta(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{5(0,1)(0,9)} = 0,67$

<u>حل التمرين الثاني:</u>

1- القانون الاحتمالي لـ X:

بما أن الاختيار يتم دون تحديد الوظائف (لا يوجد ترتيب)، وبدون تكرار لأن (الاختيار دون إرجاع)، فإن X تتبع قانون فوق الهندسي، أي: $X \to H(N, n, p)$

حيث: $N = 12$ و $N_1 = 4$ و $N_2 = 8$ و $n = 3$ و $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ أي: $X \to H\left(12\ ;\ 3\ ;\ \frac{1}{3}\right)$

$$P(X = x) = \frac{C_4^x C_8^{3-x}}{C_{12}^3}$$

2- تحديد التوزيع الاحتمالي لـ X:

- مجال التعريف : $X \in \Omega_X = [0, 1, 2,3]$

-حساب الاحتمالات:

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_8^2}{C_{12}^3} = \frac{112}{220} \qquad P(X = 0) = \frac{C_4^0 C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{56}{220}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3 C_8^0}{C_{12}^3} = \frac{4}{220} \qquad P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_8^1}{C_{12}^3} = \frac{48}{220}$$

X	0	1	2	3	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	56 /220	112 /220	48/220	4/220	1

3- التأكد أنه فعلا توزيع احتمالي:

بما أن $\sum P(X=x_i)=1$ فإن هذا التوزيع هوتوزيع احتمالي.

4- حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري بطريقتين مختلفتين:

أ- التوقع الرياضي:

- الطريقة الأولى:

X	0	1	2	3	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	56 /220	112 /220	48/220	4/220	1
x_ip_i	0	112/220	96/220	12/220	1

$$E(X)=\sum x_ip_i=1$$

- الطريقة الثانية: $E(X)=np=3\left(\frac{1}{3}\right)=1$

ب- الإنحراف المعياري:

- الطريقة الأولى:

X	0	1	2	3	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	56 /220	112 /220	48/220	4/220	1
$x_i^2p_i$	0	112/220	192/220	36/220	340/220

$$\delta(X)=\sqrt{E(X^2)-\left(E(X)\right)^2}$$

$$E(X^2)=\sum x_i^2p_i=\frac{340}{220}=\frac{17}{11}$$

- $$\delta(X)=\sqrt{\frac{17}{11}-(1)^2}=0,74$$

الطريقة الثانية: $\delta(X)=\sqrt{npq\left(\frac{N-n}{n-1}\right)}=\sqrt{3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{12-3}{12-1}\right)}=0,74$

حل التمرين الثالث:

1- تحديد مجال التعريف والتوزيع الاحتمالي:

بما أن $\lambda=0,5$ ، نلاحظ من جدول بواسون في الملحق رقم 2: $X\in\Omega=[0,1,2,3,4,5]$

- التوزيع الاحتمالي:

X	0	1	2	3	4	5	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	1

2- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري ثم استنتاج: $E(0,3X+0,2)$ ، $V(0,3X+0,2)$

- الأمل الرياضي: $E(X)=\lambda\Rightarrow E(X)=0,5$

- الإنحراف المعياري: $V(X)=\lambda\Rightarrow V(X)=1$

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$$

$$* E(0{,}3X + 0{,}2) = 0{,}3E(X) + 0{,}2 = 0{,}3(0{,}5) + 0{,}2 = 0{,}35$$

$$* V(0{,}3X + 0{,}2) = (0{,}3)^2 V(X) = 0{,}09(1) = 0{,}09$$

3- حساب الاحتمالات:

$$* P(X = 3) = e^{-0{,}5}.\frac{(0{,}5)^3}{3!} = 0{,}0126$$

$$* P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0{,}0758 + 0{,}3033 + 0{,}6065) = 0{,}0144$$

$$* P(1 < X \leq 4) = P(X = 4) - P(X = 3) + P(X = 2) = 0{,}09$$

4- أقصى قيمة ممكنة لــ X:

من خلال جدول توزيع بواسون – الملحق رقم 2 – نلاحظ أنه بعد القيمة $X = 5$ تصبح الاحتمالات تساوي الصفر، وبالتالي فإن أقصى قيمة لعدد مرات تعطل الجهاز الكهربائي في الأسبوع هو 5 مرات.

<u>حل التمرين الرابع:</u>

1- طبيعة X مع التعليل:

X: عدد النساء من بين الخمسة أشخاص الذين تم اختيارهم، **هو** متغير عشوائي **لأننا** لا نعلم مسبقا العضو الذي سوف يتم اختياره من بين 10 أعضاء.

2- القانون الاحتمالي لـ: X مع التعليل:

بما أن الأفلام مختلفة – الترتيب مهم – ويمكن لنفس الشخص أن يمثل في أكثر من فيلم – التكرار ممكن – فإن القانون الاحتمالي هو ثنائي الحدين، أي: $X \to B(n\ ,p)$

حيث $n = 5$ و $p = \frac{4}{10} = 0{,}4$ لأن المتغير العشوائي يمثل عدد النساء، أي: $X \to B(5\ ;\ 0{,}4)$

مجال التعريف: $n = 5 \quad \Rightarrow X \in \Omega = [0, 1, \dots, 5]$

$$P(X = x) = C_5^x (0{,}4)^x (0{,}6)^{5-x}$$

3- تعيين التوزيع الاحتمالي لـ: X:

التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يمثل بجدول، نرفق فيه كل قيمة باحتمالها، التي تحسب من خلال قانون ثنائي الحدين.

$$P(X = 0) = C_5^0 (0{,}4)^0 (0{,}6)^{5-0} = 0{,}0778$$

$$P(X = 1) = C_5^1 (0{,}4)^1 (0{,}6)^{5-1} = 0{,}2592$$

$$P(X = 2) = C_5^2 (0{,}4)^2 (0{,}6)^{5-2} = 0{,}3456$$

$$P(X = 3) = C_5^3 (0{,}4)^3 (0{,}6)^{5-3} = 0{,}2304$$

$$P(X = 4) = C_5^4 (0{,}4)^4 (0{,}6)^{5-4} = 0{,}0768$$

$$P(X = 5) = C_5^5 (0{,}4)^5 (0{,}6)^{5-5} = 0{,}0102$$

كما يمكن الحصول على هذه الاحتمالات من خلال جدول توزيع ثنائي الحدين، المرفق بالملحق رقم 1.

وعليه يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي التالي:

X	0	1	2	3	4	5	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	0,0778	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,0102	1

4- حساب العدد المتوسط للنساء والانحراف المعياري:

- العدد المتوسط للنساء: $E(X) = np = 5(0,4) = 2$

- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{5(0,4)(0,6)} = 1,095$

5- احتمال أن يكون عدد النساء من بين الخمسة الذين تم اختيارهم:

- يساوي 0: $* P(X = 0) = C_5^0(0,4)^0(0,6)^{5-0} = 0,0778$

- أقل من 3: $* P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,6826$

- يفوق أو يساوي 2: $* P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) = 0,663$

- محصورا بين 2 و 5: $* P(2 < X < 5) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,3072$

<u>حل التمرين الخامس:</u>

1- تعريف المتغير العشوائي ونوعه في هذه المسألة:

- المتغير العشوائي المدروس في هذه المسألة يمثل عدد حوادث المرور التي تقع في ولاية المسيلة يوميا.

- نوعه: متغير عشوائي منفصل (متقطع).

2- تعيين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير:

بالاعتماد على جدول توزيع بواسون عند $\lambda = 6$ ، نجد:

X	0	1	2	... ...	18	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	0,0025	0,0149	0,0446	... ...	0,0001	1

3- حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي: $E(X) = \lambda \Rightarrow E(X) = 3$

- الإنحراف المعياري: $V(X) = \lambda \Rightarrow V(X) = 3$

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3} = 1,73$$

4- احتمال أن يقع في اليومين المقبلين بولاية المسيلة:

بما أن متوسط عدد حوادث المرور بولاية المسيلة في اليوم هو 3، فإن المتوسط في يومين هو: $\lambda^* = 3 \times 2 = 6$

وبالتالي فإن احتمال أن يقع في اليومين المقبلين بولاية المسيلة:

- ثلاث حوادث مرور: $* P(X = 3) = e^{-6} \times \frac{6^3}{3!} = 0,089$

- سبعة حوادث مرور: $* P(X = 7) = e^{-6} \times \frac{6^7}{7!} = 0,138$

- أكثر من ستة حوادث: $* P(X > 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,4457 = 0,5543$

5- أقصى عدد ممكن لحوادث المرور:

من خلال جدول توزيع بواسون – الملحق رقم 2 – نلاحظ أنه بعد القيمة $X = 12$ تصبح الاحتمالات تساوي الصفر، وبالتالي فإن أقصى قيمة لعدد حوادث المرور في اليوم بولاية المسيلة هو 12 حادث.

<u>حل التمرين السادس:</u>

1- القانون الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي:

بما أن التدريجات متماثلة، فإن احتمالات توقف المؤشر عندها متساوي، وبالتالي فإن هذا المتغير يخضع للتوزيع المنتظم، أي: $X \to U(p)$، حيث أن: $p = \frac{1}{7}$، أي: $X \to U\left(\frac{1}{7}\right)$

$$P(X = x) = \frac{1}{7}$$

2- تعيين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير:

X	1	2	3	4	5	6	7	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

3- حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$

- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{7^2-1}{12}} = 2$

4- احتمال أن يتوقف المؤشر عند:

- الرقم 4: $P(X = 4) = \frac{1}{7} = 0,143$

- رقم يقل عن 3: $P(X < 3) = P(X \le 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7} = 0,285$

<u>حل التمرين السابع:</u>

1- القانون الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي:

بما أن الاحتمال ثابت ويساوي $\frac{1}{n}$، فإن هذا المتغير يخضع للتوزيع المنتظم، أي: $X \to U(p)$،

حيث أن: $p = \frac{1}{n}$، أي: $X \to U\left(\frac{1}{n}\right)$

$$P(X = x) = \frac{1}{n}$$

2- إيجاد قيمة n علما أن الانحراف المعياري يساوي $\sqrt{2}$. ثم إيجاد الأمل الرياضي:

$$\delta(X) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n^2-1}{12}} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2-1}{12} = 2$$

$$\Leftrightarrow n = 5$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

حل التمرين الثامن:

1- احتمال ظهور رقم من مضاعفات 3 وذلك أربعة مرات:

احتمال الحصول على رقم من مضاعفات 3 ثابت في كل رمية ويساوي $\frac{1}{3}$، وبالتالي نستخدم قانون ثنائي الحدين، أي: $X \rightarrow B(n\ ,p)$، حيث $n = 6$ و $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$، أي: $X \rightarrow B\left(6\ ;\frac{1}{3}\right)$

وبالتالي فإن احتمال ظهور رقم من مضاعفات 3 وذلك أربعة مرات، هو:

$$* P(X = 4) = C_6^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{6-4} = 0{,}082$$

2- احتمال ظهور رقم من مضاعفات 3 بعد الرمية الرابعة:

بما أننا بصدد الحصول على أول نجاح بعد الرمية الرابعة لتجربة برنولية، فإننا أمام القانون الهندسي، حيث X: تمثل عدد الرميات للحصول على رقم من مضاعفات 3.

وبالتالي فإن احتمال ظهور رقم من مضاعفات 3 بعد الرمية الرابعة، هو:

$$* P(X = 4) = q^{x-1}p = \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = 0{,}099$$

3- احتمال ظهور رقم من مضاعفات 3 بعد الرمية الرابعة على الأكثر:

بما أننا بصدد الحصول على أول نجاح بعد الرمية الرابعة على الأكثر لتجربة برنولية، فإننا أمام القانون الهندسي، حيث X: تمثل عدد الرميات للحصول على رقم من مضاعفات 3.

وبالتالي فإن احتمال ظهور رقم من مضاعفات 3 بعد الرمية الرابعة على الأكثر، هو:

$$* P(X \leq 4) = 1 - P(X \geq 5) = 1 - \big(P(X = 5) + P(X = 6)\big)$$

$$= 1 - \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{5-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{6-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 1 - (0{,}066 + 0{,}044) = 0{,}89$$

حل التمرين التاسع:

بما أن المجتمع غير محدود ونكرره 5 مرات ($n = 5$) فالقانون المناسب هو ثنائي الحدين أي: $X \rightarrow B(n\ ,p)$

حيث $n = 5$ و $p = 0{,}05$ لأن المتغير العشوائي يمثل عدد القطع المعيبة، أي: $X \rightarrow B(5\ ;\ 0{,}05)$

مجال التعريف: $n = 5 \quad \Rightarrow X \in \Omega = [0, 1, \ldots, 5]$

$$P(X = x) = C_5^x (0{,}05)^x (0{,}95)^{5-x}$$

1- احتمال أن تكون قطعة فاسدة في العينة:

$$* P(X = 1) = C_5^1 (0{,}05)^1 (0{,}95)^{5-1} = 0{,}204$$

2-احتمال أن تكون قطعتان فاسدتان في العينة:

$$* P(X = 2) = C_5^2 (0{,}05)^2 (0{,}95)^{5-2} = 0{,}021$$

3- احتمال أن تكون قطعتان فاسدتان على الأقل:

$$* P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \big(P(X = 5) + P(X = 6)\big)$$

$$= 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big)$$

$$= 1 - (C_5^0 (0{,}05)^0 (0{,}95)^{5-0} + C_5^1 (0{,}05)^1 (0{,}95)^{5-1})$$
$$= 1 - (0{,}774 + 0{,}204)$$
$$= 0{,}022$$

حل التمرين العاشر:

بما أن عدد المكالمات التي يتلقاها مركز استقبال المكالمات الهاتفية يخضع لقانون بواسون، بمتوسط 300 مكالمة في الساعة (60 دقيقة)، أي: $X \to P(\lambda = 300)$، فإن المتوسط خلال دقيقتين λ^* ، يحسب الطريقة التالية:

$$\begin{cases} \lambda = 300 \to 60\ min \\ \lambda^* = \cdots \to 2\ min \end{cases} \Leftrightarrow \quad \lambda^* = \frac{300\times 2}{60} = 10$$

حساب احتمال خلال دقيقتين:

1- أن يتلقى المركز ثلاث مكالمات فقط:

$$* P(X = 3) = e^{-10}.\frac{(10)^3}{3!} = 0{,}0076$$

2- أن يتلقى المركز مكالمة واحدة:

$$* P(X = 1) = e^{-10}.\frac{(10)^1}{1!} = 0{,}00045$$

3- أن يتلقى المركز مكالمتين على الأكثر:

$$* P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 0)$$
$$= e^{-10}.\frac{(10)^0}{0!} + e^{-10}.\frac{(10)^1}{1!} + e^{-10}.\frac{(10)^2}{2!}$$
$$= 0{,}000045 + 0{,}00045 + 0{,}0023$$
$$= 0{,}0028$$

حل التمرين الحادي عشر:

بما أن ترتيب الأجهزة العشرة المباعة غير مهم، وبدون تكرار لأنه (لا يمكن بيع جهاز تلفاز واحد أكثر من مرة)، فإن X الذي يمثل عدد أجهزة التلفاز التي تبقى صالحة خلال فترة الضمان ولا ترجع، يتبع قانون فوق الهندسي، أي:

$$X \to H(N, n\ , p)$$

$N = 20$ و $N_1 = 15$ و $N_2 = 5$ و $n = 4$ و $p = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ أي: $X \to H\left(20\ ;\ 4\ ;\ \frac{3}{4}\right)$

$$P(X = x) = \frac{C_{15}^x C_5^{4-x}}{C_{20}^4}$$

1- احتمال أن لا يتم ارجاع خلال فترة الضمان:

أ- كل الأجهزة المباعة، مع شرح النتيجة:

$$* P(X = 4) = \frac{C_{15}^4 C_5^{4-4}}{C_{20}^4} = \frac{C_{15}^4 C_5^0}{C_{20}^4} = \frac{1365}{4845} = 0{,}2817$$

الشرح: من بين 4845 عينة ممكنة من أجهزة التلفاز المكونة من 4 أجهزة مباعة، هناك 1365 عينة كل الأجهزة فيها صالحة، أي لا يتم ارجاعها جميعا خلال فترة الضمان.

ب- على الأقل ثلاثة أجهزة مباعة، مع شرح النتيجة:

$$* P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4)$$
$$= \frac{C_{15}^{3} C_{5}^{4-3}}{C_{20}^{4}} + \frac{C_{15}^{4} C_{5}^{4-4}}{C_{20}^{4}}$$
$$= \frac{455}{4845} + \frac{1365}{4845}$$
$$= \frac{1820}{4845} = 0{,}3756$$

الشرح: من بين 4845 عينة ممكنة من أجهزة التلفاز المكونة من 4 أجهزة مباعة، توجد 1820 عينة فيها ثلاثة أجهزة على الأقل صالحة، أي لا يتم ارجاعها خلال فترة الضمان.

2- احتمال أن يتم ارجاع جميع الأجهزة المباعة، مع شرح النتيجة:

$$* P(X = 0) = \frac{C_{15}^{0} C_{5}^{4-0}}{C_{20}^{4}} = \frac{C_{15}^{0} C_{5}^{4}}{C_{20}^{4}} = \frac{5}{4845} = 0{,}001$$

الشرح: من بين 4845 عينة ممكنة من أجهزة التلفاز المكونة من 4 أجهزة مباعة، هناك 5 عينات كل الأجهزة فيها غير صالحة، أي يتم ارجاعها جميعا خلال فترة الضمان.

3- حساب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

أ- التوقع الرياضي: $E(X) = np = 4\left(\frac{3}{4}\right) = 3$

ب- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{npq\left(\frac{N-n}{n-1}\right)} = \sqrt{4\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{20-4}{20-1}\right)} = 0{,}79$

<u>حل التمرين الثاني عشر:</u>

ليكن لدينا X متغير عشوائي، معرف بالقانون الاحتمالي التالي: $\boldsymbol{P(X = x) = \frac{4^x}{x!} e^{-4}}$

1- أ- نوع المتغير العشوائي X: متغير عشوائي منفصل (متقطع).

ب- القانون الاحتمالي الذي يتبعه: قانون بواسون $Loi\ de\ Poisson$

2- إذا كان المتغير العشوائي X المعرف بالقانون الاحتمالي السابق، يمثل عدد مرات تعطل آلة صناعية في مصنع معين خلال سنة.

أ- معلمة هذا المتغير: متوسط عدد مرات تعطل آلة صناعية في المصنع هو 4 مرات، أي: $\lambda = 4$

ب- حساب الاحتمالات التالية:

$$* P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 1 - \left(P(X = 0) + P(X = 1)\right)$$
$$= 1 - \left(\frac{4^0}{0!} e^{-4} + \frac{4^1}{1!} e^{-4}\right)$$
$$= 1 - (e^{-4} + 4e^{-4}) = 1 - (5e^{-4}) = 1 - (5(2{,}718)^{-4}) = 0{,}9083$$

$$* P(2 \leq X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{4^2}{2!} e^{-4} + \frac{4^3}{3!} e^{-4}$$

$$= 8e^{-4} + \frac{32}{3}e^{-4} = \frac{56}{3}e^{-4} = \frac{56}{3}(2{,}718)^{-4} = 0{,}342$$

$$* F(3) = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X + 3)$$

$$= 0{,}0916 + 0{,}342 = 0{,}4336$$

ج- حساب قيمة كلا من:

أ- التوقع الرياضي: $E(X) = \lambda = 4$

ب- التباين: $V(X) = \lambda = 4$

ج- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4} = 2$

3- إذا كان 80% من منتجات هذه الآلة سليما، وسحبنا 7 وحدات من الإنتاج الكلي لهذه الآلة.

أ- احتمال أن يكون بها ثلاث وحدات معيبة:

$$* P(X = 3) = C_7^3(0{,}2)^3(0{,}8)^{7-3} = \frac{7!}{3!(7-3)!}(0{,}2)^3(0.8)^4 = 35(0{,}2)^3(0.8)^4 = 0{,}115$$

ب- احتمال أن نحصل على وحدة معيبة بعد سحبتين على الأكثر:

$$* P(X \le 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= (0{,}2)^{1-1}(0{,}8) + (0{,}2)^{2-1}(0{,}8) = 0{,}96$$

ج- حساب العدد المتوقع للوحدات المعيبة، والانحراف المعياري:

- توقع التوزيع (الوسط الحسابي): $E(X) = n.p = 7.(0{,}2) = 1{,}4$

- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{7.(0{,}2).(0{,}8)} = \sqrt{1{,}12} = 1{,}058$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الهزات الأرضية في السنة، حيث $X \to \lambda(3)$.

1- حدد مجال التعريف والتوزيع الاحتمالي، ومثله بيانيا.

2- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.

3- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X = 3)$، $P(X > 2)$، $P(1 < X \leq 4)$، $F(2)$.

4- ما هي أقصى قيمة ممكنة لـــ X؟

التمرين الثاني:

تفيد احصائيات مصلحة الجودة بأحد المؤسسات، أن احتمال إنتاج علب طماطم معيبة تقدر بـ 5%، نختار عشوائيا عينة من 5 علب منتجة بالمصنع، وليكن X: عدد العلب المعيبة.

1- ما هو القانون الاحتمالي لـ X. حدد التوزيع الاحتمالي.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$، ومثلها بيانيا.

3- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X = 2)$، $P(X = 5)$، $P(X < 3)$، $P(X \geq 4)$.

4- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري بطريقتين مختلفتين.

التمرين الثالث:

ليكن لدينا X متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات المعيبة لمنتج معين بأحد المؤسسات، معرف بالقانون الاحتمالي التالي: $\boldsymbol{P(X = x) = C_5^x (0,8)^x q^{5-x}}$

1- ما هو نوع المتغير العشوائي X؟ وما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه؟

2- حدد معالم هذا المتغير.

3- أوجد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي، ومثله بيانيا.

4- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$، ومثلها بيانيا.

5- أحسب الاحتمالين التاليين: $P(X > 3)$ ، $P(1 \leq X < 4)$.

6- ما احتمال الحصول على أول وحدة معيبة بعد السحبة الثالثة على الأكثر.

7- أحسب قيمة كلا من: التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري ثم استنتج: $E(\sqrt{2}X + \sqrt{7})$ و $V(\sqrt{2}X + \sqrt{7})$

التمرين الرابع:

تفيد تقارير أحد المستشفيات أنه خلال إحصائيات السنوات الماضية يقدر العدد المتوسط للوفيات التي تقع في ولاية المسيلة أسبوعيا بـ: 7 وفيات، إذا علم أن هذه الظاهرة تتبع قانون بواسون *Poisson*.

1- عرف المتغير العشوائي ونوعه في هذه المسألة.

2- عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.

3- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

4- ما هو احتمال أن يقع في ثلاثة أيام بولاية المسيلة:

- ثلاث وفيات. - سبعة وفيات. - أكثر من ستة وفيات.

5- ما هو أقصى عدد ممكن للوفيات بالولاية؟

التمرين الخامس:

باعت أحد المؤسسات 10 أجهزة تلفاز معها شهادة ضمان سنتين، وهي تعلم بأن احتمال بقاء الجهاز صالحا خلال فترة الضمان هو $\frac{2}{3}$.

1- أوجد احتمال أن يبقى صالحا خلال فترة الضمان:

أ- كل الأجهزة المباعة، مع شرح النتيجة،

ب- على الأقل ثلاثة أجهزة مباعة، مع شرح النتيجة،

3- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين السادس:

نرمي قطعة نرد متوازنة مرة واحدة. نهتم بالرقم الذي يظهر على سطح قطعة النرد.

1- ما هو القانون الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي؟

2- عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.

3- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$، ومثلها بيانيا.

4- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

5- ما هو احتمال أن يظهر على سطح قطعة النرد: - الرقم 2. – رقم يقل عن 4.

التمرين السابع:

يتكون ناد علمي من 5 ذكور و4 إناث، نختار من بينهم بطريقة عشوائية 3 أشخاص للمشاركة في تظاهرة علمية، ليكن X: عدد الرجال ضمن الوفد المشارك من بين 3.

1- ما هو القانون الاحتمالي لـ X؟ برر ذلك.

2- حدد التوزيع الاحتمالي لـ X (مجال التعريف، حساب الاحتمالات)، ومثله بيانيا.

3- تأكد أنه فعلا توزيع احتمالي.

4- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري، بطريقتين مختلفتين.

التمرين الثامن:

ليكن المتغير العشوائي X توزيعه الاحتمالي يخضع للقانون التالي: $P(X=x)=\frac{1}{n}$ ، حيث: $X=1,2,\dots,n$

1- ما هو القانون الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي؟

2- أوجد قيمة n علما أن التوقع الرياضي يساوي 4. ثم أوجد التباين والانحراف المعياري.

3- مثل بيانيا هذا التوزيع.

التمرين التاسع:

كيس يحتوي على 10 كريات، 3 حمراء 4 بيضاء و3 سوداء، نسحب عشوائيا 5 كريات الواحدة تلوى الأخرى مع الارجاع. نهتم بعدد الكريات البيضاء المسحوبة.

1- ما احتمال سحب كريتين تحملان اللون الأبيض.

2- ما احتمال الحصول كرية بيضاء بعد السحبة الثالثة.

3- ما احتمال الحصول على كرية بيضاء بعد السحبة الثانية على الأقل.

التمرين العاشر:

ناد به 10 أعضاء، 6 رجال و4 نساء، نريد أن نختار عشوائيا 3 منهم للتمثيل في ثلاثة أفلام، ليكن X: عدد النساء من بين الثلاثة أشخاص الذين تم اختيارهم.

1- ما هي طبيعة X؟ علل ذلك.

2- ما هو القانون الاحتمالي لـ: X؟ علل ذلك.

3- عين التوزيع الاحتمالي لـ: X .

4- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$، ومثلها بيانيا.

5- أحسب العدد المتوسط للنساء والانحراف المعياري؟

6- ما هو احتمال أن يكون عدد النساء من بين الثلاثة الذين تم اختيارهم:

- يساوي 0. - أقل من 3. - يفوق أو يساوي 2. - محصورا بين 1 و 3 بما في ذلك 3

المحور الثاني

أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

نتطرق من خلال هذ المحور إلى العناصر التالية:

- تمهيد

أولا: تذكير بأهم خصائص التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل؛

ثانيا: التوزيع المنتظم؛

ثالثا: التوزيع الأسي؛

رابعا: توزيع قاما؛

خامسا: توزيع بيتا؛

سادسا: التوزيع الطبيعي؛

سابعا: توزيع ستودنت؛

ثامنا: توزيع كاي تربيع؛

تاسعا: توزيع فيشر؛

عاشرا: التقريب بين التوزيعات الاحتمالية.

- تمارين محلولة

- تمارين مقترحة

تمهيد:

تستخدم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة، عند دراسة متغير عشوائي متصل، أي القابل للتجزئة، مثل أطول الطلبة، أوزان علب الطماطم المنتجة بمصنع معين، المسافة المقطوعة من طرف سيارة، ... إلخ، ومن أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي سنتعرض إليها من خلال هذا المحور، التوزيع المنتظم، التوزيع الأسي، توزيع قاما، توزيع بيتا، التوزيع الطبيعي، توزيع ستودنت، توزيع كاي تربيع، توزيع فيشر، بالإضافة للتطرق للتقريب بين التوزيعات الاحتمالية.

أولا: تذكير بأهم خصائص التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل:

1- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل وتمثيله البياني:

هو مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي المستمر والاحتمالات الموافقة لها، لكن ما يلاحظ على هذا التوزيع أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، وبالتالي فإن احتمال أي قيمة يؤول إلى الصفر، أي أنه لا يمكننا حساب احتمال قيمة بعينها في حالة المتغير العشوائي المستمر، بل نستطيع فقط حساب احتمال مجال تنتمي إليه قيمة معينة، ولحساب احتمال هذا المجال نستخدم دالة الكثافة الاحتمالية، ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال، حيث:

$$f(x)=\begin{cases} f(x) & x\in[a-b] \\ 0 & x\notin[a-b]\end{cases}$$

نقول عن دالة $f(x)$ أنها دالة كثافة احتمالية إذا حققت الشرطين التاليين:

$$f(x)=\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1\end{cases}$$

يتبين من خلال الشرطين أن منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لا يمكن أن ينزل أسفل محور المتغير العشوائي، كما أن المساحة الاجمالية بين المنحنى والمحور الأفقر تساوي الواحد.

كما يتم تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية بمنحنى سلس إذا كانت دالة الكثافة غير خطية، أما إذا كانت خطية فإنها تمثل بخط مستقيم.

2- دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل وتمثيلها البياني:

هي دالة عددية نرمز لها بـ: $F(x)$، وهي معرفة كالتالي:

$$\boxed{\boldsymbol{F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}}$$

لدالة التوزيع الاحتمالية أهمية كبيرة بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر، حيث أننا نهتم في هذه الحالة باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأسهل التعويض في دالة التوزيع الاحتمالية بدلا من حساب التكامل في كل مرة، يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض أن a و b نقطتان من مجال تعريف X، حيث $b>a$، لحساب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال $]a-b]$، نطبق القاعدة:

$$P(a<X\leq b)=P(X\leq b)-P(X\leq a)=F(b)-F(a)$$

بما أن الاحتمال عند النقطة في المتغير العشوائي المستمر يساوي الصفر، فإننا نستنتج من ذلك أن: الاشارتين $\leq$ و $<$ متكافئتان، وبالتالي:

$$P(a<X\leq b)=P(a\leq X<b)=P(a\leq X\leq b)=P(a<X<b)=F(b)-F(a)$$

كما يتم تمثيل دالة التوزيع الاحتمالية بمنحنى سلس إذا كانت دالة التوزيع غير خطية، أما إذا كانت خطية فإنها تمثل بخط مستقيم.

3- المميزات العددية للمتغير العشوائي المتصل:

أ- التوقع الرياضي:

في حالة المتغير العشوائي المتصل، يعطى التوقع الرياضي بالصيغة التالية:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

ب- التباين والانحراف المعياري:

يعرف التباين $V(X)$ على أنه الأمل الرياضي لمربع الفرق بين المتغير العشوائي X وأمله الرياضي $E(X)$،

أي:
$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

وفي حالة المتغير العشوائي المتصل، يعطى التباين بالصيغة التالية:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - E(X)\right)^2 f(x)\, dx$$

كما يعطى الانحراف المعياري بالصيغة التالية:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - E(X)\right)^2 f(x)\, dx$$

توجد صيغة مبسطة للتباين والانحراف المعياري، هي:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$\delta(X) = \sqrt{E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$$

مثال1: ليكن X متغير عشوائي متصل معرف على المجال $[0-2]$ أي $X \in \Omega = [0-2]$، لتكن دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير معرفة بالصيغة التالية: $f(x) = \frac{1}{2}x$

1- أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمالية، ومثلها بيانيا.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية ومثلها بيانيا.

3- أحسب كلا من: $P(X \leq 0{,}25)$، $E(X)$، $V(X)$، $\delta(Z)$، $E(2{,}4X - 1{,}4)$، $V(2{,}4X - 1{,}4)$.

الحل:

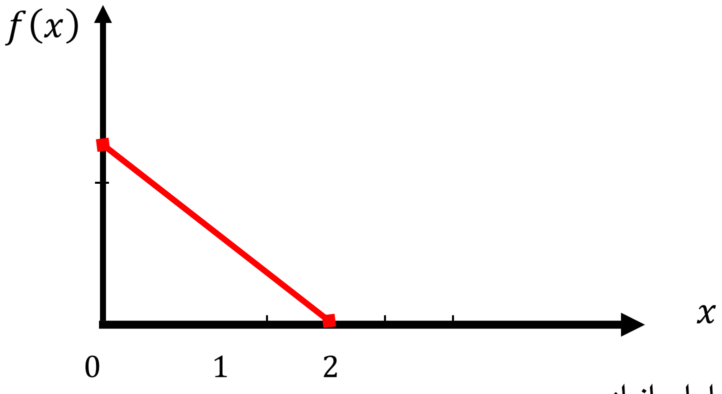
1- إثبات أن الدالة f هي دالة كثافة احتمالية، وتمثيلها بيانيا:

لدينا:
$$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x\, dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{4}(2^2 - 0^2) = 1$$

ولدينا من جهة أخرى $f(x) \geq 0$ ، وبالتالي فإن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية.

- التمثيل البياني:

يتم تمثيل دالة التوزيع الاحتمالية بخط مستقيم ، لأن الدالة خطية.

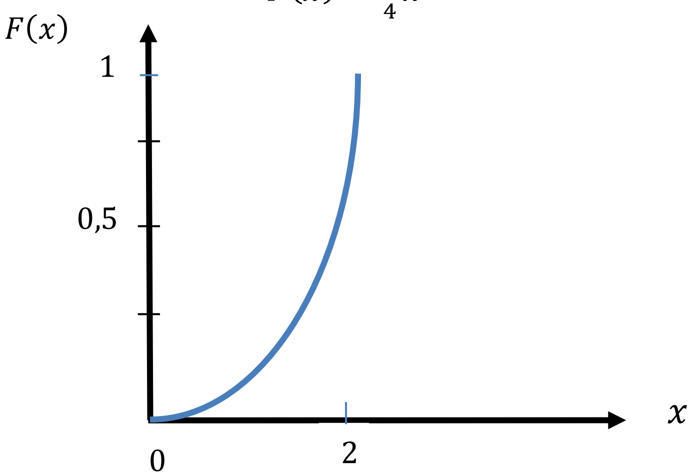


2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية وتمثيلها بيانيا:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{2}x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^x = \frac{1}{4}x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2$$

- التمثيل البياني:



3- حساب كلا من: $P(X \leq 0,25)$ ، $E(X)$، $V(X)$، $\delta(Z)$، $E(2,4X-1,4)$، $V(2,4X-1,4)$.

- حساب $P(X \leq 0,25)$:

$$P(X \leq 0,25) = F(0,25) = \frac{1}{4}(0,25)^2 = 0,0156$$

- حساب $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^2 x\,f(x)\,dx = \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x\right)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

- حساب $V(X)$:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\,f(x)\,dx = \int_0^2 x^2\left(\frac{1}{2}x\right)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^3\,dx = \left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^2 = \frac{16}{8} = 2$$

$$V(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

- حساب $\delta(X)$:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,47$$

- حساب $E(2,4X-1,4)$:

$$E(2,4X-1,4) = 2,4E(X) - 1,4 = 2,4\left(\frac{4}{3}\right) = 1,28$$

- حساب $V(2,4X-1,4)$:

$$V(2,4X-1,4) = (2,4)^2V(X) = 5,76\left(\frac{2}{9}\right) - 1,4 = 1,8$$

ثانيا: التوزيع المنتظم

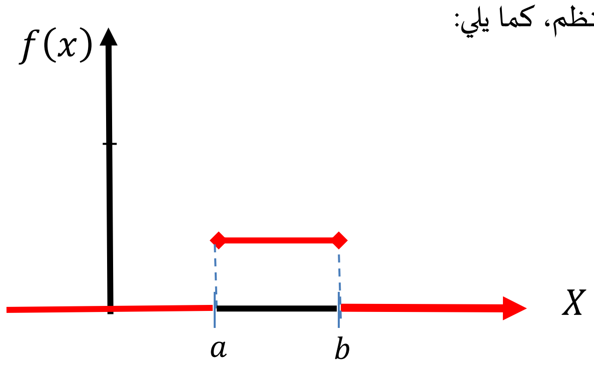
1- دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم:

نقول أن متغير عشوائي X المعرف على المجال $[a-b]$، يتبع التوزيع المنتظم، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a-b] \\ 0 & x \notin [a-b] \end{cases}$$

2- التمثيل البياني:

تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم، كما يلي:



مثال2: إذا كان أدنى وأقصى زمن للتأخر المستغرق لوصول موظفي إحدى الشركات إلى مكان عملهم، هو على التوالي 5 دقائق و 15 دقيقة، وأن زمن تأخرهم يتبع التوزيع المنتظم.

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير، ثم أثبت أنها دالة كثافة احتمالية، ومثلها بيانيا.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$.

الحل:

1-أ- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15-5} & x \in [5-15] \\ 0 & x \notin [5-15] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x \in [5-15] \\ 0 & x \notin [5-15] \end{cases}$$

ب- إثبات أنها دالة كثافة احتمالية:

لدينا:

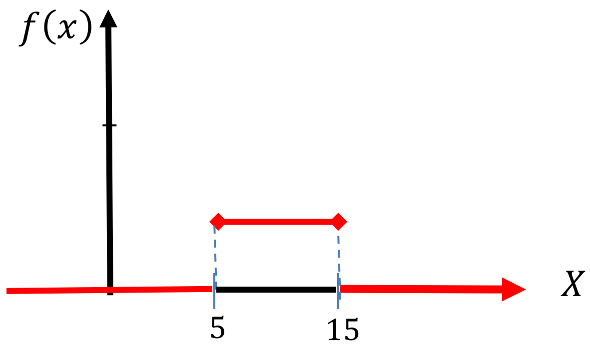
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{5} f(x)\,dx + \int_{5}^{15} f(x)\,dx + \int_{15}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{5} (0)\,dx + \int_{5}^{15} \frac{1}{10}\,dx + \int_{15}^{+\infty} (0)\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{1}{10}x\right]_5^{15} + 0 = \frac{15-5}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

ولدينا من جهة أخرى $f(x) > 0$ ، وبالتالي فإن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية.

ج- التمثيل البياني:



2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$:

- إذا كان $x < 5$، فإن:

$$* F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{x} (0)\, dx = 0$$

- إذا كان $5 \leq x \leq 15$، فإن:

$$* F(x) = \int_{-\infty}^{5} f(x)\, dx + \int_{5}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{5} (0)\, dx + \int_{5}^{x} \frac{1}{10}\, dx$$

$$= 0 + \left[\frac{1}{10}x\right]_5^x = \frac{x-5}{10} = \frac{1}{10}x - \frac{1}{2}$$

- إذا كان $x > 15$، فإن:

$$*F(x) = \int_{-\infty}^{5} f(x)\, dx + \int_{5}^{15} f(x)\, dx + \int_{15}^{x} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{5} (0)\, dx + \int_{5}^{15} \frac{1}{10}x\, dx + \int_{15}^{x} (0)\, dx = 0 + 1 + 0 = 1$$

وبالتالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 5 \\ \frac{1}{10}x - \frac{1}{2} & 5 \leq x \leq 15 \\ 1 & x > 15 \end{cases}$$

3- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي:

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

ب- التباين:

$$\boxed{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

ج- الانحراف المعياري:

$$\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}}$$

مثال3: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق.

الحل:

- التوقع الرياضي:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{5+15}{2} = 10$$

- التباين:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(15-5)^2}{12} = 8{,}33$$

- الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{8{,}33} = 2{,}87$$

ثالثا: التوزيع الأسي

1- دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي:

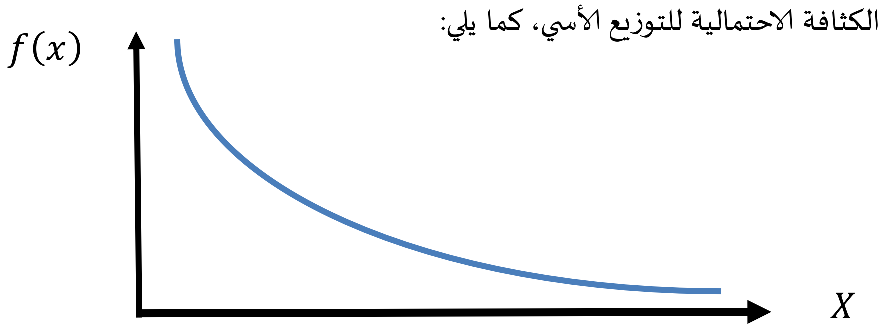
نقول أن متغير عشوائي X، يتبع التوزيع الأسي، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

حيث: θ: عدد حقيقي موجب تماما، e: مقدار ثابت ويساوي 2,71828

2- التمثيل البياني:

تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي، كما يلي:



مثال4: إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1- أثبت أنها دالة كثافة احتمالية.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$، ومثلها بيانيا.

3- أحسب احتمال أن تأخذ قيمة تفوق 2.

الحل:

1- إثبات أنها دالة كثافة احتمالية:

لدينا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\, dx$$

$$= 0 + \left[-e^{-\frac{1}{3}x}\right]_{0}^{+\infty} = -\left[e^{-\frac{1}{3}(+\infty)} - e^{-\frac{1}{3}(0)}\right] = -[0-1] = 1$$

ولدينا من جهة أخرى $f(x) > 0$ ، وبالتالي فإن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية.

2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$:

- إذا كان $x < 0$، فإن:

$$* \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{x} (0)\, dx = 0$$

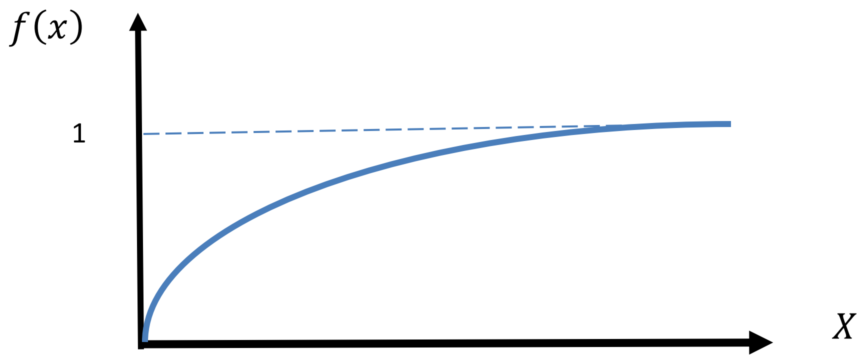
- إذا كان $x \geq 0$، فإن:

$$* \; F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} (0)\, dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\, dx$$

$$= 0 + \left[-e^{-\frac{1}{3}x}\right]_{0}^{x} = -\left[e^{-\frac{1}{3}(x)} - e^{-\frac{1}{3}(0)}\right] = -e^{-\frac{1}{3}x} + 1 = 1 - e^{-\frac{1}{3}x}$$

وبالتالي:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{3}x} & x \geq 0 \end{cases}$$

- التمثيل البياني:



3- حساب احتمال أن تأخذ قيمة تفوق 2:

$$* \, P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{3}(2)}\right) = e^{-\frac{1}{3}(2)} = 0{,}5134$$

3- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \frac{1}{\theta}}$

ب- التباين: $\boxed{V(X) = \frac{1}{\theta^2}}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\theta^2}} = \frac{1}{\theta}}$

مثال5: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق.

الحل:

- التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

- التباين: $V(X) = \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9} = 3$

رابعا: توزيع قاما

1- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع قاما:

نقول أن متغير عشوائي X، يتبع توزيع قاما، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

حيث: $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ ، e: مقدار ثابت ويساوي 2,71828

ونكتب: $X \to G(\alpha\ ;\ \beta)$

$\Gamma(\alpha)$ هي الدالة قاما، يمكن حسابها كما يلي:

$$* \, Pour\ \alpha > 0 : \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

$$* \, Si\ \ \alpha \in N : \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$$

$$* \, \Gamma(1) = 1 \quad , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثلا: يمكن حساب $\Gamma(5)$ ، $\Gamma(3,5)$ ، كما يلي:

$$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4 \times 3\Gamma(3) = 4 \times 3 \times 2\Gamma(2) = 4 \times 3 \times 2 \times 1\Gamma(1) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

$$\Gamma(3,5) = 2,5\Gamma(2,5) = 2,5 \times 1,5\Gamma(1,5) = 2,5 \times 1,5 \times 0,5\Gamma(0,5) = 2,5 \times 1,5 \times 0,5\sqrt{\pi} = 3,322$$

ملاحظة: إذا كان $X \to G(1\ ;\ 1)$، فإن:

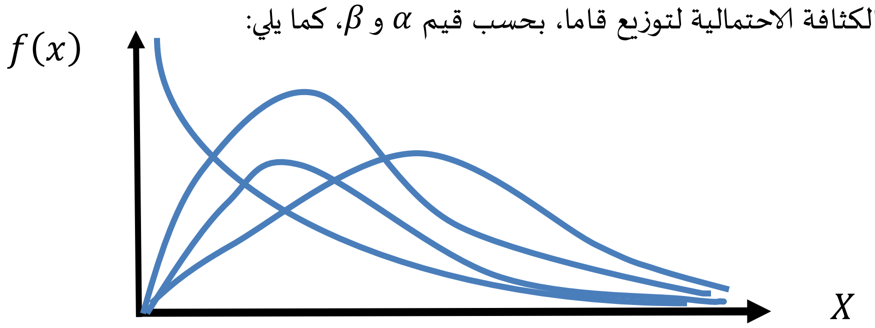
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1^{1}\Gamma(1)} x^{1-1} e^{-\frac{x}{1}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

وهي تمثل الدلة الأسية، حيث $\theta = 1$، أي أنه من خصائص توزيع قاما أن له علاقة بالتوزيع الأسي إذا كان $\alpha = \beta = 1$.

2- التمثيل البياني:

تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع قاما، بحسب قيم α و β، كما يلي:



مثال6: إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع التالي: $X \to G(2\ ;\ 2)$

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$، ثم أحسب الاحتمال: $P(2 \leq X \leq 5)$.

الحل:

1- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي:

بما أن: $X \to G(2\ ;\ 2)$، فإن:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^2 \Gamma(2)} x^{2-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$:

- إذا كان $x \leq 0$، فإن: $* \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{x} (0)\, dx = 0$

- إذا كان $x > 0$، فإن: $* \; F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} (0)\, dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}\, dx$

يمكن مكاملة المقدار: $\frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$، كما يلي: $\int \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}\, dx = (ax+b) e^{-\frac{x}{2}}$، وبالتالي:

$$\left((ax+b)e^{-\frac{x}{2}}\right)' = a e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}(ax+b)e^{-\frac{x}{2}} = \left(-\frac{1}{2}ax + a - \frac{1}{2}b\right) e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a = \frac{1}{4} \\ a - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

وبالتالي: $\int \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \left(-\frac{1}{2}x - 1\right) e^{-\frac{x}{2}}$، وبالرجوع للدالة F نجد:

$$F(x) = 0 + \left[\left(-\frac{1}{2}x - 1\right) e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^x = \left(-\frac{1}{2}x - 1\right) e^{-\frac{x}{2}} - \left(-\frac{1}{2}(0) - 1\right) e^{-\frac{0}{2}} = \left(-\frac{1}{2}x - 1\right) e^{-\frac{x}{2}} + 1$$

*

وبالتالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \left(-\frac{1}{2}x - 1\right) e^{-\frac{x}{2}} + 1 & x > 0 \end{cases}$$

أي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \end{cases}$$

- حساب الاحتمال: $P(2 \leq X \leq 5)$:

$$* \; P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = F(5) - F(2)$$

$$= \left(1 - \left(\frac{1}{2}(5) + 1\right) e^{-\frac{5}{2}}\right) - \left(1 - \left(\frac{1}{2}(2) + 1\right) e^{-\frac{2}{2}}\right)$$

$$= 2e^{-1} - \frac{7}{2} e^{-\frac{5}{2}}$$

$$= 0{,}736 - 0{,}287$$

$$= 0{,}449$$

3- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \alpha\beta}$

ب- التباين: $\boxed{V(X) = \alpha\beta^2}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\alpha\beta^2} = \beta\sqrt{\alpha}}$

مثال7: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق.

الحل:

- التوقع الرياضي: $E(X) = \alpha\beta = 2 \times 2 = 4$
- التباين: $V(X) = \alpha\beta^2 = 2 \times 2^2 = 8$
- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \beta\sqrt{\alpha} = 2\sqrt{2} = 2{,}83$

خامسا: توزيع بيتا

1- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بيتا:

نقول أن متغير عشوائي X، يتبع توزيع بيتا، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

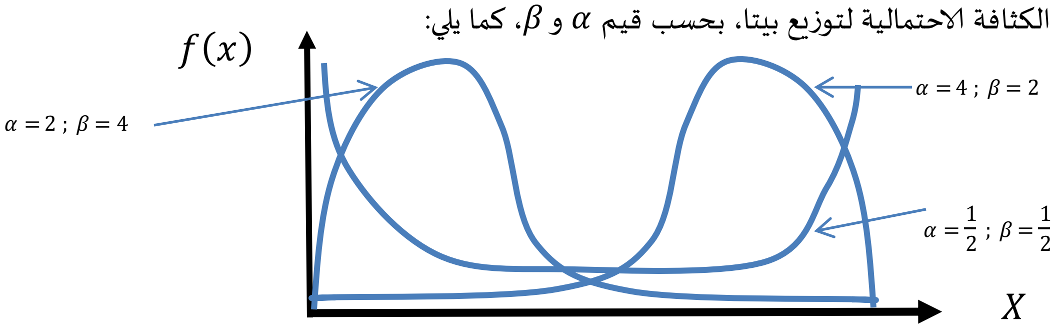
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث: $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ ،

ونكتب: $X \to B(\alpha\ ;\ \beta)$

2- التمثيل البياني:

تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بيتا، بحسب قيم α و β، كما يلي:



مثال8: إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع التالي: $X \to B(3\ ;\ 2)$

- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي، ثم أثبت أنها دالة كثافة احتمالية.

الحل:

- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي:

بما أن: $X \rightarrow B(3\ ;\ 2)$، فإن:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(3+2)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} x^{3-1}(1-x)^{3-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

- إثبات أنها دالة كثافة احتمالية:

لدينا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{1} 12x^2(1-x)dx + \int_{1}^{+\infty} (0)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{1} (12x^2 - 12x^3)dx + \int_{1}^{+\infty} (0)\,dx$$
$$= 0 + [4x^3 - 3x^4]_0^1 + 0$$
$$= 1$$

ولدينا من جهة أخرى $f(x) > 0$ ، وبالتالي فإن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية.

3- المميزات العددية:

أ- التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$

ب- التباين: $\boxed{V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}}$

ج- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta++1)}}}$

مثال9: أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمثال السابق.

الحل:

- التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

- التباين: $V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{3\times2}{(3+2)^2(3+2+1)} = \frac{6}{25\times6} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$

سادسا: التوزيع الطبيعي

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة ذات الاستخدام الواسع، وذلك نظرا للخصائص التي يتميز بها، والتي تنطبق على أغلبية الظواهر العشوائية. ففي الكثير من الحالات التطبيقية، طبيعية كانت أو اجتماعية أو اقتصادية، تكون أغلبية قيم المتغير العشوائي المدروس متمركزة حول قيمة المتوسط الحسابي والقليل منها يتطرف إما بالزيادة أو بالنقصان، فمثلا لو أخترنا عشوائيا ألف مصباح من المصابيح التي تنتجها إحدى الشركات، وقمنا بدراسة متغير عشوائي معين، مثل مدة حياتها، سنجد أن أغلبية المصابيح سوف تكون مدة حياتها تتمحور حول قيمة متوسط مدة حياة المصابيح، وكلما ابتعدنا عن المتوسط سواء إلى أعلى أو أسفل سيقل عدد تلك المصابيح، ولو قمنا بتمثيل هذا المتغير العشوائي، سنجده يأخذ شكل جرسي أو ناقوسي متناظر حول المتوسط الحسابي، وهذا ما ينطبق على خصائص التوزيع الطبيعي، وهكذا بالنسبة للأوزان أو الأطوال أو أي متغير مستمر آخر.

1- دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع الطبيعي، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}$$

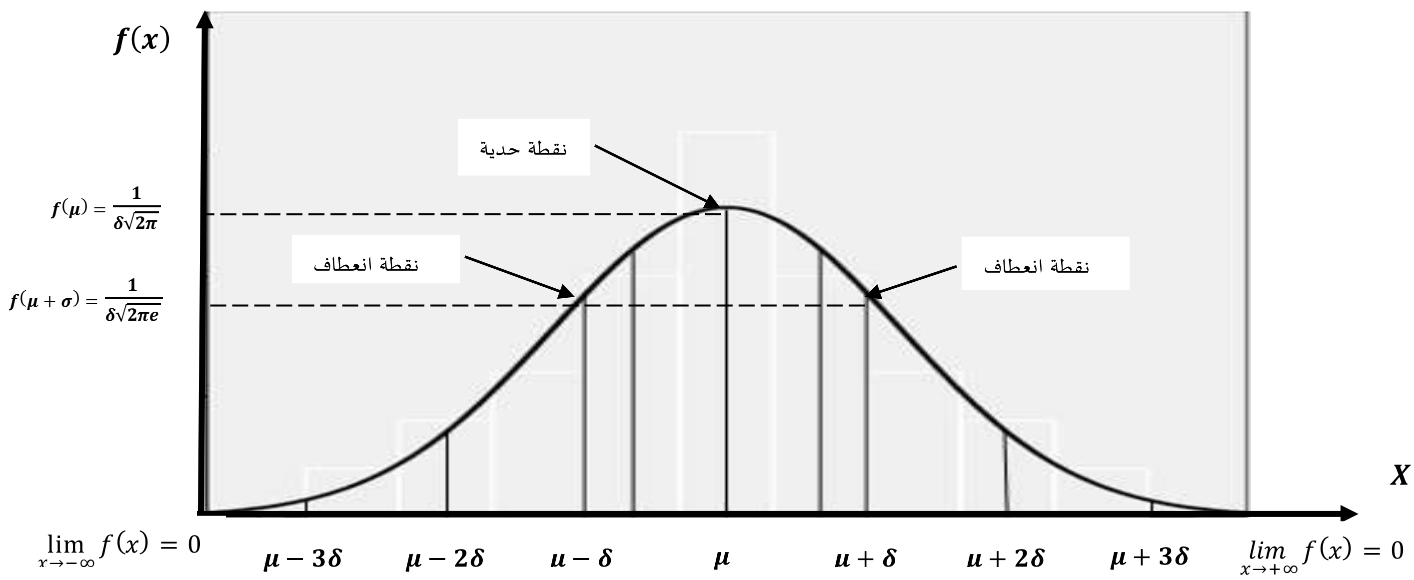
حيث أن: $x \in]-\infty, +\infty[$ ، $e = 2{,}7183$: العدد النيبري. $\pi = 3{,}14$: العدد الثلاثي.

$\mu \in \mathbb{R}$: المتوسط الحسابي للمجتمع، وهو عدد حقيقي. $\delta > 0$: الانحراف المعياري للمجتمع، يكون دوما موجبا.

2- خصائص التوزيع الطبيعي:

يتميز التوزيع الطبيعي بالخصائص التالية:

أ- يأخذ التوزيع الطبيعي الشكل الجرسي أو الناقوسي، كما هو موضح من خلال الشكل التالي:



من خلال منحنى التوزيع الطبيعي، يتضح مايلي:

- لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي المتوسط الحسابي للمجتمع μ وترتيبتها تساوي $\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر؛

- لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطتي انعطاف هما $\mu - \delta$ و$\mu + \delta$، وترتيبتيهما تساوي $\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi e}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر.

- طرفا منحنى التوزيع الطبيعي غير منطبقين على محور الفواصل، أي أنهما ممتدان إلى ما لا نهاية في الجهتين.

ب- الدالة الممثلة للتوزيع الطبيعي هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال الشكل(2-1) بوقوع المنحنى فوق محور الفواصل، أي أن: $f(x) \geq 0$. كما أن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(x)$، أي أن: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$.

ج- منحنى التوزيع الطبيعي معتدل، لأنه يحقق أمرين مهمين، هما:

- التناظر: حيث يمثل المستقيم العمودي الذي يمر بالفاصلة $x = \mu$ محور التناظر للمنحنى الممثل لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي، وبالتالي فهو يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قسمين متساويين، أي:

$P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = \frac{1}{2}$، وفي هذه الحالة فإن المقاييس الثلاثة للنزعة المركزية، المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال تكون متساوية، أي: $\mu = M_e = M_o$.

- غير متطاول ولا مفرطح: يمكن إثبات ذلك من خلال حساب مقياس فيشر للتفرطح، حيث أن قيمته تساوي الصفر، وهو ما يعني أن له قمة معتدلة، لا هي مدببة ولا هي منبسطة.

3- معالم المتغير العشوائي الخاضع للتوزيع الطبيعي:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع للتوزيع الطبيعي يساوي μ. أي: $\boxed{E(X) = \mu}$

ب- التباين:

التباين $V(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع للتوزيع الطبيعي يساوي σ^2. أي: $\boxed{V(X) = \delta^2}$

ج- الانحراف المعياري:

يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\delta^2} = \delta}$

4- دالة التوزيع الاحتمالية للتوزيع الطبيعي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} dx$$

إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ $P(X \leq x)$، إلا أن الحساب عمليا لا يتم كذلك نظرا للشكل المعقد لدالة الكثافة الاحتمالية، أين يصعب حساب الدالة الأصلية لها، فنلجأ إلى تحويل رياضي لتبسيط صيغة دالة الكثافة الاحتمالية، حيث نحصل على توزيع طبيعي آخر يدعى: التوزيع الطبيعي المعياري.

