

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR**

DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE ELECTROTECHNIQUE**

OPTION: COMMANDE ELECTRIQUE

THEME

**MODELISATION DE LA DECHARGE COURONNE EN GEOMETRIE
FIL-CYLINDRE**

Proposé et dirigé par :

Monsieur: NOURI Hamou

Présenté par :

**BOUGUERRA Zahra
HADJAB Meryem**

Année Universitaire : 2007 / 2008

REMERCIEMENTS

G râce à Dieu le puissant et le grand, on termine ce modeste travail.

Ce travail est le fruit de beaucoup d'efforts et de persévérance. Pour cela nous remercions infiniment l'enseignant qui nous encadre

« Mr NOURI Hamou »

qui nous donne l'aide et la coopération et aussi tous le temps pour faire réussir ce mémoire.

Du fond du cœur... Nous remercions aussi le guide et l'enseignant chef de Département de L'électrotechnique

« Mr BENJAÏMA »

n'oublier pas à remercier nos enseignants, ainsi que toute la famille du département.

Nos profonds remerciements aux membres du jury qui nous ont honoré en acceptant de juger ce travail.

SOMMAIRE

Remerciements

Sommaire.

Liste des figures.

Notations.

Introduction générale.....01

Chapitre I : Généralités sur la décharge électrique

I.1- Introduction.....05

I.2- Condition d'existence d'une décharge électrique05

I.3- Ionisation du gaz06

I.4.- Nature de la décharge électrique08

 I.4.1- Avalanche électronique08

 I.4.2- Décharge sombre de Townsend09

 I.4.3-Théorie des Streamers12

I.5- Couronnes de Streamers15

 I.5.1- Généralités sur les couronnes de Streamers15

 I.5.2- Principales caractéristiques des couronnes de Streamers.....16

 I.5.3- Quelques applications sur les couronnes de Streamers.....18

I.6 -Seuil critique de décharge couronne19

I.7-Effet des impuretés sur le processus de décharge20

I.8- Décharges surfaciques.....20

 I.8.1- Aspect électrique21

 I.8.2- Décharge couronne en présence d'une surface diélectrique.....22

I.9- Conclusion23

Chapitre II Formulation d'un problème d'électromagnétique par des équations de

Maxwell

II.1- Introduction.....26

II.2- Modèle mathématique : Les équations de Maxwell.....26

 II.2.1- Les équations de Maxwell en régime harmonique26

 II.2.2- L'équation vectorielle des ondes29

 II.2.3- Les conditions aux limites30

II.3- Formulation faible du problème.....	35
II.3.1- Problème à résoudre.....	35
II.3.2- Formulation par la méthode de Galerkin.....	38
II.4- conclusion.....	44

**Chapitre III : Méthodes numériques de calcul des paramètres de la décharge
couronne.**

III.1- Introduction	46
III.2- Présentation des équations de Maxwell.....	46
III.2.1- Equation en potentiel scalaire : « Poisson et Laplace ».....	46
III.2.2- Conditions aux limites.....	48
III.2.3- Condition d'interfaces.....	49
III.3- Présentation des méthodes numériques.....	49
III.3.1- La Méthode des Différences Finies (M.D.F)	49
III.3.1.1- Principe de la méthode.....	50
III.3.1.2- Avantages de la M.D.F.....	53
III.3.1.3- Inconvénients de la M.D.F.....	53
III.3.2- La Méthode des Eléments Finis (M.E.F)	54
III.3.2.1- Principe de la méthode.....	54
III.3.2.2- Avantages de la M.E.F	58
III.3.2.3- Inconvénients de la M.E.F.....	58
III.3.3- La Méthode des Eléments Finis de Frontière (M.E.F.F)	58
III.3.3.1 - Formulation indirecte de la M.E.F.F	59
III.3.3.2- Avantages de la méthode indirecte	60
III.3.3.3- Inconvénients de la méthode directe	60
III.3.3.4- Formulation directe de la M.E.F.F	61
III.3.3.5- Avantages et inconvénients de la formulation directe	61
III.4- La Méthode de Simulation de Charges (M.S.C)	61
III.4.1- Avantages de la M.S.C	63
III.4.2- Inconvénients de la M.S.C	63
III.5- Conclusion.....	64

Chapitre IV: Simulation numérique de la décharge couronne en géométrie fil-cylindre

IV.1- Introduction.....	66
IV.2- Description physique.....	67
IV.2.1- Description du problème.....	67
IV.2.2- Domaine de discrétisation (Maillage).....	67
IV.2.3- Modèle mathématique.....	68
IV.2.4- Epaisseur de la zone d'ionisation	70
IV.2.5- Condition aux limites.....	71
IV.3- Modèles et approximations	71
IV.3.1- Approximation de Deutsch.....	72
IV.3.2- Conditions aux limites de Townsend et Kaptzov.....	72
IV.3.3- Modèles de Popkov, Sarma/Janischewskyj et d'autres.....	72
IV.4- Différentes étapes de résolution numérique.....	73
IV.4.1- Etape 1 : Génération du maillage électrostatique	75
IV.4.1.1- Méthode de résolution	76
IV.4.2- Etape 2 : Evaluation d'erreurs.....	78
IV.4.2.1- Méthode d'interpolation / extrapolation	79
IV.4.2.2- Méthode des différences finies (MDF).....	79
IV.4.3- Etape 3 : Résolution de l'équation de Poisson.....	80
IV.4.3.1- Méthode simplifiée des caractéristiques.....	81
IV.4.4- Etape 4 : Reconstitution du maillage.....	82
IV.5- Résultats et interprétation.....	84
IV.5.1- Les lignes de champ.....	84
IV.5.2- Les contours équipotentiels.....	86
IV.5.3- Le maillage.....	86
IV.5.4- Le potentiel électrique.....	87
IV.5.5- Le champ électrique.....	88
IV.5.6- La densité de la charge d'espace.....	91
IV.5.7- La densité de courant électrique	92
IV.6- Conclusion.....	93
Conclusion générale.....	95

Annexes

Bibliographie

Liste des figures

Chapitre I :

Figure I.1: Représentaion du volume critique dans une séquence de décharge positive.

Figure I.2: processus de multiplication électrique initié par un électron primaire.

Figure I.3: Schéma de l'allure d'une avalanche électrique dans un processus de décharge positive.

Figure I.4: Génération d'avalanches secondaires dans un processus de décharge positive.

Figure I.5: Représentation schématique du processus de développement d'un Streamer positif.

Figure I.6: Représentation schématique du processus de développement d'un Streamer négatif.

Figure I.7: Photographies CCD d'une décharge couronne dans un dispositif pointe-pointe de 25mm d'intervalle d'air :

(a): Image de gauche :vue perpendiculaire.

(b): Image de droite : vue parallèle.

Figure I.8: Comparaison du champ électrique autour de l'électrode haute tention dans l'air et en présence d'une surface diélectrique:

(a) : ligne de champ dans un intervalle d'air.

(b) : ligne de champ en présence d'une surface de PVC ($\epsilon=4$).

(c) : champ maximum en présence d'une surface de OVC et dans l'air.

(d) : distribution du champ dans les cas de l'air et une surface de PVC.

Figure I.9: coefficients d'ionisation et attachement de l'air respectivement α_0 et η_0 (courbe en pointillés)et ceux accentués par la présence d'une surface en PVC(courbes en lignes).

Chapitre II :

Figure II.1 : Conditions d'interfaces: continuité tangentielle du champ E .

Figure II.2 : Ondes convergentes.

Figure II.3 : Ondes divergentes.

Figure II.4 : Coordonnées cylindriques.

Figure II.5 : Coordonnées sphériques.

Figure II.6 : Configurations du problème :

(a) problème en espace libre.

(b) problème borne.

Chapitre III :

Figure III.1 : Maillage carré.

Figure III.2: Point central et ses voisins.

Figure III.3: Le maillage en éléments finis triangulaires.

Figure III.4 : Mailles de référence.

Chapitre IV :

Figure IV-1 : Géométrie du problème.

Figure IV-2: Domaine de discrétisation.

Figure IV-3 : Représentation des charges simulant la configuration fil - cylindre.

Figure IV-4 : Organigramme de la configuration fil – cylindre coaxiaux.

Figure IV-5 : Tracé d'une ligne de champ pour la configuration fil - cylindre.

Figure IV.6 : Représentation d'une portion de lignes du champ et de contours équipotentiel.

Figure IV.7: Les lignes de champ pour un écart du domaine de calcul.

Figure IV.8 : Les lignes de champ pour la configuration fil-cylindre.

Figure IV.9 : Représentation des surfaces équipotentiels pour la configuration fil-cylindre.

Figure IV.10: Maillage généré pour la configuration fil cylindre.

Figure IV.11: Variation du potentiel entre les deux électrodes du système.

Figure IV.12 : Distribution spatiale du potentiel électrique.

Figure IV.13 : Variation du champ électrique entre les deux électrodes du système.

Figure IV.14: Distribution spatiale du champ électrique.

Figure IV.15: Variation de la densité de la charge d'espace.

Figure IV.16: Variation de la densité du courant les deux électrode.

Figure IV.17 : Distribution spatiale de la densité du courant dans le domaine de calcul.

Liste de notations

- E le champ électrique [Volts/m],
- E_c le champ critique [Volts/m],
- E_p le champ superficiel, $E_p=30KV$,
- K coefficient, $K=0.308$,
- R le rayon du conducteur [cm],
- δ la densité relative de l'air = $3.92P/(273+T)$,
- T la température [$^{\circ}C$],
- P la pression de l'air [cm Hg],
- q_e la charge électrique [coulombs/m³],
- q_m la charge magnétique [coulombs/m³],
- B l'induction magnétique [Webers/m²],
- D l'induction électrique [coulombs/m²],
- H le champ magnétique [Ampères/m²],
- J la densité de courant [Ampères/m²],
- J_e la densité de courant électrique [Ampères/m²],
- J_m la densité de courant magnétique [Ampères/m²],
- ϵ la constante diélectrique (où permittivité) du milieu [F/m²],
- ϵ_0 la constante diélectrique du vide = $8.854*10^{-12}$,
- ϵ_r la permittivité relative du milieu,
- μ la perméabilité magnétique [m²/Vs],
- μ_0 la perméabilité du vide = $1.8*10^{-4}$,
- μ_r la perméabilité relative ,

- σ la conductivité du milieu ,
- k la constante de propagation du champ électromagnétique dans le milieu ($k^2 = \omega^2 \mu$),
- n le vecteur unité normal à la surface de séparation,
- ω la pulsation de la source,
- r la distance radiale à l'origine,
- d la dimension de l'espace,
- Ψ la fonction d'onde,
- A la solution de l'équation vectorielle des ondes,
- η_0 l'impédance caractéristique du vide ($\eta_0 = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0^{-1}}$),
- ϕ le potentiel [Volts],
- θ angle en [$^\circ$],
- φ angle en [$^\circ$],
- n_e le vecteur unitaire ,
- Γ_{cep} la surface du problème,
- Ω_{cep} domaine du problème,
- k_0 la constante de propagation en espace libre ($k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$),
- Ω domaine intérieur (borné),
- ρ densité de la charge d'espace [C/m^3],
- ρ_v densité de la charge d'espace volumique [C/m^3],
- h le pas de discrétisation,
- i, j les coordonnées de la position d'un nœud quelconque,
- C le vecteur des conditions aux limites,
- N_{ma} le nombre totale de mailles,
- S_b la construction de l'espace d'approximation,
- I_i l'intervalle de calcul,
- N_{so} le nombre de sommets du maillage en une dimension d'espace,

N_e le nombre de nœud d'interpolation,
 N_i les fonctions d'interpolation,
 $[A_e]$ la matrice associée à l'élément;
 $\{b_0\}$ le vecteur qui tient compte des éventu
 L_c la longueur critique de l'avalanche,
 R_0 le rayon du fil conducteur,
 R le rayon de frontière circulaire,
 I le courant de la décharge,

V_{app} la tension appliqué ,

représente la charge ponctuelle au point $j Q_j$,

représente le coefficient de potentiel, dépendant du type de charges utilisée, P_{ij}

R' la distance entre les points M et P ,

ρ_s la distribution de charges surfaciques,

G la fonction de Green,

le vecteur des conditions aux limites, $\{B\}$

représentent les normales à la frontière, n_2 et n_1

Dès les débuts de l'électrotechnique des hautes tensions, l'effet couronne ou « *corona effect* » (en notation anglo saxonne) a attiré l'attention des chercheurs notamment par les phénomènes lumineux ayant lieu. C'est à R.W.Peek a qui revient la première étude sur l'effet couronne. Celui-ci qui, en 1929 a établi une loi empirique exprimant le seuil d'apparition de la lueur, loi qui est encore en usage. De là une grande étape a été franchie et des travaux ne cessent de s'effectuer sur la compréhension du phénomène physique lui-même et sur les moyens de détermination de ses paramètres électriques à savoir le champ, le courant, la charge et les paramètres optiques tel que, le spectre de lumière, le canal de décharge...etc. Cependant, la maîtrise du phénomène permet la dimensionnement des lignes et des postes HT et THT du fait qu'il mène à l'amorçage de tout l'intervalle d'isolement.

La décharge couronne n'est qu'un cas parmi d'autres, elle présente des aspects utiles tels que la production de l'ozone, le dépoussiéreur électrostatique (précipitateur électrostatique), les machines électrophotographiques, la production des ions négatifs qui sont bénéfiques pour l'organisme (produits dans le cas de la décharge couronne négative), et des aspects nuisibles tels que les pertes dans les lignes de transports d'énergie, les défauts d'isolation, les perturbations radioélectriques,...etc.

La décharge couronne ayant des avantages et des inconvénients. Comme l'avantage, la création du vent ionique. Les ions créés par ces décharges sont accélérés par le champ électrique. La vitesse est transférée aux molécules du gaz ambiant par la collision, lui donnant un mouvement de la pointe de l'aspérité vers le milieu du gaz. Et aussi comme un inconvénient en présente le bruit audible, dans les lignes de transport, au dessus de 500 kV. Les bruits audibles constituent un problème aussi important que les interférences radiophoniques et dans certains cas, ils constituent un paramètre cause majeur dans la détermination du type et de la dimension des conducteurs [1].

La décharge couronne est utilisée à plusieurs fins intéressantes comme la peinture électrostatique, la génération d'ozone commercial, la dépollution, le traitement de surface,...etc [2].

L'effet couronne désigne l'ensemble des phénomènes liés à l'apparition d'une conductivité dans l'environnement d'un conducteur porté à une haute tension. Le système des électrodes peut former diverses configurations à savoir fil – plan, pointe – plan, fil – cylindre, sphère – plan,...etc. Lorsque le champ devient important à proximité de

l'électrode active, l'ionisation du gaz a lieu. A vrai dire, il se forme deux zones, celle à proximité du conducteur dite zone d'ionisation se distingue par une charge totale nulle et celle dans l'espace restant est dite zone de dérive. Dans cette dernière les ions de même polarité que la tension appliquée sont entraînés par la force électrostatique et tendent à se déplacer le long des lignes du champ. On est donc en présence d'un problème couplé champ électrique – convection des charges qui est fortement non linéaire.

Les décharges dans un gaz sont à l'origine associée au courant traversant l'espace inter électrode, et plus généralement, elles regroupent tous les processus tels que l'ionisation, l'attachement ou la photo émission qui interviennent dans un gaz lorsqu'un champ électrique suffisamment important lui est appliqué, mais également les écoulements des particules chargées et neutres qui s'en suivent. Les phénomènes mis en jeu dans ces décharges sont complexes et variés selon, entre autres, la nature et la pression du gaz, et l'importance du champ électrique. Cette étude se limite au cas particulier des « décharges couronnes » dans l'air aux conditions atmosphériques normales. Les travaux effectués jusqu'à présent expérimentaux soient – ils ou numériques se basent tous sur la décharge couronne de polarité positive et très peu d'entre eux traitent le cas de la polarité négative. Ceci revient au fait que cette dernière est généralement moins contraignante que la première pour les systèmes d'isolation du réseau et que ses phénomènes sont complexes et restent encore mal compris.

Le présent travail est consacré à l'étude de la décharge couronne positive. Le modèle numérique utilisé dérive des travaux d'Al Hamouz en polarité positive et dans lequel une modification a été apportée. Cette dernière introduit le potentiel correspondant au champ critique du minimum d'ionisation directement sur la frontière de la zone d'ionisation. Dans les travaux antérieurs, cette zone d'ionisation est négligée dans les calculs numériques et n'a été prise en considération que récemment. Le champ critique du minimum d'ionisation pris comme condition de convergence est atteint lors d'un processus itératif.

Le modèle numérique est basé sur la discrétisation du domaine d'étude. A partir du maillage électrostatique Laplacien obtenu par la méthode des images électriques, le champ correspondant est introduit pour l'estimation de la densité de la charge d'espace en tout point du maillage, en utilisant la méthode simplifiée des caractéristiques. Cependant, un estimé de la densité de la charge d'espace sur la frontière de la zone d'ionisation est nécessaire. L'application de la méthode des différences finies (MDF) est introduite pour la résolution de l'équation de Poisson en utilisant les éléments rectangulaires générés

lors du tracé des lignes du champ électrique et des contours équipotentiels. Le choix de cette méthode est effectué à partir des considérations sur la géométrie. Cette méthode s'adapte de façons très souples aux domaines compliqués.

Une fois l'équation de Poisson résolue, la densité de la charge d'espace est rétablie jusqu'à ce que la distribution du potentiel atteigne une valeur stable. Dans la formulation en éléments rectangulaires nous avons donc introduit trois conditions aux limites : La première correspond au potentiel appliqué sur le fil, la seconde correspond au potentiel nul sur le cylindre et la troisième correspond au potentiel correspondant au champ critique du minimum d'ionisation sur la frontière de la zone d'ionisation.

Un deuxième maillage ou même plus sont effectués en tenant compte de toutes les charges et les mêmes procédures sont répétées jusqu'à la convergence de la densité de la charges d'espace.

Dans le cas de la polarité négative, nous avons remarqué que le calcul peut s'effectuer de la même façon que dans le cas de la polarité positive. La différence réside uniquement dans les grandeurs physiques à savoir la longueur d'avalanche, la tension seuil et la mobilité ionique. C-à-d ; les étapes de résolution sont les mêmes. Ces derniers effectuées et accompagnées des résultats qui sont données en détail.

Ainsi notre travail est réparti en quatre chapitres. Le premier est consacré aux rappels sur les différents types de décharges électriques et leurs applications dans le domaine d'électrotechnique.

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter une étude de formulation du problème d'électromagnétisme qui consiste à déterminer les structures du champ électromagnétique dans une région de l'espace.

Tand que le troisième chapitre, est consacré à la présentation des méthodes numériques qui sont : la méthode des différences finies (MDF), la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des éléments finis de frontière (MEFF) et la méthode de simulation de charges (MSC). Donc, ces dernières utilisées pour le suivi du mécanisme de l'effet couronne.

Dans le quatrième chapitre, qui est le dernier chapitre dans notre mémoire, nous allons utiliser la méthode de différence finies pour résoudre les équations aux dérivées partielles gouvernant la décharge électrique et aussi utilisées le logiciel MATLAB pour simuler la distribution spatiale du champ électrique et la densité du courant dans la géométrie fil – cylindre coaxiaux.

I.1- Introduction:

Les phénomènes de décharge électrique, étudiés pourtant depuis près de deux siècles, font toujours l'objet de recherche active auprès des scientifiques. On pourrait s'étonner de cet état de fait mais on comprendrait vite que cela n'est dû qu'à la très grande complexité du phénomène et des mécanismes qui le constituent. Cependant, de grandes avancées ont été faites ces dernières décennies dans l'amélioration des moyens de diagnostic des premiers instants de la décharge et donc dans l'étude des mécanismes d'initiation [3]. Cela a permis d'accroître les connaissances sur le phénomène et d'avancer dans les applications qui ont d'ailleurs connu de bien plus larges expansions.

Dans ce chapitre, nous élaborerons quelques grandes théories sur les mécanismes d'initiation d'une décharge électrique dans l'air. Nous traiterons tout d'abord la décharge dans les gaz, en élaborant sommairement les théories allant des électrons primaires jusqu'à la décharge couronne. Nous aborderons ensuite les décharges surfaciques pour parler de l'influence d'une surface diélectrique sur les phénomènes physiques fondamentaux d'une décharge électrique.

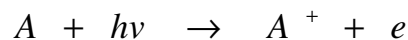
I.2- Condition d'existence d'une décharge électrique :

Il est tout à fait bien connu qu'aucune décharge électrique ne peut s'initier dans l'air sans la présence d'au moins d'un électron dans le volume de gaz couvrant l'espace inter-électrodes. Ces électrons présents au tout début de la décharge sont communément appelés électrons germes ou encore électrons primaires. Ils permettent d'initier la première avalanche électronique sans laquelle aucun type de décharge ne peut prendre forme encore moins se maintenir. Ils peuvent être produits par radiation cosmique, par les sources naturelles d'ionisation, par les charges résiduelles issues des décharges précédentes ou encore par détachement des ions négatifs par effet de champ. De ces sources de production d'électrons, il peut y avoir jusqu'à 20 paires d'ion-électron par mm^3 par seconde. Dans la région d'accentuation du champ électrique, ces électrons primaires seront accélérés et pourront gagner de leur parcours une certaine énergie d'ionisation de quelques eV avant leur première collision. L'énergie nécessaire pour ioniser une molécule d'air (20% de O_2 , 80% de N_2) est d'environ une quinzaine d'eV (12.5 pour l'oxygène et 15.57 pour l'azote) [4], au moins un des électrons primaires accélérés par le champ pourrait donc gagner l'énergie suffisante pour causer la première ionisation.

I.3- Ionisation du gaz :

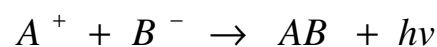
L'existence d'une décharge électrique résulte du passage d'un courant dans le diélectrique gazeux et donc de la possibilité de créer des particules chargées; essentiellement des électrons; à partir des atomes ou molécules neutres du gaz [5]. Les principaux mécanismes régissant la génération des porteurs de charge dans les gaz sont : les mécanismes d'ionisation tendant à augmenter leur densité et les mécanismes de recombinaison et d'attachement tendant à les réduire.

Le phénomène d'ionisation est un processus tout à fait aléatoire mais il peut être formellement lié au libre parcours moyen pour l'ionisation. Le processus est largement décrit dans la littérature scientifique [3] et on peut noter que la nature du gaz et sa densité sont les paramètres les plus influents. Un électron peut ioniser une particule neutre par collision à condition qu'il ait une énergie supérieure à celle d'ionisation de la particule. Cependant à température élevée, surtout avec une forte pression, le gaz de remplissage peut s'ioniser lui-même et fournir ainsi d'autres électrons libres. Un photon suffisamment énergétique, généralement libéré par un atome métastable retrouvant son état d'équilibre peut également contribuer à l'ionisation des particules neutres selon le principe suivant :



D'autre part, l'ionisation peut être également produite par les ions positifs, mais ce processus exige que la particule incidente ait un niveau énergétique, de l'ordre de 100 ou 200 eV. Le phénomène n'intéresse que certains types de décharge à basse pression, dans lesquelles les ions accélérés par le champ électrique, puissent acquérir une énergie importante entre deux collisions. Dans tous les cas, lors de la collision, l'excédent d'énergie de l'électron, de la particule, du photon ou de l'ion est fourni à l'électron nouvellement créé sous forme d'énergie cinétique.