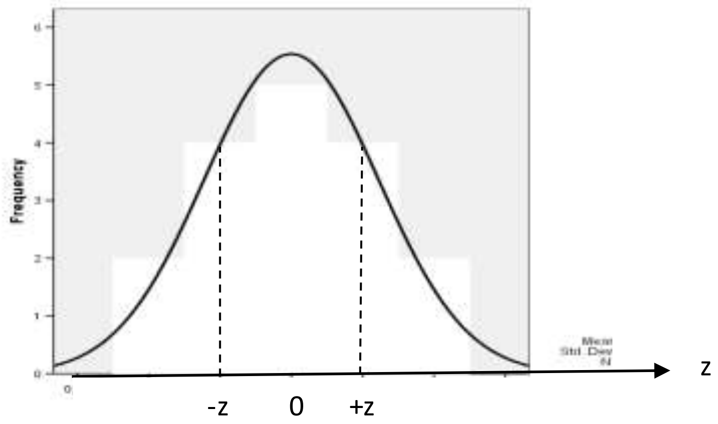
5- التوزيع الطبيعي المعياري: $Z \to N(0\,,1\,)$

نقوم بوضع: $z = \frac{x-\mu}{\delta}$، وبالتالي فإن خصائص المتغير العشوائي الجديد Z هي:

أ- مجال التعريف: $z \in \Omega_Z =]-\infty\,,+\infty[$

ب- دالة الكثافة الاحتمالية: معرفة بالصيغة التالية: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z)^2}$

ج- التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي المعياري:



حيث: $f(z) = f(-z)$

د- دالة التوزيع الاحتمالية $F(z)$:

$$F(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)\,dz$$

ه- معالم المتغير العشوائي الخاضع للتوزيع الطبيعي المعياري:

- التوقع الرياضي: $\boxed{E(Z) = 0}$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} => E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\big(E(X) - E(\mu)\big) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

- التبــــــاين: $\boxed{V(Z) = 1}$

$$Z = \frac{X-\mu}{\delta} => V(Z) = V\left(\frac{X-\mu}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^2}V(X-\mu) = \frac{1}{\delta^2}\big(V(X) - V(\mu)\big) = \frac{1}{\delta^2}\big(V(X)\big) = \frac{1}{\delta^2}\delta^2 = 1$$

- الانحراف المعياري: $\boxed{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1}$

ملاحظات هامة:

- يتمتع التوزيع الطبيعي المعياري بالخصائص نفسها التي يتمتع بها التوزيع الطبيعي العام، غير أن لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي 1 وترتيبتها تساوي $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي المعياري ومساواتها للصفر. كما أن له نقطتي انعطاف هما -1 و $+1$، وترتيبتهما تساوي $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر.

- لقد تم حساب الدالة الأصلية لـ $f(z)$ وتم التعويض فيها بكل القيم الممكنة داخل المجال: $]-\infty\,,+\infty[$، وأدرجت الإحتمالات في جداول خاصة تدعى: جدول التوزيع الطبيعي (أنظر الملحق رقم 3)، حيث يمكننا استنتاج الاحتمال مباشرة من الجدول بشرط أن يكون الاحتمال على شكل أصغر أو أصغر أو تساوي لكي يتوافق مع دالة التوزيع الاحتمالية.

مثال10: أجريت دراسة إحصائية حول الاستهلاك السنوي من اللحوم في الجزائر، وقد بينت الدراسة أن الاستهلاك المتوسط السنوي للفرد من اللحوم يقدر بـ 45 كلغ، وأن الانحراف المعياري يقدر بـ 18 كلغ، كما أن تحليل البيانات بين أن التوزيع طبيعي.

1- ما هي نسبة الأفراد الذين يقل استهلاكهم السنوي عن 30 كلغ؟

2- ما هي نسبة الأفراد الذين يفوق استهلاكهم السنوي 55 كلغ؟

3- ما هي نسبة الأفراد الذين يتراوح استهلاكهم السنوي ما بين 40 و60 كلغ؟

الحل: الاستهلاك السنوي من اللحوم في الجزائر X، متغير عشوائي يخضع للقانون الطبيعي، أي أن:

$\boldsymbol{X \rightarrow N(\mu\ ,\delta\ )}$ أي: $\boldsymbol{X \rightarrow N(45\ ,18)}$

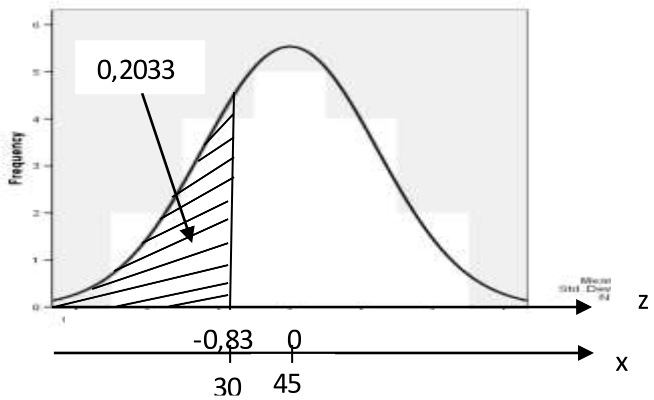
1- حساب نسبة الأفراد الذين يقل استهلاكهم السنوي عن 30 كلغ:

نقوم بحساب القيمة المعيارية z المقابلة للاستهلاك السنوي 30 كلغ، كما يلي: $z = \frac{x-\mu}{\delta} = \frac{30-45}{18} = -0{,}83$

ثم نحسب الاحتمال التالي: $P(X < 30) = P\left(\frac{x-\mu}{\delta} < \frac{30-45}{18}\right) = P(Z < -0{,}83) = 0{,}2033 = 20{,}33$

حيث أن القيمة $0{,}2033$ تستخرج من جدول التوزيع الطبيعي (أنظر الملحق رقم 3)، بالاعتماد على قيمة Z المقابلة للقيمة 0,83- أو بإجراء التناظر إذا كانت قيم Z السالبة غير موجودة، كما يلي:

$$P(Z < -0{,}83) = 1 - P(Z < 0{,}83) = 1 - 0{,}7967\ = 0{,}2033 = 20{,}33\%$$



2- حساب نسبة الأفراد الذين يفوق استهلاكهم السنوي 55 كلغ:

$$P(Z > 55)\ = P\left(\frac{x-\mu}{\delta} > \frac{55-45}{18}\right) = P\big(Z > 0{,}55\big)\ = 1 - P\big(Z < 0{,}55\big)$$

$$P(Z > 55)\ = 1 - 0{,}7088\ = 0{,}2912\ = 29{,}12\%$$

3- حساب نسبة الأفراد الذين يتراوح استهلاكهم السنوي ما بين 40 و60 كلغ:

$$P\ (40 < X < 60) = P\left(\frac{40-45}{18} < \frac{x-\mu}{\delta} < \frac{60-45}{18}\right) = P(-0{,}28 < Z < 0{,}83) = F(0{,}83) - F(-0{,}28)$$

$$= P(Z\ < 0{,}83) - P(Z\ < -0{,}28) = P(Z\ < 0{,}83) - [1 - P(Z\ < 0{,}28)]$$

$$= P(Z < 0{,}83) + P(Z < 0{,}28) - 1\ = 0{,}7967 + 0{,}6103 - 1\ = 0{,}407\ = 40{,}7\%$$

سابعا: توزيع كاي مربع

إذا كان لدينا $X_1,\ X_2,\ X_3, \dots, X_v$، متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أي:

$$X_1 \to N(0,1)\ ,\ X_2 \to N(0,1)\ ,\ X_3 \to N(0,1)\ , \dots\dots ,\ X_v \to N(0,1)$$

وكان لدينا المتغير العشوائي X المعرف بالصيغة التالية: $X = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \cdots + X_v^2$، فإن المتغير العشوائي X يتبع قانون كاي مربع، بدرجة حرية v، ونرمز لذلك بـ: $\boldsymbol{X \to \chi_v^2}$.

حيث v تمثل درجة الحرية، والتي تعتمد على حجم العينة.

كما يطلق على هذا القانون اسم قانون: $Karl\ Pearson$ نسبة لمكتشفه.

1- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاي مربع:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع توزيع كاي مربع، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\left(\frac{v}{2}-1\right)}}{(2)^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} & x \in]0, +\infty[\\ 0 & x \notin]0, +\infty[\end{cases}$$

حيث أن: $\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)$: هي الدالة قاما.

2- خصائص توزيع كاي مربع:

يتميز توزيع كاي مربع بالخصائص التالية:

أ- منحنى توزيع كاي مربع ملتوي نحو اليمين، أي موجب الالتواء، وكلما زادت قيمة درجة الحرية يقترب منحنى توزيع كاي مربع من منحنى التوزيع الطبيعي.

ب- الدالة الممثلة لتوزيع كاي مربع هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال وقوع المنحنى فوق محور الفواصل، أي أن: $f(x) \geq 0$. كما أن المساحة تحت منحنى توزيع كاي مربع تساوي الواحد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(x)$، أي أن: $\int_0^{+\infty} f(x) = 1$.

ج- قيم المتغير العشوائي في توزيع كاي مربع موجبة، حيث أن منحنى توزيع كاي مربع يبدأ من النقطة 0، ويمتد إلى الطرف الأيمن، وكلما اقتربنا بجوار $+\infty$ اقترب المنحنى من محور الفواصل غير أنه لا ينطبق عليه.

د- إذا كان $30 \leq v < 100$: فإننا نقرب توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي:

$$z = \sqrt{2x} - \sqrt{2v-1}$$

هـ- إذا كان $v \geq 100$: فإننا نقرب توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي: $z = \frac{x-v}{\sqrt{2v}}$

3- معالم المتغير العشوائي الخاضع لتوزيع كاي مربع:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع كاي مربع يساوي: $\boxed{\boldsymbol{E(X) = v}}$

ب- التباين والانحراف المعياري:

التباين $V(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع كاي مربع يساوي: $\boxed{\boldsymbol{V(X) = 2v}}$

كما يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boxed{\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2v}}}$

4- دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع كاي مربع:

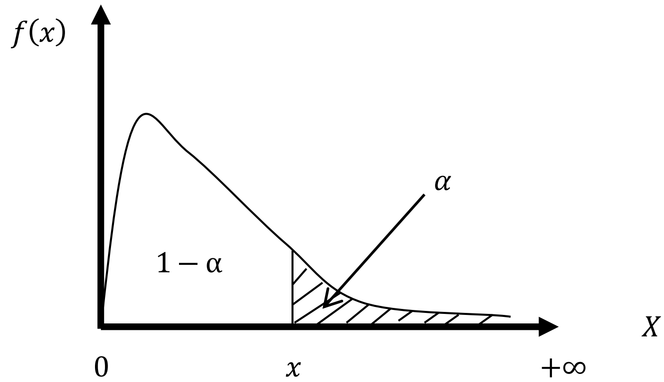
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{(2)^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^x x^{\left(\frac{v}{2}-1\right)} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(X \leq x)$.

5- قراءة جدول كاي مربع واستعمالاته:

جدول كاي مربع (أنظر الملحق رقم 4)، أعد من أجل تحديد قيمة معينة x بدلالة معلومتين:

- درجة الحرية v: وتقرأ على العمود الأول؛ - احتمال معلوم α: ويقرأ على السطر الأول.



مثال11: إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 20، أي: $X \to \chi^2_{20}$، ما هي قيمة x التي يقع على يسارها 0,995 من المساحة؟

الحل: نقوم بحساب: $P(X < x) = 0{,}995$، لكن جدول كاي مربع يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي كما يلي:

$$P(X < x) = 0{,}995 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0{,}005$$

ومن خلال جدول كاي مربع بالملحق رقم 4، نجد: التقاطع بين: $v = 20$ و $\alpha = 0{,}005$ وهو القيمة $x = 39{,}997$

أي أن: $P(X < 39{,}997) = 0{,}995 \Leftrightarrow P(X \geq 39{,}997) = 0{,}005$

ثامنا: توزيع ستودنت

نقول أن المتغير العشوائي T يستجيب لقانون ستودنت، بدرجة حرية v، إذا كان T معرف كالتالي: $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{v}}}$

حيث: $X \to N(0,1)$ و $Y \to \chi^2_v$. X و Y مستقلان. ونكتب في هذه الحالة: $\boldsymbol{T \to t_v}$

v: تمثل درجة الحرية، والتي تعتمد على حجم العينة.

1- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستودنت:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر T يتبع توزيع ستودنت، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} \qquad t \in [-\infty, +\infty[$$

2- خصائص توزيع ستودنت:

يتميز توزيع ستودنت بالخصائص التالية:

أ- منحنى توزيع ستودنت متناظر ومفرطح، وكلما زادت قيمة درجة الحرية يقترب منحنى توزيع ستودنت من منحنى التوزيع الطبيعي.

ب- الدالة الممثلة لتوزيع ستودنت هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال وقوع المنحنى فوق محـور الفواصل، أي أن: $f(t) \geq 0$. كما أن المساحـة تحت منحنى توزيع ستودنت تسـاوي الواحـد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(t)$، أي أن: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) = 1$.

ج- طرفا منحنى توزيع ستودنت غير منطبقين على محور الفواصل، أي أنهما ممتدان إلى ما لا نهاية في الجهتين.

3- معالم المتغير العشوائي الخاضع لتوزيع ستودنت:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(T)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع ستودنت يساوي: $\boxed{\boldsymbol{E(T) = 0}}$

ب- التباين والانحراف المعياري:

التباين $V(T)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع ستودنت يساوي: $\boxed{\boldsymbol{V(T) = \frac{v}{v-2}}}$

كما يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boxed{\boldsymbol{\delta(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{\frac{v}{v-2}}}}$

4- دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع ستودنت:

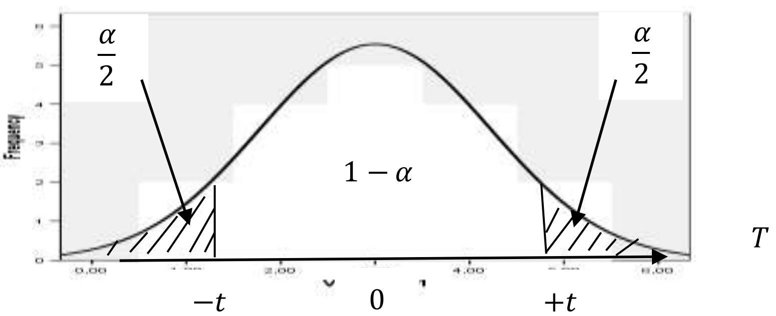
$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} dt$$

إذن لحساب $F(t)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(T \leq t)$.

5- قراءة جدول ستودنت واستعمالاته:

جدول ستودنت (أنظر الملحق رقم 5)، أعد من أجل تحديد قيمة معينة t بدلالة معلومتين:

- درجة الحرية v: وتقرأ على العمود الأول؛
- احتمال معلوم α: ويقرأ على السطر الأول.



مثال12: إذا كان T يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية 12، أي: $T \rightarrow t_{12}$. ما هي قيمة t التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة؟

الحل: نقوم بحساب: $P(T < t) = 0{,}05$، لكن جدول ستودنت يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي، كما يلي:

نلاحظ أن قيمة t التي يقع على يسارها 0,05 أي 5% من المساحة قيمتها سالبة، وبما أن منحنى توزيع ستودنت متناظر، فإننا نستخرج قيمة t الموجبة ونسبقها بإشارة سالبة كما يلي:

$$P(T < -t) = 0{,}05 \Leftrightarrow P(T \geq +t) = 0{,}05$$

ومن خلال جدول ستودنت بالملحق رقم 5، نجد: التقاطع بين: $v = 12$ و $\alpha = 0{,}05$ وهو القيمة $1{,}782$ التي نسبقها بإشارة سالبة فتكون: $t = -1{,}782$ هي القيمة التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة.

تاسعا: توزيع فيشر

إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين مستقلين يتبعان توزيع كاي مربع، أي: $X_1 \rightarrow \chi^2_{v_1}$ و $X_2 \rightarrow \chi^2_{v_2}$، فإن المتغير X، حيث: $X = \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2}$، يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية v_1 و v_2، اللتان تعتمدان على حجم العينة لكل متغير.

ونكتب: $\boldsymbol{X \rightarrow F_{v_1,v_2}}$

1- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فيشر:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع توزيع فيشر، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} v_1^{\frac{v_1}{2}} v_2^{\frac{v_2}{2}} x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1} (v_2 + v_1 x)^{\frac{-(v_1+v_2)}{2}} & x \in]0\,, +\infty[\\ 0 & x \notin]0\,, +\infty[\end{cases}$$

2- خصائص توزيع فيشر:

يتميز توزيع فيشر بالخصائص التالية:

أ- منحنى توزيع فيشر ملتوي نحو اليمين، أي موجب الالتواء، وكلما زادت قيمتا درجة الحرية يقترب منحنى توزيع فيشر من منحنى التوزيع الطبيعي.

ب- الدالة الممثلة لتوزيع فيشر هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال وقوع المنحنى فوق محور الفواصل، أي أن: $f(x) \geq 0$. كما أن المساحة تحت منحنى توزيع فيشر تساوي الواحد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(x)$، أي أن: $\int_0^{+\infty} f(x) = 1$.

ج- يعتمد توزيع فيشر على معلمتين، هما، درجة حرية البسط v_1 ودرجة حرية المقام v_2، وتكتب درجتا الحرية أمام المتغير، بحيث تكون درجة حرية البسط إلى اليسار، ودرجة حرية المقام إلى اليمين، فإذا كانت درجة حرية البسط تساوي 8، ودرجة حرية المقام تساوي11، فنعبر عن ذلك كما يلي: $F_{8\,,11}$

د- قيم المتغير العشوائي في توزيع فيشر موجبة، حيث أن منحنى توزيع فيشر يبدأ من النقطة 0، ويمتد إلى الطرف الأيمن، وكلما اقتربنا بجوار $+\infty$ اقترب المنحنى من محور الفواصل غير أنه لا ينطبق عليه.

3- معالم المتغير العشوائي الخاضع لتوزيع فيشر:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع فيشر يساوي: $v_2 > 2$ $\boxed{E(X) = \frac{v_2}{v_2-2}}$

ب- التباين والانحراف المعياري:

التباين $V(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع فيشر يساوي: $v_2 > 4$ $\boxed{V(X) = \frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}}$

كما يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}}}$

4- دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع فيشر:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} v_1^{\frac{v_1}{2}} v_2^{\frac{v_2}{2}} \int_0^x x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1}(v_2+v_1x)^{\frac{-(v_1+v_2)}{2}}dx$$

إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(X \leq x)$.

5- قراءة جدول فيشر واستعمالاته:

باستخدام جدول توزيع فيشر (أنظر الملحق رقم 6)، نستطيع الحصول على قيمة المتغير العشوائي x الذي يقع على يمينه المساحة: $\alpha = 0{,}1$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}025$ أو $\alpha = 0{,}01$ ، وبمعلومية درجتي حرية v_1 و v_2.

مثال13: إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 8 و11، أي: $X \to F_{8,11}$، ما هي قيمة x التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة؟

الحل: نقوم بحساب: $P(X < x) = 0{,}05$، لكن جدول فيشر يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي، كما يلي:

$$P(X < x) = 0{,}05 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0{,}95$$

ومن خلال جدول فيشر بالملحق رقم 6، نجد: التقاطع بين: $v_1 = 8$ و $v_2 = 11$ في الجدول الخاص بـ: $\alpha = 0{,}05$ وهي القيمة $2{,}95$، وهي القيمة التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة.

6- العلاقات بين توزيع فيشر وتوزيعي ستودنت وكاي مربع:

- **نظرية 1:** $\boxed{F_{(1-\alpha),v_1,v_2} = \frac{1}{F_{\alpha,v_2,v_1}}}$
- **نظرية 2:** $\boxed{F_{\alpha,1,v} = t^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),v}}$

نظرية 3: $\boxed{F_{\alpha,v,\infty} = \frac{\chi^2_{\alpha,v}}{v}}$

مثال14:

1- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 8 و10، أي: $X \to F_{8,10}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,95 من المساحة؟

2- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 1 و 10، أي: $X \to F_{1,10}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,05 من المساحة؟

3- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 10 و $+\infty$، أي: $X \to F_{10,+\infty}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,05 من المساحة؟

الحل:

1- نقوم بحساب: $P(X > x) = 0,95$. لدينا: $1 - \alpha = 0,95 \Leftrightarrow \alpha = 0,05$

ومنه: $F_{(0,95),8,10} = \frac{1}{F_{(0,05),10,8}} = \frac{1}{3,35} = 0,298$

2- نقوم بحساب: $P(X > x) = 0,05$.

ومنه: $F_{(0,05),1,10} = t^2_{\left(1-\frac{0,05}{2}\right),10} = t^2_{(0,975),10} = (-2,228)^2 = 4,96$

3- نقوم بحساب: $P(X > x) = 0,05$.

ومنه: $F_{(0,05),10,\infty} = \frac{\chi^2_{(0,05),10}}{10} = \frac{18,307}{10} = 1,8307$

عاشرا: التقريب بين التوزيعات الاحتمالية

1- تقريب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين:

إذا كان حجم العينة n صغير جدا مقارنة بحجم المجتمع N، فإن معامل الشمولية $\left(\frac{N-n}{n-1}\right)$ يؤول إلى الواحد، وتصبح قيمة التباين هذا القانون تساوي قيمة التباين التي توصلنا إليها في قانون ثنائي الحدين، وبالتالي كقاعدة عامة، إذا كان $\left(\frac{n}{N} \leq 0,05\right)$ فإننا نقرب قانون فوق الهندسي من القانون ثنائي الحدين، أي نستخدم قانون ثنائي الحدين لحساب الاحتمالات بدل قانون فوق الهندسي.

أي: $\boldsymbol{X \to H(N, n, p) \longrightarrow X \to B(n, p)}$

مثال15: صندوق به 100 كرية منها 60 بيضاء و40 حمراء، نسحب 3 كريات دفعة واحدة، أحسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين.

الحل: القانون الأصلي هو قانون فوق الهندسي، $X \to H(100\ ;\ 3\ ;\ 0,6)$

لدينا: $\frac{n}{N} = \frac{3}{100} = 0,03 \leq 0,05$ وبالتالي: نقرب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين $X \to B(3\ ;\ 0,6)$

$$P\ (X = 2) = C_3^2 (0,6)^2 (0,4)^1 = 0,432$$

2- تقريب قانون ثنائي الحدين من قانون بواسون:

إذا كان $(n \geq 30)$ و $(P \leq 0,05)$ فإن قانون بواسون يعطي نتائج قريبة من القانون الثنائي، وبالتالي كقاعدة عامة فإننا نقرب قانون ثنائي الحدين من قانون بواسون، أي نستخدم قانون بواسون لحساب الاحتمالات بدل قانون ثنائي الحدين.

أي: $\boldsymbol{X \to B(n, p) \longrightarrow X \to P(\lambda)}$

حيث: $\lambda = E(X) = np$

مثال16: إذا كان 3% من انتاج إنتاج آلة ما يعد تالفا، نأخذ 30 وحدة من انتاج هذه الآلة عشوائيا، أحسب احتمال أن يكون هناك وحدتان تالفتان؟

الحل: القانون الأصلي هو قانون ثنائي الحدين، $X \to B(30\ ;\ 0{,}03)$

ومنه: $P(X=2) = C_{30}^{2}(0{,}03)^{2}(0{,}97)^{28} = 0{,}17$

لدينا: $(n = 30)$ و $(P < 0{,}05)$ وبالتالي: نقرب قانون ثنائي الحدين من قانون بواسون فنجد:

$$\lambda = np = 30(0{,}03) = 0{,}9$$

$$P(X=2) = e^{-2}\,\frac{(0{,}9)^{2}}{2!} = 0{,}17$$

3- تقريب قانون ثنائي الحدين من القانون الطبيعي:

يمكننا أن نقرب قانون ثنائي الحدين من القانون الطبيعي، أي نستخدم القانون الطبيعي لحساب الاحتمالات بدل قانون ثنائي الحدين، إذا توفر الشرطين التاليين: p غير ضعيف $(0{,}3 \le P \le 0{,}7)$ و n كبير $(n \ge 30)$.

أي: $$\boldsymbol{X \to B(n\,,p) \longrightarrow X \to N(\mu\ ;\ \delta)}$$

حيث: $\mu = E(X) = np$ و $\delta = \sqrt{npq}$

مثال17: صندوق به 100 كرية منها 60 بيضاء و40 حمراء، نسحب 32 كرية مع الإرجاع، أحسب احتمال الحصول على عشرون كرية على الأقل.

الحل: القانون الأصلي هو قانون ثنائي الحدين، $X \to B(32\ ;\ 0{,}6)$

لدينا: $(0{,}3 \le P = 0{,}6 \le 0{,}7)$ و $n = 32 > 30$ وبالتالي: نقرب قانون ثنائي الحدين من القانون الطبيعي

أي: $X \to N\left(np\ ;\ \sqrt{npq}\right)$ ، أي: $X \to N\left(32 \times 0{,}6\ ;\ \sqrt{32 \times 0{,}6 \times 0{,}4}\right)$، أي: $X \to N(19{,}2\ ;\ 2{,}77)$

$$P\ (X \ge 20) = 1 - P\ (X < 20) = 1 - P\ (X \le 19 + 0{,}5) = 1 - P\ (X \le 19{,}5)$$
$$= 1 - P\ \left(\frac{X-\mu}{\delta} \le \frac{19{,}5 - 19{,}2}{2{,}77}\right) = 1 - P\ (Z \le 0{,}11) = 1 - 0{,}5438 = 0{,}4562$$

4- تقريب قانون بواسون من القانون الطبيعي:

يمكننا أن نقرب قانون بواسون من القانون الطبيعي، أي نستخدم القانون الطبيعي لحساب الاحتمالات بدل قانون بواسون، إذا توفر الشرط التالي: $\lambda \ge 15$

أي: $$\boldsymbol{X \to P(\lambda) \longrightarrow X \to N(\mu\ ;\ \delta)}$$

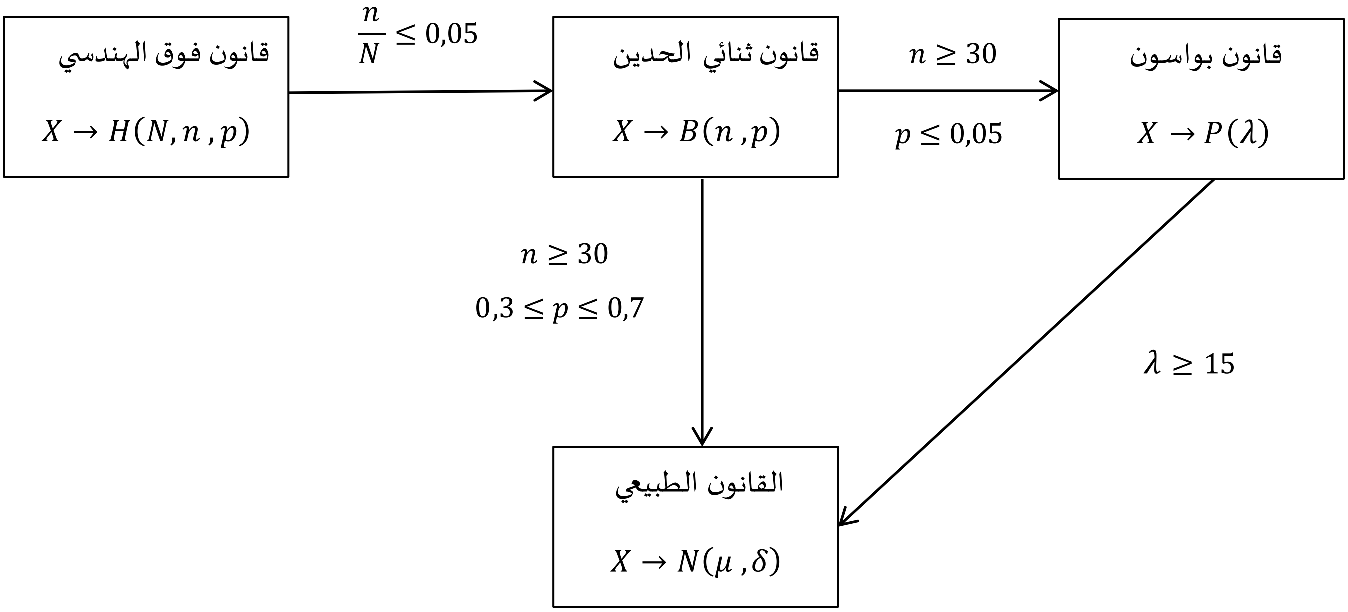
حيث: $\mu = E(X) = \lambda$ و $\delta = \sqrt{\lambda}$

مثال18: متوسط عدد حوادث المرور في الشهر بولاية المسيلة هو 16 حادث، أحسب احتمال حدوث أقل من 12 حادث في الشهر المقبل.

الحل: القانون الأصلي هو قانون بواسون، $X \to P(\lambda = 16)$. لدينا: $\lambda = 16 > 15$ وبالتالي: نقرب قانون بواسون من القانون الطبيعي $X \to N\left(\lambda\ ;\ \sqrt{\lambda}\right)$ ، أي: $X \to N(16\ ;\ 4)$

$$P\ (X < 12) = P\ (X \le 11) = P\ (X \le 11 + 0{,}5) = P\ (X \le 11{,}5)$$
$$= P\ \left(\frac{X-\mu}{\delta} \le \frac{11{,}5 - 16}{4}\right) = P\ (Z \le -1{,}12) = 0{,}13142$$

يمكن تلخيص التقريب ما بين التوزيعات الاحتمالية من خلال الشكل التالي:



تمارين محلولة

التمرين الأول:

إذا كان أدنى وأقصى زمن لوصول طائرات تقلع من مطار الجزائر إلى مطار سطيف، هو على التوالي 45 دقيقة و 53 دقيقة، وأن زمن الوصول يتبع التوزيع المنتظم.

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$.

3- أحسب الاحتمالات: $P(X \leq 52)$ ، $P(47 \leq X \leq 53)$ ، $P(X \geq 50)$

4- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين الثاني:

إذا كانت مدة الانتظار التي يقضيها شخص أمام شباك البريد قبل الاستفادة من الخدمة، تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 4 دقائق.

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$.

3- أحسب الاحتمالات: $P(X \leq 2)$ ، $P(1 \leq X \leq 3)$

4- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين الثالث:

إذا كانت نسبة المبيعات الشهرية من مادة السكر بأحد المحلات التجارية، تتبع توزيع بيتا، حيث: $X \rightarrow B(4\,;2)$

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$.

4- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين الرابع:

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل الزمن المستغرق بالساعات لإنتاج آلة الغسيل بالشركة، يتبع توزيع قاما ذات المعلمتين α و β، دالة الكثافة الاحتمالية له معرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{128}x^2 e^{-\frac{x}{4}} \qquad x > 0$$

1- أثبت أن دالة التوزيع الاحتمالية لهذا المتغير هي: $F(x) = 1 - \frac{1}{32}(x^2 + 8x + 32)e^{-\frac{x}{4}}$

2- أحسب احتمال أن يكون الوقت المستغرق لإنتاج آلة الغسيل يقل عن 5 ساعات.

3- استنتج قيمتي α و β لهذا التوزيع.

4- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين الخامس:

1- لتكن Z المتغيرة المعيارية، حيث $Z \to N(0\,,1)$. أحسب الاحتمالات التالية:

أ- $P(-1{,}33 < Z < 2{,}14)$ ، ب- $P(|Z| \leq 1{,}96)$ ، ج- $P(|Z| \leq 2{,}58)$ ، د- $P(|Z| \leq 1{,}64)$

2- حدد قيمة t في كل من الحالات التالية: $t(0{,}1\,;\,7)$ ، $t(0{,}90\,;\,11)$ ، $t(0{,}95\,;\,4)$

3- حدد قيمة x^2 في كل من الحالات التالية : $\chi^2(0{,}025\,;\,10)$ ، $\chi^2(0{,}995\,;\,13)$ ، $\chi^2(0{,}95\,;\,24)$

4- حدد قيمة f في كل حالة من الحالات التالية: $F(0{,}025\,;\,9\,;17)$ ، $F(0{,}10\,;\,8\,;4)$ ، $F(0{,}95\,;\,4\,;\,6)$

التمرين السادس:

في مصنع لإنتاج البطاريات تبين أن ساعات العمل للبطارية الواحدة X تتوزع كما يلي: $X \to N(500\,,10)$

1- ما هي القراءة الإحصائية للعبارة السابقة.

2- حدد معالم المتغير العشوائي X، ثم أكتب شكل دالة كثافته الاحتمالية.

3- أحسب احتمال أن بطارية ما ستعمل:

أ- ما بين 500 ساعة و515 ساعة. ب- أقل من 480 ساعة. ج- أكثر من 510 ساعة.

4- ما هو أدنى ساعات العمل لـ 2,5% من البطاريات الأكثر جودة؟

التمرين السابع:

1- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 60، أي: $X \to \chi^2_{60}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة.

2- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 100، أي: $X \to \chi^2_{100}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة.

التمرين الثامن:

1- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 4 و 12، أي: $X \to F_{4\,,12}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,90 من المساحة.

2- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 1 و14، أي: $X \to F_{1\,,14}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة.

3- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 15 و $+\infty$، أي: $X \to F_{15,+\infty}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة.

التمرين التاسع:

مجلس أساتذة يتشكل من 100 عضو، 60 رجال و40 نساء، نريد اختيار عشوائيا شخصين منهم للمشاركة في ندوة وطنية حول البرامج، ليكن X : عدد النساء من بين الشخصين الذين تم اختيارهما.

1- ما هو القانون الإجمالي الأصلي لـ X؟ علل ذلك.

2- ما هو القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه؟ علل ذلك.

3- أحسب الأمل الرياضي والتباين في الحالتين. ماذا تلاحظ؟

4- أحسب $P(X = 1)$ في الحالتين. ماذا تلاحظ؟

التمرين العاشر:

توضح الخبرة الماضية أن 1% من مصابيح الكهرباء المنتجة في أحد المصانع هي مصابيح غير صالحة، في عينة من 100 مصباح:

1- أحسب احتمال وجود أكثر من مصباح غير صالح:

أ- باستعمال قانون ثنائي الحدين.

ب- باستعمال قانون بواسون *Poisson* كتقريب لقانون ثنائي الحدين (تأكد من شروط التقريب).

2- قارن النتائج. ماذا تلاحظ؟

التمرين الحادي عشر:

أولا: حسب مدير أحد المصانع التي تنتج نوع معين من الأدوية الخاصة بمرض معين، فإن نسبة الشفاء باستخدام هذا الدواء هو 60%. سحبنا عشوائيا 35 شخصا من الذين تناولوا هذا الدواء.

ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد حالات الشفاء باستخدام هذا الدواء.

1- ما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه هذ المتغير العشوائي؟ حدد معالمه.

2- ما هو القانون الذي يمكننا أن نقربه إليه؟ حدد معالمه.

3- أحسب احتمال الحصول على 25 حالة شفاء على الأكثر.

ثانيا: حسب مدير نفس المصنع، فإن نسبة عدم الشفاء باستخدام دواء آخر لنفس المرض هو 4%. سحبنا عشوائيا 400 شخصا من الذين تناولوا هذا الدواء.

ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد حالات عدم الشفاء باستخدام هذا الدواء.

1- ما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه هذ المتغير العشوائي؟ حدد معالمه.

2- ما هو القانون الذي يمكننا أن نقربه إليه؟ حدد معالمه.

3- أحسب احتمال الحصول على 12 حالة عدم شفاء على الأقل.

الحلول

حل التمرين الأول:

1- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{53-45} & x\in[45-53]\\ 0 & x\notin[45-53]\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & x\in[45-53]\\ 0 & x\notin[45-53]\end{cases}$$

2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$:

- إذا كان $x<45$، فإن: $-*\,F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{x}(0)\,dx=0$

إذا كان $45\leq x\leq 53$، فإن: $*\,F(x)=\int_{-\infty}^{45}f(x)\,dx+\int_{45}^{x}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{45}(0)\,dx+\int_{45}^{x}\frac{1}{8}\,dx$

$$=0+\left[\frac{1}{8}x\right]_{45}^{x}=\frac{x-45}{8}=\frac{1}{8}x-\frac{45}{8}$$

- إذا كان $x>53$، فإن: $*F(x)=\int_{-\infty}^{45}f(x)\,dx+\int_{45}^{53}f(x)\,dx+\int_{53}^{x}f(x)\,dx$

$$=\int_{-\infty}^{45}(0)\,dx+\int_{45}^{53}\frac{1}{8}x\,dx+\int_{15}^{x}(0)\,dx=0+1+0=1$$

وبالتالي:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<45\\ \frac{1}{8}x-\frac{45}{8} & 45\leq x\leq 53\\ 1 & x>53\end{cases}$$

3- حساب الاحتمالات: $P(X\leq 52)$ ، $P(47\leq X\leq 53)$ ، $P(X\geq 50)$:

$$*\ P(X\leq 52)=F(52)=\frac{1}{8}(52)-\frac{45}{8}=\frac{7}{8}=0{,}875$$

$$*\,P(47\leq X\leq 53)=P(X\leq 53)-P(X\leq 47)=F(53)-F(47)$$

$$=\left(\frac{1}{8}(53)-\frac{45}{8}\right)-\left(\frac{1}{8}(47)-\frac{45}{8}\right)=1-\frac{2}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

$$*\,P(X\geq 50)=1-P(X<52)=1-P(X\leq 51)=1-F(51)$$

$$=1-\left(\frac{1}{8}(51)-\frac{45}{8}\right)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

4- حساب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي: $E(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{45+53}{2}=49$

- الانحراف المعياري: $\delta(X)=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\sqrt{\frac{(53-45)^2}{12}}=\sqrt{1{,}33}=1{,}15$

حل التمرين الثاني:

1- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير:

لدينا:
$$f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

ولدينا:
$$\begin{cases}E(X)=\frac{1}{\theta}\\ E(X)=4\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{\theta}=4$$

$$\Leftrightarrow \theta=\frac{1}{4}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$:

- إذا كان $x<0$، فإن:
$$*\ F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{x}(0)\,dx=0$$

- إذا كان $x\geq 0$، فإن:
$$*\ F(x)=\int_{-\infty}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{x}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}(0)\,dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$
$$=0+\left[-e^{-\frac{1}{4}x}\right]_0^x=-\left[e^{-\frac{1}{4}(x)}-e^{-\frac{1}{4}(0)}\right]=-e^{-\frac{1}{4}x}+1=1-e^{-\frac{1}{4}x}$$

وبالتالي:
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\frac{1}{4}x} & x\geq 0\end{cases}$$

3- حساب الاحتمالات: $P(X\leq 2)$ ، $P(1\leq X\leq 3)$:

$$*\ P(X\leq 2)=F(2)=1-e^{-\frac{1}{4}(2)}=1-e^{-\frac{1}{2}}=0{,}39$$

$$*\ P(1\leq X\leq 3)=P(X\leq 3)-P(X\leq 1)=F(3)-F(1)$$
$$=\left(1-e^{-\frac{1}{4}(3)}\right)-\left(1-e^{-\frac{1}{4}(1)}\right)=1-e^{-\frac{3}{4}}-1+e^{-\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{4}}-e^{-\frac{3}{4}}$$
$$=0{,}78-0{,}47=0{,}31$$

4- حساب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي:
$$E(X)=\frac{1}{\theta}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$

- الانحراف المعياري:
$$\delta(X)=\sqrt{\frac{1}{\theta^2}}=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{16}}}=\sqrt{16}=4$$

حل التمرين الثالث:

1- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(4+2)}{\Gamma(4)\Gamma(2)}x^{4-1}(1-x)^{2-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(4)\Gamma(2)}x^{3}(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5!}{3!\times 1!}x^{3}(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}20x^{3}(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$:

- إذا كان $x<0$، فإن:

$$-* F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{x}(0)\,dx=0$$

إذا كان $0<x<1$، فإن:

$$* F(x)=\int_{-\infty}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{x}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}(0)\,dx+\int_{0}^{x}20x^3(1-x)\,dx$$

$$=0+\int_{0}^{x}20(x^3-x^4)\,dx=\left[20\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^x=20\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)$$

- إذا كان $x\geq 1$، فإن:

$$* \quad F(x)=\int_{-\infty}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{x}f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}(0)\,dx+\int_{0}^{1}20x^3(1-x)\,dx+\int_{1}^{x}(0)\,dx=0+1+0=1$$

وبالتالي:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 20\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right) & 0<x<0\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$$

4- حساب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي:

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{4}{4+2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=0{,}67$$

- الانحراف المعياري:

$$\delta(X)=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}}=\sqrt{\frac{4\times 2}{(4+2)^2(4+2+1)}}=\sqrt{\frac{8}{36\times 7}}=\sqrt{\frac{8}{252}}=0{,}18$$

<u>حل التمرين الرابع:</u>

1- إثبات أن دالة التوزيع الاحتمالية لهذا المتغير هي:

$$F(x)=1-\frac{1}{32}(x^2+8x+32)e^{-\frac{x}{4}}$$

$$F'(x)=-\frac{1}{32}\left((x^2+8x+32)'\left(e^{-\frac{x}{4}}\right)+\left(e^{-\frac{x}{4}}\right)'(x^2+8x+32)\right)$$

$$=-\frac{1}{32}\left((2x+8)\left(e^{-\frac{x}{4}}\right)-\frac{1}{4}(x^2+8x+32)\left(e^{-\frac{x}{4}}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{32}\left(\left(2x+8-\frac{1}{4}x^2-2x-8\right)e^{-\frac{x}{4}}\right)$$

$$=-\frac{1}{32}\left(-\frac{1}{4}x^2e^{-\frac{x}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{128}x^2 e^{-\frac{x}{4}}$$
$$= f(x)$$

بما أن: $F'(x) = f(x)$ فإن: $F(x)$ دالة التوزيع الاحتمالية لهذا المتغير.

2- حساب احتمال أن يكون الوقت المستغرق لإنتاج آلة الغسيل يقل عن 5 ساعات:

$$P(X < 5) = F(5) = 1 - \frac{1}{32}(x^2 + 8x + 32)e^{-\frac{x}{4}} = 1 - \frac{1}{32}(5^2 + 8(5) + 32)e^{-\frac{5}{4}}$$
$$= 1 - \frac{1}{32}(97)e^{-\frac{5}{4}} = 0{,}13$$

3- استنتاج قيمتي α و β لهذا التوزيع:

لدينا من جهة، دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع قاما: $f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$

ولدينا من جهة أخرى: دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X: $f(x) = \frac{1}{128}x^2 e^{-\frac{x}{4}}$

بالمطابقة بين الداليتين، نجد: $\begin{cases} \alpha - 1 = 2 \\ \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha = 3 \\ \beta = 4 \end{matrix}$

4- حساب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي: $E(X) = \alpha\beta = 3 \times 4 = 12$

- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \beta\sqrt{\alpha} = 4\sqrt{3} = 6{,}93$

<u>**حل التمرين الخامس:**</u>

1- لتكن Z المتغيرة المعيارية، حيث $Z \to N(0\,,1)$. حساب الاحتمالات التالية:

أ- $P(-1{,}33 < Z < 2{,}14)$ ب- $P(|Z| \le 1{,}96)$، ج- $P(|Z| \le 2{,}58)$، د- $P(|Z| \le 1{,}64)$

* $P(-1{,}33 < Z < 2{,}14) = P(Z < 2{,}14) - P(Z < -1{,}33) = 0{,}9838 - 0{,}0918 = 0{,}8920$

* $P(|Z| \le 1{,}96) = P(Z \le 1{,}96 \; et \; -Z \le 1{,}96\,) = P(Z \le 1{,}96 \; et \; Z \ge -1{,}96\,)$

$= P(-1{,}96 \le Z \le 1{,}96\,) = P(Z < 1{,}96) - P(Z < -1{,}96) = 0{,}9750 - 0{,}0250 = 0{,}95$

* $P(|Z| \le 2{,}58) = P(Z \le 2{,}58 \; et \; -Z \le 2{,}58\,) = P(Z \le 2{,}58 \; et \; Z \ge -2{,}58\,)$

$= P(-2{,}58 \le Z \le 2{,}58\,) = P(Z < 2{,}58) - P(Z < -2{,}58) = 0{,}9951 - 0{,}0049 = 0{,}99$

* $P(|Z| \le 1{,}64) = P(Z \le 1{,}64 \; et \; -Z \le 1{,}64\,) = P(Z \le 1{,}64 \; et \; Z \ge -1{,}64\,)$

$= P(-1{,}64 \le Z \le 1{,}64\,) = P(Z < 1{,}64) - P(Z < -1{,}64) = 0{,}9495 - 0{,}0505 = 0{,}90$

2- تحديد قيمة t في كل من الحالات التالية: $t(0{,}1\;;\;7)$ ، $t(0{,}90\;;\;11)$ ، $t(0{,}95\;;\;4)$

* $t(0{,}1\;;\;7)$: تمثل قيمة الإحصائية t التي يقع على يمينها 10% من المساحة بدرجة حرية تساوي 7، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع ستودنت، فنجد: $t(0{,}1\;;\;7) \Rightarrow P(T > t) = 0{,}1 \;\Rightarrow t = 1{,}415$

* $t(0{,}90\;;\;11)$: تمثل قيمة الإحصائية t التي يقع على يمينها 90% من المساحة بدرجة حرية تساوي 11، أي تقع على يسارها 10% من المساحة، نستخرج قيمة t التي تقع على يمينها 10% من المساحة من جدول توزيع ستودنت ونسبقها بإشارة سالبة لأن توزيع ستودنت متناظر، فنجد: $t(0{,}90\;;\;11) \Rightarrow P(T > t) = 0{,}90 \;\Rightarrow t = -\,1{,}363$

* $t(0{,}95\ ;\ 4)$: تمثل قيمة الإحصائية t التي يقع على يمينها 95% من المساحة بدرجة حرية تساوي 4، أي تقع على يسارها 5% من المساحة، نستخرج قيمة t التي تقع على يمينها 5% من المساحة من جدول توزيع ستودنت ونسبقها بإشارة سالبة لأن توزيع ستودنت متناظر، فنجد: $t(0{,}95\ ;\ 4) \Rightarrow P(T > t) = 0{,}95 \Rightarrow t = -2{,}132$

3- تحديد قيمة x^2 في كل من الحالات التالية : $\chi^2(0{,}025\ ;\ 10)$ ، $\chi^2(0{,}995\ ;\ 13)$ ، $\chi^2(0{,}95\ ;\ 24)$

* $\chi^2(0{,}025\ ;\ 10)$: تمثل قيمة الإحصائية x^2 التي يقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية تساوي 10، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع كاي مربع: $\chi^2(0{,}025\ ;\ 10) \Rightarrow P(\chi^2 > x^2) = 0{,}025 \Rightarrow x^2 = 20{,}483$

* $\chi^2(0{,}995\ ;\ 13)$: تمثل قيمة الإحصائية x^2 التي يقع على يمينها 99,5% من المساحة بدرجة حرية تساوي 13، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع كاي مربع: $\chi^2(0{,}995\ ;\ 13) \Rightarrow P(\chi^2 > x^2) = 0{,}995 \Rightarrow \chi^2 = 3{,}565$

* $\chi^2(0{,}95\ ;\ 24)$: تمثل قيمة الإحصائية x^2 التي يقع على يمينها 95% من المساحة بدرجة حرية تساوي 24، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع كاي مربع: $\chi^2(0{,}95\ ;\ 24) \Rightarrow P(\chi^2 > x^2) = 0{,}95 \Rightarrow \chi^2 = 13{,}848$

4- تحديد قيمة f في كل حالة من الحالات التالية:

$$F(0{,}95\ ;\ 4\ ;\ 6)\text{ ، }F(0{,}10\ ;\ 8\ ;4)\text{ ، }F(0{,}025\ ;\ 9\ ;17)$$

* $F(0{,}025\ ;\ 9\ ;17)$: تمثل قيمة الإحصائية f التي يقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 9 و 17، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0{,}1\ ;\ 9\ ;17) \Rightarrow P(F > f) = 0{,}1 \Rightarrow f = 2{,}98$

* $F(0{,}10\ ;8\ ;4)$: تمثل قيمة الإحصائية f التي يقع على يمينها 10% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 8 و 4، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0{,}10\ ;\ 8\ ;4)) \Rightarrow P(F > f) = 0{,}1 \Rightarrow f = 3{,}95$

* $F(0{,}95\ ;4;\ 6)$: تمثل قيمة الإحصائية f التي يقع على يمينها 95% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 4 و 6، وبما أن النسبة كبيرة فإننا نستخرجها من جدول توزيع فيشر، بإيجاد قيمة f لـ 95% من المساحة عن طريق قيمة f لـ 5% من المساحة، وذلك بقسمة 1 على قيمة f لـ 5% مع تغيير درجتي الحرية. أي:

$$F(0{,}95\ ;4\ ;6) = \frac{1}{F(0{,}05\ ;6\ ;4)} \Rightarrow f = \frac{1}{6.16} = 0{,}162$$

حل التمرين السادس:

1- القراءة الإحصائية للعبارة السابقة: المتغير العشوائي X (ساعات العمل للبطارية الواحدة) يتوزع طبيعيا بمتوسط قدره 500 ساعة وإنحراف معياري قيمته 10 ساعات.

2- تحديد معالم المتغير العشوائي X، ثم أكتب شكل دالة كثافته الاحتمالية:

- متوسط ساعات العمل للبطارية الواحدة هو 500 ساعة، أي: $\mu = 500$
- الانحراف المعياري يساوي 10 ساعات، أي: $\sigma = 10$
- شكل دالة كثافته الاحتمالية: $f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-500}{10}\right)^2}$

3- حساب احتمال أن:

أ- بطارية ما ستعمل ما بين 500 ساعة و515 ساعة:

- $P(500 < X < 515) = P\left(\frac{500-500}{10} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{515-500}{10}\right) = P(0 < Z < 1{,}5)$

$$= P(Z < 1{,}5) - P(Z < 0) = 0{,}9332 - 0{,}5 = 0{,}4332$$

ب- بطارية ما ستعمل أقل من 480 ساعة:

- $P(X < 480) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{480-500}{10}\right) = P(Z < -2) = 0{,}0228$

ج- بطارية ما ستعمل أكثر من 510 ساعة:

- $P(X > 510) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{510-500}{10}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

4- أدنى ساعات العمل لـ 2,5% من البطاريات الأكثر جودة:

$$P\ (X > \alpha) = 0{,}025 \Leftrightarrow P\ (X < \alpha) = 0{,}975 \Leftrightarrow\ P\left(\frac{x-500}{10} < \frac{\alpha-500}{10}\right) = 0{,}975$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z < \frac{\alpha-500}{10}\right) = 0{,}975$$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد: $Z = 1{,}96$

أي أن: $\frac{\alpha-500}{10} = 1{,}96$ أي: $\alpha = 519{,}6\ \ kg$

<u>حل التمرين السابع:</u>

1- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 60، أي: $X \to \chi^2_{60}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة:

أ- الطريقة الأولى: نقوم بحساب: $P(X < x) = 0{,}975$، لكن جدول كاي مربع يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي كما يلي:

$$P(X < x) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0{,}025$$

ومن خلال جدول كاي مربع، نجد: التقاطع بين: $v = 60$ و $\alpha = 0{,}025$ وهو القيمة $x = 83{,}298$

أي أن: $P(X < 83{,}298) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq 83{,}298) = 0{,}025$

ب- الطريقة الثانية: بما أن: $30 \leq v < 100$ فإننا <u>نقرب</u> توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي:

$$z = \sqrt{2x} - \sqrt{2v - 1}$$

نبحث عن قيمة z التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة، فنجد أنها: $z = +1{,}96$، فنجد:

$$z = \sqrt{2x} - \sqrt{2v - 1} \Leftrightarrow 1{,}96 = \sqrt{2x} - \sqrt{2(60) - 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x} = 10{,}91 + 1{,}96$$

$$\Leftrightarrow x = 82{,}83$$

مع ملاحظة أن هذه القيمة تقريبية لقيمة كاي مربع.

2- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 100، أي: $X \to \chi^2_{100}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة.

أ- الطريقة الأولى: نقوم بحساب: $P(X < x) = 0{,}975$، لكن جدول كاي مربع يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي كما يلي:

$$P(X < x) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0{,}025$$

ومن خلال جدول كاي مربع، نجد: التقاطع بين: $v = 100$ و $\alpha = 0{,}025$ وهو القيمة $x = 129{,}561$

أي أن: $P(X < 129{,}561) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq 129{,}561) = 0{,}025$

ب- **الطريقة الثانية:** بما أن: $v \geq 100$: فإننا <u>نقرب</u> توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي:

$$z = \frac{x-v}{\sqrt{2v}}$$

نبحث عن قيمة z التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة، فنجد أنها: $z = +1{,}96$، فنجد:

$$z = \frac{x-v}{\sqrt{2v}} \Leftrightarrow 1{,}96 = \frac{x-100}{\sqrt{2(100)}}$$

$$\Leftrightarrow x - 100 = 1{,}96\sqrt{2(100)}$$

$$\Leftrightarrow x - 100 = 27{,}72$$

$$\Leftrightarrow x = 127{,}72$$

مع ملاحظة أن هذه القيمة تقريبية لقيمة كاي مربع.

<u>**حل التمرين الثامن:**</u>

1- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 4 و12، أي: $X \rightarrow F_{4,12}$، إيجاد قيمة x التي يقع على يمينها 0,90 من المساحة:

نقوم بحساب: $P(X > x) = 0{,}90$. لدينا: $1 - \alpha = 0{,}90 \Leftrightarrow \alpha = 0{,}1$

ومنه: $F_{(0,90),4,12} = \frac{1}{F_{(0,1),12,4}} = \frac{1}{3{,}90} = 0{,}256$

2- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 1 و14، أي: $X \rightarrow F_{1,14}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة:

أ- **الطريقة الأولى:** تمثل القيمة x الإحصائية التي يقع على يمينها 10% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 1 و14، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0{,}1\ ;\ 1\ ; 14) \Rightarrow P(F > x) = 0{,}1 \Rightarrow x = 3{,}1$

ب- **الطريقة الثانية:** $F_{(0,1),1,14} = t^2_{\left(1-\frac{0,1}{2}\right),14} = t^2_{(0,95),14} = (-1{,}761)^2 = 3{,}1$

3- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 15 و $+\infty$، أي: $X \rightarrow F_{15,+\infty}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة:

أ- **الطريقة الأولى:** تمثل القيمة x الإحصائية التي يقع على يمينها 10% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 15 و $+\infty$، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0{,}1\ ;\ 15\ ; +\infty) \Rightarrow P(F > x) = 0{,}1 \Rightarrow x = 1{,}49$

ب- **الطريقة الثانية:** $F_{(0,1),15,\infty} = \frac{\chi^2_{(0,1),15}}{15} = \frac{22{,}307}{15} = 1{,}49$

<u>**التمرين التاسع:**</u>

1- القانون الإجمالي الأصلي لـ X، مع التعليل:

قانون فوق الهندسي، أي: $X \rightarrow H(N\ ;\ n\ ;\ p)$ حيث: $X \rightarrow H(100\ ;\ 2\ ;\ 0{,}4)$

التعليل: عدم وجود الترتيب والتكرار أثناء اختيار الشخصين.

2- القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه، مع التعليل:

قانون ثنائي الحدين، أي: $X \rightarrow B(\ n\ ;\ p)$ حيث: $X \rightarrow B(\ 2\ ;\ 0{,}4)$، **لأن:** $\frac{n}{N} = \frac{2}{100} = 0{,}02 < 0{,}05$

3- حساب الأمل الرياضي والتباين في الحالتين:

أ- الحالة الأولى: عن طريق التوزيع الأصلي، أي فوق الهندسي

- التوقع الرياضي: $E(X) = np = 2(0,4) = 0,8$

- التباين: $V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 2(0,4)(0,6)\left(\frac{100-2}{100-1}\right) = 0,475$

ب- الحالة الثانية: عن طريق التوزيع المقرب إليه، أي ثنائي الحدين

- التوقع الرياضي: $E(X) = np = 2(0,4) = 0,8$

- التباين: $V(X) = npq = 2(0,4)(0,6) = 0,480$

- **الملاحظة:** من خلال النتائج المحصل عليها نلاحظ أنها متقاربة جدا في الحالتين، أي أنه كلما كان حجم العينة المسحوبة n صغيرا جدا بالمقارنة مع حجم المجتمع الذي سحبت منه N، فإننا يمكن تقريب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين.

4- حساب $P(X = 1)$ في الحالتين:

أ- الحالة الأولى: عن طريق التوزيع الأصلي، أي فوق الهندسي

$$P(X = 1) = \frac{C_{40}^{1} C_{60}^{2-1}}{C_{100}^{2}} = \frac{40\times 60}{4950} = 0,48$$

ب- الحالة الثانية: عن طريق التوزيع المقرب إليه، أي ثنائي الحدين

$$P(X = 1) = C_2^1(0,4)^1(0,6)^{2-1} = 0,48$$

- **الملاحظة:** من خلال النتائج المحصل عليها نلاحظ أنها متساوية في الحالتين، أي أنه كلما كان حجم العينة المسحوبة n صغيرا جدا بالمقارنة مع حجم المجتمع الذي سحبت منه N، فإننا يمكن تقريب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين.