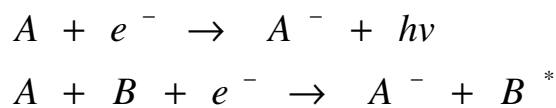
La recombinaison a été beaucoup moins étudiée que son processus inverse l'ionisation. Cependant elle reste d'une importance fondamentale pour la bonne compréhension des mécanismes de développement de la décharge et tout particulièrement pour ceux de sa phase d'extinction [3]. La recombinaison est la neutralisation d'un ion positif par capteur d'un électron ou d'ion négatif suivant le schéma ci-dessous.



Le taux des recombinaisons ion - ion est généralement beaucoup plus élevé que celui des recombinaisons électron - ion, ce qui est dû à la faible mobilité des ions positifs [5].

Les phénomènes de recombinaison sont en général négligés dans les calculs des paramètres des décharges électrique mais sous certaines conditions fixées évidemment par les caractéristiques du gaz et la pression, ils ne peuvent plus l'être. Il en est de même de l'attachement électronique qui est le phénomène se produisant quand un électron rentre en collision avec un atome ou une molécule de gaz neutre pour former un ion négatif stable. L'état de stabilité n'est pas toujours atteint, car l'ion négatif formé peut rentrer dans un état intermédiaire avant de se dissocier. Par exemple : O^- , $O^-_{,2}$, NO^-_2 , NO^-_3 , OH^- , H^- et les ions négatifs sont formés de façon stable mais non N^- , N^-_2 ou encore les ions négatifs des gaz rares [3].

L'attachement électrique est d'autant plus important que la molécule présente une plus grande affinité électronique. Le processus d'attachement des électrons est le suivant :



L'excédent d'énergie fourni par l'électron incident (c'est-à-dire la différence entre son énergie cinétique et l'affinité électronique de la molécule) peut se retrouver sous forme de démission radiative dans le cas d'une collision entre corps ou sous forme de source d'énergie cinétique pour une troisième particule dans le cas d'une collision à trois corps.

Dans le seul contexte des mécanismes d'initiation de la décharge, la recombinaison et l'attachement électronique peuvent jouer un rôle très important. Ils peuvent d'une part retarder l'ionisation de la décharge en favorisant la formation d'états intermédiaires et d'autre part l'inhiber tout simplement. Il est certain que sous n'importe quelles conditions, une multiplication électronique ne peut s'initier que dans une région où les phénomènes d'ionisation sont plus importants que ceux de recombinaison et d'attachement. Dans l'air, cette condition est fournie par un champ réduit égale à : $\frac{E}{P} = 34 \text{ V.cm}^{-1} \cdot \text{torr}^{-1}$, soit 26 Kv.cm^{-1} à la pression atmosphérique [5].

I.4.- Nature de la décharge électrique :

I.4.1- Avalanche électronique :

- Notion de volume critique :

Pour initier une avalanche de taille critique (Streamer), un électron germe doit être situé convenablement, c.à.d dans une zone appelée volume critique. Le volume critique est le volume de gaz autour de l'électrode haute tension dans lequel des avalanches peuvent se développer pour atteindre la taille critique des streamers (la théorie des streamers sera élaborée au paragraphe (II.4.3)). Le volume critique peut être défini par ces deux conditions suivantes :

- Le champ électrique doit être assez grand, c.à.d supérieur au champ disruptif du gaz de remplissage E_c et l'électron germe doit être placé dans une région où le coefficient d'ionisation net est supérieur à zéro $(\alpha - \eta) \geq 0$ (α et η étant respectivement les coefficients d'ionisation et d'attachement du gaz remplissage) ;
- L'avalanche initiée par l'électron germe dans ce volume doit pouvoir se développer sur une distance suffisante pour générer un streamer.

Les deux conditions définissant le volume critique permettent d'obtenir deux surfaces limites S_{in} et S_{out} .

$$S_{in} : x = 0 \text{ et } \exp \int (\alpha - \eta) dx \geq 10^8 \quad (\text{critère de Raether})$$

$$S_{out} : x \neq 0 \text{ et } E = E_c \quad (I.1)$$

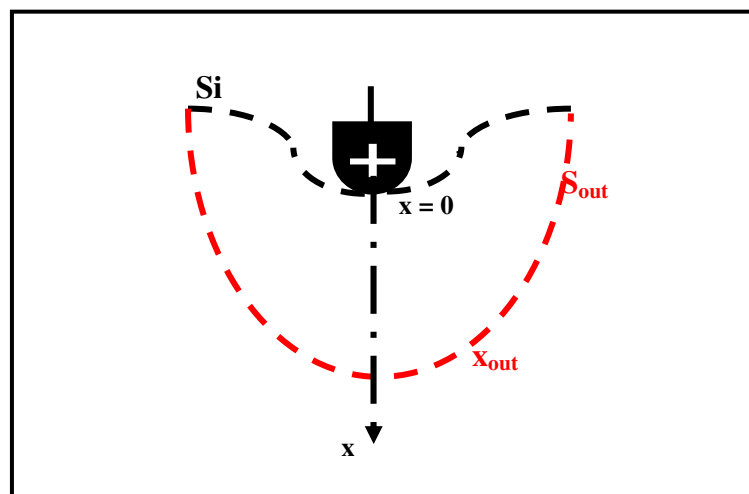


Figure I.1 : Représentation du volume critique dans une séquence de décharge positive.

La première surface délimitant le volume critique est telle que tout électron germe situé entre elle et l'électrode haute tension ne peut créer une avalanche de taille critique. La deuxième surface est définie par le champ critique (E_c). Ces deux surfaces se déplacent durant le processus de décharge car la première peut se rapprocher de l'électrode haute tension puisque le coefficient α croît rapidement en fonction du champ électrique tandis que la seconde fixée par E_c peut s'éloigner de l'électrode haute tension du fait de la distorsion du champ électrique dues aux fortes densités de charges d'espace se trouvant dans les premières avalanches [5]. En se basant sur la loi de Peek [6], longtemps utilisée pour la détermination du champ critique au niveau des lignes aériennes de transport d'énergie, on peut déduire que E_c dépend outre de la nature du gaz de remplissage, des caractéristiques des électrodes et des conditions atmosphériques.

1.4.2- Décharge sombre de Townsend :

Quand la première ionisation, causée par un électron primaire, se produit, on peut considérer que deux électrons libres (l'un étant l'électron primaire et l'autre l'électron nouvellement créé) partiront de là avec une énergie ionisante nulle. Ils seront pris à leur tour dans la région d'accentuation du champ électrique et par ce processus, une multiplication électronique s'initiera dans l'intervalle inter – électrodes. La figure I.2 ci – dessous donne une schématisation de ce processus :

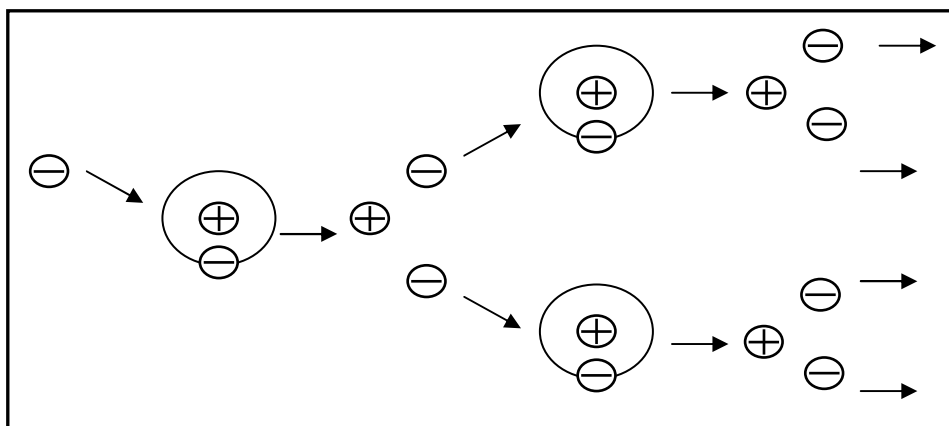


Figure I.2 : Processus de multiplication électronique initié par un électron primaire.

N_{e0} électrons primaires dans un gaz de densité déterminée en présence d'un champ électrique E , vont dériver le long des lignes de champ dr , chacun produisant α nouvelles paires d'ion – électron devant subir η attachements par unité de longueur de dérive. Le coefficient α , appelé premier coefficient de Townsend, est défini comme étant le nombre moyen de paires d'ion – électron créées par un électron primaire sur une distance de parcours d'un centimètre, dans la direction du champ. Le coefficient η représente le facteur d'attachement du gaz de remplissage.

Afin de mieux décrire la multiplication électronique dans les zones à faible champ, où l'attachement électronique ne peut plus être négligé, on est souvent amené à utiliser le coefficient net d'ionisation α' , ($\alpha' = \alpha - \eta$) pour déterminer le nombre d'électrons contenus dans les avalanches créées par N_{e0} électrons primaires.

$$N_e(r) = N_{e0} * \exp \int_{r_0}^r \alpha' * dr \quad (I.2)$$

En exprimant le coefficient α comme une fonction de la distribution du libre parcours moyen des électrons (donc à la distribution d'énergie des électrons) et de la section efficace d'ionisation des atomes, Townsend a déduit l'expression approchée suivante [7] :

$$\alpha = A * P * \exp\left(-\frac{B * P}{E}\right) \quad (I.3)$$

Où p représente la pression du gaz de remplissage et E le champ électrique appliqué. Les coefficients A et B sont liés aux propriétés du gaz de remplissage. Pour l'air par exemple A est évalué à 14.6 dans la gamme $150 < E/p < 600 \text{ v.cm}^{-1} \cdot \text{torr}^{-1}$ et B à $635 \text{ v.cm}^{-1} \cdot \text{torr}^{-1}$ [5].

Dans le cas d'une décharge en polarité positive, les électrons dérivent vers l'anode et vont créer une région de très forte ionisation autour de l'électrode haute tension (région d'ionisation). Les ions positifs moins mobiles sont laissés derrière et se déplacent lentement vers la cathode dans la zone de dérive. La vitesse de dérive des ions positifs est de l'ordre de 100 fois inférieure à celle des électrons [7].

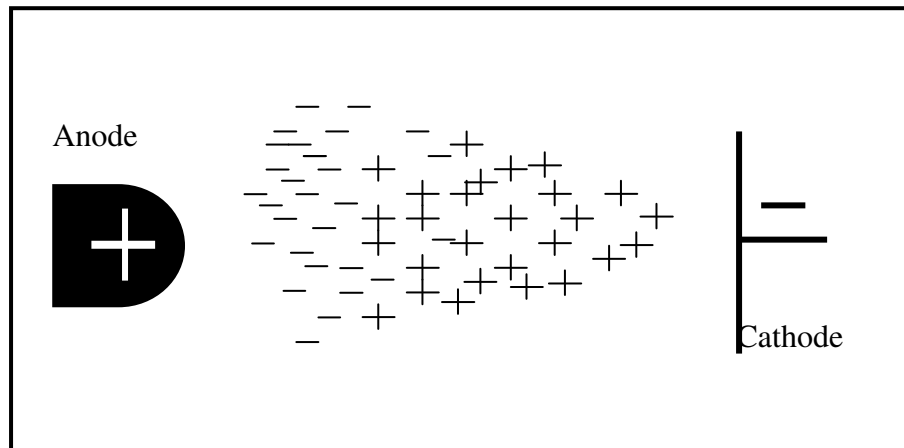


Figure I.3 : Schéma de l'allure d'une avalanche électronique dans un processus de décharge positive.

Le processus de multiplication électronique peut se poursuivre jusqu'à ce que les charges d'espace positives laissées dans la région de dérive affaiblissent le champ électrique appliqué. Les charges d'espace positives créées par les avalanches primaires, diminuent le champ électrique entre elles et l'anode mais l'accroissent dans le sens de la cathode. Un électron libre situé à la bonne place dans ce renforcement pourrait initier une nouvelle avalanche. Toutefois, on peut s'attendre à ce stade de la décharge à ce que tous les électrons initialement positionnés dans une région voisine de la cathode aient disparu de la zone de dérive.

La génération des avalanches est accompagnée d'une augmentation significative du courant de décharge. Il n'y aura aucune limite à cette augmentation du courant tant que la tension appliquée maintiendra les conditions de création d'autres avalanches et ce jusqu'à ce qu'un arc de grande capacité de courant s'établisse dans l'intervalle inter-électrodes [5].

Pour que la décharge puisse passer en régime de Townsend qui est une décharge auto-entretenu, il faudrait qu'une succession d'avalanches puisse se produire en l'absence de tout agent ionisant. Townsend a été le premier à suggérer qu'en champ uniforme, l'entretien des phénomènes d'ionisation était principalement assuré par la création d'électrons secondaires arrachés à la cathode. Le passage à la décharge de Townsend signifierait que chacun des électrons primaires est remplacé par au moins un électron secondaire. Ces électrons secondaires peuvent être émis soit par la cathode par effet du bombardement direct des ions

positifs soit par les molécules du gaz de remplissage s'ionisant sous l'effet du choc des photons, des électrons, ou des ions positifs contenus dans les avalanches primaires [3]. Ils peuvent aussi provenir d'autres sources telles la photo – ionisation dans le gaz, induite par les photons émis lors de la désexcitation de certains atomes ou encore la production d'électrons par action des atomes métastables.

Quand le nombre d'électrons dans une avalanche singulière atteint 10^6 à 10^8 , une zone intermédiaire où le champ électrique local est fortement accentué tend à se former entre les électrons à la tête de l'avalanche et les ions positifs traînant derrière. Dans cette région, les charges positives et négatives s'accumulent en nombre égal et un plasma filamentaire appelé *Streamer* tend à se former. La propagation de ce canal filamentaire est décrite dans ce qui suit.

1.4.3-Theorie des Streamers :

La théorie des Streamers a été formulée initialement vers 1953 et elle permet d'expliquer l'observation de phénomènes précédant la mise en place de la décharge, pendant un temps inférieur au temps de transit des électrons de la cathode à l'anode, donc bien inférieur au temps qui serait nécessaire au claquage de Townsend. Les Streamers sont des canaux « imaginaires » partiellement ionisés dans lesquels coexistent des charges positives et négatives. La formation d'un Streamer s'explique par les phénomènes de photo – ionisation se produisant à l'intérieur des avalanches primaires. Les électrons de grande énergie s'activant à la tête des avalanches causent l'excitation des atomes du gaz environnant en les portant à des niveaux d'énergie élevés. Ces atomes, en retrouvant leur état stationnaire, libèrent des photons. Si ces photons ont une énergie inférieure à l'énergie d'ionisation des atomes du gaz environnant, ils peuvent être absorbés par ces atomes avant d'être émis de nouveau [4]. Si leur énergie est supérieure à l'énergie d'ionisation des atomes du gaz, de nouveaux électrons peuvent être libérés. Dans l'air ceci est particulièrement causé par les molécules d'azote N_2 qui peuvent émettre des photons avec une énergie supérieure à 13 eV, susceptibles d'ioniser les molécules d'oxygène dont le potentiel d'ionisation n'est que de 12.2 eV [5]. Si les électrons ainsi produits sont situés au voisinage de l'avalanche primaire, ils vont créer de nouvelles avalanches dites secondaires.

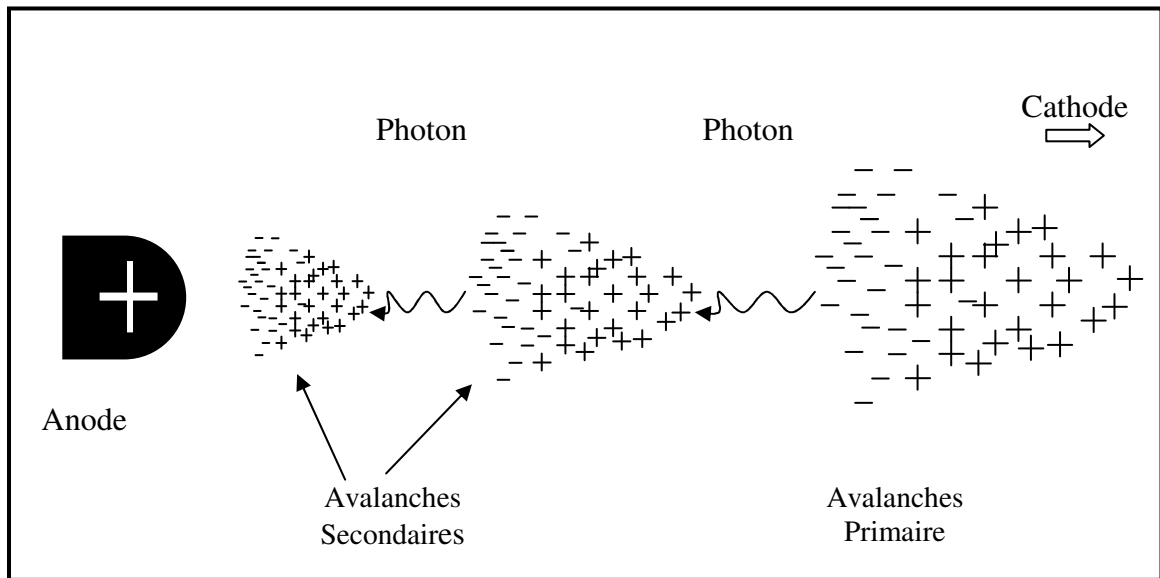


Figure I.4 : Génération d'avalanches secondaires dans un processus de décharge positive.

Les Streamers positifs ont été beaucoup plus étudiés dans les investigations scientifiques que les Streamers négatifs des différences fondamentales peuvent être notées dans leur développement. Dans le cas du Streamer positif, l'avalanche primaire initiée par un électron germe amène la présence d'une charge d'espace positive près de la cathode et une injection d'électrons devant l'électrode positive comme le montre la figure ci – dessous.

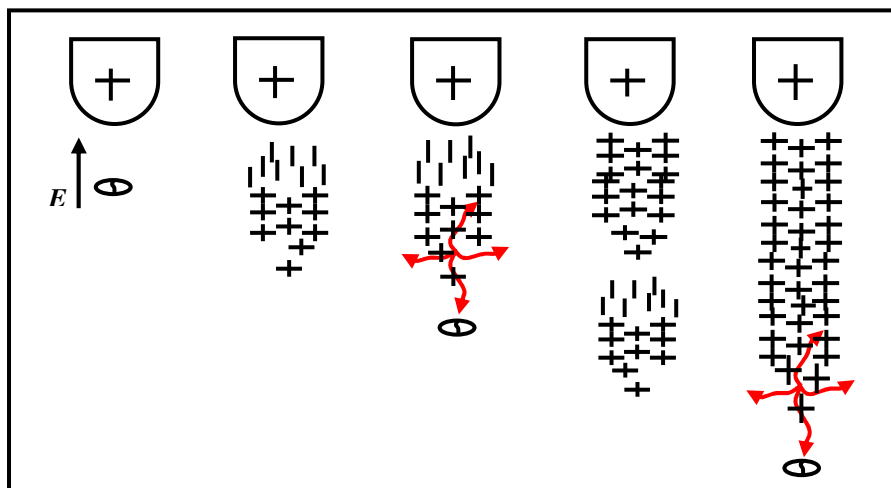


Figure I.5 : Représentation schématique du processus de développement d'un Streamer positif.

La croissance du nombre de paires d'électron – ion est exponentielle le long du parcours de l'avalanche et le profil de densité des ions positifs croît très rapidement vers la tête de l'avalanche. Une charge d'espace positive de très forte densité se crée ainsi dans le canal inter – électrodes. Elle entraîne une distorsion du champ qui se traduit par une augmentation du champ entre elle et la cathode et un abaissement de celui – ci dans le sens de l'anode. Des électrons positionnés dans ce renforcement de champ vont pouvoir à leur tour créer des avalanches dites secondaires.

Dans le cas du Streamer négatif, les ions positifs créés par les avalanches secondaires viennent extraire des électrons de la cathode qui neutralisent les ions positifs et donnent au Streamer un excédent de charges négatives.

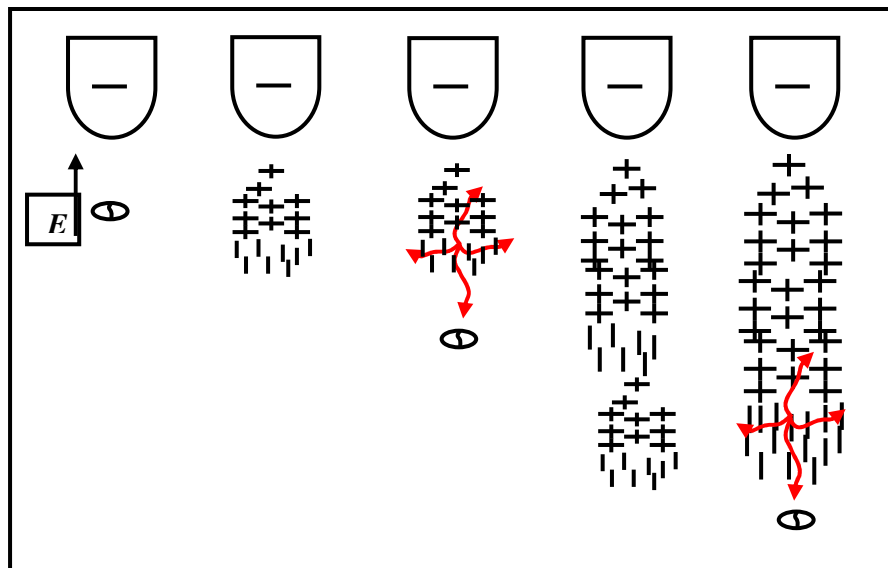


Figure I.6 : Représentation schématique du processus de développement d'un Streamer négatif.

A la différence du Streamer positif où les avalanches se développent vers la tête du Streamer, c.à.d dans le sens où le champ de charge d'espace croît, les avalanches secondaires dans le Streamer négatif se propagent vers l'anode, dans le sens où l'effet de la charge d'espace décroît rapidement [5].

La propagation des Streamers est très rapide parce que l'ionisation se fait essentiellement par des photons. Ceci donne aux Streamers leur caractère lumineux qui fait qu'ils apparaissent sur une photographie statique comme d'étroits filaments d'éclairs. L'aspect filamentaire résulte

de l'intégration de cette lumière au cours du temps. Du fait de la nature aléatoire des mécanismes de photo – ionisation, les photoélectrons sont produits non seulement en tête du Streamer dans la direction du champ maximal, mais aussi dans une direction radiale par rapport à son avancement. Le Streamer peut alors présenter une tortuosité ou même donner naissance à plusieurs branches secondaires si des photoélectrons produits simultanément dans des directions opposées créent des avalanches de taille comparable. La propagation d'un Streamer étant la succession d'avalanches de taille critique, elle ne peut se maintenir sans les deux principes suivants :

- ❖ notion d'avalanche de taille critique ;
- ❖ création d'électrons secondaires en avant de la tête du Streamer.