__حل التمرين العاشر:__

1- حساب احتمال وجود أكثر من مصباح غير صالح:

أ- باستعمال قانون ثنائي الحدين: $X \to B(\,n\,;\,p)$ حيث: $X \to H(\,100\,;\,0,01)$.

$$*\,P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 1)\big)$$
$$= 1 - (C_{100}^{0}(0,01)^0(0,99)^{100} + C_{100}^{1}(0,01)^1(0,99)^{99})$$
$$= 1 - (0,366 + 0,370) = 0,264$$

ب- باستعمال قانون بواسون *Poisson* كتقريب لقانون ثنائي الحدين (بعد التأكد من شروط التقريب):

بما أن: $\big((n = 100) > 30\big)$ و $\big((P = 0,01) < 0,05\big)$ فإننا: نقرب قانون ثنائي الحدين من قانون بواسون فنجد: $\lambda = np = 100(0,01) = 1$

$$*\,P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 1)\big)$$
$$= 1 - \left(e^{-1}\,\frac{(1)^1}{1!} + e^{-1}\,\frac{(1)^0}{0!}\right)$$
$$= 1 - (2e^{-1}) = 0,264$$

2-المقارنة النتائج:

من خلال النتائج المحصل عليها نلاحظ أنها متساوية في الحالتين، أي أنه كلما كان حجم العينة المسحوبة n كبيرا جدا واحتمال النجاح صغير جدا، فإننا يمكن تقريب قانون ثنائي الحدين من قانون بواسون.

حل التمرين الحادي عشر:

أولا: 1- القانون الاحتمالي الذي يتبعه هذ المتغير العشوائي، مع تحديد معالمه:

قانون ثنائي الحدين، أي: $X \to B(\,n\,;\,p)$ حيث: $X \to B(35\;;\;0{,}6)$.

2- القانون الذي يمكننا أن نقربه إليه، مع تحديد معالمه:

لدينا: $(0{,}3 \leq P = 0{,}6 \leq 0{,}7)$ و $n = 35 > 30$ وبالتالي: نقرب قانون ثنائي الحدين من القانون الطبيعي $X \to N\left(np\,;\,\sqrt{npq}\right)$، أي: $X \to N\left(35 \times 0{,}6\;;\;\sqrt{35 \times 0{,}6 \times 0{,}4}\right)$، أي:

$X \to N(21\;;\;2{,}90)$

3- حساب احتمال الحصول على 25 حالة شفاء على الأكثر:

$$* \; P\,(X \leq 25) = P\,(X \leq 25 + 0{,}5) = P\,(X \leq 25{,}5)$$

$$= P\,\left(\frac{X-\mu}{\delta} \leq \frac{25{,}5-21}{2{,}90}\right) = P\,(Z \leq 1{,}55) = 0{,}9394$$

ثانيا: حسب مدير نفس المصنع، فإن نسبة عدم الشفاء باستخدام دواء آخر لنفس المرض هو 4%. سحبنا عشوائيا 400 شخصا من الذين تناولوا هذا الدواء.

ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد حالات عدم الشفاء باستخدام هذا الدواء.

1- القانون الاحتمالي الذي يتبعه هذ المتغير العشوائي، مع تحديد معالمه:

قانون ثنائي الحدين، أي: $X \to B(\,n\,;\,p)$ حيث: $X \to B(400\;;\;0{,}04)$.

2- القانون الذي يمكننا أن نقربه إليه، مع تحديد معالمه:

بما أن: $\big((n = 400) > 30\big)$ و $\big((P = 0{,}04) < 0{,}05\big)$ فإننا: نقرب قانون ثنائي الحدين من قانون بواسون فنجد: $\lambda = np = 400\,(0{,}04) = 16$

وبما أن: $\lambda = 16 > 15$: فإننا: نقرب قانون بواسون من القانون الطبيعي $X \to N\left(\lambda\,;\,\sqrt{\lambda}\right)$، أي:

$X \to N(16\;;\;4)$

3- حساب احتمال الحصول على 12 حالة عدم شفاء على الأقل:

$$* \; P\,(X \geq 12) = 1 - P\,(X < 12) = 1 - P\,(X \leq 11 + 0{,}5) = 1 - P\,(X \leq 11{,}5)$$

$$= 1 - P\,\left(\frac{X-\mu}{\delta} \leq \frac{11{,}5-16}{4}\right) = 1 - P\,(Z \leq -1{,}12) = 1 - 0{,}1314 = 0{,}8686$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

إذا كان لدينا متغيرعشوائي X يتبع التوزيع الممثل بدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1- أوجد قيمة الثابت θ علما أن التباين يساوي 25 .

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$.

3- أحسب الاحتمالات: $P(X \leq 4)$ ، $P(2 \leq X \leq 6)$

4- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين الثاني:

ناد علمي يتشكل من 65 عضوا، 45 رجال و20 نساء، نريد اختيار عشوائيا ثلاثة أشخاص منهم للمشاركة في ملتقى علمي، ليكن X : عدد الرجال الذين يتم اختيارهم.

1- ما هو القانون الإجمالي الأصلي لـ: X؟ علل ذلك.

2- ما هو القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه؟ علل ذلك.

3- أحسب الأمل الرياضي والتباين في الحالتين. ماذا تلاحظ؟

4- أحسب $P(X = 1)$ في الحالتين. ماذا تلاحظ؟

التمرين الثالث:

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل الزمن المستغرق بالساعات لإنتاج آلة حلاقة بالشركة، يتبع توزيع قاما ذات المعلمتين α و β، حيث: $X \rightarrow G(2\ ; 5)$

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير ، ومثلها بيانيا.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$.

3- أحسب احتمال أن يكون الوقت المستغرق لإنتاج آلة الحلاقة يقل عن 4 ساعات.

4- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين الرابع:

أولا: حسب رئيس أحد أقسام العلوم الاقتصادية، فإن نسبة النجاح بالقسم تقدر بـ55%. سحبنا عشوائيا 40 طالبا من طلبة القسم. ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الطلبة الناجحين بالقسم.

1- ما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه هذ المتغير العشوائي؟ حدد معالمه.

2- ما هو القانون الذي يمكننا أن نقربه إليه؟ حدد معالمه.

3- أحسب احتمال الحصول على 20 طالبا من الناجحين على الأقل.

ثانيا: حسب رئيس نفس القسم، فإن نسبة الطلبة المتحصلين على علامة أقل من 10 في مقياس الإحصاء 3 هو 4%.
سحبنا عشوائيا 400 طالب من الذين اجتازوا امتحان الإحصاء3.

ليكن المتغير العشوائي X عدد الطلبة المتحصلين على علامة أقل من 10 في مقياس الإحصاء 3.

1- ما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه هذ المتغير العشوائي؟ حدد معالمه.

2- ما هو القانون الذي يمكننا أن نقربه إليه؟ حدد معالمه.

3- أحسب احتمال الحصول على 17 طالبا على الأكثر ممن تحصلوا على علامة أقل من 10.

التمرين الخامس:

1- لتكن Z المتغيرة المعيارية، حيث $Z \to N(0\,,1)$. أحسب الاحتمالات التالية:

أ- $P(-1{,}56 < Z < 1{,}84)$ ، ب- $P(|Z| \geq 1{,}96)$ ، ج- $P(|Z| \geq 2{,}58)$ ، د- $P(|Z| \geq 1{,}64)$

2- حدد قيمة t في كل من الحالات التالية: $t(0{,}05\ ;\ 12)$ ، $t(0{,}95\ ;\ 21)$ ، $t(0{,}99\ ;\ 14)$

3- حدد قيمة x^2 في كل من الحالات التالية : $\chi^2(0{,}005\ ;\ 17)$ ، $\chi^2(0{,}975\ ;\ 5)$ ، $\chi^2(0{,}90\ ;\ 9)$

4- حدد قيمة f في كل حالة من الحالات التالية: $F(0{,}05\ ;\ 7\ ;\ 14)$ ، $F(0{,}01\ ;\ 6\ ;\ 5)$ ، $F(0{,}90\ ;\ 4\ ;\ 6)$

التمرين السادس:

تفيد إحصائيات الاستهلاك الغذائي في الجزائر أن الاستهلاك السنوي من اللحوم بالكيلو غرام للفرد الواحد X تتوزع كما يلي: $X \to N(45\,,11)$

1- ما هي القراءة الإحصائية للعبارة السابقة.

2- حدد معالم المتغير العشوائي X، ثم أكتب شكل دالة كثافته الاحتمالية.

3- أحسب احتمال استهلاك خلال سنة معينة:

أ- ما بين 25 كلغ و40 كلغ. ب- أقل من 67 كلغ. ج- أكثر من 55 كلغ.

3- أحسب الوسيط، المنوال، الربيع الأول. اشرح النتائج.

التمرين السابع:

إذا كان لدينا متغيرعشوائي X يتبع التوزيع الممثل بدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \in [4-7] \\ 0 & x \notin [4-7] \end{cases}$$

1- ما هو نوع التوزيع الذي يتبعه هذا المتغير؟ علل ذلك.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$.

3- أحسب الاحتمالات: $P(X \leq 4)$ ، $P(2 \leq X \leq 6)$

4- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين الثامن:

1- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 80، أي: $X \to \chi^2_{80}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,95 من المساحة.

2- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 100، أي: $X \to \chi^2_{100}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,95 من المساحة.

التمرين التاسع:

إذا كانت نسبة الإنتاج الشهرية من مادة الحليب بأحد المصانع ، تتبع توزيع بيتا، حيث: $X \to B(3\,;3)$

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$.

4- أحسب كلا من التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين العاشر:

1- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 7 و 22، أي: $X \to F_{7\,,22}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,975 من المساحة.

2- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 1 و 20، أي: $X \to F_{1\,,20}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة.

3- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 6 و $+\infty$، أي: $X \to F_{6,+\infty}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة.

المحور الثالث

المتغيرات العشوائية الثنائية

نتطرق من خلال هذ المحور إلى العناصر التالية:

- تمهيد

أولا: المتغيرات العشوائية الثنائية المنفصلة؛

ثانيا: المتغيرات العشوائية الثنائية المتصلة؛

ثالثا: التوزيع الشرطي الثنائي؛

رابعا: المتغيرات العشوائية المستقلة؛

خامسا: توقع وتباين المتغير العشوائي الثنائي

سادسا: معامل الارتباط.

- تمارين محلولة

- تمارين مقترحة

تمهيد:

تم من خلال المحاور السابقة دراسة التوزيعات الاحتمالية ذات البعد الواحد، حيث أنها تعتمد على متغير عشوائي واحد، لكن في حالات كثيرة فإننا نكون أمام دراسة تتضمن متغيرين أو أكثر، وهو ما يجعلنا نهتم بدراسة وتقييم العلاقات الاحصائية بين هذه المتغيرات، حيث أن هذه المتغيرات قد تكون عشوائية منفصلة، أو متصلة، أو مختلطة (منفصلة ومتصلة). ومن خلال هذا المحور سندرس المتغيرات العشوائية ذات بعدين، أو ما تسمى بالمتغيرات العشوائية الثنائية.

أولا: المتغيرات العشوائية الثنائية المنفصلة

1- دالة الاحتمال المشتركة للمتغير العشوائي الثنائي المنفصل:

ليكن $(X\ ,Y)$ متغير عشوائي ثنائي (ذو بعدين) منفصل، نسمي الاحتمال $P(X\ =\ x\ ,Y\ =\ y)$ والذي يرمز له بـ $f(x,y)$ بدالة الاحتمال المشتركة لـ X و Y، التي يمكن التعبير عنها عن طريق جدول للاحتمالات المشتركة، حيث يحقق هذا الجدول الخاصيتين التاليتين: $\begin{cases} f(x,y) \geq 0 \\ \sum_x \sum_y f(x,y) = 1 \end{cases}$

X \ Y	y_1	y_2	....	y_m	$f_1(x)$
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	....	$f(x_1,y_m)$	$f_1(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	....	$f(x_2,y_m)$	$f_1(x_2)$
....	....	....	....	....	....
x_n	$f(x_n,y_1)$	$f(x_n,y_2)$	....	$f(x_n,y_m)$	$f_1(x_n)$
$f_2(y)$	$f_2(y_1)$	$f_2(y_2)$	....	$f_2(y_m)$	1

2- دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي الثنائي المنفصل:

هي دالة عددية نرمزلها بـ: $F(x,y)$، وهي معرفة كالتالي:

$$\boxed{\boldsymbol{F(x,y) = P(X \leq x\ ,Y \leq y) = \sum_{u\leq x}\sum_{v\leq y} f(u,v)}}$$

تحقق دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي الثنائي المنفصل الخواص التالية:

- $F(x,y)$ دالة عددية متزايدة؛
- أدنى قيمة لـ $F(x,y)$ هي 0؛
- أقصى قيمة لـ $F(x,y)$ هي 1؛
- في حالة المتغير العشوائي المنفصل تسمى $F(x,y)$ الدالة التجميعية الصاعدة.

مثال1: كيس يحتوي على 6 كريات، 2 حمراء (R) و 2 بيضاء (B) و2 سوداء (N)، نسحب عشوائيا كريتين دفعة واحدة.

ليكن المتغيرين العشوائيين X و Y، حيث: X: عدد الكريات الحمراء المسحوبة، و Y: عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

- أوجد دالة الاحتمال المشتركة (جدول الاحتمالات المشتركة) للمتغير العشوائي الثنائي $(X\ ,Y)$.
- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X\ =\ 1\ ,Y\ =\ 1)$ ، $P(X\ \leq\ 2\ ,Y\ \leq\ 0)$ ، $P(X\ \leq\ 1\ ,Y\ \leq\ 1)$.

الحل:

- **إيجاد دالة الاحتمال المشتركة (جدول الاحتمالات المشتركة) للمتغير العشوائي الثنائي $(X\ ,Y)$:**

العينات الممكنة	X	Y	احتمال كل عينة
R_1R_2	2	0	$1/15$
R_1B_1	1	1	$1/15$
R_1B_2	1	1	$1/15$
R_1N_1	1	0	$1/15$
R_1N_2	1	0	$1/15$
R_2B_1	1	1	$1/15$
R_2B_2	1	1	$1/15$
R_2N_1	1	0	$1/15$
R_2N_2	1	0	$1/15$
B_1B_2	0	2	$1/15$
B_1N_1	0	1	$1/15$
B_1N_2	0	1	$1/15$
B_2N_1	0	1	$1/15$
B_2N_2	0	1	$1/15$
N_1N_2	0	0	$1/15$

نحصل على دالة الاحتمال المشتركة (جدول الاحتمالات المشتركة) للمتغير العشوائي الثنائي $(X\ ,Y)$ التالي:

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_1(x)$
0	$1/15$	$4/15$	$1/15$	$6/15$
1	$4/15$	$4/15$	0	$8/15$
2	$1/15$	0	0	$1/15$
$f_2(y)$	$6/15$	$8/15$	$1/15$	1

- حساب الاحتمالات التالية: $\boldsymbol{P(X = 1\ ,Y = 1)}$ ، $\boldsymbol{P(X \le 1\ ,Y \ge 1)}$ ، $\boldsymbol{P(X \le 1\ ,Y \le 1)}$:

$$*\ P(X = 1\ ,Y = 1) = 4/15$$

$$*\ P(X \le 1\ ,Y \le 0) = F(1,0) = P(X = 0\ ,Y = 0) + P(X = 1\ ,Y = 0)$$
$$= 1/15 + 4/15 = 5/15 = 0{,}33$$

$$*\ P(X \le 1\ ,Y \le 1) = F(1,1)$$
$$= P(X = 1\ ,Y = 1) + P(X = 1\ ,Y = 0) + P(X = 0\ ,Y = 1) + P(X = 0\ ,Y = 0)$$
$$= 4/15 + 4/15 + 4/15 + 1/15 = 13/15 = 0{,}87$$

3- دالة الاحتمال الهامشية (الحدية) ودالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي الثنائي المنفصل:

إذا كان الاهتمام ينصب على دراسة أحد المتغيرين العشوائيين فقط X أو Y، في دالة الاحتمال للمتغير العشوائي الثنائي المنفصل، فإننا نكون بصدد دالة تسمى بدالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X أو Y، أي: $f_1(x)$ أو $f_2(y)$.

- **دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X:** $\boxed{f_1(x) = \sum_{y\{x\}} f(x,y)}$، حيث تمثل مجموع الاحتمالات بالنسبة لـ x المرتبطة بقيم y المعطاة.

- **دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y:** $\boxed{f_2(y) = \sum_{x\{y\}} f(x,y)}$، حيث تمثل مجموع الاحتمالات بالنسبة لـ y المرتبطة بقيم x المعطاة.

أما دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية لكل متغير عشوائي، فتعطى كما يلي:

- **دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي X:** $\boxed{F_1(x) = \sum_{u \le x} f_1(u)}$

- **دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي Y:** $\boxed{F_2(y) = \sum_{v \le y} f_2(v)}$

مثال2: بالعودة للمثال السابق، أوجد كلا من دالة الاحتمال الهامشية ودالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغيرين X و Y،

الحل:

- دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X:

$$* f_1(0) = P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2) = \frac{1}{15}+\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{6}{15}$$

$$* f_1(1) = P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2) = \frac{4}{15}+\frac{4}{15}+0=\frac{8}{15}$$

$$* f_1(2) = P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2) = \frac{1}{15}+0+0=\frac{1}{15}$$

X	0	1	2	$f_1(x)$
$f_1(x)$	6/15	8/15	1/15	1

- دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y:

$$* f_2(0) = P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2) = \frac{1}{15}+\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{6}{15}$$

$$* f_2(1) = P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2) = \frac{4}{15}+\frac{4}{15}+0=\frac{8}{15}$$

$$* f_2(2) = P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2) = \frac{1}{15}+0+0=\frac{1}{15}$$

Y	0	1	2	$f_2(y)$
$f_2(y)$	6/15	8/15	1/15	1

- دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي X:

X	0	1	2	$f_1(x)$
$f_1(x)$	6/15	8/15	1/15	1
$F_1(x)$	6/15	14/15	1	−

- دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي Y:

Y	0	1	2	$f_2(y)$
$f_2(y)$	6/15	8/15	1/15	1
$F_2(y)$	6/15	14/15	1	−

ثانيا: المتغيرات العشوائية الثنائية المتصلة

1- دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغير العشوائي الثنائي المتصل:

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ثنائي (ذو بعدين) متصل، نسمي $f(x,y)$ بدالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ X و Y، حيث تحقق الخاصيتين التاليتين:

$$\begin{cases} f(x,y) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \end{cases}$$

2- دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي الثنائي المتصل:

هي دالة عددية نرمز لها بـ: $F(x,y)$، وهي معرفة كالتالي:

$$\boxed{\boldsymbol{F(x,y) = P(X\leq x, Y\leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv}}$$

يمكن استنتاج دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة من دالة التوزيع الاحتمالية بالاشتقاق، كما يلي: $f(x,y) = \partial^2 \frac{F(x,y)}{\partial x\, \partial y}$

مثال3: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x+y) & 0 \le x \le 3 \quad , \quad 1 \le y \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1- أثبت أن الدالة $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية مشتركة.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية، وأحسب الاحتمال $P\left(X \le 2 \,, Y \le \frac{3}{2}\right)$.

الحل:

1- إثبات أن الدالة $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية مشتركة:

- من الواضح أن الشرط الأول $(f(x,y) \ge 0)$ محقق عند جميع قيم x و y في المجال المعرف عليها الدالة.

- بالنسبة للشرط الثاني $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1\right)$ فنقوم بإثباته كما يلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{1}(0)\,dx\,dy + \int_{0}^{3}\int_{1}^{2}\frac{1}{9}(x+y)\,dx\,dy + \int_{3}^{+\infty}\int_{2}^{+\infty}(0)\,dx\,dy$$

$$= 0 + \frac{1}{9}\int_0^3 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)_1^2 dx + 0$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 \left(2x + \frac{2^2}{2}\right) - \left(x + \frac{1^2}{2}\right) dx = \frac{1}{9}\int_0^3 \left(2x + 2 - x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 \left(x + \frac{3}{2}\right) dx = \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right)_0^3$$

$$= \frac{1}{9}\left(\left(\frac{3^2}{2} + \frac{3}{2}(3)\right) - \left(\frac{0^2}{2} + \frac{3}{2}(0)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{9}(9) = 1$$

2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية، وحساب الاحتمال $P\left(X \le 2 \,, Y \le \frac{3}{2}\right)$:

- إذا كان $x < 0 \quad , \quad y < 1$، فإن:

$$* \; F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}(0)\,dx\,dy = 0$$

- إذا كان $0 \le x \le 3 \quad , \quad 1 \le y \le 2$، فإن:

$$* \; F(x,y) = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{x}\int_{1}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{1}(0)\,dx\,dy + \int_{0}^{x}\int_{1}^{y}\frac{1}{9}(x+y)\,dx\,dy = 0 + \frac{1}{9}\int_0^x \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)_1^y dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^x \left(\left(xy + \frac{y^2}{2}\right) - \left(x + \frac{1^2}{2}\right)\right) dx = \frac{1}{9}\int_0^x \left(xy + \frac{y^2}{2} - x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^x \left(x(y-1) + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{9}\left((y-1)\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}x - \frac{1}{2}x\right)_0^x$$

$$= \frac{1}{9}\left((y-1)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\right)x\right)$$

- إذا كان $x > 3 \quad , \quad y > 2$، فإن:

$$* \; F(x,y) = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{3}\int_{1}^{2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{3}^{+\infty}\int_{1}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{1}(0)\,dx\,dy + \int_{0}^{3}\int_{1}^{2}\frac{1}{9}(x+y)\,dx\,dy + \int_{3}^{+\infty}\int_{1}^{+\infty}(0)\,dx\,dy = 0+1+0 = 1$$

وبالتالي:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x<0 \quad , \quad y<1 \\ \frac{1}{9}\left((y-1)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\right)x\right) & 0 \le x \le 3 \quad , \quad 1 \le \; y \le 2 \\ 1 & x>3 \quad , \quad y>2 \end{cases}$$

- حساب الاحتمال $\boldsymbol{P\left(X \le 2\,, Y \le \frac{3}{2}\right)}$:

$$* \; P\left(X \le 2\,, Y \le \frac{3}{2}\right) = F\left(2,\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{9}\left(\left(\frac{3}{2}-1\right)\frac{2^2}{2} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}-\frac{1}{2}\right)2\right) = 0{,}25$$

3- دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية (الحدية) ودالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي الثنائي المتصل:

إذا كان الاهتمام ينصب على دراسة أحد المتغيرين العشوائيين فقط X أو Y، في دالة الاحتمال للمتغير العشوائي الثنائي المتصل، فإننا نكون بصدد دالة تسمى بدالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي X أو Y، أي: $f_1(x)$ أو $f_2(y)$.

- **دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي X:** $\boxed{f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}$
- **دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y:** $\boxed{f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}$

أما دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية لكل متغير عشوائي، فتعطى كما يلي:

- **دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي X:** $\boxed{F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx}$
- **دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي Y:** $\boxed{F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\,dy}$

مثال4: بالعودة للمثال السابق، أوجد كلا من دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية ودالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغيرين X و Y.

الحل:

- **دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي X:**

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{1}^{2}\frac{1}{9}(x+y)dy = \frac{1}{9}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)_1^2 = \frac{1}{9}\left(\left(2x+\frac{2^2}{2}\right)-\left(x+\frac{1^2}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(2x+2-x-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{9}\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

- **دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي Y:**

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{3}\frac{1}{9}(x+y)dx = \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)_0^3 = \frac{1}{9}\left(\left(\frac{3^2}{2}+3y\right)-\left(\frac{0^2}{2}+(0)y\right)\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(3y + \frac{9}{2}\right)$$

$$f_2(y) = \frac{1}{9}\left(3y + \frac{9}{2}\right)$$

- دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي X:

- إذا كان $0 \le x \le 3$، فإن:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{9}\left(x + \frac{3}{2}\right)dx = \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right)_0^x = \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right)$$

وبالتالي:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right) & 0 \le x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

- دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي Y:

- إذا كان $1 \le y \le 2$، فإن:

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\,dy = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{9}\left(3y + \frac{9}{2}\right)dy = \frac{1}{9}\left(\frac{3y^2}{2} + \frac{9}{2}y\right)_1^y = \frac{1}{9}\left(\frac{3y^2}{2} + \frac{9}{2}y - 6\right)$$

وبالتالي:

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \frac{1}{9}\left(\frac{3y^2}{2} + \frac{9}{2}y - 6\right) & 1 \le y \le 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases}$$

ثالثا: التوزيع الشرطي الثنائي

1- دالة الاحتمال الشرطي للمتغير العشوائي الثنائي المنفصل

ليكن $(X\,,Y)$ متغير عشوائي ثنائي (ذو بعدين) منفصل، دالة الاحتمال المشتركة له $f(x,y)$، ودالتي الاحتمال الهامشية لكل من X و Y هما على التوالي: $f_1(x)$ و $f_2(y)$ ، نسمي $f(x/y)$ دالة الاحتمال الشرطي للمتغير العشوائي المنفصل X عندما يكون المتغير العشوائي المنفصل $Y = y$ معطى، الذي يحسب بالعلاقة التالية:

$$f(x/y) = P(X = x/Y = y) = \frac{P(X=x\,,Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

مثال5: بالعودة للمثال1، أوجد دالتي الاحتمال الشرطي التاليتين: $f(x/y = 1)$ و $f(y/x = 0)$.

الحل: وجدنا أن دالة الاحتمال المشتركة (جدول الاحتمالات المشتركة) للمتغير العشوائي الثنائي $(X\,,Y)$ موزعة كما يلي:

X \ Y	0	1	2	$f_1(x)$
0	1/15	4/15	1/15	6/15
1	4/15	4/15	0	8/15
2	1/15	0	0	1/15
$f_2(y)$	6/15	8/15	1/15	1

- بالنسبة للدالة $f(x/y = 1)$: سنقوم بإيجاد احتمالات تحقق X علما أن $Y = 1$، وذلك كما يلي:

$$* \; f(0/1) = P(X = 0/Y = 1) = \frac{P(X=0\,,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{f(0{,}1)}{f_2(1)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{2}$$

$$* \; f(1/1) = P(X = 1/Y = 1) = \frac{P(X=1\,,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{f(1{,}1)}{f_2(1)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{2}$$

$$* \; f(2/1) = P(X = 2/Y = 1) = \frac{P(X=2\,,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{f(2{,}1)}{f_2(1)} = \frac{0}{\frac{8}{15}} = 0$$

وبالتالي فإن دالة الاحتمال الشرطي: $f(x/y = 1)$

$X/\,Y = 1$	0	1	2	$\sum(X/\,y = 1)$
$f(x/\,y = 1)$	1/2	1/2	0	1

- **بالنسبة للدالة $f(y/x = 0)$:** سنقوم بإيجاد احتمالات تحقق Y علما أن $X = 0$، وذلك كما يلي:

$$* \; f(0/0) = P(Y = 0/X = 0) = \frac{P(X=0\,,Y=0)}{P(X=0)} = \frac{f(0{,}0)}{f_1(0)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{6}{15}} = \frac{1}{6}$$

$$* \; f(1/0) = P(Y = 1/X = 0) = \frac{P(X=0\,,Y=1)}{P(X=0)} = \frac{f(0{,}1)}{f_1(0)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{6}{15}} = \frac{4}{6}$$

$$* \; f(2/0) = P(Y = 2/X = 0) = \frac{P(X=0\,,Y=2)}{P(Y=0)} = \frac{f(0{,}2)}{f_1(0)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{6}{15}} = \frac{1}{6}$$

وبالتالي فإن دالة الاحتمال الشرطي: $f(y/x = 0)$

$Y/X = 0$	0	1	2	$\sum(Y/\,X = 0)$
$f(y/\,x = 0)$	1/6	4/6	1/6	1

1- دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية للمتغير العشوائي الثنائي المتصل

ليكن $(X\,,Y)$ متغير عشوائي ثنائي (ذو بعدين) متصل، دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة له $f(x,y)$، ودالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y هما على التوالي: $f_1(x)$ و $f_2(y)$ ، نسمي $f(x/y)$ دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية للمتغير العشوائي المتصل X عندما يكون المتغير العشوائي المتصل $Y = y$ معطى، الذي يحسب بالعلاقة التالية:

$$\boxed{f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}}$$

مثال6: بالعودة للمثال3، أوجد دالة الاحتمال الشرطي $f(x/y)$، وأحسب الاحتمال $P\left(X \le 2/Y \le \frac{3}{2}\right)$.

الحل:

- **إيجاد دالة الاحتمال الشرطي $f(x/y)$:**

لدينا: $f(x,y) = \frac{1}{9}(x + y)$ و $f_2(y) = \frac{1}{9}\left(3y + \frac{9}{2}\right)$

وبالتالي: $$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\frac{1}{9}(x+y)}{\frac{1}{9}\left(3y+\frac{9}{2}\right)} = \frac{2(x+y)}{3(2y+3)}$$

- حساب الاحتمال $\mathbf{P\left(X \le 2/Y \le \frac{3}{2}\right)}$:

$$* P\left(X \le 2\,, Y \le \frac{3}{2}\right) = F\left(2, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{9}\left(\left(\frac{3}{2} - 1\right)\frac{2^2}{2} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} - \frac{1}{2}\right)2\right) = 0{,}25$$

$$* P\left(Y \le \frac{3}{2}\right) = \int_1^{\frac{3}{2}} f_2(y)dy = \frac{1}{9}\int_1^{\frac{3}{2}}\left(3y + \frac{9}{2}\right)dy = \frac{1}{9}\left(\left(3\frac{y^2}{2} + \frac{9}{2}y\right)\right)_1^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\left(3\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\right) - \left(\left(3\frac{(1)^2}{2} + \frac{9}{2}(1)\right)\right)\right) = 0{,}458$$

$$* \ P\left(X \le 2/Y \le \frac{3}{2}\right) = \frac{P\left(X \le 2\,, Y \le \frac{3}{2}\right)}{P\left(Y \le \frac{3}{2}\right)} = \frac{\mathbf{0{,}25}}{0{,}458} = 0{,}456$$

رابعا: المتغيرات العشوائية المستقلة

1- في حالة المتغير العشوائي الثنائي المنفصل:

ليكن $(X\,, Y)$ متغير عشوائي ثنائي (ذوبعدين) منفصل، الدالة الاحتمالية المشتركة له $f(x,y)$، ودالتي الاحتمال الهامشية لكل من X و Y هما على التوالي: $f_1(x)$ و$f_2(y)$، تكون X و Y مستقلتان إذا وفقط إذا كان:

$$P(X = x\,,\ Y = y) = P(X = x)P(\,Y = y)$$
$$f(x,y) = f_2(y)\,f_1(x)$$

مثال7: نرمي زهرة نرد وقطعة نقد مرة واحدة، ليكن المتغيرين العشوائيين X و Y، حيث: X: عدد مرات ظهور رقم فردي، و Y: عدد مرات ظهور الوجه F. هل المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين.

الحل:

- **إيجاد دالة الاحتمال المشتركة (جدول الاحتمالات المشتركة) للمتغير العشوائي الثنائي $(X\,, Y)$:**

العينات الممكنة	X	Y	احتمال كل عينة
$1F$	1	1	1/12
$2F$	1	0	1/12
$3F$	1	1	1/12
$4F$	1	0	1/12
$5F$	1	1	1/12
$6F$	1	0	1/12
$1P$	0	1	1/12
$2P$	0	0	1/12
$3P$	0	1	1/12
$4P$	0	0	1/12
$5P$	0	1	1/12
$6P$	0	0	1/12

نحصل على دالة الاحتمال المشتركة (جدول الاحتمالات المشتركة) للمتغير العشوائي الثنائي $(X\ ,Y)$ التالي:

X \ Y	0	1	$f_1(x)$
0	3/12	3/12	6/12
1	3/12	3/12	6/12
$f_2(y)$	6/12	6/12	1

$$*\ P(X=0\ ,\ Y=0)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}\quad ,\quad P(X=0)\ P(\ Y=0)=\frac{6}{12}\times\frac{6}{12}=\frac{36}{144}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

أي أن: $P(X=0\ ,\ Y=0)=\ P(X=0)\ P(\ Y=0)$، وهكذا بالنسبة لباقي الثنائيات،

وبالتالي فإن: $P(X=x\ ,\ Y=y)=P(X=x)P(\ Y=y)$، أي أن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين.

2-في حالة المتغير العشوائي الثنائي المتصل:

ليكن $(X\ ,Y)$ متغير عشوائي ثنائي (ذو بعدين) متصل، دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة له $f(x,y)$، ودالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y هما على التوالي: $f_1(x)$ و$f_2(y)$.

تكون X و Y مستقلتان إذا وفقط إذا كان:

$$P(X\le x\ ,\ Y\le y)=P(X\le x)P(\ Y\le y)$$
$$F(x,y)=F_2(y)F_1(x)$$

مثال8: بالرجوع للمثال3، هل المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين.

الحل: بالرجوع إلى حل المثال3 سابقا، تحصلنا على النتائج التالية:

$$*\ F(x,y)=\frac{1}{9}\left((y-1)\frac{x^2}{2}+\left(\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\right)x\right)$$

$$*\ F_1(x)=\frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x\right)$$

$$*\ F_2(y)=\frac{1}{9}\left(\frac{3y^2}{2}+\frac{9}{2}y-6\right)$$

نلاحظ أن: $F(x,y)\neq F_1(x)F_2(y)$، وبالتالي المتغيرين العشوائيين X و Y غير مستقلين.

مثال9: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{96}xy & 0\le x\le 4\ \ ,\ \ 1\le y\le 5\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

- هل المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين.

الحل: يمكننا أن نتحصل على النتائج التالية بنفس الطريقة المتبعة في حل المثالين 3 و4:

$$*\ F(x,y)=\frac{1}{384}\left((y^2-1)x^2\right)$$

$$*\ F_1(x)=\frac{1}{16}x^2$$

$$*\ F_2(y)=\frac{1}{24}(y^2-1)$$

نلاحظ أن: $F_1(x)F_2(y) = \left(\frac{1}{16}x^2\right)\left(\frac{1}{24}(y^2-1)\right) = \frac{1}{384}\left((y^2-1)x^2\right) = F(x,y)$

وبالتالي المتغيرين العشوائيين X و Y غير مستقلين.

خامسا: توقع وتباين المتغير العشوائي الثنائي

1- التوقع الرياضي:

إذا كان Z متغير عشوائي مرتبط بالمتغيرين X و Y، أي أن $Z = z_{(X,Y)}$ دالة إلى X و Y، فإن التوقع الرياضي للقيمة Z يعطى بالصيغة التالية:

أ- في حالة المتغير العشوائي الثنائي المنفصل: $\boxed{E(Z) = \sum\sum z_{(x,y)}f(x,y)}$

ب- في حالة المتغير العشوائي الثنائي المتصل: $\boxed{E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} z_{(x,y)}f(x,y)\ dx\ dy}$

وكحالة خاصة، إذا كان: $Z = aX \pm bY$، فإن التوقع الرياضي يحسب كما يلي:

$$E(Z) = aE(X) \pm bE(Y)$$

حيث: $E(X) = \sum x f_1(x)$ و $E(Y) = \sum y f_2(y)$ في حالة المتغير المنفصل.

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx$ و $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)dy$ في حالة المتغير المتصل.

2- التباين:

إذا كان Z متغير عشوائي مرتبط بالمتغيرين X و Y، أي أن $Z = z_{(X,Y)}$ دالة إلى X و Y، فإن التباين للقيمة Z يعطى بالصيغة التالية:

$$\boxed{V(Z) = E(Z^2) - \left(E(Z)\right)^2}$$

أ- في حالة المتغير العشوائي الثنائي المنفصل: $E(Z^2) = \sum\sum z_{(x,y)}^2 f(x,y)$

ب- في حالة المتغير العشوائي الثنائي المتصل: $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} z_{(x,y)}^2 f(x,y)\ dx\ dy$

وكحالة خاصة، إذا كان: $Z = aX \pm bY$، فإن التباين يحسب كما يلي:

$$V(Z) = a^2V(X) + b^2V(Y) \mp 2Cov(X,Y)$$

حيث: $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \quad , \quad V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2$

$E(X^2) = \sum x^2 f_1(x)$ و $E(Y^2) = \sum y^2 f_2(y)$ في حالة المتغير المنفصل.

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)dx$ و $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y)dy$ في حالة المتغير المتصل.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$Cov(X,Y)$: تمثل التغاير أو التباين المشترك، ومن خصائصه، أنه إذا كان X و Y مستقلتان، فإن:

$$E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow Cov(X,Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

مثال10: إذا كانت لدينا دالة الاحتمال المشتركة (جدول الاحتمالات المشتركة) للمتغير العشوائي الثنائي $(X\ ,Y)$:

X \ Y	0	1	2	$f_1(x)$
0	1/15	4/15	1/15	6/15
1	4/15	4/15	0	8/15
2	1/15	0	0	1/15
$f_2(y)$	6/15	8/15	1/15	1

1- أحسب التوقع الرياضي والتباين لكل من X و Y.

2- أحسب التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي Z، حيث: $Z = X + Y$ بطريقتين.

الحل:

1- حساب التوقع الرياضي والتباين لكل من X و Y:

$$*E(X) = \sum x f_1(x) = 0 \times \frac{6}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$*E(Y) = \sum y f_2(y) = 0 \times \frac{6}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$*V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2 f_1(x) = 0^2 \times \frac{6}{15} + 1^2 \times \frac{8}{15} + 2^2 \times \frac{1}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{4}{5} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{5} - \frac{4}{9} = \frac{16}{45}$$

$$*V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2$$

$$E(Y^2) = \sum y^2 f_2(y) = 0^2 \times \frac{6}{15} + 1^2 \times \frac{8}{15} + 2^2 \times \frac{1}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = \frac{4}{5} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{5} - \frac{4}{9} = \frac{16}{45}$$

2- حساب التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي Z، حيث: $Z = X + Y$

أ- التوقع الرياضي:

- الطريقة الأولى:

$Z = X + Y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

$$* E(Z) = \sum\sum z_{(x\ ,y)} f(x,y) = \sum\sum (x+y) f(x,y) = 0\left(\frac{1}{15}\right) + 1\left(\frac{4}{15}\right) + \cdots + 4(0) = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

- الطريقة الثانية:

$$* E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

ب- التباين:

- الطريقة الأولى:

$$* V(Z) = E(Z^2) - \left(E(Z)\right)^2$$

$$E(Z^2) = \sum\sum z_{(x,y)}^2 f(x,y) = \sum\sum(x+y)^2 f(x,y) = 0^2\left(\frac{1}{15}\right) + 1^2\left(\frac{4}{15}\right) + \cdots + 4^2(0) = \frac{32}{15}$$

$$V(Z) = \frac{32}{15} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{48}{135} = \frac{16}{45}$$

الطريقة الثانية:

$$* V(Z) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \sum\sum xyf(x,y) = 0\left(\frac{1}{15}\right) + 0\left(\frac{4}{15}\right) + \cdots + 4(0) = \frac{4}{15}$$

$$Cov(X, Y) = \frac{4}{15} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-8}{45}$$

$$V(Z) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y) = \frac{16}{45} + \frac{16}{45} + 2\left(\frac{-8}{45}\right) = \frac{32}{45} - \frac{16}{45} = \frac{16}{45}$$

مثال11: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{96}xy & 0 \le x \le 4 \ , \ 1 \le y \le 5 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- أحسب التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي Z، حيث: $Z = X + Y$.

الحل:

- **حساب التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي Z، حيث: $Z = X + Y$:**

- **حساب التوقع الرياضي:** $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$$* \ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x)dx$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_1^5 \frac{1}{96}xy\ dy = \frac{1}{96}\left(x\frac{y^2}{2}\right)_1^5 = \frac{1}{96}\left(\left(\frac{5^2}{2}x\right) - \left(\frac{1^2}{2}x\right)\right) = \frac{1}{8}x$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x)dx = \int_0^4 x\left(\frac{1}{8}x\right)dx = \int_0^4 \frac{1}{8}x^2 dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^4 = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$$

$$* \ E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_2(y)dx$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^4 \frac{1}{96}xy\ dx = \frac{1}{96}\left(y\frac{x^2}{2}\right)_0^4 = \frac{1}{96}\left(\frac{4^2}{2}x\right) = \frac{1}{12}x$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_2(y)dy = \int_1^5 y\left(\frac{1}{12}y\right)dy = \int_1^5 \frac{1}{12}y^2 dy = \frac{1}{12}\left(\frac{y^3}{3}\right)_1^5 = \frac{(5^3-1^3)}{36} = \frac{124}{36} = \frac{31}{9}$$

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{8}{3} + \frac{31}{9} = \frac{55}{9} = 6{,}11$$

- **حساب التباين:** $V(Z) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$

$$* \ V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)dx = \int_0^4 x^2\left(\frac{1}{8}x\right)dx = \int_0^4 \frac{1}{8}x^3 dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^4 = \frac{256}{32} = 8$$

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 8 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$$

$$* \ V(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y)dx = \int_1^5 y^2\left(\frac{1}{12}y\right)dy = \int_1^5 \frac{1}{12}y^3 dy = \frac{1}{12}\left(\frac{y^4}{4}\right)_0^4 = \frac{5^4-1^4}{48} = 13$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 13 - \left(\frac{31}{9}\right)^2 = 13 - \frac{961}{81} = \frac{92}{81}$$

أثبتنا سابقا من خلال المثال9 أن: X و Y مستقلان، وبالتالي:

$$E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow Cov(X,Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

$$V(Z) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{8}{9} + \frac{92}{81} + 2(0) = \frac{164}{81} = 2{,}025$$

سادسا: معامل الارتباط

نرمز لمعامل الارتباط بين X و Y بالرمز $\rho_{(X,Y)}$، ويعرف بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\rho_{(X,Y)} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\delta_X\delta_Y}}$$

يتميز معامل الارتباط بالخواص التالية:

1. $\rho_{(X,Y)} = \rho_{(Y,X)}$
2. $\rho_{(X\mp a,Y\mp b)} = \rho_{(Y,X)}$، حيث a و b ثوابت.
3. $\rho_{(aX,bY)} = \rho_{(Y,X)}$
4. $\rho_{(X,X)} = 1$
5. $-1 \le \rho_{(Y,X)} \le +1$
6. إذا كان X و Y مستقلان، فإن: $\rho_{(Y,X)} = 0$، والعكس غير صحيح، أي: إذا كان معامل الارتباط معدوما، فهذا لا يعني أن X و Y مستقلان.

مثال12: إذا كانت لدينا دالة الاحتمال المشتركة (جدول الاحتمالات المشتركة) للمتغير العشوائي الثنائي (X,Y):

X \ Y	0	1	2	$f_1(x)$
0	1/15	4/15	1/15	6/15
1	4/15	4/15	0	8/15
2	1/15	0	0	1/15
$f_2(y)$	6/15	8/15	1/15	1

- أوجد قيمة معامل الارتباط $\rho_{(Y,X)}$.

الحل: بالرجوع لحل المثال10 وجدنا أن:

$$Cov(X,Y) = \frac{-8}{45} \quad , \quad V(Y) = \frac{16}{45} \quad , \quad V(X) = \frac{16}{45}$$

$$\rho_{(X,Y)} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\frac{-8}{45}}{\sqrt{\frac{16}{45}}\sqrt{\frac{16}{45}}} = \frac{\frac{-8}{45}}{\frac{16}{45}} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

بما أن معامل الارتباط يساوي $\rho_{(X,Y)} = -0{,}5$ فإن الارتباط عكسي متوسط.

مثال13: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{96}xy & 0\le x\le 4 \quad , \quad 1\le y\le 5\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

- أحسب التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي Z، حيث: $Z=X+Y$.

- أوجد قيمة معامل الارتباط $\rho_{(Y,X)}$.

الحل: بالرجوع لحل المثال11 وجدنا أن: $V(X)=\frac{8}{9}$ ، $V(Y)=\frac{92}{81}$ ، $Cov(X,Y)=0$

$$\rho_{(X,Y)}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{0}{\sqrt{\frac{8}{9}}\sqrt{\frac{92}{81}}}=0$$

بما أن معامل الارتباط يساوي $\rho_{(X,Y)}=0$ فإنه لا يوجد ارتباط بين X و Y.

تمارين محلولة

التمرين الأول:

إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X و Y معرفة كما يلي:

X \ Y	-1	0	1
-1	$1/8$	0	$1/8$
1	$4/8$	$2/8$	0

1- أثبت أن هذه الدالة هي دالة احتمال مشتركة.

2- أوجد دالتي الاحتمال الهامشية ودالتي التوزيع الاحتمالي الهامشية لكل من X و Y.

3- هل المتغيرين X و Y مستقلين أم لا؟

4- أحسب الاحتمالات: $P(X \le -1 , Y \le 0)$ ، $P(X > 0 , Y \le 0)$ ، $P(X \le 1 , Y = 0)$

5- أوجد دالتي الاحتمال الشرطي التاليتين: $f(x/y = 1)$ و $f(y/x = -1)$.

التمرين الثاني:

بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان مستقلان، لكل منهما جدول توزيع كما يلي:

X	-1	0	1
$P(X = x)$	$1/6$	$1/3$	$1/2$

Y	-1	0	1
$P(Y = y)$	$1/2$	$1/3$	$1/6$

1- أثبت أن هذين التوزيعين هما توزيعين احتماليين.

2- أوجد دالة الاحتمال المشتركة لهذين التوزيعين.

3- أحسب الاحتمالات: $P(X < 1/ Y \le 0)$ ، $P(X > 0 , Y \le 0)$ ، $P(X \le 0 , Y = 0)$

التمرين الثالث:

إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين المنفصلين X و Y معرفة كما يلي:

$$f(x , y) = \frac{x+2y}{28} \qquad x = 3; 5 \quad y = 1; 2$$

1- أوجد جدول الاحتمالات المشتركة للمتغيرين X و Y.

2- أوجد دالتي الاحتمال الهامشية لكل من X و Y.

3- هل المتغيرين X و Y مستقلين أم لا؟

4- أحسب التوقع الرياضي والتباين للمتغير: $Z = X - Y$.

التمرين الرابع:

إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين المستقلين X و Y معرفة كما يلي:

$X \backslash Y$	0	1	2
3	؟	؟	0,12
4	؟	0,2	0,16
5	؟	0,15	0,12
$f_2(y)$	0,1	؟	؟

1- أكمل جدول الاحتمالات المشتركة للمتغيرين X و Y، مع تحديد طريقة الحساب.

2- أوجد دالتي الاحتمال الشرطي التاليتين: $f(x/y=2)$ و $f(y/x=4)$.

3- أوجد قيمة معامل الارتباط بين X و Y.

التمرين الخامس:

إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين المنفصلين X و Y معرفة كما يلي:

$$f(x\,,y)=\frac{xy}{\alpha} \qquad x=0;1;2;3 \quad y=1;2$$

1- أوجد قيمة α حتى تكون هذه الدالة هي دالة الاحتمال المشتركة.

2- أوجد دالتي الاحتمال الهامشية لكل من X و Y.

3- هل المتغيرين X و Y مستقلين أم لا؟

4- أحسب التوقع الرياضي والتباين للمتغير: $Z=2X+3Y$.

5- أوجد قيمة المقدار $Cov(X\,,Y)$، ثم أحسب معامل الارتباط لهذين المتغيرين.

التمرين السادس:

لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{45}x(y+x) & 0\le x\le 3 \;\;,\;\; 2\le y\le 4\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

1- أثبت أن هذه الدالة هي دالة كثافة احتمالية مشتركة.

2- أوجد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y.

3- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x,y)$، ودالتي التوزيع الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y.

4- هل المتغيرين X و Y مستقلين أم لا؟

التمرين السابع:

لتكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases}\beta(x+y-2xy) & 0\leq x\leq 1\ ,\ 0\leq y\leq 1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

1- أوجد قيمة β حتى تكون هذه الدالة هي دالة كثافة احتمالية مشتركة.

2- أوجد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y.

3- أحسب التوقع الرياضي والتباين للمتغير: $Z=X+Y$.

4- أحسب الاحتمالات: $P(Y\leq 0{,}2)$ ، $P(X\leq 0{,}5\,,Y\leq 0{,}2)$ ، $P(X\leq 0{,}5\,/\,Y\leq 0{,}2)$.

5- أحسب معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y.

التمرين الثامن:

لتكن لدينا دالة التوزيع الاحتمالية التالية:

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{(x+1)(y+1)} & x>0\ ,\ y>0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لكل من X و Y.

2- أوجد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y.

3- أثبت أن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين.

4-- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية التالية: $f(y/x)$.

التمرين التاسع:

لتكن لدينا دالة التوزيع الاحتمالية التالية:

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)} & x\geq 0\ ,\ y\geq 0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

1- أوجد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y.

2- هل المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين أم لا.

3- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية التالية: $f(x/y)$.

التمرين العاشر:

إذا كان: $f(y/x)=\frac{8-x-y}{12-2x}\quad ;\quad 0\leq x\leq 4\ ,\ 1\leq y\leq 3$

وكان: $F_1(x)=\frac{1}{32}(12x-x^2)\quad ;\quad 0\leq x\leq 4$

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لكل من X و Y.

2- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي Y.

3- أحسب الاحتمالين التاليين: $P(Y>2)$ ، $P(X\leq 0{,}5)$.

الحلول

حل التمرين الأول:

1- إثبات أن هذه الدالة هي دالة احتمال مشتركة:

لكي تكون هذه الدالة هي دالة احتمال مشتركة، يجب أن تحقق الشرطين التاليين: $\begin{cases} f(x,y) \geq 0 \\ \sum_x \sum_y f(x,y) = 1 \end{cases}$

- بالنسبة للشرط الأول: $f(x,y) \geq 0$ فهو محقق، لأن الاحتمالات المشتركة محصورة بين 0 و 1.

- بالنسبة للشرط الثاني: $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$ فهو محقق، لأن:

$$\sum_x \sum_y f(x,y) = \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + 0 = \frac{8}{8} = 1$$

بما أن الشرطين محققين، فإننا نقول أن هذه الدالة هي دالة احتمال مشتركة.

2- إيجاد دالتي الاحتمال الهامشية ودالتي التوزيع الاحتمالي الهامشية لكل من X و Y:

- **دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X:**

$* f_1(-1) = P(X = -1, Y = -1) + P(X = -1, Y = 0) + P(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$

$* f_1(1) = P(X = 1, Y = -1) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + 0 = \frac{6}{15}$

X	-1	1	$f_1(x)$
$f_1(x)$	2/8	6/8	1

- **دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y:**

$* f_2(-1) = P(X = -1, Y = -1) + P(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$

$* f_2(0) = P(X = -1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) = 0 + \frac{2}{8} = \frac{2}{8}$

$* f_2(1) = P(X = -1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}$

Y	-1	0	1	$f_2(y)$
$f_2(y)$	5/8	2/8	1/8	1

- **دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي X:**

X	-1	1	$f_1(x)$
$f_1(x)$	2/8	6/18	1
$F_1(x)$	2/8	1	$-$

- **دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي Y:**

Y	-1	0	1	$f_2(y)$
$f_2(y)$	5/8	2/8	1/8	1
$F_2(y)$	5/15	7/15	1	$-$

3- معرفة فيما إذا كان المتغيرين X و Y مستقلين أم لا:

$$* P(X=-1\,,\,Y=-1)=\frac{1}{8} \quad , \quad P(X=-1)\,P(Y=-1)=\frac{2}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{10}{64}=\frac{5}{32}$$

أي أن: $P(X=-1\,,\,Y=-1)\neq P(X=-1)\,P(Y=-1)$، وهكذا بالنسبة لباقي الثنائيات،

وبالتالي فإن: $P(X=x\,,\,Y=y)\neq P(X=x)P(Y=y)$، أي أن المتغيرين العشوائيين X و Y غير مستقلين.

4- أحسب الاحتمالات: $P(X\leq -1\,,Y\leq 0)$ ، $P(X>0\,,Y\leq 0)$ ، $P(X\leq 1\,,Y=0)$

$$* P(X\leq -1\,,Y\leq 0)=F(-1{,}0)=P(X=-1\,,Y=-1)+P(X=-1\,,Y=0)$$
$$=1/8+0=1/8=0{,}125$$

$$* P(X>0\,,Y\leq 0)=P(X=1\,,Y=-1)+P(X=1\,,Y=0)=4/8+2/8=6/8=0{,}75$$

$$* P(X\leq 1\,,Y=0)=P(X=-1\,,Y=0)+P(X=1\,,Y=0)=0+2/8=2/8=0{,}25$$

5- إيجاد دالتي الاحتمال الشرطي التاليتين: $f(x/y=1)$ و $f(y/x=-1)$:

- **بالنسبة للدالة $f(x/y=1)$:** سنقوم بإيجاد احتمالات تحقق X علما أن $Y=1$، وذلك كما يلي:

$$* f(-1/1)=P(X=-1/Y=1)=\frac{P(X=-1\,,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{f(-1{,}1)}{f_2(1)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}}=1$$

$$* f(1/1)=P(X=1/Y=1)=\frac{P(X=1\,,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{f(1{,}1)}{f_2(1)}=\frac{0}{\frac{1}{8}}=0$$

وبالتالي فإن دالة الاحتمال الشرطي: $f(x/y=1)$

$X/\,Y=1$	-1	1	$\sum(X/\,y=1)$
$f(x/\,y=1)$	1	0	1

- **بالنسبة للدالة $f(y/x=-1)$:** سنقوم بإيجاد احتمالات تحقق Y علما أن $X=-1$، وذلك كما يلي:

$$* f(-1/-1)=P(Y=-1/X=-1)=\frac{P(X=-1\,,Y=-1)}{P(X=-1)}=\frac{f(-1,-1)}{f_1(-1)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}}=\frac{1}{2}$$

$$* f(0/-1)=P(Y=0/X=-1)=\frac{P(X=-1\,,Y=0)}{P(X=-1)}=\frac{f(-1{,}0)}{f_1(-1)}=\frac{0}{\frac{2}{8}}=0$$

$$* f(1/-1)=P(Y=1/X=-1)=\frac{P(X=-1\,,Y=1)}{P(Y=-1)}=\frac{f(-1{,}1)}{f_1(-1)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}}=\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن دالة الاحتمال الشرطي: $f(y/x=-1)$

$Y/X=-1$	-1	0	1	$\sum(Y/\,X=-1)$
$f(y/\,x=-1)$	1/2	0	1/2	1

حل التمرين الثاني:

1- إثبات أن هذين التوزيعين هما توزيعين احتماليين:

لكي يكون التوزيع الأول هو توزيع احتمالي، يجب تحقق الشرطين التاليين: $\begin{cases} P(X=x) \geq 0 \\ \sum P(X=x) = 1 \end{cases}$

- بالنسبة للشرط الأول: $P(X=x) \geq 0$ فهو محقق، لأن الاحتمالات محصورة بين 0 و 1.
- بالنسبة للشرط الثاني: $\sum P(X=x) = 1$ فهو محقق، لأن:

$$\sum P(X=x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

بما أن الشرطين محققين، فإننا نقول أن التوزيع الأول هو توزيع احتمالي.

لكي يكون التوزيع الثاني هو توزيع احتمالي، يجب تحقق الشرطين التاليين: $\begin{cases} P(Y=y) \geq 0 \\ \sum P(Y=y) = 1 \end{cases}$

- بالنسبة للشرط الأول: $P(Y=y) \geq 0$ فهو محقق، لأن الاحتمالات محصورة بين 0 و 1.
- بالنسبة للشرط الثاني: $\sum P(Y=y) = 1$ فهو محقق، لأن:

$$\sum P(X=x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

بما أن الشرطين محققين، فإننا نقول أن التوزيع الثاني هو توزيع احتمالي.