En présence d'un champ uniforme, la propagation des Streamers conduit inéluctablement au contournement car le Streamer rencontre au cours de son développement des conditions de champ électrique toujours plus favorables. Par contre en champ non – uniforme, la propagation des Streamers dépend de la distorsion du champ électrique et elle peut être stoppée après une certaine distance si le champ résultant n'est pas suffisamment fort pour maintenir un processus d'ionisation suffisamment intense. Le champ électrique dans le canal de Streamers dépend de la polarité de la tension appliquée. Il atteint 5.10^5 V.m^{-1} en polarité positive et est de l'ordre de 10^6 à $1,5.10^6 \text{ V.m}^{-1}$ en polarité négative.

La propagation des Streamer est une étape fondamentale dans le processus de décharge électrique. Son mécanisme est lié au nombre d'électrons et d'ions positifs créés par les avalanches, donc à la densité de la charge d'espace et à l'efficacité des photo – ionisations.

Le développement soutenu des Streamers conduit à un phénomène connu sous le nom *couronne de Streamers*, expression qui a été utilisée pour décrire la classe générale des phénomènes lumineux produits par le regroupement des Streamers autour de l'électrode de même polarité sous forme de couronnes.

1.5- Couronnes de Streamers :

1.5.1- Généralités sur les couronnes de Streamers :

S'il y a un phénomène dans le processus de la décharge électrique qui a été étudié avec un intérêt particulier dans les investigations scientifiques, c'est bien celui des couronnes de Streamers. C'est probablement parce qu'il en est le premier phénomène visible mais aussi parce qu'il est d'une très grande complexité et sûrement parce que ses effets nuisent beaucoup

à la tenue diélectrique des équipements des systèmes de haute tension. Le terme *effet couronne* englobe l'ensemble des phénomènes se produisant dans un gaz au voisinage d'un conducteur de faible rayon de courbure, porté à une tension élevée, suffisante pour que le champ électrique soit supérieur au champ électrique disruptif de ce gaz [5]. L'initiation des couronnes de Streamers est associée au passage du courant de quelques picoampères (10^{-12} A) à quelques dizaines de microampères (10^{-6} A), dans la phase de prédécharge [7]. Elle est bien connue comme étant un phénomène tout à fait aléatoire. La première couronne survient du fait de la très forte activité de photo – ionisation se produisant à la tête des avalanches ou Streamers primaires regroupés autour de l'électrode haute tension. Ce phénomène est très bref et apparaît en une durée de quelques centaines de nanosecondes [5]. Il est suivi d'une période sombre de durée variable dépendamment des caractéristiques de l'électrode haute tension et de la forme d'onde appliquée. Cette période sombre est caractérisée par l'absence de toute activité lumineuse. Ceci est dû au fait que les électrons générés par les avalanches secondaires neutralisent les ions positifs issus des avalanches primaires. Le champ de charge d'espace diminue alors en dessous du champ disruptif du gaz avant de se remettre à augmenter progressivement avec la tension appliquée. Le temps qui sera nécessaire pour que d'autres Streamers se forment est appelé période sombre. Il est supposé que dans le cas d'une décharge positive, un champ électrique de $5kV.cm^{-1}$ est suffisant pour maintenir la propagation de ces Streamers [4]. Si les limites de champ sont respectées, la période sombre sera suivie d'un régime auto – stabilisé de Streamers autour de l'électrode haute tension et ainsi un canal de Streamers se propager en direction de l'électrode opposée.

1.5.2- Principales caractéristiques des couronnes de Streamers :

Dans les investigations scientifiques, les couronnes en polarité positive ont été beaucoup plus étudiées que celles en polarité négative. Pour les couronnes positives, trois différentes caractéristiques peuvent être retenues durant leur propagation. Juste après l'apparition de la première couronne, la région voisine de l'électrode haute tension est recouverte d'un spot lumineux apparaissant sous une forme incandescente. Ce spot devient particulièrement épais à des pressions élevées surtout juste après le régime auto – stabilisé. Au – delà de la période d'ionisation, les Streamers primaires apparaissent et le spot commence à s'étendre à travers l'intervalle d'air. A des tensions très élevées, proches de la

tension de claquage, surtout dans les intervalles avec un faible ratio rayon de courbure sur distance inter – électrodes (r/d), un faisceau étroit de forte luminosité, composé souvent de plusieurs Streamers filamenteux superposés, s'étend sur l'axe des électrodes. Ce fort branchage n'apparaît pas toujours avant le contournement. La figure I.7 ci-dessous montre un exemple de décharge couronne prise après un temps de développement de 100ns.

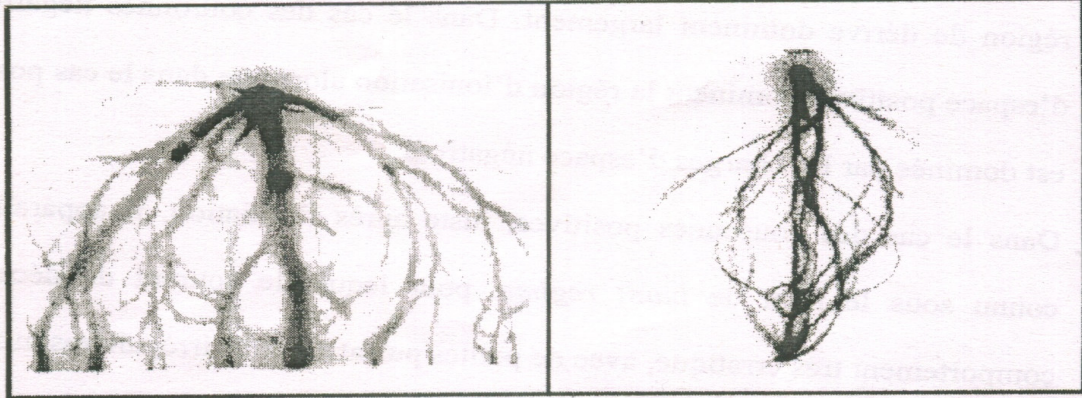


Image de gauche : vue perpendiculaire

Image de droite : vue parallèle

Figure I.7 : Photographies CCD d'une décharge couronne dans un dispositif pointe - pointe de 25mm d'intervalle d'air [4].

Sur l'image de gauche, on peut voir les Streamers s'étendre très largement à l'extérieur de l'axe des électrodes et celle de droite, on peut les voir se déployer à partir de la première pointe avant de venir se regrouper à la seconde électrode pour court – circuitier l'intervalle. Plusieurs différences subsistent dans le développement des couronnes positives et négatives et selon le cas la cathode joue un rôle plus ou moins efficient. Pour les couronnes négatives, la cathode est située à la bordure de la région d'ionisation, ce qui fait que les mécanismes d'émission secondaires cathodiques sont très rapides et fortement efficient même en présence d'un gaz électronégatifs [8]. Par contre, dans le cas des couronnes positives, la cathode est plutôt isolée de la région d'ionisation par une région de très faible champ, qui souvent absorbe les photons et capte les électrons secondaires de la cathode par attachement. Ainsi, les couronnes négatives deviennent auto – maintenues par le simple mécanisme d'émission secondaire de la cathode décrit par Townsend alors que dans le cas des couronnes positives, les processus de photo – ionisation du gaz de remplissage dans la région de dérive dominant largement. Dans le cas des couronnes négatives, les charges d'espace positives dominant la région d'ionisation alors que dans le cas positifs, cette région est dominée par les charges d'espaces négatives.

Dans le cas des couronnes positives, juste après l'initiation, il apparaît un phénomène connu sous le nom de *burst régime*, pour lequel le courant de décharge montre un comportement très erratique, avec de petites pulsations très irrégulières mixées avec de plus longues. Dans le cas des couronnes négatives, même en présence de gaz électronégatifs, la relation entre les charges d'espace positives et négatives conduit à des pulsations d'un autre type connues sous le nom de pulsation de Trichel. Les pulsations de Trichel sont beaucoup plus régulières que celles apparaissant dans le développement des couronnes positives. Elles ont des amplitudes, de l'ordre de quelques milliampères alors que celles dans le cas positif drainent des amplitudes de 10 à 200 mA et peuvent s'étendre jusqu'à 100 cm à l'extérieure des conducteurs dans le sens radial.

Du point de vue de l'isolation, les couronnes positives sont plus néfastes que celles négatives. Elles peuvent s'initier à des courant de 100 μ A alors que celles négatives s'accompagnent généralement avec des courants de 200 μ A [8]. Les aspects les plus spectaculaires des couronnes positives sont les très lumineux filaments de Streamers qu'elles laissent apparaître, le bruit de craquement et l'ozone qu'elles produisent et les perturbations qu'elles causent dans les domaines des radios fréquences et de l'aérospatial. Elles sont de ce fait une source non négligeable de pertes d'énergie, de bruits électromagnétique et acoustique, de troubles symptomatiques et une cause sérieuse de défaillance pour les isolateurs.

1.5.3- Quelques applications sur les couronnes de Streamers :

Même si la totale compréhension des mécanismes à la base de la formation des couronnes de Streamers n'a pas encore été atteinte, les applications à leur sujet peuvent néanmoins être trouvées dans plusieurs domaines. Aujourd'hui les couronnes de Streamers sont probablement du point de vue industriel, le plus important type de décharge dans le gaz, même si l'arc électrique reste encore le plus populaire. Les applications sur les couronnes de Streamers sont particulièrement présentes dans les domaines de la physique des plasmas, de la physique de la décharge naturellement, de la physique nucléaire et aussi de l'électrostatique . Par exemple, dans le contexte de l'analyse des gaz, le principe selon lequel la caractéristique courant – tension des couronnes de Streamers change considérablement en présence d'impuretés est utilisé pour étudier la pureté du gaz [9]. Différentes applications de ce principe sont aussi présentes dans variété de détecteurs tels les détecteurs de pollution, de fuite (surtout pour les appareils utilisés avec du SF₆), de fumée ou d'incendie. Le principe des

ondes électromagnétiques émises par les couronnes de Streamers dans leur propagation est aussi utilisé dans plusieurs applications de détection des défauts d'isolation des isolateurs, des transformateurs on encore des condensateurs.

D'autres applications sont aussi basées sur la lumière émise par les couronnes pour générer des sources ponctuelles d'impulsions lumineuses en UV.

Il est connu que si des particules liquides ou solides passent à travers un intervalle inter – électrodes étant le siège d'une décharge couronne, elles peuvent être collectées par une électrode. Ce phénomène a mené vers différentes applications et les plus industrialisées aujourd'hui sont les séparateurs électrostatiques, très utilisés dans l'industrie minérale. Dans l'industrie agroalimentaire par exemple, la décharge couronne est la clé de la séparation des mélanges granulaires [8].

1.6 -Seuil critique de décharge couronne :

Lorsqu'un conducteur est soumis à une tension croissante, le champ critique de l'effet de couronne est défini par l'apparition brusque d'une importante conductivité de l'air dans son voisinage immédiat. Selon F.W. Peek, pour une configuration cylindrique, l'apparition de l'effet de couronne est en fonction du champ superficiel, du rayon du conducteur, et de la densité de l'air selon la relation suivante :

$$E_c = E_p \delta \left(1 + \frac{K}{\sqrt{\delta \cdot R}} \right) \quad (I.7)$$

Où: E_c : le champ critique, en kV/cm,

E_p : le champ superficiel, $E_p = 30$ kV/cm,

K : un coefficient, $K=0.308$,

R : le rayon du conducteur, en cm,

δ : la densité relative de l'air $=3.92P / (273+T)$, ($\delta=1$ pour $P=76$ cm Hg et $T=25^0$),

T : la température, en 0 C,

P : la pression de l'air, en cm Hg.

Cette formule, reliée à l'effet de couronne, montre un effet non négligeable de la température ambiante sur le champ critique E_c . En effet, à pression constante, pour une température qui varie entre 0^0 C et 60^0 C, on obtient un champ critique différent soit: 44.18 kV/cm pour 0^0 C et 37.87kV/cm pour 60^0 C, Ainsi l'effet de couronne apparaît à une tension plus faible lorsque la température augmente [1].

1.7-Effet des impuretés sur le processus de décharge :

Dans la littérature scientifique, on peut noter que les phénomènes observés dans l'étude des mécanismes d'initiation des décharges électriques peuvent être largement influencés par les effets des impuretés présentes dans le gaz de remplissage de l'intervalle inter - électrodes.

Les mécanismes physiques qui peuvent souvent être affectés sont :

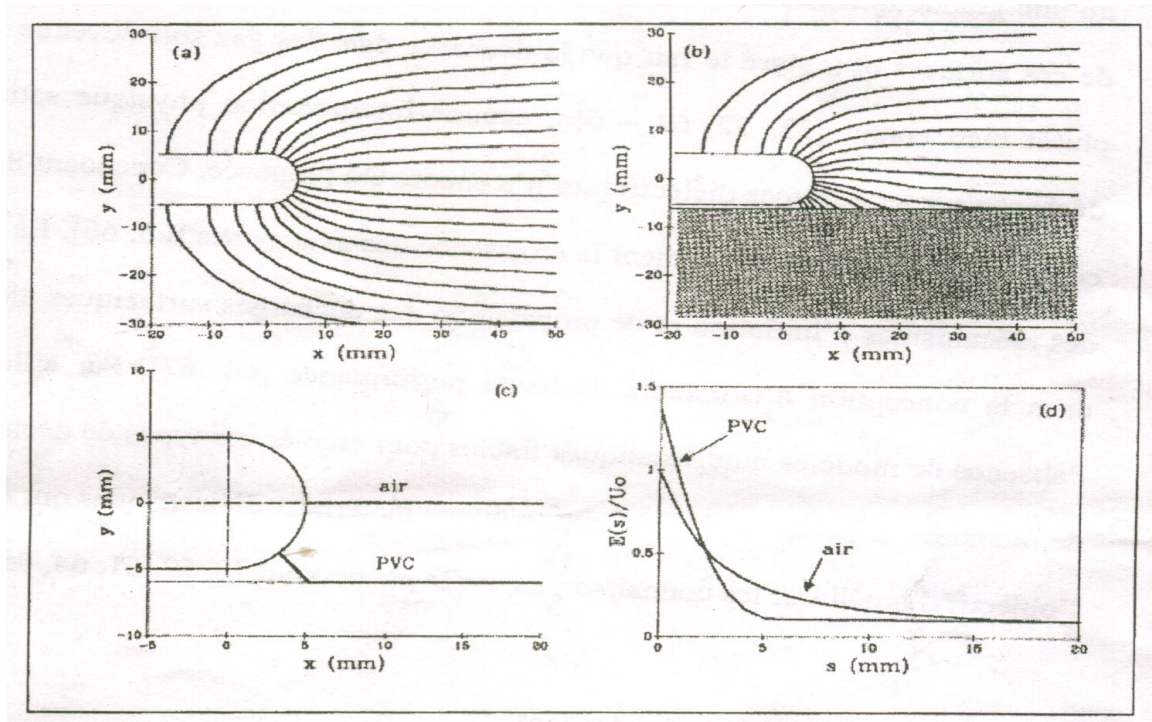
- la multiplication électronique, les vitesses de dérive des charges d'espace, les coefficients de diffusion et l'absorption des photons. Dans ces processus, les effets des impuretés sont proportionnels à leur quantité relative dans le gaz ;
- l'attachement électronique : la présence d'impuretés fortement électronégatives dans un gaz « non – attachant » a un effet proportionnel à leur quantité (n), pour des niveaux de contamination faible. Cependant à de faibles valeurs de E / n , un niveau de saturation peut être rapidement atteint ; niveau pour lequel les électrons vont être en permanence attachés même dans la région d'ionisation, ce qui va fortement modifier le processus de la décharge ;
- l'ionisation et la photo – ionisation : dans les gaz ayant un faible niveau d'énergie métastable, un taux d'impuretés de l'ordre 10^{-8} à 10^{-4} par rapport au volume total du gaz, aura des effets dramatiques sur les coefficients d'ionisation effectifs [8].

1.8- Décharges surfaciques :

Les surfaces diélectriques exposées à des champs électrique tangentiels constituent fréquemment la partie la plus vulnérable de l'ionisation des systèmes haute tension. Bien qu'une grande quantité de données expérimentales ait été rassemblée sur le contournement de ces surfaces et malgré le fait que la décharge dans les gaz soit devenue un phénomène plutôt bien connu [3], aucune interprétation physique satisfaisante de la décharge sur les surfaces diélectrique n'a encore été proposée. Cependant il est certain que ces surfaces affectent grandement la croissance des avalanches. La compréhension des mécanismes d'ionisation et de propagation des décharges surfaciques aiderait beaucoup dans la conception d'isolateurs de haute performance. Par ailleurs, du fait de l'absence de modèles mathématiques fiables pour étudier ces types de décharges, beaucoup de méthodes expérimentales traitant de divers matériaux diélectriques ont été utilisées dans l'objectif d'améliorer les connaissances sur le phénomène.

I.8.1- Aspect électrique :

Beaucoup de phénomènes physiques sont issus de l'interaction entre une décharge électrique et une surface diélectrique. Parmi ceux – ci, on peut noter la distorsion du champ électrique comme c'est mis en évidence par la figure (I.8) ci – dessous. Les calculs de champ pour ces courbes ont été effectués par méthode numérique. Ils montrent qu'une surface diélectrique placée le long de l'axe inter – électrodes déforme les lignes de champ en les dirigeant vers elle et accentue le champ aux alentours de l'électrode haute tension. La ligne de champ radiale part du point ayant le champ le plus élevé sur l'électrode haute tension et long la surface diélectrique placé parallèlement à l'axe des électrodes. Les tensions d'ionisation sont grandement réduites par rapport à celles obtenues dans le cas de l'air. Toutefois, les tensions de claquage restent légèrement modifiées [10].



(a): lignes de champ dans un intervalle d'air.

(b): lignes de champ en présence d'une surface de PVC ($\epsilon=4$).

(c) : champ maximum en présence d'une surface de PVC et dans l'air.

(d): distributions du champ dans les cas de l'air et une surface de PVC.

Figure I.8 : Comparaison du champ électrique autour de l'électrode haute tension dans l'air et en présence d'une surface diélectrique [10]

1.8.2- Décharge couronne en présence d'une surface diélectrique :

La surface d'une décharge couronne sur une surface diélectrique est plus complexe que celle dans l'air. Ce fait peut être attribué à l'augmentation du phénomène de photo-ionisation dû au bombardement de la surface par les photons, ce qui favorise la probabilité de générations d'avalanches dans différentes directions. La propagation d'avalanches de toute part conduit à un branchage plus abondant des couronnes, ce qui rend moins évident la détermination des paramètres d'ionisation de la décharge. Pour la même tension appliquée, l'extension des couronnes est toujours plus grande en présence d'une surface diélectrique et la tension nécessaire pour que les couronnes traversent l'intervalle d'air sont sensiblement plus faibles. A des tensions proches de celle de contournement, la formation d'un canal de streamers peut être observée au niveau de l'électrode haute tension. Dans le cas de l'air, ce canal arrive toujours à court-circuiter l'intervalle alors qu'en présence de surface diélectrique, il se développe dans l'air loin des charges déposées sur la surface par les couronnes. Dans l'air, l'arrivée des couronnes de streamers à l'électrode plane provoque inévitablement un contournement alors qu'en présence d'une surface diélectrique, la propagation des streamers peut être stoppée avant le claquage. L'apparition et la propagation des streamers dans le cas d'une surface diélectrique, comme dans le cas de l'air, seront fortement contrôlées par les coefficients d'attachement et d'ionisation. Seulement ces coefficients seront grandement affectés par la présence de cette surface. Une surface diélectrique peut modifier les coefficients d'ionisation et d'attachement de deux façons élaborées par la théorie proposée par Gallimberti et al [10].

Elle peut émettre des électrons par effet du bombardement des photons, ce qui contribue à fournir davantage d'électrons déclencheurs d'avalanches et à favoriser davantage d'ionisations collisionnelles par augmentation de la quantité d'électrons présents dans le processus de décharge. Cet effet a d'ailleurs été expérimentalement démontré sur les surfaces PTFE en présence de SF₆.

Elle peut aussi attacher les électrons dans des pièges extérieurs et les ions positifs par attraction électrostatique causant ainsi davantage d'attachement en plus de celui déjà induit par le gaz de remplissage de l'intervalle inter-électrodes.

La figure I.9 ci-dessous présente les coefficients d'ionisation et d'attachement dans le cas de l'air et ceux modifiés par la présence d'une surface de PVC. Les valeurs ont été déterminées par méthode numérique.

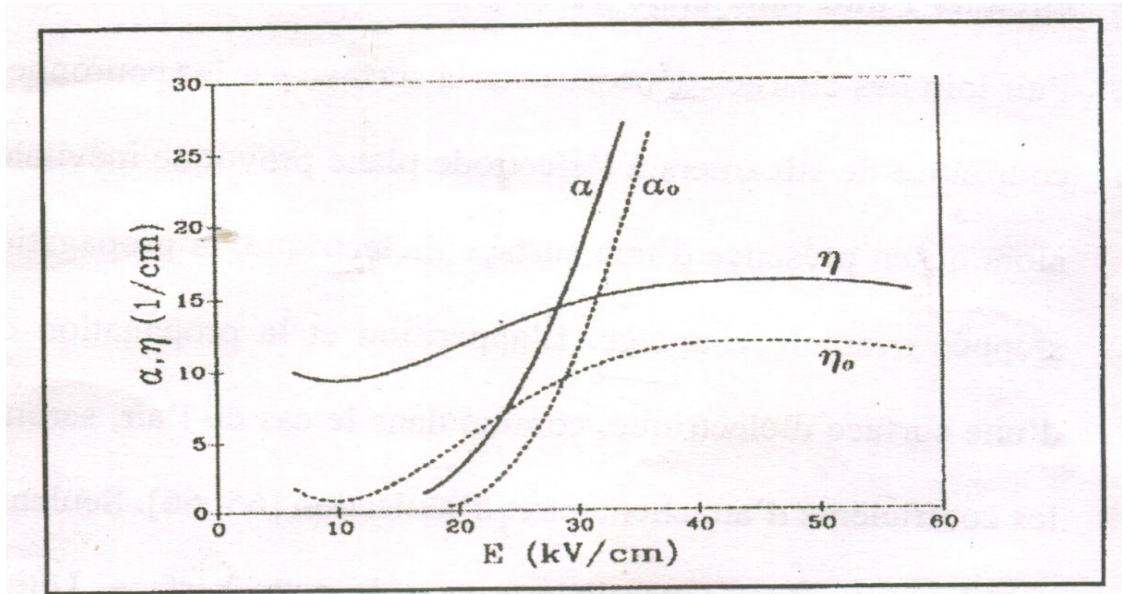


Figure I.9 : Coefficients d'ionisation et attachement de l'air respectivement α_0 et η_0 (courbes en pointillés) et ceux accentués par la présence d'une surface en PVC (courbes en lignes) [10]

Les recombinaisons des ions positifs peuvent aussi occasionner des émissions de photons ayant une certaine énergie d'ionisation. Si ces recombinaisons se produisent dans une zone très voisine de la surface diélectrique, elles peuvent contribuer à extraire des électrons de la surface diélectrique ou du gaz environnant par photo – ionisation et ainsi augmenter le coefficient d'ionisation. Partant de ces hypothèses, on peut s'attendre à ce que l'ionisation et la propagation des couronnes de streamers le long d'une surface diélectrique soient contrôlées par des coefficients d'ionisation et d'attachement, plus grands que ceux dans l'air.