2- إيجاد دالة الاحتمال المشتركة لهذين التوزيعين:

بما أن X و Y متغيران عشوائيان مستقلان، فإن احتمال تحققهما معا يحسب بالعلاقة التالية:

$$P(X=x\,,\;Y=y) = P(X=x)P(\,Y=y)$$

فمثلا:

$$P(X=-1\,,\;Y=1) = P(X=-1)P(\,Y=1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=-1\,,\;Y=-1) = P(X=-1)P(\,Y=-1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = \frac{3}{36}$$

وبالتالي فإن دالة الاحتمال المشتركة لهذين التوزيعين، تكون وفق جدول الاحتمالات المشتركة التالي:

X \ Y	-1	0	1	$f_1(x)$
-1	3/36	2/36	1/36	6/36
0	6/36	4/36	2/36	12/36
1	9/36	6/36	3/36	18/36
$f_2(y)$	18/36	12/36	6/36	1

3- حساب الاحتمالات: $P(X<1/\,Y\leq 0)$ ، $P(X>0\,,Y\leq 0)$ ، $P(X\leq 0\,,Y=0)$

$$*P(X<1\,/\,Y\leq 0) = \frac{P(X\leq 1\,;\,Y\leq 0)}{P(\,Y\leq 0)} = \frac{\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}}{\frac{12}{36}+\frac{18}{36}} = \frac{\frac{15}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$*\,P(X>0\,,Y\leq 0) = P(X=1\,,Y=-1) + P(X=1\,,Y=0) = 9/36 + 6/36 = 15/36$$

$$*\,P(X\leq 0\,,Y=0) = P(X=-1\,,Y=0) + P(X=0\,,Y=0) = 2/36 + 4/36 = 6/36 = 1/6$$

حل التمرين الثالث:

1- إيجاد جدول الاحتمالات المشتركة للمتغيرين X و Y:

$$* f(3,2)=\frac{3+2(2)}{28}=\frac{7}{28} \qquad * f(3,1)=\frac{3+2(1)}{28}=\frac{5}{28}$$

$$* f(5,2)=\frac{5+2(2)}{28}=\frac{9}{28} \qquad * f(5,1)=\frac{5+2(1)}{28}=\frac{7}{28}$$

X \ Y	1	2	$f_1(x)$
3	5/28	7/28	12/28
5	7/28	9/28	16/28
$f_2(y)$	12/28	16/28	1

2- إيجاد دالتي الاحتمال الهامشية لكل من X و Y:

- دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X:

$$* f_1(3)=P(X=3,Y=1)+P(X=3,Y=2)=\frac{5}{28}+\frac{7}{28}=\frac{12}{28}$$

$$* f_1(5)=P(X=5,Y=1)+P(X=5,Y=2)=\frac{7}{28}+\frac{9}{28}=\frac{16}{28}$$

X	3	5	$f_1(x)$
$f_1(x)$	12/28	16/28	1

- دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y:

$$* f_2(1)=P(X=3,Y=1)+P(X=5,Y=1)=\frac{5}{28}+\frac{7}{28}=\frac{12}{28}$$

$$* f_2(2)=P(X=3,Y=2)+P(X=5,Y=2)=\frac{7}{28}+\frac{9}{28}=\frac{16}{28}$$

Y	1	2	$f_2(y)$
$f_2(y)$	12/28	16/28	1

3- معرفة فيما إذا كان المتغيرين X و Y مستقلين أم لا:

$$* P(X=3,\ Y=1)=\frac{5}{28}=0{,}178 \quad , \quad P(X=3)\,P(Y=1)=\frac{12}{28}\times\frac{12}{28}=\frac{144}{784}=0{,}184$$

أي أن: $P(X=3,\ Y=1)\neq P(X=3)\,P(Y=1)$، وهكذا بالنسبة لباقي الثنائيات.

وبالتالي فإن: $P(X=x,\ Y=y)\neq P(X=x)P(Y=y)$، أي أن المتغيرين العشوائيين X و Y غير مستقلين

4- حساب التوقع الرياضي والتباين للمتغير: $Z=X-Y$.

- حساب التوقع الرياضي والتباين لكل من X و Y:

$$* E(X)=\sum x f_1(x)=3\times\frac{12}{28}+5\times\frac{16}{28}=\frac{116}{28}=\frac{29}{7}$$

$$* E(Y)=\sum y f_2(y)=1\times\frac{12}{28}+2\times\frac{16}{28}=\frac{44}{28}=\frac{11}{7}$$

$$* V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$$

$$E(X^2)=\sum x^2 f_1(x)=3^2\times\frac{12}{28}+5^2\times\frac{16}{28}=\frac{508}{28}=\frac{127}{7}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{127}{7} - \left(\frac{29}{7}\right)^2 = \frac{48}{49}$$

$$*V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$E(Y^2) = \sum y^2 f_2(y) = 1^2 \times \frac{12}{28} + 2^2 \times \frac{16}{28} = \frac{76}{28} = \frac{19}{7}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{19}{7} - \left(\frac{11}{7}\right)^2 = \frac{12}{49}$$

- **حساب التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي Z، حيث: $Z = X - Y$**

أ- التوقع الرياضي:

$$* E(Z) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \frac{29}{7} - \frac{11}{7} = \frac{18}{7}$$

ب- التباين:

$$* V(Z) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X, Y)$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \sum\sum xyf(x,y) = 3\left(\frac{5}{28}\right) + 6\left(\frac{7}{28}\right) + 5\left(\frac{7}{28}\right) + 10\left(\frac{9}{28}\right) = \frac{182}{28} = \frac{13}{2}$$

$$Cov(X, Y) = \frac{13}{2} - \left(\frac{29}{7}\right)\left(\frac{11}{7}\right) = \frac{-1}{98}$$

$$V(Z) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y) = \frac{48}{49} + \frac{12}{49} - 2\left(\frac{-1}{98}\right) = \frac{61}{49} = 1{,}24$$

حل التمرين الرابع:

1- إكمال جدول الاحتمالات المشتركة للمتغيرين X و Y، مع توضيح طريقة الحساب:

- بحساب $f_2(2)$ كما يلي:

$$* f_2(2) = 0{,}12 + 0{,}16 + 0{,}12 = 0{,}40$$

- بحساب $f_2(1)$ كما يلي:

$$* f_2(1) = 1 - (0{,}4 + 0{,}1) = 0{,}5$$

- نضيف العمود المتعلق بحساب $f_1(x)$ باستخدام العلاقة: $f(x\,,\ y) = f_1(x)f_2(y)$

لأن المتغيرين X و Y مستقلين:

$$* \ f(3\,,\ 2) = f_1(3)f_2(2) \Rightarrow f_1(3) = \frac{f(3,2)}{f_2(2)} = \frac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3$$

$$* f(4\,,\ 2) = f_1(4)f_2(2) \Rightarrow f_1(4) = \frac{f(4,2)}{f_2(2)} = \frac{0{,}16}{0{,}4} = 0{,}4$$

$$* f(5\,,\ 2) = f_1(5)f_2(2) \Rightarrow f_1(5) = \frac{f(5,2)}{f_2(2)} = \frac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3$$

$$* f(3\,,\ 1) = f_1(3)f_2(1) = (0{,}5)(0{,}3) = 0{,}15$$

$$* f(3\,, 0) = f_1(3)f_2(0) = (0{,}3)(0{,}1) = 0{,}03$$

$$*f(4\,, 0) = f_1(4)f_2(0) = (0{,}4)(0{,}1) = 0{,}04$$

$$*f(5\,, 0) = f_1(5)f_2(0) = (0{,}3)(0{,}1) = 0{,}03$$

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_1(x)$
3	0,03	0,15	0,12	0,3
4	0,04	0,2	0,16	0,4
5	0,03	0,15	0,12	0,3
$f_2(y)$	0,1	0,5	0,4	1

2- إيجاد دالتي الاحتمال الشرطي التاليتين: $f(x/y=2)$ و $f(y/x=4)$:

- بالنسبة للدالة $f(x/y=2)$: سنقوم بإيجاد احتمالات تحقق X علما أن $Y=2$، وذلك كما يلي:

$$* f(3/2) = P(X=3/Y=2) = \frac{P(X=3\ ,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{f(3,2)}{f_2(2)} = \frac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3$$

$$* f(4/2) = P(X=4/Y=2) = \frac{P(X=4\ ,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{f(4,2)}{f_2(2)} = \frac{0{,}16}{0{,}4} = 0{,}4$$

$$* f(5/2) = P(X=5/Y=2) = \frac{P(X=5\ ,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{f(5,2)}{f_2(2)} = \frac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3$$

وبالتالي فإن دالة الاحتمال الشرطي: $f(x/y=2)$

$X/\ Y=2$	3	4	5	$\sum(X/\ y=2)$
$f(x/\ y=2)$	0,3	0,4	0,3	1

- بالنسبة للدالة $f(y/x=4)$: سنقوم بإيجاد احتمالات تحقق Y علما أن $X=4$، وذلك كما يلي:

$$* f(0/4) = P(Y=0/X=4) = \frac{P(X=4\ ,Y=0)}{P(X=4)} = \frac{f(4,0)}{f_1(4)} = \frac{0{,}04}{0{,}4} = 0{,}1$$

$$* f(1/4) = P(Y=1/X=4) = \frac{P(X=4\ ,Y=1)}{P(X=4)} = \frac{f(4,1)}{f_1(4)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$$

$$* f(2/4) = P(Y=2/X=4) = \frac{P(X=4\ ,Y=2)}{P(X=4)} = \frac{f(4,2)}{f_1(4)} = \frac{0{,}16}{0{,}4} = 0{,}4$$

وبالتالي فإن دالة الاحتمال الشرطي: $f(y/x=-1)$

$Y/X=4$	0	1	2	$\sum(Y/\ X=4)$
$f(y/\ x=0)$	0,1	0,5	0,4	1

ملاحظة: في هذا التمرين، نلاحظ أن دالة الاحتمال الشرطي $f(x/y)$ عند أي قيمة معطاة y تمثل دائما دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي X، ودالة الاحتمال الشرطي $f(y/x)$ عند أي قيمة معطاة x تمثل دائما دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي Y، لأن المتغيرين X و Y مستقلين.

3- إيجاد قيمة معامل الارتباط بين X و Y:

بما أن المتغيرين X و Y مستقلين، فإن: $Cov(X\ ,Y) = 0$ ، وبالتالي:

$$\rho_{(X\ ,Y)} = \frac{Cov(X\ ,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = 0$$

بما أن معامل الارتباط يساوي $\rho_{(X\ ,Y)} = 0$ فإنه لا يوجد ارتباط بين X و Y.

حل التمرين الخامس:

1- إيجاد قيمة α حتى تكون هذه الدالة هي دالة الاحتمال المشتركة:

$$\sum f(x\ ,y) = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{xy}{\alpha} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{(0)(1)}{\alpha} + \frac{(0)(2)}{\alpha} + \frac{(1)(1)}{\alpha} + \frac{(1)(2)}{\alpha} + \frac{(2)(1)}{\alpha} + \frac{(2)(2)}{\alpha} + \frac{(3)(1)}{\alpha} + \frac{(3)(2)}{\alpha} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{0}{\alpha} + \frac{0}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} + \frac{4}{\alpha} + \frac{3}{\alpha} + \frac{6}{\alpha} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{18}{\alpha} = 1$$
$$\Leftrightarrow \alpha = 18$$

$$f(x\,,y)=\frac{xy}{18}\qquad x=0;1;2;3\quad y=1;2$$

2- إيجاد دالتي الاحتمال الهامشية لكل من $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$:

X \ Y	1	2	$f_1(x)$
0	0	0	0
1	$1/18$	$2/18$	$3/18$
2	$2/18$	$4/18$	$6/18$
3	$3/18$	$6/18$	$9/18$
$f_2(y)$	$6/18$	$12/18$	1

- دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي $\boldsymbol{X}$:

X	0	1	2	3	$f_1(x)$
$f_1(x)$	0	$3/18$	$6/18$	$9/18$	1

- دالة الاحتمال الهامشية للمتغير العشوائي $\boldsymbol{Y}$:

Y	1	2	$f_2(y)$
$f_2(y)$	$6/18$	$12/18$	1

3- معرفة فيما إذا كان المتغيرين $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$ مستقلين أم لا:

$$*\,P(X=1\,,\;Y=1)=\frac{1}{18}=0{,}056\quad,\quad P(X=1)\,P(\,Y=1)=\frac{3}{18}\times\frac{6}{18}=\frac{18}{324}=0{,}056$$

أي أن: $P(X=1\,,\;Y=1)=P(X=1)\,P(\,Y=1)$، وهكذا بالنسبة لباقي الثنائيات،

وبالتالي فإن: $P(X=x\,,\;Y=y)=P(X=x)P(\,Y=y)$، أي أن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين.

4- حساب التوقع الرياضي والتباين للمتغير: $\boldsymbol{Z=2X+3Y}$:

- حساب التوقع الرياضي والتباين لكل من $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$:

$$*\,E(X)=\sum xf_1(x)=0\times0+1\times\frac{3}{18}+2\times\frac{6}{18}+3\times\frac{9}{18}=\frac{42}{18}=\frac{21}{9}$$

$$*E(Y)=\sum yf_2(y)=1\times\frac{6}{18}+2\times\frac{12}{18}=\frac{30}{18}=\frac{15}{9}$$

$$*V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$$

$$E(X^2)=\sum x^2f_1(x)=0^2\times0+1^2\times\frac{3}{18}+2^2\times\frac{6}{18}+3^2\times\frac{9}{18}=\frac{108}{18}=6$$

$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=6-\left(\frac{21}{9}\right)^2=\frac{45}{81}=\frac{5}{9}$$

$$*V(Y)=E(Y^2)-\big(E(Y)\big)^2$$

$$E(Y^2)=\sum y^2f_2(y)=1^2\times\frac{6}{18}+2^2\times\frac{12}{18}=\frac{54}{18}=3$$

$$V(Y)=E(Y^2)-\big(E(Y)\big)^2=3-\left(\frac{15}{9}\right)^2=\frac{18}{81}=\frac{2}{9}$$

- حساب التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي $\boldsymbol{Z}$، حيث: $\boldsymbol{Z=2X+3Y}$

أ- التوقع الرياضي: $*\,E(Z)=E(2X+3Y)=2E(X)+3E(Y)=2\left(\frac{21}{9}\right)+3\left(\frac{15}{9}\right)=\frac{87}{9}=9{,}67$

ب- التباين: $*V(Z) = V(2X + 3Y) = 2^2V(X) + 3^2V(Y) + 2Cov(2X, 3Y)$

$$= 4V(X) + 9V(Y) + 2Cov(2X, 3Y)$$

بما أن المتغيرين X و Y مستقلين، فإن: $Cov(2X, 3Y) = 0$ أي:

$$V(Z) = 4V(X) + 9V(Y) = 4\left(\frac{5}{9}\right) + 9\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{38}{9} = 4{,}22$$

5- إيجاد قيمة المقدار $Cov(X, Y)$، ثم حساب معامل الارتباط لهذين المتغيرين:

بما أن المتغيرين X و Y مستقلين، فإن: $Cov(X, Y) = 0$ ، وبالتالي:

$$\rho_{(X,Y)} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = 0$$

بما أن معامل الارتباط يساوي $\rho_{(X,Y)} = 0$ فإنه لا يوجد ارتباط بين X و Y.

<u>حل التمرين السادس:</u>

1- إثبات أن هذه الدالة هي دالة كثافة احتمالية مشتركة:

- من الواضح أن الشرط الأول $(f(x,y) \geq 0)$ محقق عند جميع قيم x و y في المجال المعرف عليها الدالة.

- بالنسبة للشرط الثاني $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1\right)$ فنقوم بإثباته كما يلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{2}(0)\,dx\,dy + \int_{0}^{3}\int_{2}^{4}\frac{1}{45}x(y+x)\,dx\,dy + \int_{3}^{+\infty}\int_{4}^{+\infty}(0)\,dx\,dy$$

$$= 0 + \frac{1}{45}\int_0^3\int_2^4 (xy + x^2)\,dx\,dy + 0$$

$$= 0 + \frac{1}{45}\int_0^3 \left(\frac{xy^2}{2} + x^2y\right)_2^4 dx + 0$$

$$= \frac{1}{45}\int_0^3\left(\left(\frac{4^2x}{2} + 4x^2\right) - \left(\frac{2^2x}{2} + 2x^2\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{45}\int_0^3 (8x + 4x^2 - 2x - 2x^2)dx$$

$$= \frac{1}{45}\int_0^3 (6x + 2x^2)dx = \frac{1}{45}\left(\frac{6x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}\right)_0^3$$

$$= \frac{1}{45}\left(\left(\frac{6(3)^2}{2} + \frac{2(3)^3}{3}\right) - \left(\frac{6(0)^2}{2} + \frac{2(0)^3}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{45}(27 + 18) = \frac{1}{45}(45) = 1$$

2- إيجاد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y:

- **دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي X:**

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_2^4 \frac{1}{45}x(y+x)dy = \frac{1}{45}\left(\frac{xy^2}{2} + x^2y\right)_2^4 = \frac{1}{45}\left(\left(\frac{4^2x}{2} + 4x^2\right) - \left(\frac{2^2x}{2} + 2x^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{45}(8x + 4x^2 - 2x - 2x^2) = \frac{1}{45}(6x + 2x^2) = \frac{1}{45}(6x + 2x^2)$$

$$f_1(x) = \frac{2}{45}(3x + x^2)$$

- دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي Y:

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^3 \frac{1}{45}x(y+x)dx=\frac{1}{45}\int_0^3 (xy+x^2)dx$$

$$=\frac{1}{45}\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{x^3}{3}\right)_0^3=\frac{1}{45}\left(\left(\frac{3^2y}{2}+\frac{3^3}{3}\right)-\left(\frac{0^2y}{2}+\frac{0^3}{3}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{45}\left(\frac{9}{2}y+9\right)=\frac{9}{45}\left(\frac{1}{2}y+1\right)$$

$$f_2(y)=\frac{9}{45}\left(\frac{1}{2}y+1\right)$$

3- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x,y)$، ودالتي التوزيع الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y:

أ- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x,y)$:

- إذا كان $y<2\ ,\ x<0$، فإن:

$$*\ F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}(0)\,dx\,dy=0$$

- إذا كان $2\le y\le 4\ ,\ 0\le x\le 3$، فإن:

$$*\ F(x,y)=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{1} f(x,y)\,dx\,dy+\int_0^x\int_2^y f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{2}(0)\,dx\,dy+\int_0^x\int_2^y\frac{1}{45}(xy+x^2)\,dx\,dy=0+\frac{1}{45}\int_0^x\left(\frac{xy^2}{2}+x^2y\right)_2^y dx$$

$$=\frac{1}{45}\int_0^x\left(\left(\frac{xy^2}{2}+x^2y\right)-\left(\frac{2^2x}{2}+2x^2\right)\right)dx=\frac{1}{45}\int_0^x\left(\frac{xy^2}{2}+x^2y-2x-2x^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{45}\left(\frac{x^2y^2}{4}+\frac{x^3y}{3}-x^2-\frac{2x^3}{3}\right)_0^x$$

$$=\frac{1}{45}\left(\left(\frac{y^2}{4}-1\right)x^2+\left(\frac{y}{3}-\frac{2}{3}\right)x^3\right)$$

- إذا كان $y>4\ ,\ x>3$، فإن:

$$*\ F(x,y)=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{2} f(x,y)\,dx\,dy+\int_0^3\int_2^4 f(x,y)\,dx\,dy+\int_3^{+\infty}\int_4^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{2}(0)\,dx\,dy+\int_0^3\int_2^4\frac{1}{45}(xy+x^2)\,dx\,dy+\int_3^{+\infty}\int_4^{+\infty}(0)\,dx\,dy=0+1+0=1$$

وبالتالي

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<0\ ,\ y<2\\ \frac{1}{45}\left(\left(\frac{y^2}{4}-1\right)x^2+\left(\frac{y}{3}-\frac{2}{3}\right)x^3\right) & 0\le x\le 3\ ,\ 2\le y\le 4\\ 1 & x>3\ ,\ y>4\end{cases}$$

ب- إيجاد دالتي التوزيع الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y:

- دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي X:

- إذا كان $0\le x\le 3$، فإن:

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx=\int_0^x\frac{2}{45}(3x+x^2)\,dx=\frac{2}{45}\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)_0^x=\frac{2}{45}\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$$

وبالتالي:
$$F_1(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{2}{45}\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right) & 0\le x\le 3\\ 1 & x>3\end{cases}$$

- دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي Y:

- إذا كان $2\le y\le 4$، فإن:

$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{y} f_2(y)\,dy=\int_{-\infty}^{y}\frac{9}{45}\left(\frac{1}{2}y+1\right)\,dy=\frac{9}{45}\left(\frac{1}{4}y^2+y\right)_2^y=\frac{9}{45}\left(\frac{1}{4}y^2+y-3\right)$$

وبالتالي:
$$F_2(y)=\begin{cases}0 & y<1\\ \frac{9}{45}\left(\frac{1}{4}y^2+y-3\right) & 2\le y\le 4\\ 1 & y>4\end{cases}$$

4- معرفة فيما إذا كان المتغيرين X و Y مستقلين أم لا:

بالرجوع إلى النتائج التي تحصلنا عليها، نجد:

$$*\ F(x,y)=\frac{1}{45}\left(\left(\frac{y^2}{4}-1\right)x^2+\left(\frac{y}{3}-\frac{2}{3}\right)x^3\right)$$

$$*\ F_1(x)=\frac{2}{45}\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$$

$$*\ F_2(y)=\frac{9}{45}\left(\frac{1}{4}y^2+y-3\right)$$

نلاحظ أن: $F(x,y)\neq F_1(x)F_2(y)$، وبالتالي المتغيرين العشوائيين X و Y غير مستقلين.

<u>حل التمرين السابع:</u>

لتكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases}\beta(x+y-2xy) & 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

1- إيجاد قيمة β حتى تكون هذه الدالة هي دالة كثافة احتمالية مشتركة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1 \Leftrightarrow \int_0^1\int_1^1 \beta(x+y-2xy)\,dx\,dy=1$$
$$\Leftrightarrow \beta\int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}-xy^2\right)_0^1 dx\ =1$$
$$\Leftrightarrow \beta\int_0^1\left(\frac{1}{2}\right)dx\ =1$$
$$\Leftrightarrow \beta\left(\frac{1}{2}x\right)_0^1=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\beta=1$$
$$\Leftrightarrow \beta=2$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2(x+y-2xy) & 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

2- إيجاد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y:

- دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي X:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_1^0 2(x+y-2xy)dy = 2\left(xy + \frac{y^2}{2} - xy^2\right)_0^1$$

$$= 2\left(\left(x + \frac{1}{2} - x\right) - (0)\right) = 1$$

$$f_1(x) = 1$$

- دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي Y:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_1^0 2(x+y-2xy)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} + yx - yx^2\right)_0^1$$

$$= 2\left(\left(\frac{1}{2} + y - y\right) - (0)\right) = 1$$

$$f_2(y) = 1$$

3- حساب التوقع الرياضي والتباين للمتغير: $Z = X + Y$:

- حساب التوقع الرياضي: $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$$* E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx = \int_0^1 x(1)dx = \int_0^1 x\, dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$* E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)dx = \int_0^1 y(1)dy = \int_0^1 y\, dy = \left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$* E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

- حساب التباين: $V(Z) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$

$$* V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)dx = \int_0^1 x^2(1)dx = \int_0^1 \frac{x^3}{3} dx = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$* V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y)dx = \int_0^1 y^2(1)dy = \left(\frac{y^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$* Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xyf(x,y)\, dxdy = 2\int_0^1 \int_0^1 xy(x+y-2xy)\, dxdy$$

$$= 2\int_0^1 \int_0^1 (x^2y + y^2x - 2x^2y^2)\, dxdy = 2\int_0^1 \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3x}{3} - \frac{2x^2y^3}{3}\right)_0^1 dx$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{3}\right) dx = 2\int_0^1 \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{6}\right) dx$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18}\right)_0^1 = 2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{18}\right) = \frac{2}{9}$$

$$Cov(X,Y)=\frac{2}{9}-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{36}$$

$$V(Z)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+2\left(\frac{-1}{36}\right)=\frac{2}{12}-\frac{2}{36}=\frac{1}{9}$$

4- حساب الاحتمالات: $\boldsymbol{P(Y\leq 0,2)}$ ، $\boldsymbol{P(X\leq 0,5\,,Y\leq 0,2)}$ ، $\boldsymbol{P(X\leq 0,5\,/\,Y\leq 0,2)}$.

$$*\ P(Y\leq 0,2)=\int_0^{0,2}f_2(y)dy=\int_0^{0,2}(1)dy=(y)_0^{0,2}=0,2$$

$$*P(X\leq 0,5\,,Y\leq 0,2)=\int_0^{0,5}\int_0^{0,2}f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{0,5}\int_0^{0,2}2(x+y-2xy)\,dx\,dy$$

$$=2\int_0^{0,5}\left(xy+\frac{y^2}{2}-xy^2\right)_0^{0,2}dx=2\int_0^{0,5}(0,2x+0,02-0,04x)\,dx$$

$$=2\int_0^{0,5}(0,16x+0,02)\,dx=2\left(0,16\frac{x^2}{2}+0,02x\right)_0^{0,5}$$

$$=2(0,02+0,01)=0,06$$

$$*\ P(X\leq 0,5\,/\,Y\leq 0,2)=\frac{P(X\leq 0,5\,,Y\leq 0,2)}{P(Y\leq 0,2)}=\frac{0,06}{0,2}=0,3$$

5- حساب معامل الارتباط بين المتغيرين $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$:

$$\rho_{(X,Y)}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{\frac{-1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{\frac{1}{12}}}=\frac{\frac{-1}{36}}{\frac{1}{12}}=\frac{-1}{36}\times\frac{12}{1}=\frac{-12}{36}=-0,33$$

بما أن معامل الارتباط يساوي $\rho_{(X,Y)}=-0,33$ فإنه الارتباط بين X و Y عكسي ضعيف.

<u>حل التمرين الثامن:</u>

1- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لكل من $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$:

يمكن استنتاج دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة من دالة التوزيع الاحتمالية بالاشتقاق، كما يلي: $f(x,y)=\partial^2\frac{F(x,y)}{\partial x\,\partial y}$

حيث نشتق في البداية الدالة $F(x,y)$ بالنسبة لـ x، ثم نشتق بالنسبة لـ y الدالة المحصل عليها من الاشتقاق الأول، كما يلي:

$$f(x,y)=\partial^2\frac{F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{y((x+1)(y+1))-(y+1)(xy)}{((x+1)(y+1))^2}=\frac{(y+1)((x+1)y-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}=\frac{y}{(x+1)^2(y+1)}$$

$$=\frac{(x+1)^2(y+1)-y(x+1)^2}{(x+1)^4(y+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2(y+1)^2}$$

وبالتالي:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(x+1)^2(y+1)^2} & x>0\ ,\ y>0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

2- إيجاد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{Y}$:

- دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي $\boldsymbol{X}$:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{(x+1)^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(y+1)^2}\,dy=\frac{1}{(x+1)^2}\left(-\frac{1}{(y+1)}\right)_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}\left(-\left(\frac{1}{((+\infty)+1)}-\frac{1}{((0)+1)}\right)\right)=\frac{1}{(x+1)^2}(-(0-1))=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f_1(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$$

- دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي Y:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{(y+1)^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = \frac{1}{(y+1)^2}\left(-\frac{1}{(x+1)}\right)_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{(y+1)^2}\left(-\left(\frac{1}{((+\infty)+1)} - \frac{1}{((0)+1)}\right)\right) = \frac{1}{(y+1)^2}(-(0-1)) = \frac{1}{(y+1)^2}$$

$$f_2(y) = \frac{1}{(y+1)^2}$$

3- إثبات أن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين:

يكون المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين، إذا كان: $F(x,y) = F_1(x) \times F_2(y)$

- دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي X:

- إذا كان $x > 0$، فإن:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\, dx = \int_0^x \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = \left(\frac{-1}{x+1}\right)_0^x = \left(\frac{-1}{x+1}\right) - \left(\frac{-1}{0+1}\right) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

وبالتالي: $F_1(x) = \frac{x}{x+1}$

- دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي Y:

- إذا كان $y > 0$، فإن:

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\, dy = \int_0^y \frac{1}{(y+1)^2}\, dy = \left(\frac{-1}{y+1}\right)_0^y = \left(\frac{-1}{y+1}\right) - \left(\frac{-1}{0+1}\right) = 1 - \frac{1}{y+1} = \frac{y}{y+1}$$

وبالتالي: $F_2(y) = \frac{y}{y+1}$

مما سبق تحصلنا على النتائج التالية:

* $F(x,y) = \frac{xy}{(x+1)(y+1)}$

* $F_1(x) = \frac{x}{x+1}$

* $F_2(y) = \frac{y}{y+1}$

نلاحظ أن: $F_1(x)F_2(y) = \left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{y}{y+1}\right) = \frac{xy}{(x+1)(y+1)} = F(x,y)$

وبالتالي المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين.

4-- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية التالية: $f(y/x)$:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\frac{1}{(x+1)^2(y+1)^2}}{\frac{1}{(y+1)^2}} = \frac{(y+1)^2}{(x+1)^2(y+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = f_1(x)$$

ملاحظة: في هذا التمرين، نلاحظ أن دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية $f(x/y)$ عند أي قيمة معطاة y تمثل دائما دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي X، ودالة الكثافة الاحتمالية الشرطية $f(y/x)$ عند أي قيمة معطاة x تمثل دائما دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي Y، لأن المتغيرين X و Y مستقلين.