I.9- Conclusion :

Les études qui ont jusqu'ici concerné les mécanismes d'initiation de la décharge électrique ont montré que le phénomène était d'une très grande complexité. Malgré les grandes avancées effectuées dans les applications, beaucoup de processus physiques fondamentaux sont toujours sujets à des investigations. Les résultats pourraient éventuellement améliorer les connaissances sur le phénomène et ainsi aider plus tard dans la conception d'isolateurs de hautes performances.

Les phénomènes d'ionisation et d'attachement se sont révélés être d'un intérêt particulier car étant les principaux phénomènes contrôlant la décharge. Ils sont aussi, d'une certaine façon, à la base du processus de formation des couronnes de Streamers. Ils sont d'autant plus déterminants que dans le cas d'une décharge sur une surface diélectrique, comme par exemple les isolateurs, leurs effets peuvent s'avérer plus importants que dans le cas d'une décharge dans l'air. Des travaux ont d'ailleurs déjà montré qu'une surface diélectrique ayant une certaine conductivité pouvait beaucoup affecter les phénomènes de photo – ionisation en émettant des électrons dus aux bombardements des photons. Les phénomènes d'attachement pouvaient aussi être influencés car la surface peut capter des électrons dans les pièges extérieurs et des ions positifs par attraction électrostatique [10]. Il sera utile, voire nécessaire, d'étudier davantage le processus de développement de la décharge sur une surface diélectrique sous différentes conditions atmosphérique pour améliorer les performances des isolateurs surtout que les formes de ceux qui sont actuellement utilisés aussi bien les matériaux qui les constituent, ne tiennent compte que de la pollution et de la pluie. L'étude des phénomènes physiques fondamentaux de la décharge sur une surface de glace s'avèrerait donc nécessaire pour la conception d'isolateurs mieux adaptés au climat des régions froides.

II-1 INTRODUCTION :

La résolution d'un problème d'électromagnétique consiste à déterminer Les structures du champ électromagnétique dans une région de l'espace. Ces configurations du champ doivent satisfaire simultanément les équations de Maxwell, où l'équation des ondes, et des conditions aux limites appropriées. Des solutions exactes où analytiques peuvent être obtenues dans un petit nombre de cas selon la géométrie des objets. Dans la plupart des problèmes, il faudra approcher numériquement la solution.

Nous commençons par décrire brièvement les équations de Maxwell, puis nous posons le problème à résoudre dans le cadre de notre étude et nous en donnons une formulation faible ou variationnelle, préalable à une approximation par la méthode des éléments finis [11].

II.2- Modèle mathématique : Les équations de Maxwell

Les phénomènes électromagnétiques, d'un point de vue macroscopique, sont régis par les équations de Maxwell. De nombreux auteurs ont largement traité la théorie de l'électromagnétisme [11]. Dans cette section, nous essayons de rappeler quelques concepts fondamentaux qui nous seront utiles pour la suite .Les équations de Maxwell, en régime harmonique, seront présentées ainsi que les conditions aux limites.

II.2.1- Les équations de Maxwell en régime harmonique :

Les équations de Maxwell résultent :

- de concepts physiques (charge électrique, densité de courant) ;
- de lois universelles (conservation de la charge, loi de Faraday) ;
- de lois de comportement caractéristiques de chaque milieu.

Elles sont exprimées à l'aide de six concepts ou grandeurs physiques qui sont :

- Charge électrique, représentée par le scalaire q_e (Coulombs/m³)
- Courant électrique, représenté par le vecteur J_e (Ampères/m²)
- Induction magnétique, représentée par le vecteur B (Webers/m²)
- Champ magnétique, représenté par le vecteur H (Ampères/m²)
- Induction électrique, représentée par le vecteur D (Coulombs/m²)
- Champ électrique, représenté par le vecteur E (Volts/m)

A ces quantités, il convient d'ajouter une source de courant magnétique, J_m et une charge

magnétique, q_m qui sont fictives et sont seulement des concepts mathématiques (elles n'ont pas d'existence physique). Elles ne serviront à représenter que des sources de courant et des charges induites ou équivalentes. De plus elles permettent de conserver la dualité entre les champs E et H .

Lorsque toutes ces quantités sont continues et à dérivées continues, elles obéissent à la forme différentielle des équations de Maxwell :

$$\nabla \times H = \partial D / \partial t + J_e \quad (\text{II.1}), \quad \nabla \times E = -\partial B / \partial t - J_m \quad (\text{II.3})$$

$$\nabla \cdot D = q_e \quad (\text{II.2}), \quad \nabla \cdot B = q_m \quad (\text{II.4})$$

Les équations (II.1) et (II.2) contiennent la loi de conservation de la charge, tandis que les équations (II.3) et (II.4) traduisent la loi de Faraday.

Aux équations de Maxwell (II.1-II.4), il faut ajouter les lois de comportement ou relations constitutives qui spécifient les caractéristiques du milieu dans lequel les champs existent. Elles expriment les quantités D , B et J_e en fonction du champ électromagnétique défini par les champs E et H .

Pour les milieux linéaires, d'un point de vue diélectrique, magnétique et électrique, elles deviennent :

❖ lois de proportionnalité des champ et inductions :

$$D = \varepsilon E \quad (\text{II.5})$$

$$B = \mu H \quad (\text{II.6})$$

Où :

ε : La constante diélectrique (ou permittivité) du milieu et μ la perméabilité magnétique sont indépendantes des phénomènes électromagnétiques. Le rapport $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$, avec ε_0 la constante diélectrique du vide, représente la permittivité relative du milieu. Le rapport $\mu_r = \mu / \mu_0$, avec μ_0 égale à la perméabilité du vide, représente la perméabilité relative du milieu. Ce rapport vaut 1 pour les milieux non magnétiques.

❖ loi d'ohm:

$$J_e = \sigma E \quad (\text{II.7})$$

Où : σ : est la conductivité du milieu. En pratique, il convient d'approcher les bons conducteurs par les conducteurs parfaits caractérisés par $\sigma = \infty$ et les bons diélectriques par des diélectriques parfaits caractérisés par $\sigma = 0$.

Lorsque la variation des champs en fonction du temps est sinusoïdale ou harmonique, l'analyse mathématique des équations de Maxwell se simplifie en exprimant les champs à l'aide de quantités complexes. Par ailleurs, la théorie effectuée en régime harmonique peut être étendue, à un régime quelconque au moyen des transformations de Fourier ou de Laplace. En régime harmonique, de pulsation ω , les champs et les sources sont reliés à leurs formes complexes par :

$$E(x, y, z, t) = \text{Re}(E(x, y, z)\exp(j\omega t)) \quad (\text{II.8})$$

$$H(x, y, z, t) = \text{Re}(H(x, y, z)\exp(j\omega t)) \quad (\text{II.9})$$

$$D(x, y, z, t) = \text{Re}(D(x, y, z)\exp(j\omega t)) \quad (\text{II.10})$$

$$B(x, y, z, t) = \text{Re}(B(x, y, z)\exp(j\omega t)) \quad (\text{II.11})$$

$$J_e(x, y, z, t) = \text{Re}(J_e(x, y, z)\exp(j\omega t)) \quad (\text{II.12})$$

$$q_e(x, y, z, t) = \text{Re}(q_e(x, y, z)\exp(j\omega t)) \quad (\text{II.13})$$

$$J_m(x, y, z, t) = \text{Re}(J_m(x, y, z)\exp(j\omega t)) \quad (\text{II.14a})$$

$$q_m(x, y, z, t) = \text{Re}(q_m(x, y, z)\exp(j\omega t)) \quad (\text{II.14b})$$

Où :

Re : désigne l'application qui à tout nombre complexe associe sa partie réelle.

Les équations de Maxwell deviennent alors:

$$\nabla \times H = j\omega D + J_e \quad (\text{II.15})$$

$$\nabla \cdot D = q_e \quad (\text{II.16})$$

$$\nabla \times E = -j\omega B - J_m \quad (\text{II.17})$$

$$\nabla \cdot B = q_m \quad (\text{II.18})$$

En milieux linéaires et sans pertes électriques ($\sigma = 0$) et en l'absence de charges d'espace ($q = 0$), elles se réduisent à :

$$\nabla \times H = j\omega \epsilon E + J_e \quad (\text{II.19})$$

$$\nabla \cdot (\epsilon E) = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$\nabla \times E = -j\omega \mu H - J_m \quad (\text{II.21})$$

$$\nabla \cdot (\mu H) = 0 \quad (\text{II.22})$$

Les équations (II.19) et (II.21) constituent les relations du champ électromagnétique avec les sources et sont les deux équations essentielles de Maxwell. Les équations (II.20) et (II.22) sont obtenues en prenant la divergence des équations (II.19) et (II.21) aux points où les sources de courant sont nulles.

L'étude dans le domaine fréquentiel et le formalisme des quantités complexes permettent d'étendre la notion de linéarité aux milieux à pertes diélectriques et magnétiques, en introduisant une permittivité complexe et une perméabilité complexe. A cet effet on pose :

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'', \quad \varepsilon' = \varepsilon'_r \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \varepsilon'' = \varepsilon''_r \varepsilon_0 \quad \text{positives;} \quad \mu = \mu' - j\mu'', \quad \mu' = \mu'_r \mu_0 \quad \text{et} \quad \mu'' = \mu''_r \mu_0$$

positives. Les pertes diélectriques et magnétiques sont introduites respectivement par les quantités ε'' et μ'' . Par ailleurs, en régime harmonique, un métal conducteur homogène de propriétés $(\varepsilon, \mu_0, \sigma)$ pourra être remplacé par diélectrique $(\tilde{\varepsilon}, \mu_0)$ de permittivité $\tilde{\varepsilon}$ donnée par:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + j\sigma / \omega$$

Grâce à cette équivalence métal-diélectrique, on mènera éventuellement de front l'étude des métaux et celle des diélectriques.

Remarquons qu'il n'est pas possible de poser une relation linéaire entre D et E (ou entre B et H) pour un matériau à pertes en régime temporel [11].

II.2.2- L'équation vectorielle des ondes :

Les équations de Maxwell (II.19) et (II.21) sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre dont chacune a au moins une inconnue. On peut découpler ces équations et obtenir une équation aux dérivées partielles du second ordre à une inconnue E ou H . Le rotationnel de (II.21), aux points où $J_m = 0$, est :

$$\nabla \times \nabla \times E = -j\omega\mu \nabla \times H$$

En y substituant $\nabla \times H$ par (II.19), cette équation devient :

$$\nabla \times \nabla \times E = -\omega^2 \varepsilon \mu E - j\omega \mu J_e$$

Que l'on écrit :

$$\nabla \times \nabla \times E - k^2 E = -j\omega \mu J_e \quad (\text{II.23})$$

Avec :

k : La constante de propagation du champ électromagnétique dans le milieu ($k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$).

L'équation (II.23) est appelée équation vectorielle des ondes, avec ici un terme source au second membre; elle est aussi parfois nommée équation "rot-rot" des ondes.

Une équation similaire en H est obtenue de la même façon, en prenant le rotationnel de (II.19) ou $J_e = 0$ et, en y substituant $\nabla \times E$ par (II.21):

$$\nabla \times \nabla \times H - k^2 H = -j\omega \mathcal{E} J_m \quad (\text{II.24})$$

La relation vectorielle :

$$\nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times \nabla \times A$$

Appliquée aux équations (II.23) et (II.24), conduit à :

$$\nabla^2 E + k^2 E = -j\omega \mu J_e \quad (\text{II.25})$$

$$\nabla^2 H + k^2 H = -j\omega \mathcal{E} J_m \quad (\text{II.26})$$

On obtient ainsi une autre forme de l'équation des ondes connue sous le nom d'équation vectorielle de Helmholtz, avec ici un terme source au second membre.

✓ **Remarque II.1:**

Les équations (II.23) et (II.24) contiennent implicitement, respectivement, les informations $\nabla \cdot E = 0$ et $\nabla \cdot H = 0$; ce qui est vite démontré en prenant la divergence de ces équations aux points où $J_e = 0$ et $J_m = 0$. Par contre, les équations (II.25) et (II.26) ne contiennent pas ces conditions et, sont donc moins générales que les équations (II.23) et (II.24).

II.2.3- Les conditions aux limites :

a) Les conditions d'interfaces :

Nous avons supposé plus haut que le milieu était homogène et que les champs étaient suffisamment réguliers (continuité des champs ainsi que de leurs rotationnel et divergence). L'analyse peut être étendue à un milieu inhomogène, en particulier à un milieu homogène par morceaux c'est-à-dire constitués de plusieurs milieux homogènes, en ajoutant aux équations de Maxwell (II.19-II.22) écrites dans chaque milieu des conditions d'interface à la traversée d'un milieu.

Ainsi, sur la surface qui sépare deux milieux de propriétés différentes, dont aucun n'est un conducteur électrique parfait (cep), les composantes tangentes des champs électrique et magnétique sont continues; ce qui est exprimé par:

$$n \times (E^1 - E^2) = 0 \quad (\text{II.27})$$

$$n \times (H^1 - H^2) = 0 \quad (\text{II.28})$$

Où :

n : est le vecteur unité normal à la surface de séparation, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2, et où les indices 1 et 2 spécifient le milieu dans lequel le champ E ou H est défini (Fig. II.1).

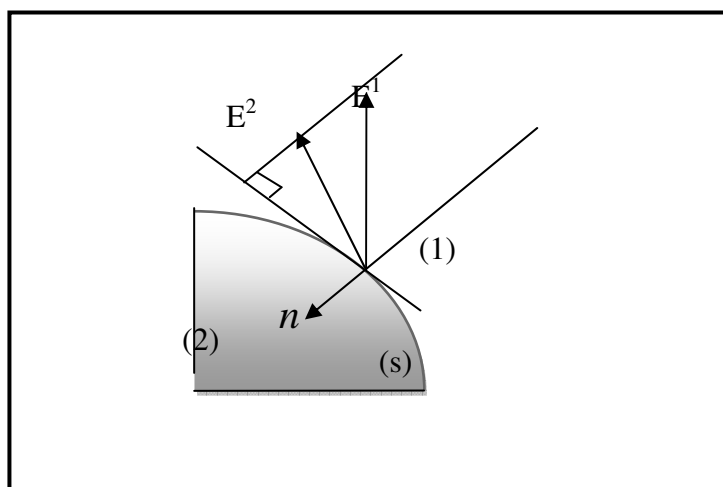


Figure II.1: Conditions d'interfaces: continuité tangentielle du champ E

Si l'un des milieux est un conducteur électrique parfait (cep), par exemple la région 2, le champ électrique y est nul du fait qu'une densité superficielle de courant existe à l'interface de conductivité infinie. La relation (II.27) devient au bord d'un (cep) :

$$n \times E = 0 \quad (\text{II.29})$$

Lorsque la surface S sert de support à un courant de surface électrique et magnétique, les composantes tangentes des champs E et H sont discontinues; ce qui se traduit par:

$$n \times (E^1 - E^2) = -J_m \quad (\text{II.30})$$

$$n \times (H^1 - H^2) = J_e \quad (\text{II.31})$$

Les équations (II.30-II.31) sont essentiellement les équations des champs E et H à la surface S support de courants.

Les conditions portant sur les composantes normales donnent pour le champ E et le champ H respectivement

$$n \cdot (\varepsilon_1 E^1 - \varepsilon_2 E^2) = 0 \quad (\text{II.32})$$

$$n \cdot (\mu_1 H^1 - \mu_2 H^2) = 0. \quad (\text{II.33})$$

✓ **Remarque II.2:**

-Lorsque $\omega \neq 0$, les conditions (II.32) et (II.33) portant sur les composantes normales des champs E et H sont automatiquement remplies si les relations (II.27) et (II.28) sont satisfaites [13]. On peut le démontrer en prenant la divergence des équations (II.28) et (II.27)
- Les relations (II.31) et (II.32) sont contenues respectivement dans (II.19) et (II.20) au sens des distributions [14], tout comme (II.30) et (II.33) sont contenues respectivement dans (II.21) et (II.22).

b) Comportement du champ à l'infini :

• **Condition de rayonnement de Sommerfeld :**

Lorsque l'on est confronté à des problèmes à domaines ouverts, une condition portant sur le comportement des champs à l'infini doit être forcée. Cette condition est constituée d'une condition de régularité à l'infini et d'une condition de rayonnement qui est essentiellement une conséquence de la conservation de l'énergie [15].

La condition de régularité stipule que, si des sources variables sont situées à distance finie de l'origine, alors le champ s'annule à l'infini de façon que $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} E$ et restent finis uniformément dans toutes les directions, où r est la distance radiale à l'origine et d est la dimension de l'espace ($d = 2$ ou 3).

Les champs E et H ainsi que leurs composantes cartésiennes satisfont, d'après (II.25) et (II.26), l'équation d'Helmholtz :

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (\text{II.34})$$

Aux points où la densité de courant est nulle. La donnée de la source et la condition que la solution de (II.34) soit régulière à l'infini ne sont pas suffisantes pour déterminer la fonction ψ de façon unique. En effet, l'équation, l'Helmholtz admet pour solution des ondes convergentes ou divergentes (Figure II.2 et II.3).

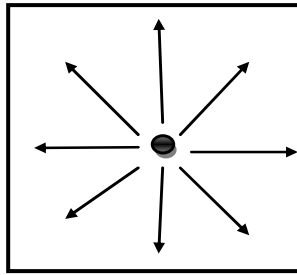


Figure II.2: Ondes convergentes

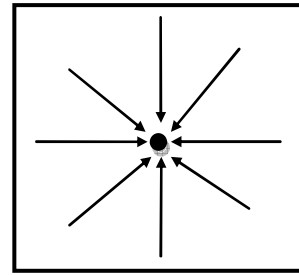


Figure II.3 : Ondes divergentes

La condition de rayonnement introduite par Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + jk\psi \right) = 0 \quad (\text{II.35})$$

Uniformément dans toutes les directions, a pour effet de garantir que la fonction d'onde ψ se comporte à l'infini comme une onde divergente (ou onde sortante ou onde rayonnante); ce qui exprime que la propagation a lieu des sources vers l'infini. Soulignons que les solutions rayonnantes de (II.34) vérifient automatiquement la condition de régularité: $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} \psi$ finie ($\psi = O(r^{-(d-1)/2})$). On a supposé implicitement dans l'équation (II.35) que le temps intervient avec le facteur $e^{j\omega t}$.

- **Condition de rayonnement de Silver-Müller :**

La condition de rayonnement de Sommerfeld assure aux composantes cartésiennes d'une onde vectorielle A solution de (II.34) d'être des ondes scalaires rayonnantes (de vérifier l'équation II.35); par contre elle ne garantit pas que A est solution de l'équation vectorielle des ondes.

$$\nabla \times \nabla \times A - k^2 A = 0 \quad (\text{II.36})$$

Effectivement, elle ne contient pas le couplage indispensable entre les composantes cartésiennes qui sont traduit par l'équation $\nabla \cdot A = 0$.

La condition de rayonnement de Silver-Müller est la contrepartie de celle de Sommerfeld pour les ondes obéissant à l'équation vectorielle des ondes (II.36). elle s'écrit:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} \{ r \times (\nabla \times A) - jkA \} = 0 \quad (\text{II.37})$$

Uniformément dans toutes les directions, où r est le vecteur unitaire radial.

Toutefois, notons que pour les solutions A de l'équation vectorielle des ondes (II.36), la condition de rayonnement de Silver-Müller est équivalente à la condition de rayonnement de Sommerfeld appliquée aux composantes cartésiennes de A [16], car ces solutions satisfont (II.34) et sont à divergence nulle.

Pour une onde électromagnétique (E, H) sortante, solution des équations de Maxwell, la condition de rayonnement de Silver-Müller se met sous l'une ou l'autre forme suivante:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} (r \times H + \eta_0^{-1} E) = 0 \quad (\text{II.38a})$$

$$\text{Où } \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} (r \times E - \eta_0 H) = 0 \quad (\text{II.38b})$$

Dans toutes les directions; $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0^{-1}}$ est l'impédance caractéristique du vide.

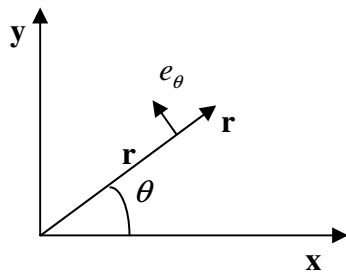


Figure II.4: Coordonnées cylindriques

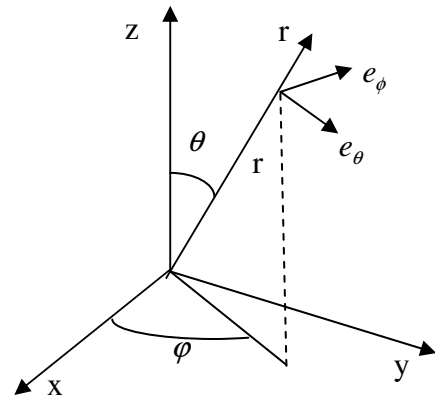


Figure II.5: Coordonnées sphériques

• *Le champ électromagnétique lointain :*

Toute onde électromagnétique rayonnante (E, H) solution des équations de Maxwell ou encore de l'équation des ondes a la forme asymptotique :
-d'une onde sortante sphérique en trois dimensions d'espace:

$$E(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ E_{\infty}(\theta, \varphi) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right\}, r \rightarrow \infty, \quad (\text{II.39a})$$

$$H(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ H_{\infty}(\theta, \varphi) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right\}, r \rightarrow \infty, \quad (\text{II.39b})$$

Uniformément dans toutes les directions,

-d'une onde sortante cylindrique en deux dimensions d'espace:

$$E(r; \theta) = \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \left\{ E_{\infty}(\theta) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right\}, r \rightarrow \infty, \quad (\text{II.40a})$$

$$H(r, \theta) = \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} \left\{ H_{\infty}(\theta) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right\}, r \rightarrow \infty, \quad (\text{II.40b})$$

Uniformément dans toutes les directions,

où les champs E_{∞} et H_{∞} sont définis sur une sphère unité (ou sur un cercle unité en deux dimensions) et donnent les diagrammes ou caractéristiques vectorielles de rayonnement des champs électrique lointain et champ magnétique lointain respectivement. Ces champs satisfont:

$$n \times E_{\infty} = \eta_0 H_{\infty} \quad (\text{II.41a})$$

et
$$n \cdot E_{\infty} = 0 \quad (\text{II.41b})$$

Où : n est le vecteur unitaire normal sortant à la sphère unité (ou au cercle unité). La relation (II.41) implique que lorsque r tend vers l'infini, on a les approximations : $n \times E \approx \eta_0 H$ et $n \cdot E \approx 0$.

II.3- Formulation faible du problème:

II.3.1- Problème à résoudre :

Dans le cadre de notre étude, le problème électromagnétique à résoudre est la détermination du couple (E, H) en régime harmonique à très hautes fréquences dans un domaine non borné, connaissant les sources de courants électrique et/ou magnétique qui peuvent être soit induites soit imposées . Les milieux seront isotropes et pourront être inhomogènes à pertes diélectrique et/ou à pertes magnétique (en régime harmonique ces milieux sont linéaires). Aux fréquences qui nous intéressent, la profondeur de pénétration du champ dans les conducteurs est négligeable, et, par conséquent, ils seront considérés comme parfait.

Le champ électromagnétique vérifie le problème dit continu que nous notons (PC), défini par:

$$\nabla \times E = -j\omega\mu H - J_m \quad \text{dans } \mathbb{R}^d / \Omega_{cep},$$

$$\nabla \times H = j\omega\epsilon E + J_e \quad \text{dans } \mathbb{R}^d / \Omega_{cep},$$

$$n_e \times E = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{cep},$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} (r \times E - \eta_0 H) = 0$$

et les conditions de continuité aux interfaces précédemment définies;

Où n_e est le vecteur unitaire rentrant normal à la surface Γ_{cep} , frontière du domaine Ω_{cep} occupé par les ceps (Figure II.6).

L'unicité de la solution d'un tel problème électromagnétique a été établie par Müller ; la question à considérer est l'existence et l'approximation de la solution. Comme il a été mentionné en introduction à ce chapitre, nous avons retenu la méthode des éléments finis pour la résolution numérique du problème électromagnétique (PC). Dans cette méthode, le domaine d'étude est subdivisé en parties de tailles finies appelées éléments [17].

Les variables du problème sont remplacées par un système de variables discrètes sur tout le domaine d'intérêt. Une fois introduites dans une formulation intégrale du problème, ces variables discrètes conduisent à un système d'équations à résoudre. Par nature, la méthode des éléments finis demande une troncature du domaine infini du problème (PC) par une frontière artificielle Γ . Dans ce contexte, la condition de rayonnement de Sommerfeld ou de Silver-Muller est amenée de l'infini sur la frontière Γ grâce à un opérateur tangentiel, T , de type intégral ou différentiel

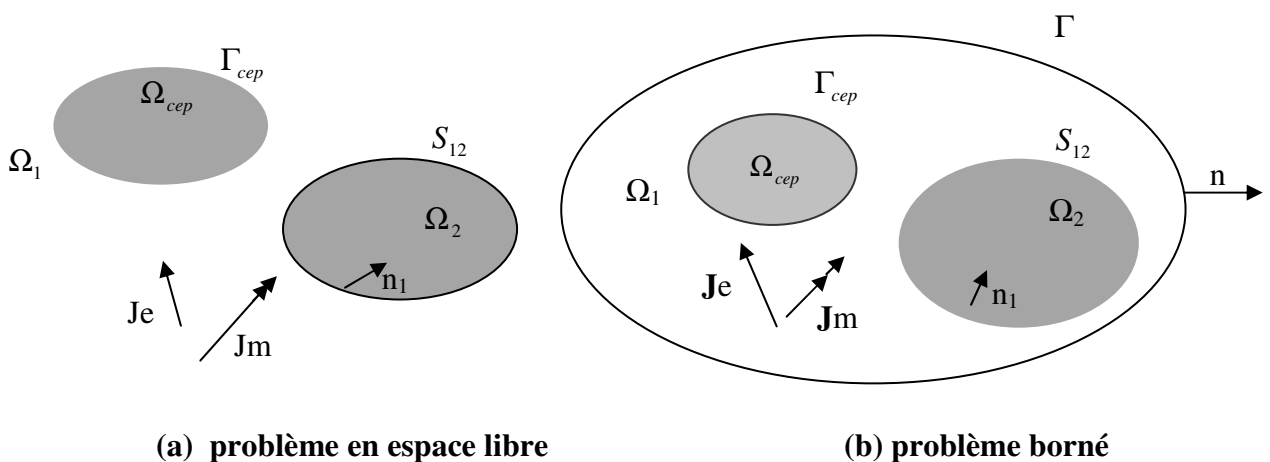


Figure II.6- Configurations du problème

Avant traitement par la méthode des éléments finis, les équations du problème (PC) sont généralement reformulées soit:

i) En utilisant directement comme variables d'état E ou H (équation de Helmholtz ou équation rot-rot), soit;

ii) En utilisant des potentiels scalaires et vecteurs auxiliaires comme variables d'état; les champ E et H sont ensuite déterminés par dérivation (numérique) de ces potentiels.

Le choix d'une formulation est important lorsque l'on souhaite développer un modèle numérique pouvant faire face à un large éventail de problèmes rencontrés en électromagnétisme. une "bonne" formulation ne doit pas introduire de modes parasites ou solutions non-physiques dans les solutions correctes. Il existe plusieurs types de solutions parasites mais les plus courantes proviennent du non-respect des conditions aux limites aux interfaces de milieux différents [18] et à la non-satisfaction des conditions de divergence nulle.

Les formulations en potentiels scalaires et vecteurs font l'objet d'un intérêt croissant pour la modélisation des équations de Maxwell. Ces formulations éludent les problèmes de Solutions parasites et de mauvais conditionnement des matrices résultant de la discrétisation de l'équation rot – rot en champ E ou H . Ces approches utilisent des potentiels vecteurs dont l'unicité nécessite la définition de jauges (la définition de divergence de ces potentiels). Cependant, en présence de milieux inhomogènes, la définition de jauges ne garantit pas l'unicité des potentiels électromagnétiques. Pour assurer cette unicité, des conditions additionnelles (en plus des conditions d'interfaces sur le champ électromagnétique) doivent être imposées aux potentiels aux interfaces des matériaux. Comme les approches en potentiels vecteurs requièrent toujours la définition de jauges, comme les quantités premières qui nous intéressent sont les champs E et H , et comme les conditions d'interface sont formulées plus facilement et plus naturellement en termes de ces champs, nous nous sommes intéressés aux formulations directes en E ou en H .

La formulation utilisant l'équation vectorielle d'Helmholtz (II.25) ou (II.26) demande des conditions complémentaires afin de satisfaire la condition de divergence nulle. C'est pourquoi, la résolution de l'équation vectorielle des ondes formulée en E ou en H est préférable car elle a l'avantage d'imposer la condition de divergence nulle à la solution [19].

Le problème dans le domaine intérieur (borné), Ω , peut donc s'écrire comme suit :

$$\nabla \times H = j\omega\epsilon E + J_e \quad \text{Dans } \Omega / \Omega_{cep} \quad (\text{II.42a})$$

$$\nabla \times \varepsilon_r^{-1} \nabla \times H - k_0^2 \mu_r H = -j\omega \varepsilon_0 J_m \quad \text{Dans } \Omega / \Omega_{cep} \quad (\text{II.42b})$$

$$\text{(PCH)} \quad n_e \times \nabla \times H = 0 \quad \text{Sur } \Gamma_{cep} \quad (\text{II.42c})$$

$$n \times \nabla \times H = T(H) \quad \text{Sur } \Gamma \quad (\text{II.42d})$$

et les conditions d'interfaces,

Où :

$$\nabla \times E = -j\omega \mu H - J_m \quad \text{Dans } \Omega / \Omega_{cep} \quad (\text{II.43a})$$

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times E - k_0^2 \varepsilon_r E = -j\omega \mu_0 J_e \quad \text{Dans } \Omega / \Omega_{cep} \quad (\text{1.43b})$$

$$\text{(PCE)} \quad n_e \times E = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{cep} \quad (\text{II.43c})$$

$$n \times \nabla \times E = T(E) \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{II.43d})$$

et les conditions d'interfaces,

Où : n est le vecteur unitaire normal sortant à Γ (Figure II.6) et k_0 est la constante de propagation en espace libre des ondes planes émises à la pulsation ω ($k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$).

Dans le problème (PCH), la variable principale est le champ magnétique H , solution de (II.42b), et la variable duale, le champ électrique E , est déterminée par l'équation (II.42a). Dans le problème (PCE), les rôles sont inversés : le champ magnétique E est la solution de (1.43b), tandis que le champ magnétique H est déterminé par l'équation (II.43a). Le couple (E, H) solution de (PCH) et aussi solution de (PCE) et, réciproquement, la solution du problème (PCE) est la solution du problème (PCH). Le prolongement de la solution de (PCE) ou de (PCH) à tout l'espace est solution du problème (PC) à frontière libre. Ce prolongement peut être obtenu grâce aux formules de Stratton – Chu [16]. Ces formules sont dérivées en appliquant l'analogie vectoriel du théorème de Green aux équations rot – rot dans (PCE) et (PCH).

II.3.2- Formulation par la méthode de Galerkin :

Les formulations dans la méthode des éléments finis sont généralement fournies par des principes variationnels ou des résidus pondérés. L'un ou l'autre principe est sensé donner le même résultat. Le dernier est plus souple et correspond, dans le cas des équations qui régissent notre problème, au premier. La méthode de Galerkin est une méthode de résidus

pondérés dans laquelle la fonction test ou fonction poids appartient à l'espace des solutions admissibles.

L'on sait, d'après Silver-Muller, que pour H solution du problème global (PC), les intégrales $\int_{\Omega} |H|^2 d\Omega$ et $\int_{\Omega} |\nabla \times H|^2 d\Omega$ sont finies pour Γ située à distance quelconque des sources. Par conséquent les solutions de (PCH), peuvent être recherchées dans l'espace de Hilbert suivant :

$$H(\text{rot}) = \{A \in IL^2(\Omega); \nabla \times A \in IL^2(\Omega)\},$$

Où : $IL^2(\Omega) = \{A \text{ de } \Omega \rightarrow C^3; \int_{\Omega} |A|^2 d\Omega < \infty\}$ est l'espace des fonctions vectorielles à valeurs complexes de carré du module sommable. Une propriété fondamentale des fonctions de l'espace $H(\text{rot})$ est qu'elles sont à composantes tangentielles continues aux interfaces dans Ω .

L'équation des ondes en H est multipliée par une fonction test W appartenant à l'espace $H(\text{rot})$ et est intégrée sur le domaine d'étude Ω :

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \epsilon_r^{-1} \nabla \times H - k_0^2 \mu_r H) \cdot W d\Omega = -j\omega \epsilon_0 \int_{\Omega} J_m \cdot W d\Omega \quad (\text{II.44})$$

La relation vectorielle :

$$\int_{\Omega} (\nabla \times A) \cdot W d\Omega = \int_{\Omega} A \cdot (\nabla \times W) d\Omega - \oint_{\Gamma} (A \times W) \cdot nd\Gamma. \quad (\text{II.45})$$

Avec: $A = \epsilon_r^{-1} \nabla \times H$, conduit à la formulation :

$$\int (\epsilon_r^{-1} \nabla \times H) \cdot (\nabla \times W) d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega} \mu_r H \cdot W d\Omega + \oint_{S_e} \epsilon_r^{-1} T(H) \cdot W d\Gamma = -j\omega \epsilon_0 \int_{S_e} J_m \cdot W dS$$

$$\forall W \in H(\text{rot}) \quad (\text{II.46})$$

Rappelons que pour H appartenant à $H(\text{rot})$, H est parfaitement déterminé par la donnée du second membre de (1.46) pour toute fonction W de l'espace $H(\text{rot})$. En outre, une propriété est vérifiée au sens faible (au sens de IL^2) par une fonction de IL^2 , si elle est vérifiée presque partout (p.p.) c'est à dire partout, sauf sur un ensemble dénombrable de points (ensemble de mesure nulle). Cette propriété dite faible est moins stricte que la propriété

classique dite forte. L'on peut vérifier que la solution H de l'équation (II.46) est solution au sens faible de (II.42b), il s'en suit que sa divergence est nulle (voir remarque 1.1). Afin d'assurer au problème continu (PCH) une solution unique dans Ω , il est nécessaire que la formulation intégrale (II.46) écarte les solutions parasites (non physiques) dues en partie au non – respect des conditions d'interfaces. Aussi, il convient de montrer les conditions à remplir par la fonction test, et de ressortir les conditions implicitement vérifiées par la formulation des résidus (II.46).

Dans un souci de clarté, le domaine Ω est supposé être composé de conducteurs parfaits Ω_{cep} et de deux régions Ω_1 et Ω_2 séparées par une interface S_{12} simplement fermée comme décrit à la figure II.6(b).

On commence par déterminer les conditions à imposer à la fonction test, autrement dit à la solution H de (II.46). Pour ce faire, on peut utiliser la théorie des distributions et écrire la première équation du problème (PCH) avec « précaution », i.e., au sens des distributions [14], de manière à rappeler les conditions d'interfaces sur le champ H . On a :

$$\{\nabla \times\}H = j\omega\epsilon E + J_e \delta_{S_e} \quad (\text{II.47})$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \{\nabla \times\}H &= \nabla \times H + n_1 \times (H^1 - H^2) \delta_{S_{12}} + (n_e \times H) \delta_{\Gamma_{cep}} + n_{(+)} \times (H^{(+)} - H^{(-)}) \delta_{S_e} \\ &+ n_{(+)} \times (H^{(+)} - H^{(-)}) \delta_{S_m} + (n \times H) \delta_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Où l'opération entre accolades est prise au sens des distributions, i.e., tient compte des sauts éventuels du champ H aux interfaces. La notation δ_S signifie que les quantités en facteur sont localisées sur la surface S .

En égalisant ces expressions de $\{\nabla \times\}H$, on obtient les relations suivantes :

$$\nabla \times H = j\omega\epsilon_0 \epsilon_r E \quad (\text{II.49a})$$

$$n_1 \times (H^1 - H^2) \delta_{S_{12}} = 0 \quad (\text{II.49b})$$

$$(n_e \times H) \delta_{\Gamma_{cep}} = J_e^{(i)} \delta_{\Gamma_{cep}} \quad (\text{II.49c})$$

$$n_{(+)} \times (H^{(+)} + H^{(-)}) \delta_{S_e} = J_e \delta_{S_e} \quad (\text{II.49d})$$

$$n_{(+)} \times (H^{(+)} - H^{(-)}) \delta_{S_m} = 0 \quad (\text{II.49e})$$

$$(n \times H) \delta_{\Gamma} = J_e^{(i)} \delta_{\Gamma} \quad (\text{II.49f})$$

Les courants $J_e^{(i)}$ étant induits, les équations (II.49c) et (II.49f) sont des identités qui définissent $J_e^{(i)}$ et ne sont pas des conditions aux limites pour la partie tangentielle du champ H , de ce fait elles sont ignorées dans l'écriture de (II.47). Puisque H est à composantes tangentielles continues au passage des interfaces, du fait de son appartenance à l'espace H (rot) les relations (II.49b) et (II.49 e) sont satisfaites. Par conséquent, pour que l'équation (II.42a) soit satisfaite au sens des conditions, i.e., qu'elle contienne les conditions d'interfaces tangentielles sur le champ H , il suffit de définir le champ E par (II.49 a) et d'imposer à H de remplir (II.49d).

L'intégration de (II.44) par sous domaines, nous amène à définir les intégrales :

$$R_1 = \int_{\Omega_1} (\nabla \times \varepsilon_r^{-1} \nabla \times H - k_0^2 \mu_r H) \cdot W d\Omega$$

$$R_2 = \int_{\Omega_2} (\nabla \times \varepsilon_r^{-1} \nabla \times H - k_0^2 \mu_r H) \cdot W d\Omega$$

On a aussitôt d'après (II.45),

$$R_2 = \int_{\Omega_2} (\varepsilon_r^{-1} \nabla \times H) \cdot (\nabla \times W) d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_2} \mu_r H \cdot W d\Omega + \oint_{S_{12}} (n_2 \times \varepsilon_r^{-1} \nabla \times H) \cdot W dS \quad (II.50)$$

Les champs E et H pouvant présenter des discontinuités à la traversée des surfaces de courants, il faut effectuer l'intégration sur Ω_1 avec « précaution ». La surface S_e par exemple, support de courants électriques, sépare un sous – domaine Λ de Ω_1 en deux autres sous – domaine $\Lambda_{(+)}$ et $\Lambda_{(-)}$. On a la relation vectorielle :

$$\int_{\Lambda} (\nabla \times A) \cdot W d\Omega = \int_{\Lambda} \nabla \cdot (A \times W) d\Omega + \int_{\Lambda} A \cdot (\nabla \times W) d\Omega$$

D'autre part le théorème de la divergence donne successivement :

$$\int_{\Lambda_{(+)}} \nabla \cdot (A \times W) d\Omega = \int_{\partial\Lambda_{(+)}/S_e} (A \times W) \cdot n_{(+)} dS + \int_{S_e} (A \times W) \cdot n_{(+)} dS$$

$$\int_{\Lambda_{(-)}} \nabla \cdot (A \times W) d\Omega = \int_{\partial\Lambda_{(-)}/S_e} (A \times W) \cdot n_{(-)} dS + \int_{S_e} (A \times W) \cdot n_{(-)} dS$$

On en déduit, en faisant la somme des deux expressions ci – dessus, que :

$$\int_{\Lambda} \nabla \cdot (A \times W) d\Omega = \oint_{\partial\Lambda} (A \times W) \cdot n dS + \int_{S_e} \{n_{(+)} \times (A^{(+)} - A^{(-)})\} \cdot W dS \quad (II.51)$$

Ce qui, avec $A = \varepsilon_r^{-1} \nabla \times H$, conduit à :

$$\begin{aligned}
 R_1 = & \int_{\Omega_1} (\varepsilon_r^{-1} \nabla \times H) \cdot (\nabla \times W) d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega_1} \mu_r H \cdot W d\Omega + \oint_{S_{12}} (n_1 \times \varepsilon_r^{-1} \nabla \times H) W dS \\
 & + \int_{S_e} \left\{ n_{(+)} \times \left[(\varepsilon_r^{-1} \nabla \times H)^{(+)} - (\varepsilon_r^{-1} \nabla \times H)^{(-)} \right] \right\} \cdot W dS \\
 & + \int_{S_m} \left\{ n_{(+)} \times \left[(\varepsilon_r^{-1} \nabla \times H)^{(+)} - (\varepsilon_r^{-1} \nabla \times H)^{(-)} \right] \right\} \cdot W dS \\
 & + \oint_{\Gamma_{cep}} (n_e \times \varepsilon_r^{-1} \nabla \times H) \cdot W dS + \oint_{\Gamma} (n \times \varepsilon_r^{-1} \nabla \times H) \cdot W dS
 \end{aligned} \tag{II.52}$$

En identifiant la somme des intégrales R_1 et R_2 au second membre de (II.46), on obtient que la formulation (II.46) vérifie implicitement (en substituant $\varepsilon_r^{-1} \nabla \times H$ par $j\omega \varepsilon_0 E$ grâce à (II.49)) les conditions aux limites :

$$n_1 \times (E^1 - E^2) \delta_{S_{12}} = 0 \tag{II.53a}$$

$$(n_e \times E) \delta_{\Gamma_{cep}} = 0 \tag{II.53b}$$

$$n^{(+)} \times (E^{(+)} - E^{(-)}) \delta_{S_m} = -J_m \delta_{S_m} \tag{II.53c}$$

$$n^{(+)} \times (E^{(+)} - E^{(-)}) \delta_{S_e} = 0 \tag{II.53d}$$

$$(n \times \nabla \times H) \delta_{\Gamma} = T(H) \delta_{\Gamma} \tag{II.53e}$$

Ainsi, les conditions portant sur les composantes tangentielles du champ E sont naturellement remplies par la formulation faible (II.46). Ce qui n'est pas étonnant car ces conditions sont contenues dans la deuxième équation du problème (PCH) au sens des distributions (voir remarque II.1) : on arrive donc aux mêmes conclusions en écrivant cette équation au sens des distributions. La condition de rayonnement, imposée à distance finie, traduite par la relation (II.53e) est faiblement vérifiée par la formulation (II.46).

Le problème faible, (PVH), consiste alors à :

- Trouver H dans $H(rot)$;
- H vérifiant (II.49d) ;
- H solution de (II.46).

La continuité tangentielle du champ H étant assurée par l'appartenance de H à l'espace $H(rot)$ et celle du champ E étant établie par la formulation variationnelle, les composantes normales E_n et H_n de ces champs sont discontinues de sorte que les continuités normales des vecteurs induction $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$ et $B = \mu_0 \mu_r H$ soient satisfaites (voir remarque II.2).

Il est possible, à l'aide de la théorie des distributions et de la théorie des espaces de Sobolev, de montrer que la formulation faible du problème admet une solution unique dans l'espace $H(\text{rot})$ dès lors que l'opérateur de bord T correspond bien à la condition de Silver – Müller à distance finie [11].

De la même façon, on montre que le problème faible formulé en E (PVE) peut s'écrire :

- Trouver E dans $H(\text{rot})$;
- E vérifiant (II.53b) ;
- E solution de :

$$\int_{\Omega} (\mu_r^{-1} \nabla \times E) \cdot (\nabla \times W) d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega} \epsilon_r E \cdot W d\Omega + \oint_{S_e} \mu_r^{-1} T(E) \cdot W d\Gamma = -j\omega\mu_0 \int_{S_e} J_e \cdot W dS$$

$$\forall W \in H(\text{rot}).$$

Il est aussi possible de montrer que E solution de (PVE) est solution au sens faible de l'équation (II.43b) et, en tant que tel, sa divergence est nulle. La dualité des champs E et H permet d'aboutir à des remarques duales de celles évoquées dans la formulation en champ H concernant les conditions faiblement remplies par (II.54) et celles fortement satisfaites par le champ E .

La discrétisation d'une formulation comme (II.46) ou (II.54) par la méthode des éléments finis impose aux éléments finis de vérifier certaines propriétés. Les éléments finis doivent être vectoriels et capables d'approcher l'espace $H(\text{rot})$ ou encore de générer un sous – espace de $H(\text{rot})$ de dimension finie. La formulation faible obtenue en résolvant (II.46) (resp. (II.54)) pour toute fonction poids W appartenant à ce sous – espace de $H(\text{rot})$ est dite approchée. Cette formulation faible approchée est à l'image de la formulation faible (II.46) (resp. (II.54)) et, par conséquent, elle possède les mêmes vertus que cette dernière concernant la prise en compte des conditions d'interfaces sur les champs E et H , bien entendu selon le degré d'approximation de l'espace $H(\text{rot})$. Les éléments finis classiques (nodaux) sont scalaires et sont inadaptés pour générer un sous – espace de $H(\text{rot})$. La matrice obtenue en discrétisant les intégrales volumiques de (II.46) (resp. (II.54)) est appelée « matrice élément finis » et elle est symétrique lorsque les éléments finis employés sont vectoriels (chapitre 3).

Pour obtenir une matrice globale symétrique il faut que l'opérateur T soit tel que la discrétisation de l'intégrale de frontière conduise à une matrice de bord symétrique.

II.4- CONCLUSION:

L'équation vectorielle des ondes écrite en champ E ou en champ H a été choisie parce que ses solutions sont à divergence nulle. La formulation par la méthode de Galerkin de l'équation rot-rot en H (resp. E) vérifie naturellement (et au sens faible) les conditions d'interfaces sur le champ dual E (resp. H). Avec le choix de la fonction test dans l'espace $H(\text{rot})$, elle permet de satisfaire implicitement (et au sens fort) les conditions de continuité tangentielle à la traversée de milieux différents portant sur le champ principal H (resp. E). De plus l'imposition du saut de H (resp. E) à la surface support de courant, associée au choix de H (resp. E) dans $H(\text{rot})$, permet de vérifier fortement l'équation de Maxwell définissant le champ E (resp. H). Néanmoins, pour la formulation en champ E, la condition de mur électrique doit être forcée à la surface d'un conducteur électrique parfait.