حل التمرين التاسع:

1- إيجاد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y:

- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لكل من X و Y:

يمكن استنتاج دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة من دالة التوزيع الاحتمالية بالاشتقاق، كما يلي: $f(x,y) = \partial^2 \frac{F(x,y)}{\partial x\ \partial y}$

حيث نشتق في البداية الدالة $F(x,y)$ بالنسبة لـ x، ثم نشتق بالنسبة لـ y الدالة المحصل عليها من الاشتقاق الأول، كما يلي:

$$f(x,y) = \partial^2 \frac{F(x,y)}{\partial x\ \partial y} = e^{-x} - e^{-(x+y)} = e^{-(x+y)}$$

وبالتالي:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x \geq 0 \ \ ,\ \ y \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي X:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}\ dy = \left(-e^{-(x+y)}\right)_0^{+\infty}$$
$$= -e^{-(x+(+\infty))} + e^{-(x+(0))}$$
$$= -0 + e^{-(x+(0))}$$
$$= e^{-x}$$
$$f_1(x) = e^{-x}$$

- دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي Y:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}\ dx = \left(-e^{-(x+y)}\right)_0^{+\infty}$$
$$= -e^{-((+\infty)+y)} + e^{-((0)+y)}$$
$$= -0 + e^{-((0)+y)}$$
$$= e^{-y}$$
$$f_2(y) = e^{-y}$$

2- معرفة هل المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين ام لا:

يكون المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين، إذا كان: $F(x,y) = F_1(x) \times F_2(y)$

- دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي X:

- إذا كان $x \geq 0$، فإن:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\ dx = \int_0^x e^{-x}\ dx = (-e^{-x})_0^x = -(e^{-x} - e^{-0}) = -(e^{-x} - 1) = 1 - e^{-x}$$

وبالتالي: $F_1(x) = 1 - e^{-x}$

- دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي Y:

- إذا كان $Y \geq 0$، فإن:

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\ dy = \int_0^y e^{-y}\ dy = (-e^{-y})_0^y = -(e^{-y} - e^{-0}) = -(e^{-y} - 1) = 1 - e^{-y}$$

وبالتالي: $F_2(y) = 1 - e^{-y}$

مما سبق تحصلنا على النتائج التالية:
$* F(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)}$

$* F_1(x) = 1 - e^{-x}$

$* F_2(y) = 1 - e^{-y}$

نلاحظ أن: $F_1(x)F_2(y) = (1-e^{-x})(1-e^{-y}) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)} = F(x,y)$

وبالتالي المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين.

3- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية التالية: $f(x/y)$:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}} = \frac{e^{-x}e^{-y}}{e^{-y}} = e^{-x} = f_1(x)$$

<u>**حل التمرين العاشر:**</u>

1- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لكل من X و Y:

$$f_1(x) = F_1'(x) = \frac{1}{32}(12-2x)$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \Leftrightarrow f(x,y) = \left(f_1(x)\right)\left(f\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \left(\frac{8-x-y}{12-2x}\right)\left(\frac{1}{32}(12-2x)\right)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{32}(8-x-y)$$

2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي Y:

- **دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي Y:**

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{32}(8-x-y)\,dx = \frac{1}{32}\left(8x - \frac{x^2}{2} - xy\right)_0^4$$

$$= \frac{1}{32}\left(\left(8(4) - \frac{4^2}{2} - 4y\right) - 0\right)$$

$$= \frac{1}{32}(24-4y)$$

$$f_2(y) = \frac{1}{32}(24-4y)$$

- **دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير العشوائي Y:**

- إذا كان $1 \le Y \le 3$، فإن:

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\,dy = \int_1^y \frac{1}{32}(24-4y)\,dy = \frac{1}{32}(24y - 2y^2)_1^y$$

$$= \frac{1}{32}(24y - 2y^2 - 22)$$

وبالتالي: $F_2(y) = \frac{1}{32}(24y - 2y^2 - 22)$

3- حساب الاحتمالين التاليين: $P(Y > 2)$ ، $P(X \le 0,5)$:

$$* P(Y > 2) = 1 - P(Y \le 2) = 1 - F_2(2) = 1 - \left(\frac{1}{32}(24(2) - 2(2)^2 - 22)\right) = 0{,}44$$

$$* P(X \le 0{,}5) = F_1(0{,}5) = \frac{1}{32}(12(0{,}5) - (0{,}5)^2) = 0{,}18$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين المنفصلين X و Y معرفة كما يلي:

$$f(x\,,y) = \frac{x+y}{20} \qquad x = 1;2 \quad y = 3;4$$

1- أوجد جدول الاحتمالات المشتركة للمتغيرين X و Y.

2- أوجد دالتي الاحتمال الهامشية لكل من X و Y.

3- هل المتغيرين X و Y مستقلين أم لا؟

4- أحسب التوقع الرياضي والتباين للمتغير: $Z = 5X - 2Y$.

التمرين الثاني:

لتكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة التالية:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{24}(x+y) & 0 \le x \le 2 \;\;,\;\; 0 \le y \le 4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1- أثبت أن هذه الدالة هي دالة كثافة احتمالية مشتركة.

2- أوجد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y.

3- أحسب التوقع الرياضي والتباين للمتغير: $Z = X + Y$.

4- أحسب الاحتمالات: $P(\,Y \le 2)$ ، $P(X \le 1\,,Y \le 2)$ ، $P(X \le 1\,/\,Y \le 2)$.

5- أحسب معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y.

التمرين الثالث:

إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X و Y معرفة كما يلي:

X \ Y	2	3	4
-2	1/12	3/12	1/12
1	4/12	2/12	1/12

1- أثبت أن هذه الدالة هي دالة احتمال مشتركة.

2- أوجد دالتي الاحتمال الهامشية ودالتي التوزيع الاحتمالي الهامشية لكل من X و Y.

3- هل المتغيرين X و Y مستقلين أم لا؟

4- أحسب الاحتمالات: $P(X \le -2\,,Y \le 3)$ ، $P(X > 0\,,Y \le 2)$ ، $P(X \le 1\,,Y = 4)$

5- أوجد دالتي الاحتمال الشرطي التاليتين: $f(x/y = 3)$ و $f(y/x = -2)$.

التمرين الرابع:

لتكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases} ae^{-(x+y)} & x\geq 0 \quad , \quad y\geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1- أوجد قيمة a حتى تكون الدالة $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية.

2- أوجد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y.

3- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x,y)$ لـ X و Y.

4- هل المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين أم لا.

5- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية التالية: $f(y/x)$.

التمرين الخامس:

إذا كان: $f(x,y)=\frac{1}{a}(2+x+y) \quad ; \quad 0\leq x\leq 3 \quad , \quad 0\leq y\leq 4$

1- أوجد قيمة a حتى تكون الدالة $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x,y)$ لكل من X و Y.

3- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتغير العشوائي Y.

4- أحسب التوقع الرياضي والتباين للمتغير: $Z=X+2Y$.

5- أحسب الاحتمالين التاليين: $P(Y>2)$ ، $P(X\leq 0{,}75)$.

التمرين السادس:

لتكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2(y+1)^2} & x>0 \quad , \quad y>0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x,y)$ لكل من X و Y.

2- أوجد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y.

3- أثبت أن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين.

4-- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية التالية: $f(y/x)$.

التمرين السابع:

بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان مستقلان، لكل منهما جدول توزيع كما يلي:

X	2	4	6
$P(X=x)$	1/8	5/8	2/8

Y	-1	0	1
$P(Y=y)$	1/4	2/4	1/4

1- أثبت أن هذين التوزيعين هما توزيعين احتماليين.

2- أوجد دالة الاحتمال المشتركة لهذين التوزيعين.

3- أحسب الاحتمالات: $P(X < 5/ Y \leq 0)$ ، $P(X > 4 , Y \leq 0)$ ، $P(X \leq 3 , Y = 0)$

التمرين الثامن:

لتكن لدينا دالة التوزيع الاحتمالية التالية:

$$F(x,y) = \frac{1}{45}\left(\left(\frac{y^2}{4} - 1\right)x^2 + \left(\frac{y}{3} - \frac{2}{3}\right)x^3\right) \qquad 0 \leq x \leq 3 \quad , \quad 2 \leq y \leq 4$$

1- أثبت أن هذه الدالة هي دالة كثافة احتمالية مشتركة.

2- أوجد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y.

3- أوجد دالتي التوزيع الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y.

4- هل المتغيرين X و Y مستقلين أم لا؟

التمرين التاسع:

إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين المستقلين X و Y معرفة كما يلي:

X \ Y	1	2	3
-1	0,3	0,6	؟
0	0,2	؟	؟
2	0,5	؟	؟
$f_2(y)$	؟	؟	0,4

1- أكمل جدول الاحتمالات المشتركة للمتغيرين X و Y، مع تحديد طريقة الحساب.

2- أوجد دالتي الاحتمال الشرطي التاليتين: $f(x/y = 1)$ و $f(y/x = 0)$.

3- أوجد قيمة معامل الارتباط بين X و Y.

التمرين العاشر:

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X و Y معرفة كما يلي:

$$f(x,y) = \alpha xy \qquad x \in [0-4] \quad y \in [1-2]$$

1- أوجد قيمة α حتى تكون هذه الدالة هي دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة.

2- أوجد دالتي الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y.

3- هل المتغيرين X و Y مستقلين أم لا؟

4- أحسب التوقع الرياضي والتباين للمتغير: $Z = 3X + 5Y$.

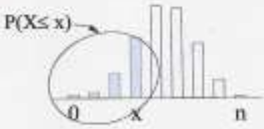
5- أوجد قيمة المقدار $Cov(X , Y)$، ثم أحسب معامل الارتباط لهذين المتغيرين.

الملاحق

الملحق رقم (1)

Table de la variable aléatoire Binomiale

Fournit la probabilité P(X≤x)
pour X ~ Bi(n,p)



p	x	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=5	0	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,0778	0,0312	0,0102	0,0024	0,0010	0,0003	0,0000
	1	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,3370	0,1875	0,0870	0,0308	0,0156	0,0067	0,0005
	2	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,6826	0,5000	0,3174	0,1631	0,1035	0,0579	0,0086
	3	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9130	0,8125	0,6630	0,4718	0,3672	0,2627	0,0815
	4	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9898	0,9688	0,9222	0,8319	0,7627	0,6723	0,4095
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=10	0	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0060	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	
	1	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0464	0,0107	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000	
	2	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,1673	0,0547	0,0123	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000
	3	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,3823	0,1719	0,0548	0,0106	0,0035	0,0009	0,0000
	4	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,6331	0,3770	0,1662	0,0473	0,0197	0,0064	0,0001
	5	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,8338	0,6230	0,3669	0,1503	0,0781	0,0328	0,0016
	6	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9452	0,8281	0,6177	0,3504	0,2241	0,1209	0,0128
	7	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9877	0,9453	0,8327	0,6172	0,4744	0,3222	0,0702
	8		1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9893	0,9536	0,8507	0,7560	0,6242	0,2639
	9		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0,9940	0,9718	0,9437	0,8926	0,6513
	10				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=15	0	0,2059	0,0352	0,0134	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000				
	1	0,5490	0,1671	0,0802	0,0353	0,0052	0,0005	0,0000	0,0000			
	2	0,8159	0,3980	0,2361	0,1268	0,0271	0,0037	0,0003	0,0000	0,0000		
	3	0,9444	0,6482	0,4613	0,2969	0,0905	0,0176	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	
	4	0,9873	0,8358	0,6865	0,5155	0,2173	0,0592	0,0093	0,0007	0,0001	0,0000	
	5	0,9978	0,9389	0,8516	0,7216	0,4032	0,1509	0,0338	0,0037	0,0008	0,0001	
	6	0,9997	0,9819	0,9434	0,8689	0,6098	0,3036	0,0950	0,0152	0,0042	0,0008	0,0000
	7	1,0000	0,9958	0,9827	0,9500	0,7869	0,5000	0,2131	0,0500	0,0173	0,0042	0,0000
	8	1,0000	0,9992	0,9958	0,9848	0,9050	0,6964	0,3902	0,1311	0,0566	0,0181	0,0003
	9		0,9999	0,9992	0,9963	0,9662	0,8491	0,5968	0,2784	0,1484	0,0611	0,0022
	10		1,0000	0,9999	0,9993	0,9907	0,9408	0,7827	0,4845	0,3135	0,1642	0,0127
	11		1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9824	0,9095	0,7031	0,5387	0,3518	0,0556
	12			1,0000	1,0000	0,9997	0,9963	0,9729	0,8732	0,7639	0,6020	0,1841
	13				1,0000	1,0000	0,9995	0,9948	0,9647	0,9198	0,8329	0,4510
	14					1,0000	1,0000	0,9995	0,9953	0,9866	0,9648	0,7941
	15						1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

p		0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=20	x											
	0	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	0,0000					
	1	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0005	0,0000					
	2	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000				
	3	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000				
	4	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000			
	5	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000		
	6	0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000	
	7	0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0002	0,0000	
	8	0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0009	0,0001	
	9	1,0000	0,9974	0,9861	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0039	0,0006	0,0000
	10	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0139	0,0026	0,0000
	11		0,9999	0,9991	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0409	0,0100	0,0001
	12		1,0000	0,9998	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,1018	0,0321	0,0004
	13		1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,2142	0,0867	0,0024
	14			1,0000	1,0000	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,3828	0,1958	0,0113
	15				1,0000	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,5852	0,3704	0,0432
	16					1,0000	0,9987	0,9840	0,8929	0,7748	0,5886	0,1330
	17					1,0000	0,9998	0,9964	0,9645	0,9087	0,7939	0,3231
	18						1,0000	0,9995	0,9924	0,9757	0,9308	0,6083
	19						1,0000	1,0000	0,9992	0,9968	0,9885	0,8784
	20							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=25	x											
	0	0,0718	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000						
	1	0,2712	0,0274	0,0070	0,0016	0,0001	0,0000					
	2	0,5371	0,0982	0,0321	0,0090	0,0004	0,0000					
	3	0,7636	0,2340	0,0962	0,0332	0,0024	0,0001	0,0000				
	4	0,9020	0,4207	0,2137	0,0905	0,0095	0,0005	0,0000				
	5	0,9666	0,6167	0,3783	0,1935	0,0294	0,0020	0,0001				
	6	0,9905	0,7800	0,5611	0,3407	0,0736	0,0073	0,0003	0,0000			
	7	0,9977	0,8909	0,7265	0,5118	0,1536	0,0216	0,0012	0,0000			
	8	0,9995	0,9532	0,8506	0,6769	0,2735	0,0539	0,0043	0,0001	0,0000		
	9	0,9999	0,9827	0,9287	0,8106	0,4246	0,1148	0,0132	0,0005	0,0000	0,0000	
	10	1,0000	0,9944	0,9703	0,9022	0,5858	0,2122	0,0344	0,0018	0,0002	0,0000	
	11	1,0000	0,9985	0,9893	0,9558	0,7323	0,3450	0,0778	0,0060	0,0009	0,0001	
	12		0,9996	0,9966	0,9825	0,8462	0,5000	0,1538	0,0175	0,0034	0,0004	
	13		0,9999	0,9991	0,9940	0,9222	0,6550	0,2677	0,0442	0,0107	0,0015	0,0000
	14		1,0000	0,9998	0,9982	0,9656	0,7878	0,4142	0,0978	0,0297	0,0056	0,0000
	15		1,0000	1,0000	0,9995	0,9868	0,8852	0,5754	0,1894	0,0713	0,0173	0,0001
	16			1,0000	0,9999	0,9957	0,9461	0,7265	0,3231	0,1494	0,0468	0,0005
	17				1,0000	0,9988	0,9784	0,8464	0,4882	0,2735	0,1091	0,0023
	18				1,0000	0,9997	0,9927	0,9264	0,6593	0,4389	0,2200	0,0095
	19					0,9999	0,9980	0,9706	0,8065	0,6217	0,3833	0,0334
	20					1,0000	0,9995	0,9905	0,9095	0,7863	0,5793	0,0980
	21					1,0000	0,9999	0,9976	0,9668	0,9038	0,7660	0,2364
	22						1,0000	0,9996	0,9910	0,9679	0,9018	0,4629
	23						1,0000	0,9999	0,9984	0,9930	0,9726	0,7288
	24							1,0000	0,9999	0,9992	0,9962	0,9282
	25							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

الملحق رقم (2)

Table de la loi de poisson

	λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
r	0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
	1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
	2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
	3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
	4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
	5			0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
	6					0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
	7							0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	8										0,0000

	λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
r	0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
	1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
	2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
	3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
	4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
	5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
	6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
	7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
	9			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
	10						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	11									0,0000	0,0000

	λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
r	0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
	1	0,1083	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
	2	0,0053	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
	3	0,0000	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
	4	0,0000	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
	5	0,0000	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
	6	0,0000	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
	7	0,0000	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
	8	0,0000	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
	9			0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
	10						0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
	11						0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
	12						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	13									0,0000	0,0000

	λ	2,5	3	4	4,5	5	5,5	6	7	8	9
r	0	0,0821	0,0498	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
	1	0,2052	0,1494	0,0733	0,0500	0,0337	0,0225	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
	2	0,2565	0,2240	0,1465	0,1125	0,0842	0,0618	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
	3	0,2138	0,2240	0,1954	0,1687	0,1404	0,1133	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
	4	0,1336	0,1680	0,1954	0,1898	0,1755	0,1558	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
	5	0,0668	0,1008	0,1563	0,1708	0,1755	0,1714	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
	6	0,0278	0,0504	0,1042	0,1281	0,1462	0,1571	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
	7	0,0099	0,0216	0,0595	0,0824	0,1044	0,1234	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
	8	0,0031	0,0081	0,0298	0,0463	0,0653	0,0849	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
	9	0,0009	0,0027	0,0132	0,0232	0,0363	0,0519	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
	10	0,0002	0,0008	0,0053	0,0104	0,0181	0,0285	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
	11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0043	0,0082	0,0143	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
	12		0,0001	0,0006	0,0016	0,0034	0,0065	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728
	13		0,0000	0,0002	0,0006	0,0013	0,0028	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504

الملحق رقم 3: التوزيع الطبيعي

$\Phi(z) = P(Z \leq z), \ -3.49 \leq z \leq 0, \quad Z \sim N(0,1)$ بجي

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3829
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

الملحق رقم 3: التوزيع الطبيعي - تابع -

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

الملحق رقم 4: توزيع كاي مربع

$$P(X \geq a), \qquad X \sim x^2(\alpha, \vartheta)$$

ϑ \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	-	-	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

الملحق رقم 5: توزيع ستودنت

$P(X \geq a)$, $X \sim t(\vartheta)$ t

ϑ \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

الملحق رقم 6: توزيع فيشر

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.05, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75
inf	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67

الملحق رقم 6: توزيع فيشر – تابع -

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.05, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
inf	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

الملحق رقم 6: توزيع فيشر – تابع -

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.1, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	39.86	49.5	53.59	55.83	57.24	58.2	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22
2	8.53	9	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.2
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.9	3.87
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.4	3.37	3.34	3.32	3.3	3.27	3.24
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.9	2.87
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.7	2.67	2.63
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.5	2.46
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.3	2.27	2.25	2.21	2.17
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.1
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.2	2.16	2.14	2.1	2.05
14	3.1	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.1	2.05	2.01
15	3.07	2.7	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.1	2.06	2.03	2	1.96	1.91
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.2	2.13	2.08	2.04	2	1.98	1.93	1.89
19	2.99	2.61	2.4	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2	1.96	1.94	1.89	1.84
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.9	1.86	1.81
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.8
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.1	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76
27	2.9	2.51	2.3	2.17	2.07	2	1.95	1.91	1.87	1.85	1.8	1.75
28	2.89	2.5	2.29	2.16	2.06	2	1.94	1.9	1.87	1.84	1.79	1.74
29	2.89	2.5	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.6
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.9	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.6	1.55
inf	2.71	2.3	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.6	1.55	1.49

الملحق رقم 6: توزيع فيشر – تابع -

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.1, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	61.74	62	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.84	3.83	3.82	3.8	3.79	3.78	3.76
5	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
6	2.84	2.82	2.8	2.78	2.76	2.74	2.72
7	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	2.42	2.4	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	2.3	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	2.2	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	2.12	2.1	2.08	2.05	2.03	2	1.97
12	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.9
13	2.01	1.98	1.96	1.93	1.9	1.88	1.85
14	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.8
15	1.92	1.9	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	1.81	1.79	1.76	1.73	1.7	1.67	1.63
20	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	1.76	1.73	1.7	1.67	1.64	1.6	1.57
23	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	1.73	1.7	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.5
27	1.7	1.67	1.64	1.6	1.57	1.53	1.49
28	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.5	1.46
40	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.4	1.35	1.29
120	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
inf	1.42	1.38	1.34	1.3	1.24	1.17	1

الملحق رقم 6: توزيع فيشر – تابع -

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.025, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	647.79	799.5	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63	976.71	984.87
2	38.51	39	39.17	39.25	39.3	39.33	39.36	39.37	39.39	39.4	39.41	39.43
3	17.44	16.04	15.44	15.1	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25
4	12.22	10.65	9.98	9.6	9.36	9.2	9.07	8.98	8.9	8.84	8.75	8.66
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43
6	8.81	7.26	6.6	6.23	5.99	5.82	5.7	5.6	5.52	5.46	5.37	5.27
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.9	4.82	4.76	4.67	4.57
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.3	4.2	4.1
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.2	4.1	4.03	3.96	3.87	3.77
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33
12	6.55	5.1	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18
13	6.41	4.97	4.35	4	3.77	3.6	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05
14	6.3	4.86	4.24	3.89	3.66	3.5	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95
15	6.2	4.77	4.15	3.8	3.58	3.41	3.29	3.2	3.12	3.06	2.96	2.86
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.5	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.1	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67
19	5.92	4.51	3.9	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.8	2.73	2.64	2.53
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.7	2.6	2.5
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.9	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.7	2.64	2.54	2.44
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.1	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.8	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.9	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34
29	5.59	4.2	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.9	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06
120	5.15	3.8	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.3	2.22	2.16	2.05	1.95
inf	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83

الملحق رقم 6: توزيع فيشر – تابع -

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.025, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	993.1	997.25	1001.41	1005.6	1009.8	1014.02	1018.26
2	39.45	39.46	39.47	39.47	39.48	39.49	39.5
3	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.9
4	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.9	4.85
7	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.2	4.14
8	4	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.42	3.37	3.31	3.26	3.2	3.14	3.08
11	3.23	3.17	3.12	3.06	3	2.94	2.88
12	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.73
13	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.6
14	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.76	2.7	2.64	2.59	2.52	2.46	2.4
16	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.62	2.56	2.5	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.56	2.5	2.45	2.38	2.32	2.26	2.19
19	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.2	2.13
20	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.39	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2
23	2.36	2.3	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.3	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.25	2.19	2.13	2.07	2	1.93	1.85
28	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.2	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.07	2.01	1.94	1.88	1.8	1.72	1.64
60	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
inf	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1

الملحق رقم 6: توزيع فيشر – تابع -

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.01, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	4052.18	4999.5	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85	6106.32	6157.29
2	98.5	99	99.17	99.25	99.3	99.33	99.36	99.37	99.39	99.4	99.42	99.43
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87
4	21.2	18	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.8	14.66	14.55	14.37	14.2
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72
6	13.75	10.93	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.1	7.98	7.87	7.72	7.56
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.8	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.2	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.4	4.25
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.5	4.39	4.3	4.16	4.01
13	9.07	6.7	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.3	4.19	4.1	3.96	3.82
14	8.86	6.52	5.56	5.04	4.7	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.8	3.66
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4	3.9	3.81	3.67	3.52
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.2	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41
17	8.4	6.11	5.19	4.67	4.34	4.1	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.02	3.84	3.71	3.6	3.51	3.37	3.23
19	8.19	5.93	5.01	4.5	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.3	3.15
20	8.1	5.85	4.94	4.43	4.1	3.87	3.7	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.4	3.31	3.17	3.03
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98
23	7.88	5.66	4.77	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.3	3.21	3.07	2.93
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.9	3.67	3.5	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82
27	7.68	5.49	4.6	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.9	2.75
29	7.6	5.42	4.54	4.05	3.73	3.5	3.33	3.2	3.09	3.01	2.87	2.73
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.7	3.47	3.3	3.17	3.07	2.98	2.84	2.7
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.8	2.67	2.52
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.5	2.35
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19
inf	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.8	2.64	2.51	2.41	2.32	2.19	2.04

الملحق رقم 6: توزيع فيشر – تابع -

$$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.01, \vartheta_1, \vartheta_2)$$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	6208.73	6234.63	6260.65	6286.78	6313.03	6339.39	6365.86
2	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.5
3	26.69	26.6	26.51	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	9.55	9.47	9.38	9.29	9.2	9.11	9.02
6	7.4	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.36	5.28	5.2	5.12	5.03	4.95	4.86
9	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.4	4.31
10	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4	3.91
11	4.1	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.6
12	3.86	3.78	3.7	3.62	3.54	3.45	3.36
13	3.67	3.59	3.51	3.43	3.34	3.26	3.17
14	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3
15	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.26	3.18	3.1	3.02	2.93	2.85	2.75
17	3.16	3.08	3	2.92	2.84	2.75	2.65
18	3.08	3	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3	2.93	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	2.94	2.86	2.78	2.7	2.61	2.52	2.42
21	2.88	2.8	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	2.83	2.75	2.67	2.58	2.5	2.4	2.31
23	2.78	2.7	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	2.74	2.66	2.58	2.49	2.4	2.31	2.21
25	2.7	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	2.66	2.59	2.5	2.42	2.33	2.23	2.13
27	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.2	2.1
28	2.6	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	2.57	2.5	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.55	2.47	2.39	2.3	2.21	2.11	2.01
40	2.37	2.29	2.2	2.11	2.02	1.92	1.81
60	2.2	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.6
120	2.04	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
inf	1.88	1.79	1.7	1.59	1.47	1.33	1

المراجع

أولا: المراجع باللغة العربية

1- أحمد السيد عامر، **الإحصاء الوصفي والتحليلي**، (دار الفجر للنشر والتوزيع، القاهرة، 2007).

2- الكيخيا نجاة إبراهيم، **أساسيات الإحصاء الإستدلالي**، (دار المريخ للنشر، الرياض، 2007).

3- السعدي رجال، **نظرية الإحتمالات**، (ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2008).

4- السيفو ولد إسماعيل، **أساسيات الأساليب الإحصائية**، (زمزم ناشرون وموزعون، عمان، 2010).

5- أمحمد معتوق، **الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية**، (ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015).

6- أنيس كنجو، **الإحصاء الرياضي**، (مديرية الكتب الجامعية، دمشق، 1979).

7- إمتثال محمد حسن وآخرون، **مقدمة في أساليب الإستدلال الإحصائي والتنبؤ**، (مكتبة الوفاء القانونية، الإسكندرية، 2012).

8- كامل فليفل وفتحي حمدان، **الإحصاء**، (دار المناهج، عمان، 2005).

9- محمد حسين محمد رشيد القادري، **مبادئ الإحصاء والإحتمالات ومعالجتها بإستخدام برنامج SPSS**، (دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع، 2012).

10- محمد صبحي أبو صالح، **الطرق الإحصائية**، (دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، 2000).

11- موراي سبيجل، **الإحصاء والإحتمالات**، (أكاديميا، بيروت، 1998).

12- نعمة الله نجيب إبراهيم، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، (مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، 2012).

13- صالح رشيد بطارسة، **الإحصاء والإحتمالات**، (دار أسامة للنشر والتوزيع، عمان، 2010).

14- عزام صبري، **الإحصاء الرياضي**، (دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع، عمان، 2010).

15- عماد عصاب عبابنة وسالم عيسى بدر، **مبادئ الإحصاء الوصفي والإستدلالي**، (دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، 2007).

ثانيا: المراجع باللغة الأجنبية

16- *Chamoun Chamoun*, ***Elements de statistiques et la probabilités***, *(office des publications universitaires, Alger, 2010).*

17- Jean-Pierre Lecoutre, ***Statistique et probabilités,*** *(Malakoff : Dunod, 2016).*

18- Rachid Souidi, ***Statistique inférentielle,*** *(OPU, Alger, 1999).*

19- Mohamed Benali moncef, ***Statistique mathématique : rappels de cours avec exercices corriges,*** *(Centre de publication universitaire, Tunis, 2002).*

20- Besma Belhadj, ***Statistique mathématique, inférence statistique : introduction à l'économiétrie et aux techniques des sondages : cours, exercices corrigés et sujets d'examens, problèmes concrets,*** *(Centre de publication universitaire, Tunis, 2010).*

21- Bernard Verlant, ***Statistiques et Probabilités : Manuel de cours, Exercices corrigés – Sujets d'examens*** *(BERTI Editions, Alger, 2008).*

22- Maurice Lethielleux, ***Probabilités, estimation statistique,*** *(Dunod, Paris, 2016).*

23- Ahmed Chibat, ***Cours de statistiques,*** *(Universié mentouri de constantine, Alger, 2000)*.

فهرس المحتويات