Les conditions de continuité normale portant sur E et H sont automatiquement remplies comme conséquences de celles tangentielles. Il s'en suit que la formulation de Galerkin de l'équation rot-rot avec l'espace $H(\text{rot})$ comme espace des solutions admissibles, que nous avons adoptée, ne génère pas de solutions parasites dues au non-respect des conditions de divergence nulle ou à la non satisfaction des conditions d'interfaces. L'opérateur de bord T doit être équivalent à la condition de Sommerfeld ou de Silver-Müller à distance finie pour assurer l'unicité de la solution. Il sera examiné au chapitre suivant. Notre formulation s'adapte sans trop de difficultés au cas des milieux anisotropes en remplaçant les permittivité et perméabilité par des tenseurs de permittivité et de perméabilité respectivement.

III.1- Introduction :

La détermination de la distribution du champ et de potentiel électrique de tout système haute tension est un problème complexe de calcul, non pas par la simplicité des équations aux dérivées partielles qui les décrivent, mais plutôt à cause de la forme irrégulière des diélectriques, de la proximité de surfaces métalliques aux formes complexes, des lignes de transmission, et dans certains cas, de la présence d'une couche conductrice.

Les progrès de l'informatique ont permis de développer des méthodes numériques de calcul afin de déterminer de façon précise la distribution du champ et du potentiel électrique. Les méthodes numériques les plus connues et les plus utilisées dans ce type de problème sont donc la Méthode des Différences Finies (M.D.F), la Méthode des Eléments Finis (M.E.F), la Méthode de Simulation de Charges (M.S.C) et la Méthode des Eléments Finis de Frontière (M.E.F.F). Dans ce chapitre, ces méthodes sont développées dont le principe et les caractéristiques, et sont basées sur la résolution de l'équation de Laplace et de Poisson en imposant les conditions aux frontières adaptées à chaque problème [20].

III.2- Présentation des équations de Maxwell :

III.2.1- Equation en potentiel scalaire : « Poisson et Laplace »

Les équations qui gouvernent la répartition du potentiel et du champ électrique dans un milieu donné, dérivent des équations de Maxwell. Celles-ci sont formées par quatre équations aux dérivées partielles qui lient les phénomènes magnétiques caractérisés par le champ magnétique H et l'induction magnétique B , aux phénomènes électriques caractérisés par le champ électrique E et l'induction électrique D . Ces quatre équations sont :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{III.1})$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_v \quad (\text{III.2})$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{III.3})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{III.4})$$

Avec : ρ_v la densité volumique de charges.

Outre ces quatre équations, il y a les relations constitutives qui lient \vec{D} à \vec{E} , \vec{J} à \vec{E} et \vec{B} à \vec{H} :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{III.5})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{III.6})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{III.7})$$

Où : ε , μ et σ représentent respectivement la permittivité électrique, la susceptibilité magnétique, et la conductivité électrique du milieu.

Lorsque l'on applique une différence de potentiel alternative, la dérivation des grandeurs électriques par rapport au temps revient à les multiplier par la quantité $j\omega$. Où j est l'unité imaginaire et ω la pulsation de la source. En tenant compte des relations constitutives, les équations (III.1) et (III.3) deviennent :

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (\text{III.8})$$

$$\text{div}(\varepsilon \vec{E}) = \rho_v \quad (\text{III.9})$$

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \vec{E} \quad (\text{III.10})$$

Comme le champ magnétique est faible, dans les équipements *H.T* considérés, le second membre de l'équation (III.8) peut être négligé, ce qui donne [20] :

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \quad (\text{III.11})$$

Donc, Les charges électriques distribuées dans l'espace et immobiles sont à l'origine d'un champ électrique ; indépendant du temps. On dit alors champ électrostatique dérivant d'un potentiel scalaire $\phi(M)$, selon la formule suivante :

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi \quad (\text{III.12})$$

La distribution des charges est représentée par la charge volumique ρ_v , qui est bien entendu nulle dans toutes les régions non chargées de l'espace. Le théorème de Gauss peut être traduit par la propriété locale (III.9) qui devient :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \quad (\text{III.13})$$

Par l'introduction de l'opérateur de Laplace nous trouvons :

$$\Delta \phi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \quad (\text{III.14})$$

Sur un domaine non chargé, nous avons $\Delta\phi = 0$, c'est l'équation de Laplace. Sur un domaine chargé $\Delta\phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$ constitue l'équation de Poisson.

La fonction de potentiel peut être déterminée à l'aide de sa formule de définition et par intégration. Il peut être intéressant de la considérer comme solution de l'équation de Laplace ou de celle de Poisson, assortie des conditions aux limites et conditions d'interfaces spécifiques du problème considéré. On peut démontrer en général que ces conditions assurent l'unicité de la solution. Alors si on trouve une solution particulière qui convient, on pourra affirmer que c'est la solution [21].

Pour les matériaux isolants, généralement utilisés dans les appareillages *H.T.*, la densité volumique de charge ρ_v est nulle. Avec ces hypothèses, on obtient l'équation de Laplace (III.15) qui gouverne la répartition du potentiel dans les matériaux isolants :

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (\text{III.15})$$

On peut noter que cette équation gouverne aussi la répartition du potentiel dans les matériaux conducteurs tels que les électrodes car ceux-ci sont des volumes équipotentiels. Son expression analytique en coordonnées cartésiennes est de la forme suivante :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad (\text{III.16})$$

III.2.2-Conditions aux limites :

Il existe plusieurs solutions aux équations différentielles précédemment définies. Les conditions aux limites servent en fait à déterminer une solution unique de ces équations. Ces conditions sont principalement de deux types : la condition de Dirichlet et la condition de Neumann. La condition de Dirichlet impose la valeur du potentiel comme par exemple les surfaces des conducteurs, les surfaces équipotentiels, ou les limites infinies du domaine d'étude. La condition de Neumann impose la valeur de la dérivée normale du potentiel tel que les plans de symétrie ou les surfaces à flux imposé. Les conditions de Dirichlet et de Neumann sont dites homogènes si les valeurs imposées sont nulles. Elles sont dites non homogènes dans le cas contraire.

III.2.3-Condition d'interfaces :

L'équation (III.15) a été obtenue en émettant l'hypothèse que la permittivité absolue ϵ est constante sur tout le domaine d'étude. Cette équation n'est donc valable que pour des milieux homogènes et isotropes. Dans le cas où plusieurs milieux coexistent, ce qui est généralement le cas dans les problèmes *H.T.*, l'équation (III.15) n'est plus vraie dans l'ensemble du domaine d'étude. Il faut alors chercher une solution dans chaque milieu et lier les différentes solutions par des conditions d'interfaces.

A la frontière de deux milieux de propriétés différentes, les équations dites d'interfaces, en l'absence de charge et de courants superficiels, s'écrivent :

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (\text{III.17})$$

Qui traduit l'égalité des valeurs du potentiel vue des deux régions,

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \quad (\text{III.18})$$

Qui traduit la conservation de la composante normale du déplacement électrique D et où n_1 et n_2 représentent les normales à la frontière, dirigées vers l'extérieur des milieux 1 et 2 respectivement.

$$\vec{E}_1 \times \vec{n}_1 = \vec{E}_2 \times \vec{n}_2 \quad (\text{III.19})$$

Qui traduit la conservation de la composante tangentielle du champ électrique à travers l'interface.

III.3- Présentation des méthodes numériques :

III.3.1-La Méthode des Différences Finies (M.D.F) :

La méthode rappelle celle que nous utilisons pour les équations différentielles. Il s'agit, à partir du développement de Taylor de discrétiser les dérivées de la fonction par une combinaison de certaines de ses valeurs.

Selon l'utilisation des différences à gauche, à droite ou centrée, on obtient différents schémas de discrétisation aux différences finies. Tous ne sont pas équivalents, et une étude fine est nécessaire pour choisir le schéma représentant le meilleur compromis.

La générale de la méthode va nous permettre d'aborder les notions de consistance, de stabilité et de convergence.

- Consistance : une méthode numérique est consistante si l'erreur de discrétisation de l'équation tend vers zéros lorsque le pas de discrétisation tend vers zéros.
- Stabilité : une fois le schéma discret choisi, il va être nécessaire de la résoudre. Le processus de résolution, à la vue des équations sera la plupart du temps itératif. On calculera les valeurs de « ϕ » de proche en proche : une valeur donnée de « ϕ » sera donc calculée en utilisant le résultat du calcul d'autres valeurs de « ϕ ». Les erreurs d'arrondi être inévitables sur machine, la méthode sera stable si ces erreurs ne s'amplifient pas (trop) au cours du calcul.
- Convergence : après s'être assuré que le schéma discret tend vers l'équation, que ce schéma conduit à un calcul stable, on dispose d'une solution. Le schéma utilisé est dit convergence si sa solution ainsi obtenue tend vers la solution de l'équation de départ, lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéros.

Donc, la consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes pour assurer la convergence [22].

III.3.1.1- Principe de la méthode :

L'idée principale de la MDF est de fournir une approximation des dérivées partielles qui régissent les problèmes par des « différences » entre les valeurs nodales qui sont séparées par une distance finie. Elle est, historiquement, la première méthode connue pour calculer, sur ordinateur, la solution d'une équation différentielle. Elle consiste à décomposer le domaine d'étude en une grille rectangulaire uniforme dont chaque nœud est à équidistance de son voisin suivant les axes X et Y et en chaque nœud, le système différentiel est satisfait. L'utilisation d'un maillage régulier permet d'avoir, en tout point, la même forme pour les équations [23]. Le plus simple de ces maillages réguliers est le maillage carré, figure (III.1). L'équation aux dérivées partielles est alors remplacée par un système d'équations algébriques pour les valeurs nodales. Dans le calcul du potentiel et du champ électrique, ces équations sont linéaires et la solution de chaque valeur nodale est obtenue par itération ou inversion de matrice.

Une illustration de cette présentation est donnée en prenant l'équation de Laplace (III.15) en deux dimensions définie dans le domaine donné sur figure (III.1).

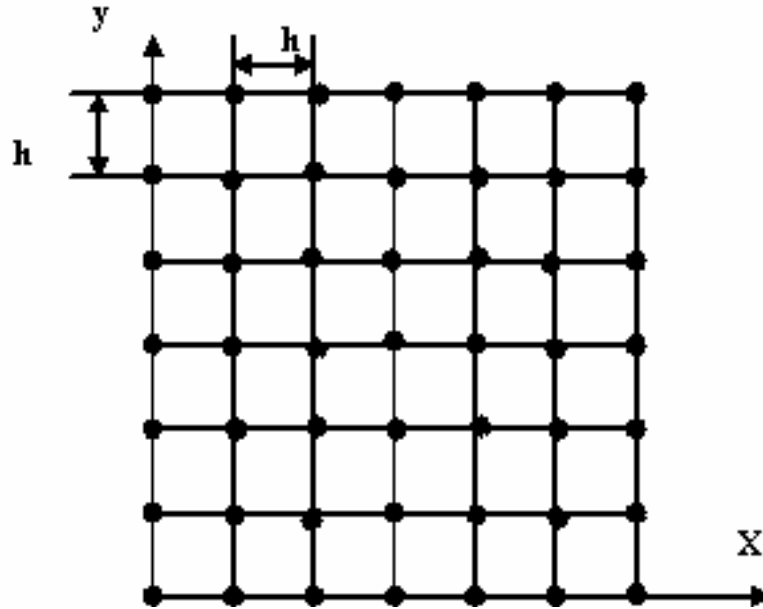


Figure III.1 : Maillage carré

Soit les indices i et j , les coordonnées de la position d'un nœud quelconque (figure III.2) avec $\Delta x = \Delta y = h$ dans le cas d'un maillage carré, et $\phi_{i,j}$ la valeur du potentiel en ce nœud qui est donné par :

$$\phi_{i,j} = \phi(x_0 + i \cdot \Delta x, y_0 + j \cdot \Delta y) \quad (\text{III.20})$$

Où : x_0 et y_0 représentent les conditions initiales.

Comme sur la figure (III.2), l'approximation algébrique de la dérivée $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ est donnée par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cong \frac{1}{\Delta x} \cdot (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) \quad (\text{III.21})$$

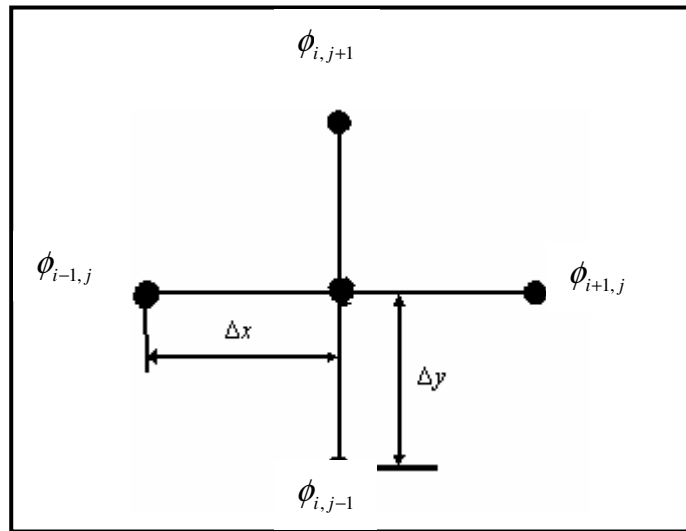


Figure III.2 : Point central et ses voisins

Une approximation similaire donne :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cong \frac{1}{\Delta x^2} \cdot (\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}) \quad (\text{III.22})$$

Ces expressions sont exactes lorsque Δx tend vers 0, mais dans l'analyse numérique, Δx et Δy sont finis (d'où le terme de différences finies). De manière identique, on peut écrire les expressions équivalentes suivant la direction y , ce qui donne :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \cong \frac{1}{\Delta y} \cdot (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}) \quad (\text{III.23})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cong \frac{1}{\Delta y^2} \cdot (\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}) \quad (\text{III.24})$$

L'utilisation de la notation indicielle permet une programmation et une évaluation directe des expressions ainsi obtenues. Lorsque les équations (III.22) et (III.23) sont substituées dans l'équation de Laplace, nous obtenons la formulation algébrique suivante :

$$2 \cdot \left(1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \right) \phi_{i,j} \cong \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot (\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1}) \quad (\text{III.25})$$

Où $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ dépend du choix de la taille du maillage.

Pour un maillage carré ($\Delta x = \Delta y$), l'équation (III.25) se simplifie comme suit :

$$\phi_{i,j} \cong \frac{1}{4} (\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j}) \quad (\text{III.26})$$

On obtient ainsi un système d'équations linéaires implicites lorsque les formulations analytiques sont considérées à chaque nœud. À partir du système d'équations, on obtient un système algébrique qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[A]\{\phi\} = \{B\} \quad (\text{III.27})$$

Où :

$\{\phi\}$ est le vecteur forme par les inconnues en potentiel de tous points intérieurs au domaine et $\{B\}$ le vecteur des conditions aux limites.

La résolution du système (III.27) permet ainsi d'évaluer le potentiel en chacun des nœuds.

- **Remarque:** Lorsque le problème présente un domaine spatial infini, on limite le domaine d'étude par une frontière imaginaire sur laquelle le potentiel est supposé avoir diminué suffisamment pour être considéré comme nul.

III.3.1.2- Avantages de la M.D.F :

- ❖ La méthode des différences finies est une méthode simple à appliquer lorsque la géométrie le permet et c'est une méthode raisonnablement exacte.
- ❖ De plus, elle se programme facilement et nécessite peu de mémoire pour le stockage des données.

III.3.1.3- Inconvénients de la M.D.F :

- ❖ Lorsque la géométrie est de frontière courbe, le schéma ne peut s'appliquer près des frontières irrégulières et donc cette méthode devient difficilement applicable. On doit alors rechercher à la place une méthode qui est valide indépendamment de la géométrie.
- ❖ Elle n'est pas applicable pour des problèmes en 3 dimensions [24].
- ❖ Cette méthode nécessite la connaissance, sur toute la frontière entourant le domaine étudié, du potentiel, ce qui n'est pas toujours le cas en général.

La méthode des différences finies exploite un maillage à pas constant (quelque soit le type de coordonnées utilisées) et propose deux types de solutions : le premier est explicite, c'est à dire que les inconnues aux nœuds du maillage sont données explicitement par les équations ; et le deuxième type est implicite, c'est – à – dire les inconnues constituent un système linéaire qu'il convient d'inverser, ce dernier est basé sur une forme matricielle « creuse ». Donc, on peut faire une approximation des opérateurs d'une équation différentielle par des différences finies calculées aux nœuds d'un maillage. Aussi on peut faire une approximation de la fonction inconnue d'une équation différentielle. Cette méthode est connue sous l'appellation de Méthode des Eléments Finis (M.E.F) [25].

III.3.2- La Méthode des Eléments Finis (M.E.F) :

La M.E.F, outil numérique très puissant, est beaucoup utilisé dans la résolution des problèmes à domaine spatial fini, surtout en mécanique où elle a connu son plus fort développement. Cette méthode a été appliquée avec succès dans les problèmes de calcul de potentiel et de champs électriques [26].

L'idée de cette méthode est de chercher une solution approchée à une équation différentielle après une reformulation sous forme d'identité intégrale appelée forme faible ou variationnelle. Au lieu de chercher à satisfaire l'équation aux nœuds, on décompose ici le domaine en sous domaines appelés éléments finis, et on impose la satisfaction des équations par sous domaine. L'introduction d'une approximation locale par sous domaine (dit élément fini) permet de contourner le problème de complexité des géométries car il suffit alors de choisir une approximation ou une décomposition (maillage) qui respecte la géométrie.

III.3.2.1- Principe de la méthode :

La M.E.F repose sur deux principes : d'une part, la formulation d'un problème approche la méthode de Galerkin, qui permet de remplacer un problème posé en dimension infinie par un système linéaire. D'autre part, la construction d'un espace d'approximation (de dimension finie) à l'aide d'un maillage, de fonctions polynomiales par morceaux et de degré de liberté sur chaque maille.

La première étape dans la construction de l'espace d'approximation S_b , consiste à mailler l'intervalle Ω en une dimension d'espace (Figure III.3).

Un maillage $\Omega =]a, b[$ est une collection indexée d'intervalles $\{I_i = [x_{1,i}, x_{2,i}]\}_{1 \leq i \leq N_{ma}}$ tous de mesure non nulle et formant une partition de Ω .

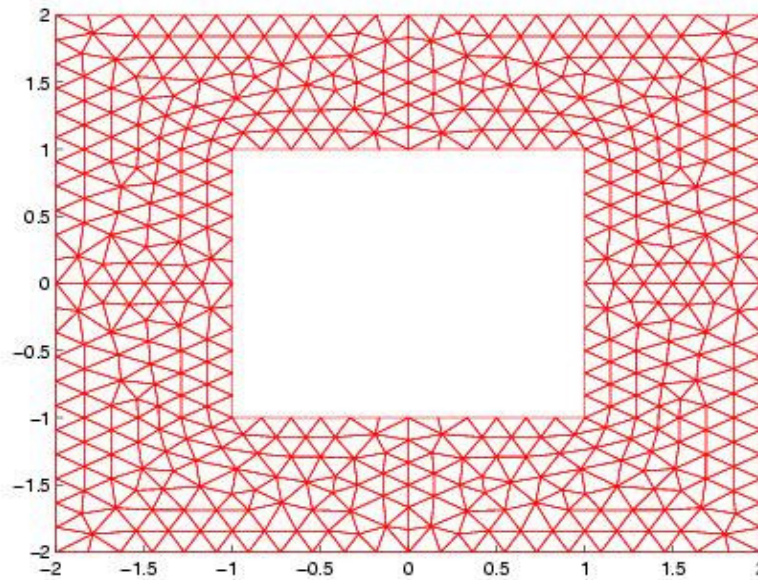


Figure III.3 : Le maillage en éléments finis triangulaires

En d'autres termes on a :

$$]a, b[= \bigcup_{i=1}^{N_{ma}} [x_{1,i}, x_{2,i}] \text{ Et } [x_{1,i}, x_{2,i}] \cap [x_{1,j}, x_{2,j}] = \emptyset \text{ pour } i \neq j \quad (\text{III.28})$$

Les intervalles I_i sont appelés les mailles (ou les éléments ou les cellules de maillage), et l'entier N_{ma} désigné le nombre totale de mailles. La façon la plus simple de construire un maillage est de choisir $(N_{ma} + 1)$ points distincts de Ω tels que :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{N_{ma}} < x_{N_{ma}+1} = b \quad (\text{III.29})$$

Et de poser $x_{1,i} = x_i$ et $x_{2,i} = x_j$ pour tout $i \in \{1, \dots, N_{ma}\}$. Les points de l'ensemble $\{x_1, \dots, x_{N_{ma}+1}\}$ sont appelés les sommets du maillage. On désigne par N_{s0} le nombre de sommets du maillage en une dimension d'espace. On a donc :

$$N_{s0} = N_{ma} + 1 \quad (\text{III.30})$$

Le maillage est à priori de pas variable, on pose pour tout $i \in \{1 \dots N_{ma}\}$:

$$b_i = x_{N_{ma}+1} - x_i \quad \text{Et} \quad b = \max_{1 \leq i \leq N_{ma}} b_i \quad (\text{III.31})$$

On dit que le maillage est uniforme lorsque $b = b_i$ pour tout $i \in \{1 \dots N_{ma}\}$ par la suite, le maillage est désigné sous la forme $T_b = \{I_i\}_{1 \leq i \leq N_{ma}}$.

La deuxième étape dans la construction de l'espace d'approximation consiste à choisir des fonctions de forme sur chaque maille, on d'autre termes, les fonctions de S_b sont telles que leur restriction à chaque maille $I_i \in T_b$ et dans tel espace polynomial [27].

Ces fonctions d'interpolation permettent alors de donner une approximation du potentiel ϕ , notée $\tilde{\phi}$, sur chaque élément en fonction de ses valeurs aux nœuds de l'élément comme suit :

$$\tilde{\phi} = \sum_{i=1}^{N_e} N_i \phi_i \quad (\text{III.32})$$

Avec N_e le nombre de nœud d'interpolation, N_i les fonctions d'interpolation et ϕ_i les valeurs nodales du potentiel.

Pour illustrer le principe de la M.E.F, on reprend l'exemple de l'équation de Laplace (III.15) et on recherche à minimiser la quantité R telle que :

$$R = \left(\nabla^2 \tilde{\phi} \right) \quad (\text{III.33})$$

Parmi toutes les méthodes qui permettent d'annuler une grandeur dans un domaine Ω , la méthode des résidus pondérés est bien connue et souvent utilisée [28].

Elle consiste à choisir un ensemble de fonctions linéairement indépendantes W_n , appelées fonctions de projection, et annuler ainsi toutes les intégrales (III.33) sur chacun des éléments finis.

$$I_n = \int_{\Omega} W_n R d\Omega \quad (\text{III.34})$$

L'intégration par partie de l'équation (III.34) donne :

$$I_n = - \int_{\Omega_e} \text{grad} \tilde{\phi} \cdot \text{grad} W_n d\Omega + \int_{S_e} \left(\text{grad} \tilde{\phi} \cdot \vec{n} \right) W_n dS_e \quad (\text{III.35})$$

Pour chaque élément, on annule les n intégrales I_n (III.35) qui correspondent aux n fonctions de projection. On obtient un ensemble de n équations à n inconnues formant ainsi

un système élémentaire pouvant s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[A_e]\{\phi_e\} = \{b_e\} \quad (\text{III.36})$$

$[A_e]$: Est la matrice associée à l'élément considéré ;

$\{\phi_e\}$: Ses composantes sont les inconnues du potentiel aux nœuds du même élément ;

$\{b_e\}$: Est le vecteur qui tient compte des éventuelles conditions aux limites présentes sur certains nœuds de l'élément considéré.

La résolution du système final est simple puisque les équations obtenues sont linéaires et les matrices ainsi formées sont symétriques. Pour déterminer la distribution du champ électrique, il faut calculer la dérivée du potentiel par une méthode numérique adaptée [20].

En fin, il existe un grand nombre de formes géométriques pour les éléments de maillage tels que (figure III.4) :

- Des triangles, des rectangles, des quadrilatères arbitraires pour les problèmes à deux dimensions ;
- Des tétraèdres, des hexaèdres, des cubes, des primes pour des problèmes à trois dimensions.

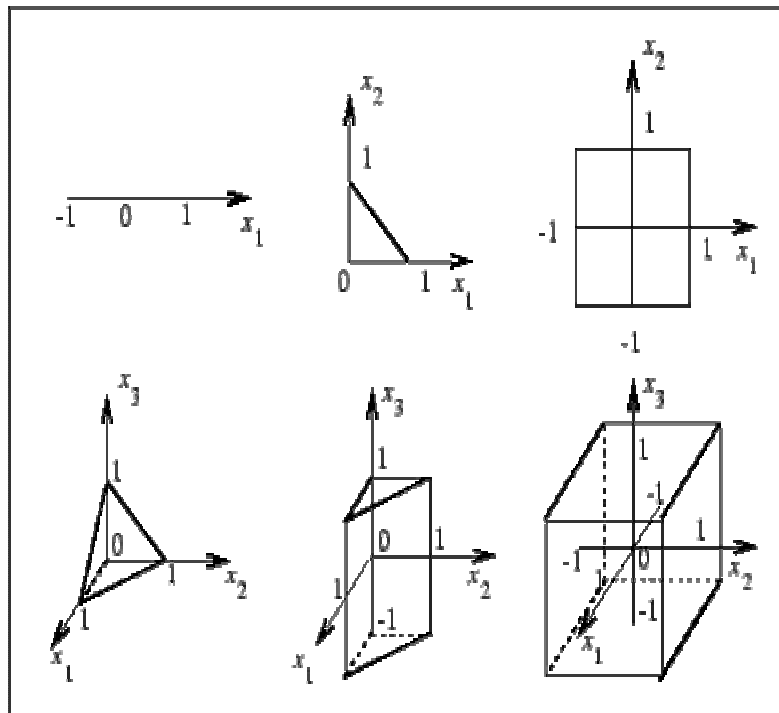


Figure III.4: Mailles de référence

III.3.2.2- Avantages de la M.E.F :

- ❖ La flexibilité est l'un des plus importants avantages de la M.E.F. Les éléments peuvent avoir plusieurs formes variées et peuvent donc s'adapter facilement à n'importe quelles formes géométriques complexes et aussi tenir compte des propriétés inhomogènes et non linéaires des matériaux.
- ❖ La programmation de la méthode est assez simple surtout lorsqu'il s'agit de tenir compte de l'introduction des conditions aux limites.
- ❖ La M.E.F a fait ses preuves dans beaucoup de domaine en ingénierie. De plus, avec son développement important, il existe de très bons logiciels commerciaux qui sont basés sur cette méthode et qui la rendent très accessible, et par conséquent, elle est applicable à beaucoup de problèmes sans que nous connaissions nécessairement la M.E.F en détail.
- ❖ Les matrices formant le système final d'équations sont symétriques ce qui simplifie grandement la résolution de celui-ci.

III.3.2.3- Inconvénients de la M.E.F :

- ❖ L'utilisation de la M.E.F pour la résolution d'un problème donné, nécessite la connaissance parfaite de la géométrie du problème mais aussi des conditions aux limites, ce qui n'est pas toujours le cas.
- ❖ Une fois le potentiel connu en chaque nœud, il faut procéder à un autre calcul numérique pour déterminer le champ électrique en tout point. Ce qui peut engendrer d'autres erreurs.
- ❖ Il a été dit que la M.E.F était une méthode flexible car elle s'adapte facilement aux différentes géométries, mais ce n'est pas le cas du maillage car celui-ci doit être entièrement refait si une modification sur une partie de la géométrie du problème considéré intervient.

III.3.3- La Méthode des Eléments Finis de Frontière (M.E.F.F) :

On utilise cette méthode dans les problèmes de calcul de potentiel et de champ électrique. Donc, on trouve deux formulations différentes pour la M.E.F.F [29] : la formulation indirecte et la formulation directe. Pour la formulation directe, on évalue directement le potentiel et le champ électrique normal alors que pour la formulation indirecte,

la distribution de charges est évaluée dans un premier temps et en déduit ensuite le potentiel et le champ électrique.

III.3.3.1 - Formulation indirecte de la M.E.F.F :

Une expression par formulation indirecte peut être obtenue si les conditions aux frontières peuvent s'exprimer sous forme de potentiel de simple couche en tout point. Pour la formulation indirecte, on a l'équation suivante :

$$\phi = \int_s \frac{\rho_s}{\epsilon_0} G dS \quad (\text{III.37})$$

Où : ρ_s est la distribution de charges surfaciques et G la fonction de Green.

En prenant la dérivée de l'équation (III.37) suivant la normale n , on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \int_s \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (\text{III.38})$$

Soit un point situé sur une surface diélectrique – diélectrique Γ_{ij} où la normale n est dirigée du diélectrique (i) vers le diélectrique (j). En considérant un point appartenant au diélectrique (j) et approchant la surface Γ_{ij} le long de la normale n , on obtient :

$$\epsilon_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j = -\frac{1}{2} \rho_s + \int_{\Gamma} \rho_s \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{III.39})$$

En répétant le procédé pour un point appartenant au diélectrique (i), on obtient :

$$\epsilon_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_i = +\frac{1}{2} \rho_s + \int_{\Gamma} \rho_s \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{III.40})$$

Le terme $\pm \frac{1}{2} \rho_s$ de (III.39) et (III.40) est dû à la discontinuité de la composante normale du champ électrique $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ à travers l'interface Γ_{ij} à cause de la présence des charges de polarisation.

En multipliant (III.39) par ϵ_j et (III.40) par ϵ_i (ϵ_j et ϵ_i : permittivités respectives), en les additionnant, on obtient donc :

$$\rho_s = -2 \left(\frac{\epsilon_i + \epsilon_j}{\epsilon_i - \epsilon_j} \right) \int_{\Gamma} \rho_s \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{III.41})$$

L'équation (III.41) est valide pour tous les points situés sur l'interface diélectrique – diélectrique.

Donc, pour les points situés sur les électrodes, on utilise l'équation suivante :

$$V_i = \int_{\Gamma} \frac{\rho_s}{\epsilon_0} G d\Gamma \quad (\text{III.42})$$

Les équations (III.41) et (III.42) permettent de calculer la densité de charges équivalentes à la surface des conducteurs et du diélectrique.

En fin, on peut dire que la résolution des équations intégrales (formulation directe ou indirecte) se fait par la méthode des éléments finis sur la frontière du domaine étudié. La frontière est discrétisée en éléments géométriques par une méthode numérique, en général par quadrature de Gauss.

III.3.3.2- Avantages de la méthode indirecte :

- ❖ La transformation des équations aux dérivées partielles en équations intégrales réduit la dimension du problème en un ou en deux si le problème présente une symétrie de révolution.
- ❖ La discrétisation du milieu infini ne cause plus de problème puisque tout est ramené sur la frontière du milieu étudié.
- ❖ Les inconnues du problème (c'est à dire le potentiel et sa dérivée normale) peuvent être évaluées soit sur la frontière du domaine, soit à l'intérieur de celui-ci, et de plus, elles sont calculées avec le même niveau d'erreur. Cette méthode donne plus grande précision par rapport aux autres méthodes.
- ❖ La modification au niveau de la géométrie intervient, il n'est pas nécessaire de reconsidérer tout le maillage comme pour la M.E.F. Il suffit de modifier les paramètres de la portion de la frontière considérée.

III.3.3.3- Inconvénients de la méthode directe :

- ❖ La méthode indirecte ne permet pas de calculer directement le potentiel et le champ électrique. Cela nécessite donc des calculs supplémentaires qui peuvent s'avérer coûteux pour des problèmes de grandes tailles.
- ❖ L'extension de la M.E.F.F aux problèmes non linéaires est difficile car dans ces conditions, on doit discrétiser la totalité du domaine où se produit la non linéarité matérielle ou géométrique, perdant ainsi l'avantage de la M.E.F.F d'une discrétisation de la frontière uniquement.

III.3.3.4- Formulation directe de la M.E.F.F :

Résoudre l'équation (III.15) revient à inverser l'opérateur Laplacien. Cette inversion se fait en utilisant la méthode de l'identité de Green. On transforme l'équation de Laplace en une équation intégrale qui lie la valeur du potentiel $\phi(P)$ en un point P à l'intérieur du domaine Ω , à la valeur du potentiel ϕ et sa dérivée normale $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ sur l'ensemble des points de sa frontière Γ .

Le potentiel $\phi^*(P)$ créé en un point p appartenant à un domaine par Ω une charge unitaire placé en un point M est solution de l'équation :

$$\nabla^2 \phi^*(P) = \delta(M, P) \quad (\text{III.43})$$

Avec $\delta(M, P)$ défini comme suit :

$$\delta(M, P) = 1 \text{ si } P = M \text{ et } \delta(M, P) = 0 \text{ si } P \neq M.$$

C'est la solution de l'équation (III.42) qu'on appelle fonction de Green $G (=G(M, P))$ de l'équation de Laplace. Sa valeur est égale à $G = \frac{1}{4\Pi R}$ à en 3D et $G = \frac{1}{2\Pi} \ln\left(\frac{1}{R'}\right)$ en 2D avec R' la distance entre les points M et P ($R' = |PM|$).

III.3.3.5- Avantages et inconvénients de la formulation directe :

La formulation directe possède les mêmes avantages et inconvénients que la formulation indirecte mais elle permet en plus, ce qui en fait sa grande force, de travailler directement avec les grandeurs physiques cherchées c'est à dire le potentiel et sa dérivée normale. De plus, elle offre la possibilité de travailler en sous régions ce qui peut être intéressant lorsque l'on doit traiter des problèmes de grande taille et de forme allongée.

III.4- La Méthode de Simulation de Charges (M.S.C) :

Dans la M.S.C, le champ électrique est simulé par un champ électrique engendré par un nombre de charges discrètes, qui sont placées en dehors de la région dans laquelle le champ électrique doit être calculé. Les valeurs affectées aux charges discrètes sont déterminées par la satisfaction des conditions aux limites à des points de contour bien déterminés.

Donc, le principe de base de cette méthode est simple. Il y a plusieurs charges discrètes de formes différentes sont présentés dans une région, le potentiel électrostatique, à n'importe quel point C appartenant à cette région, peut être déterminé par la sommation des potentiel résultant des charges ponctuelles tant que le point C n'est pas situé sur aucune charge ponctuelle. L'équation prend la forme suivante :

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} Q_j \quad (\text{III.44})$$

Où : P_{ij} : représente le coefficient de potentiel, dépendant du type de charges utilisées et qui peut être évalué analytiquement par résolution de l'équation de Laplace ou de Poisson ;
 Q_j : représente la charge ponctuelle au point j .

Dans, la M.S.C, les charges de simulation sont placées à l'extérieur de l'espace dans lequel on veut connaître le champ électrique. Si le point C est situé sur la surface d'un conducteur, alors ϕ_i en ce point sera égal au potentiel du conducteur. Lorsque cette procédure est appliquée à m point situés sur le contour de l'espace considéré, nous obtenons un système de m équations linéaires pour n charges connues, c'est à dire :

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{m1} & \cdot & \cdot & P_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ Q_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \cdot \\ \phi_m \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

Le choix du type de charges dans l'utilisation de la M.S.C est un facteur très important. De manière générale, les types de charges les plus couramment utilisés sont les charges ponctuelles, les lignes chargées de longueur infinie ou semi – finie et les charges en anneau. Ces nouveaux types de charges de simulation incluent des cylindres elliptiques, des charges sphéroïdales, des disques chargés, des charges de volume, etc. Dans le but d'utiliser les différents types de charge de simulation, il est essentiel de déterminer les coefficients de champ et de potentiel associés à chaque type de charges. Donc, pour des configurations de charges plus compliquées, les différents coefficients doivent être déterminés numériquement.

Il est possible d'utiliser une configuration de charges complexes afin de réduire le nombre de charges utilisées pour un problème donné et ainsi diminuer le temps de calcul.

L'utilisation de charges complexes peut être recommandée pour :

- Calculer le champ électrique dans des problèmes à plusieurs diélectriques ;
- Réduire le nombre de charges de simulation et la taille du système d'équations ;
- Modéliser des problèmes à trois dimensions présentant des symétries ou non;
- Modéliser des systèmes avec des électrodes fines.

III.4.1- Avantages de la M.S.C :

- ❖ La M.S.C permet de calculer le champ électrique et le potentiel pour des problèmes à plusieurs diélectriques présentant des formes géométriques complexes (comme par exemple les isolateurs haute tension) ;
- ❖ Elle n'exige aucune discrétisation du domaine d'étude, c'est à dire, on travaille au voisinage de la frontière de cette dernière.
- ❖ Le grand intérêt porté à cette méthode pour les problèmes de calcul de champ électrique a permis à celle-ci d'acquiescer une grande notoriété, ce qui lui permet d'être soumise à diverses améliorations pour la rendre encore plus efficace et précise.

III.4.2- Inconvénients de la M.S.C :

- ❖ La M.S.C est une méthode numérique d'expression simple, mais leur application est très difficile. La précision requise dépend de nombreux paramètres (type de charges, leur localisation, ...etc.). Il est donc nécessaire d'effectuer un nombre assez important d'essais par itération ou d'utiliser des procédés d'optimisation afin d'atteindre la précision désirée. Ceci agit par conséquent sur le temps de calcul qui devient de plus en plus long en fonction de la complexité du problème à traiter.
- ❖ Lorsque le problème à étudier présente plus de deux diélectriques, l'utilisation de M.S.C devient alors complexe et la programmation d'un tel modèle s'en trouve détériorée.

III.5- Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présentés les méthodes numériques : la méthode de différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des éléments finis de frontière, et la méthode de simulation des charges. Dans les deux premiers, la répartition du potentiel se calcule directement. Cependant, elles présentent l'inconvénient d'utiliser un nombre d'inconnues élevé lorsqu'il s'agit de travailler sur des configurations de formes complexes en deux ou trois dimensions pour lesquelles, les approximations sont faites dans tout l'espace et cela constitue un handicap pour la résolution de problèmes non bornés.

Mais la méthode de simulation de charges pose un problème de localisation des charges fictives, par contre, elle est très bien adaptée pour la modélisation de configurations complexes comme des isolateurs.

En fin, la méthode des éléments finis de frontière présente des avantages importants par rapport aux précédentes. Donc, la recherche de la solution étant ramenée sur les frontières, le nombre d'inconnues est considérablement réduit et aussi cette méthode est très pratique pour l'étude des problèmes tridimensionnels.

IV.1- Introduction :

Depuis de nombreuses années, les techniques de simulation connaissent un développement considérable. Les mises au point expérimentales, longues et coûteuses et aussi sont progressivement remplacées par des études dans lesquelles les outils de simulation prennent une place de plus en plus importante. Les impératifs industriels de rapidité et de limitation des coûts sont pour l'essentiel responsables de cette évaluation.

La géométrie fil – cylindre coaxiale présente un cas très intéressant pour l'étude de la décharge couronne. Elle est l'une des configurations d'électrodes offrant la solution semi – analytique des équations du champ gouvernant la décharge [31]. Le modèle numérique que nous allons développer en détail pour déterminer le comportement des grandeurs électriques telles que le champ électrique, la densité de charge d'espace,...dans l'espace inter – électrode. Rappelons que la méthode de résolution choisie est celle des différences finies du deuxième ordre.

En régime stationnaire, la formation des ions par la décharge couronne est fonction du champ électrostatique. La solution du problème appliqué l'équation de Poisson satisfaite par une fonction potentielle qui décrit complètement les champs statiques, en incluant l'effet d'une distribution de charges électriques, elles-mêmes sources de champs. Cette dernière n'est pas connue au préalable et est déterminée par le développement de l'équation de continuité du courant. Les méthodes de résolution de l'équation de Poisson aux dérivées partielles peuvent être analytiques ou numériques. Cependant pour des géométries d'électrodes ne présentant pas de symétries, la résolution du problème d'une manière analytique est loin d'être acquise, bien que les travaux expérimentaux faits jusqu'à présent ont conduit à plusieurs expressions empiriques. Les différentes méthodes numériques mises en œuvre incluent toutes des techniques mathématiques à savoir : les différences finies, les éléments finis, les volumes finis, simulation de charge, les éléments frontière...etc, généralement combinés avec la méthode des caractéristiques.

Dans ce chapitre, nous proposons de présenter d'abord les outils nécessaires permettant la spécification du problème, on présentera par la suite d'une manière plus ou moins détaillée les différentes étapes de résolution numérique de l'équation de Poisson et de continuité de courant pour une géométrie fil-cylindre coaxiaux [31].

IV.2- Description physique :

IV.2.1- Description du problème :

La figure (IV.1) montre la géométrie de notre problème à 2D. La ligne discontinue délimite le domaine de calcul à considérer. En effet, la configuration fil-cylindre coaxiale présente une parfaite symétrie de révolution, de plus les électrodes sont considérées de longueur infinie le long du fil. Cela a permis donc de réduire le domaine de calcul au quart du cercle représentant la section verticale de la géométrie initiale.

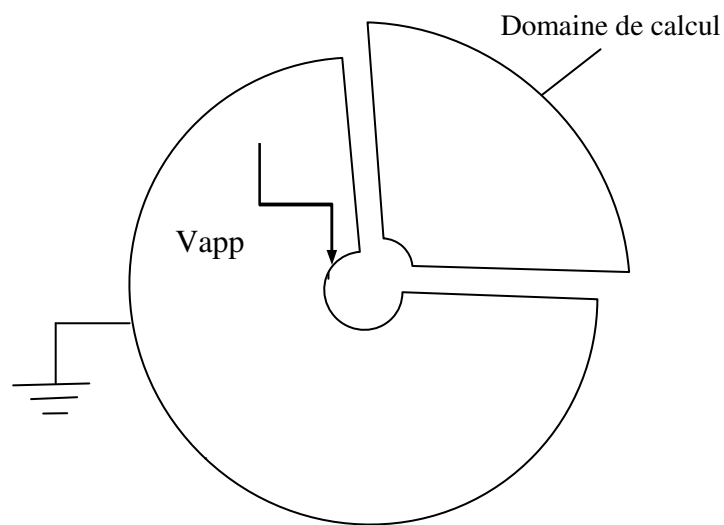


Figure IV.1: Géométrie du problème

IV.2.2- Domaine de discrétisation (Maillage) :

Le maillage représenté sur la figure (IV.2) est le maillage orthogonal que nous choisissons pour discrétiser notre domaine de calcul. Il est généré à partir des équipotentielles et des lignes de champ. Dans ce cas, ces dernières sont des lignes radiales reliant les deux cylindres (interne et externe) et les équipotentielles sont simplement des cercles concentriques.

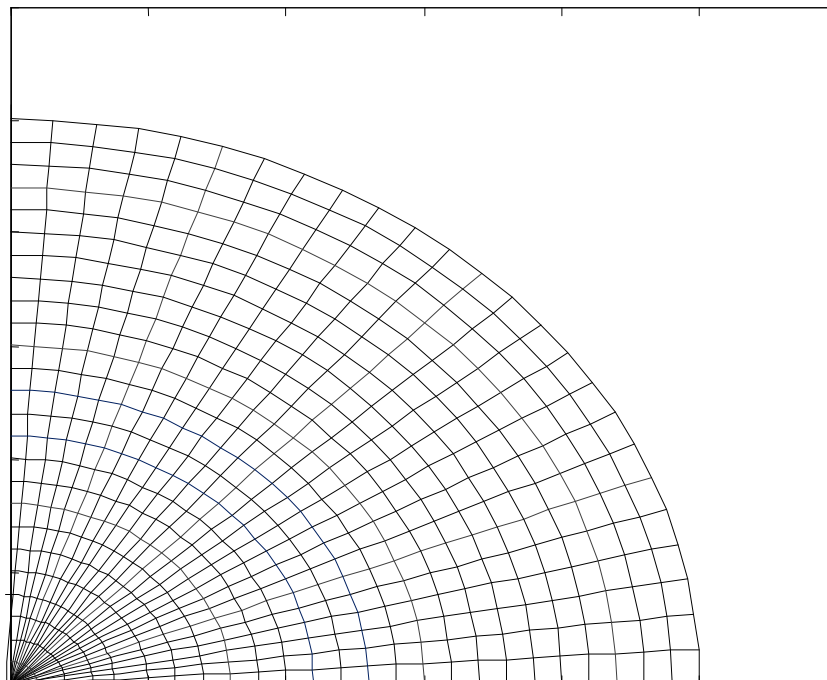


Figure IV.2 : Domaine de discrétisation

IV.2.3- Modèle mathématique :

Les équations de base gouvernant le phénomène de la décharge couronne se ramènent aux équations de Maxwell de l'électrostatique auxquelles s'ajoutent les équations du milieu considéré (l'air dans notre cas). Ces équations sont :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \pm \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{IV-1})$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{IV-2})$$

$$\vec{J} = \pm \rho \cdot \mu \cdot \vec{E} \quad (\text{IV-3})$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (\text{IV-4})$$

$$\nabla^2 \phi = \mp \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{IV-5})$$

Où :

- \vec{E} est le vecteur champ électrique (V/m). Le signe dans l'équation (IV-1) est positif si l'électrode active est soumise à une tension de polarité positive et négative dans le cas contraire.
- ϕ est le potentiel électrique (V).
- ρ est la densité de la charge d'espace (C/m^3), elle est toujours positive. Le signe dans (IV-5) est négatif si l'électrode active est soumise à une tension de polarité négative et positive dans le cas contraire.
- \vec{J} est le vecteur de densité de courant (A/m^2). Le signe dans (IV-3) est positif si la tension appliquée est de polarité positive et négatif dans le cas contraire.
- μ est la mobilité des ions positifs ou négatifs selon la polarité de l'électrode active (m^2/Vs).
- ϵ_0 est la permittivité de l'air, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ (F/m).

L'équation (IV-5) est l'équation de Poisson, elle est obtenue en remplaçant l'expression du champ donnée par (IV-4) dans (IV-1). L'équation (IV-3) est l'équation de la densité de courant. L'équation (IV-2) est l'équation de continuité du courant. En réalité, il est extrêmement difficile de trouver une solution exacte de ces équations à cause de leur nature non linéaire et c'est ainsi que des approches simplificatrices basées sur des modèles hypothétiques ont été développées [30].

Lors de l'apparition de l'effet couronne, l'espace inter-électrode se divise en deux régions: une zone d'ionisation à champ fort où la charge d'espace est considérée nulle ($\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$) et une zone de dérive des ions positifs à champ faible. Ces deux régions sont délimitées par une frontière circulaire de rayon R_c telle que:

$$R_c = R_o + L_c \quad (IV-6)$$

Où : L_c est la longueur critique de l'avalanche et R_o le rayon du fil conducteur.

La distribution du champ électrique est laplacienne dans la zone d'ionisation. Par contre, dans la zone de dérive, elle est gouvernée par l'équation de poisson. Avec la quelle est associée l'équation de continuité du courant. Ces deux dernières équations conduisent à l'équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre trois suivante:

$$\nabla \cdot (\nabla^2 \overline{\phi \nabla \Gamma \phi}) = 0 \quad (IV-7)$$

Mais en pratique, il est souvent préférable la résolution simultanée de l'équation ci-dessus.

L'algorithme que nous allons décrire dans ce chapitre est basé principalement sur le modèle physico-mathématique de Hartmann [31] du champ seuil de l'effet couronne. Celui-ci nous a permis de considérer la zone d'ionisation qui a été toujours négligée dans les modèles antérieurs en raison de la petitesse de son épaisseur devant la distance inter-électrode. En outre, l'hypothèse de kaptzov, très largement utilisée dans la littérature, a été écartée pour les raisons de convergence de la solution. Les hypothèses que nous avons adoptées sont les suivantes:

- ❖ La zone de dérive est complètement remplie d'une charge d'espace mono - polaire de même signe que la tension appliquée.
- ❖ La mobilité moyenne est supposée constante et indépendante du champ électrique.
- ❖ La diffusion ionique est négligée devant le mouvement d'entraînement des charges dû au champ électrique.

IV.2.4- Epaisseur de la zone d'ionisation :

Toute la difficulté du problème réside dans la détermination précise de l'épaisseur de la zone d'ionisation L_c . Son importance apparaît dans le fait que le champ critique du minimum d'ionisation E_c (qui est caractéristique d'un gaz donné) est utilisé comme condition aux limites cycliques pour la charge d'espace sur la frontière R_c . Au seuil de l'apparition de la décharge, R_c est donnée par la formule suivante :

$$R_{cs} = \frac{V_s}{E_c \cdot \log\left(\frac{R}{R_o}\right)} \quad (\text{IV-8})$$

Pour des tensions appliquées (V_{app}) supérieurs à la tension seuil, R_c est donnée par l'équation suivante [31] :

$$R_c = \frac{V_{app}}{2 \cdot E_c \cdot \log\left(\frac{R}{R_o}\right)} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{I}{V_{app}^2} \frac{R^2 \log\left(\frac{R}{R_o}\right)}{2 \cdot \Pi \sigma_0 \cdot \mu}} \right) \quad (\text{IV-9})$$

Où : I est le courant de la décharge.

IV.2.5- Condition aux limites :

❖ Conditions aux limites

On distingue essentiellement deux types de conditions aux limites :

- Les conditions de Dirichlet, où ϕ est constant sur trois limites à savoir, la surface du conducteur portée au potentiel appliqué, le cylindre porté au potentiel nul et la frontière de deux zones portée au potentiel obtenu lors du tracé du premier maillage électrostatique. Comme ϕ est connu, les équations correspondants à ces nœuds doivent être éliminées et les seconds membres modifiés en conséquence pour les nœuds qui leurs sont reliés.
- Les conditions de Neumann apparaissent sur l'axe de symétrie. Elles sont implicitement réalisées par la fonctionnelle.

Pour résoudre les équations (III-14) et (III-14) simultanément, des conditions aux limites propres doivent être spécifiées pour ϕ et pour ρ . Cependant, deux conditions de type Dirichlet sont définies sur les surfaces du fil et du cylindre, respectivement:

$$\phi_{\text{fil}} = V_{\text{app}} \quad (\text{a})$$

$$\phi_{\text{cylindre}} = 0 \quad (\text{b}) \quad (\text{IV-10})$$

Une condition de Neumann homogène est définie sur les frontières de symétrie.

$$\frac{\phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{IV-11})$$

Pour la charge d'espace, nous avons besoin de sa valeur à la surface de la frontière séparant les zones d'ionisations et de dérive. Comme cette valeur n'est pas connue, une condition aux limites cyclique est définie:

La valeur de la densité de la charge d'espace sur la frontière R_c est itérée jusqu'à ce que la valeur du champ électrique calculée sur cette frontière soit égale à la valeur du champ critique du minimum d'ionisation E_c [31].

IV.3- Modèles et approximations :

Plusieurs hypothèses simplificatrices ont été introduites pour la résolution du problème de la décharge couronne positive.

IV.3.1- Approximation de Deutsch :

L'analyse approximative de Deutsch date de 1933 [32]. Elle inclue trois hypothèses simplificatrices :

- La présence de la charge d'espace modifie l'amplitude du champ électrique Laplacien et non sa direction ;
- La densité de la charge d'espace est constante dans l'espace inter électrodes ;
- La charge d'espace n'affecte pas le champ électrique au plan.

IV.3.2- Conditions aux limites de Townsend et Kaptzov :

Comme condition aux limites, Townsend supposa que le champ électrique sur l'électrode active (le fil) demeure constant et est partout égal à la valeur seuil. Kaptzov lui, postula que la distribution du champ à la surface du conducteur couronné reste constante et est égale à sa valeur seuil même si la tension appliquée augmente [33].

IV.3.3- Modèles de Popkov, Sarma/Janischewskyj et d'autres :

En 1949, Popkov élaborait une relation approximative courant-tension pour une géométrie fil-plan [32], dans laquelle la première hypothèse de Deutsch a été retenue et les deux autres ont été écartées. Plus tard, Sarma et Janischewskyj [33] ont proposé une méthode qui utilise cinq hypothèses. Les plus cruciales sont la première approximation de Deutsch et l'hypothèse de Kaptzov. La méthode utilise le modèle numérique, et à travers un processus itératif de résolution du champ électrique et de la densité du courant, ils ont obtenu les caractéristiques courant-tension qui s'accordent bien avec les données expérimentales. De là plus d'efforts ont été investis sur le calcul numérique et qui depuis ont pris le large des publications. Les travaux les plus marquants sont :

- Ceux de Janischewskyj et Gela [34] qui ont démontré en 1979, l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la résolution du champ électrique dans les lignes de transport d'énergie à courant continu. La méthode de résolution a été appliquée pour une géométrie d'électrodes cylindres coaxiaux, résolu auparavant par Townsend en 1914 [35].

- L'analyse de Takuma, Ikeda et Kawamoto de 1981 [36]. Elle est basée sur la méthode des éléments finis et introduit les valeurs du courant couronne par unité de longueur. Dans leur publication de 1987 [37], les mêmes auteurs ont utilisé la forme intégrale de l'équation de continuité du courant plus celle de Poisson pour calculer la distribution du potentiel et ils ont retenu l'hypothèse de la constance de la densité de la charge d'espace autour de l'électrode active.
- Abdel –Salam, Fargually et Abdel- Sattar [38] ont utilisé en 1983 la méthode des éléments finis sans l'introduction des données empiriques.
- Davis et Hoburg [28] ont proposé en 1986 une méthode itérative basée sur la méthode des caractéristiques pour le calcul de la densité de la charge d'espace et de la méthode des éléments finis pour le calcul de la distribution du champ électrique.
- Adamiak [39] a proposé en 1994 la méthode des éléments finis dans laquelle le maillage est généré d'une manière adaptative basée sur les erreurs commises sur le potentiel et la densité de charge.
- Abdel-Salam et Al-Hamouz [40] sont les premiers à proposer en 1993 et 1995 une méthode itérative pour la résolution des équations du milieu ionisé en incluant la diffusion. En 1998 Al-Hamouz [41], a supposé la non constance de la mobilité ionique et a obtenu des résultats très satisfaisants via les résultats expérimentaux.

Le modèle que nous avons utilisé pour la résolution numérique est celui utilisé par Abdel-Salam et Al-Hamouz [40] tout en tenant compte de la longueur de l'avalanche négligée par ces auteurs et prise en considération pour la première fois par Yala [31]. En outre une modification est apportée, dans laquelle nous avons introduit le potentiel correspondant au champ critique du minimum d'ionisation comme troisième condition aux limites dans la formulation en éléments finis. Toutes les étapes de résolution seront présentées en détails dans le paragraphe suivant.

IV.4- Différentes étapes de résolution numérique :

La configuration d'électrodes à simuler est la configuration fil-cylindre. Le fil est de rayon R_0 , distant d'une hauteur H par rapport au cylindre. L'électrode active étant soumise à une tension de polarité positive. Il s'avère que le traitement peut se faire comme dans le cas de la polarité négative. La différence entre les deux cas réside dans les grandeurs physiques telles que la valeur de la tension seuil, la longueur d'avalanche et la mobilité des ions.

L'organigramme de résolution du problème considéré est donné par la figure (IV.2). Les différentes étapes suivies pour la résolution numérique sont détaillées dans ce qui suit.

IV.4.1- Etape 1- Génération du maillage électrostatique

Le conducteur est considéré de longueur infinie. Ainsi, le problème se ramène à une configuration bidimensionnelle dans le système (X, Y). A cause de la double symétrie par rapport à l'axe des X et des Y, un quart des lignes de champ est tracée en absence de la charge d'espace et cela en utilisant la méthode des images électriques décrite comme suit :

Sous tension négative V_{app} , appliquée à l'électrode active (le fil), le conducteur est simulé par

une charge $-q$, telle que : $q = -\frac{2\pi\epsilon_0 V_{app}}{\ln((H+b)/R_0)}$ et son image $+q$ (figure IV-3).

Avec $b = \sqrt{H^2 - R_0^2}$ est la hauteur de q par rapport au cylindre.

Au point 1 de coordonnées (x_1, y_1) placé soit sur le cylindre, on peut évaluer le potentiel ϕ , les composantes E_{x1} , E_{y1} du champ électrique selon les axes X et Y et le champ résultant E_{r1} comme suit :

$$\phi = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{IV-12})$$

$$E_{x1} = -\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{x_1}{R_1^2} - \frac{x_1}{R_2^2} \right) \right) \quad (\text{IV-13})$$

$$E_{y1} = -\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{y_1 - y_q}{R_1^2} - \frac{y_1 + y_q}{R_2^2} \right) \right) \quad (\text{IV-14})$$

$$E_{r1} = \sqrt{E_{x1}^2 + E_{y1}^2} \quad (\text{IV-15})$$

$$\text{Avec : } R_1^2 = x_1^2 + (y_q - y_1)^2 \quad (\text{IV-16})$$

$$R_2^2 = x_1^2 + (y_q + y_1)^2 \quad (\text{IV-17})$$

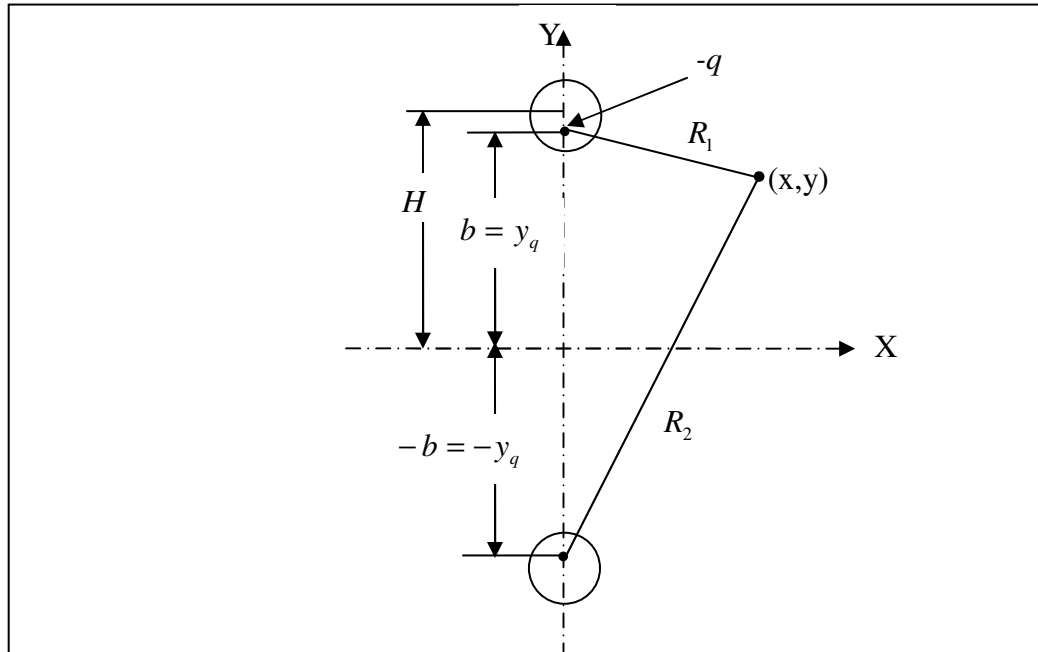


Figure IV.3 : Représentation des charges simulant la configuration fil - cylindre.

Les coordonnées (x_2, y_2) au point 2 à une distance additionnelle ΔL du point 1 le long de la direction de E_{r1} sont exprimées par :

$$x_2 = x_1 + \frac{E_{x1}}{E_{r1}} \cdot \Delta L \quad (\text{IV-18})$$

$$y_2 = y_1 + \frac{E_{y1}}{E_{r1}} \cdot \Delta L \quad (\text{IV-19})$$

Au point 2, la même procédure est appliquée pour atteindre le point 3, elle continue jusqu'à ce qu'une ligne de champ complète soit tracée (figure IV-4). En polarité positive de l'électrode la même méthodologie de traçage surgit mais les lignes de champ dans ce cas, dérivent du conducteur pour atteindre le cylindre mis à la terre (la frontière). Une fois les lignes du champ tracées, les coordonnées des points avec les valeurs du potentiel seront enregistrées. En connectant les points de même potentiel sur toutes les lignes du champ, on obtient des contours équipotentiels. Les points d'intersection des lignes du champ et des contours équipotentiels représentent les nœuds du maillage (figure IV-5). Les valeurs du potentiel et du champ électriques aux nœuds du maillage sont arrangées dans les matrices ϕ et E notées $\phi^{(1)}$ et $E^{(1)}$ pour leur première estimation.

IV.4.1.1- Méthode de résolution :

• **Procédure itérative :**

Dans l'approche proposée, la détermination du champ électrique en présence de la charge d'espace est traitée comme un problème aux valeurs limites décrites par l'équation (III-14) et qui doit satisfaire l'équation de continuité du courant, équation (III-15). La procédure suivie pour la résolution simultanée de ces équations est représentée par l'organigramme donné à la figure (IV-4). Il comporte les étapes suivantes:

- 1-Générer le maillage orthogonal.
- 2- Résoudre initialement l'équation de Laplace pour le potentiel par la MDF.
- 3-Supposer un estimé initial ρ_0 de la densité de la charge d'espace sur la frontière Rc
- 4-Calculer le champ électrique dans tout l'espace inter-électrode.
- 5-Calculer la distribution de la densité de la charge d'espace.
- 6-Résoudre l'équation de poisson via la MDF en utilisant les valeurs de la charge d'espace ainsi calculées.
- 7-Comparer les solutions du potentiel obtenues par deux itérations successives, n et $n + 1$, et déterminer l'erreur du potentiel nodal, E_{pot} , relative à leur valeur moyenne:

$$E_{pot} = \frac{|\phi^{(n)} - \phi^{(n-1)}|}{\phi_{moy}} \quad (IV- 20)$$

Avec:

$$\phi_{moy} = \frac{(\phi^{(n)} + \phi^{(n+1)})}{2}$$

- 8- répéter les étapes (4)-(6) jusqu'à ce que le maximum de E_{pot} soit inférieur à une valeur préalablement définie, δ_1 .
- 9- calculer le champ électrique à la frontière Rc .
Si cette valeur est suffisamment proche de celle du champ critique du minimum D'ionisation alors les calculs sont arrêtés, sinon mettre une correction pour ρ_0 et Revenir à l'étape (4).
- 10- Répéter les étapes (4)-(9) jusqu'à ce que l'erreur sur la frontière Rc du champ électrique soit inférieure à une valeur prés – spécifiée δ_2 . [31]

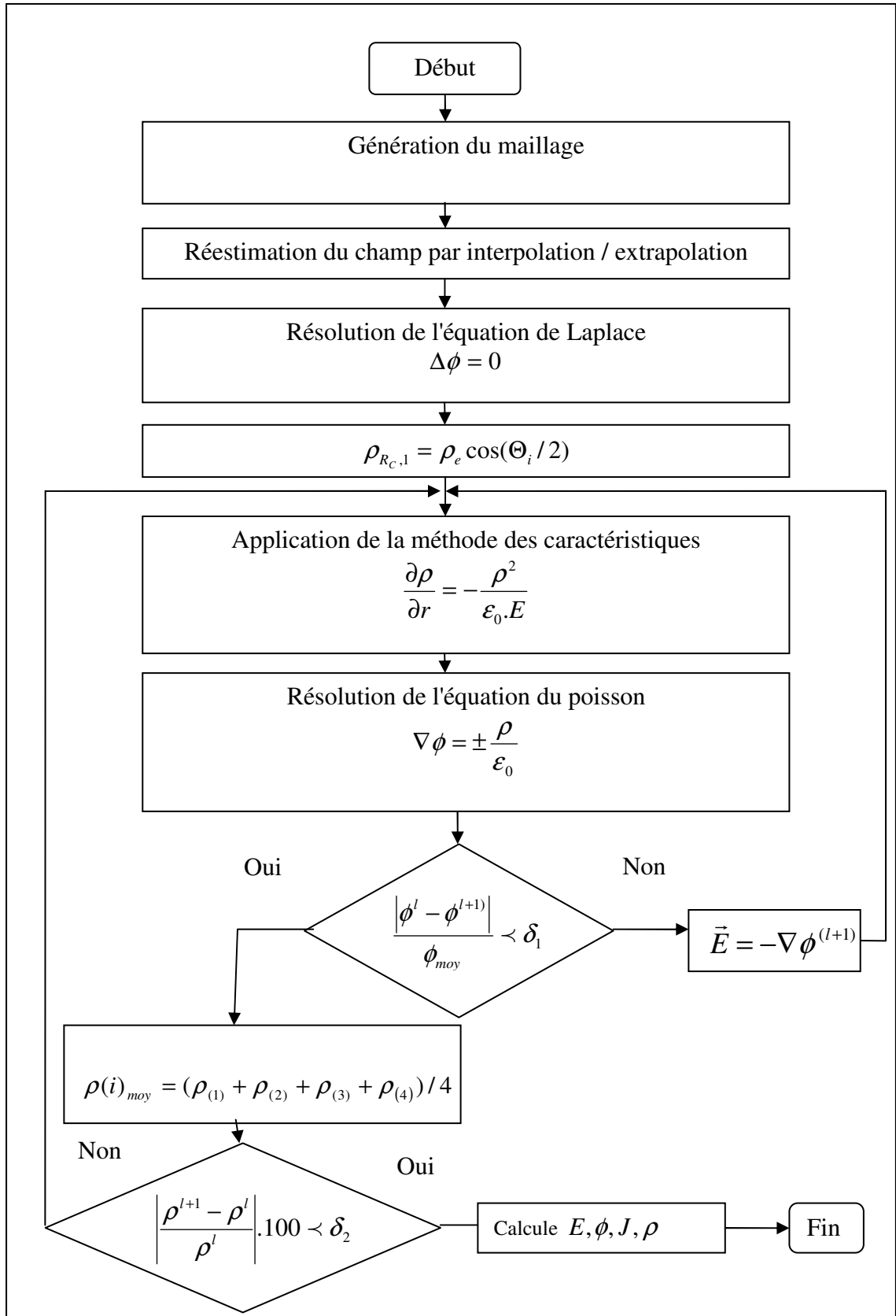


Figure IV.4 : Organigramme de la configuration fil – cylindre coaxiaux.

IV.4.2-Etape 2 :

Cette étape est en quelque sorte une étape d'évaluation d'erreurs. En effet, les résultats obtenus de $\phi^{(1)}$ et $E^{(1)}$ dans l'étape 1 seront comparés à ceux que l'on obtiendra en utilisant la méthode des différences finies (MDF). Il s'avère que pour commettre moins d'erreurs, on est amené à réestimer le champ électrique $E^{(1)}$ aux nœuds du maillage par la méthode d'interpolation /extrapolation et ce résultat sera utilisé pour estimer la densité de la charge d'espace. La méthode d'interpolation /extrapolation sera aussi utilisée pour estimer le champ à partir des valeurs du potentiel déterminées par la MDF. Dans cette étape on présentera ces méthodes utilisées. Le traité de la MDF se fera pour la résolution de l'équation de Poisson et l'équation de Laplace n'est qu'un cas simplifié (absence de la charge d'espace $\rho = 0$).

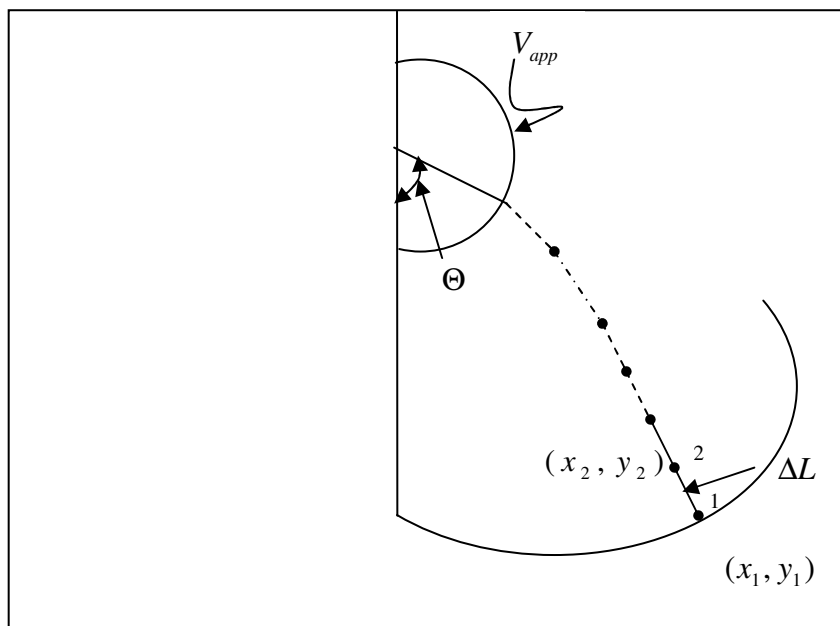


Figure IV.5 : Tracé d'une ligne de champ pour la configuration fil - cylindre.

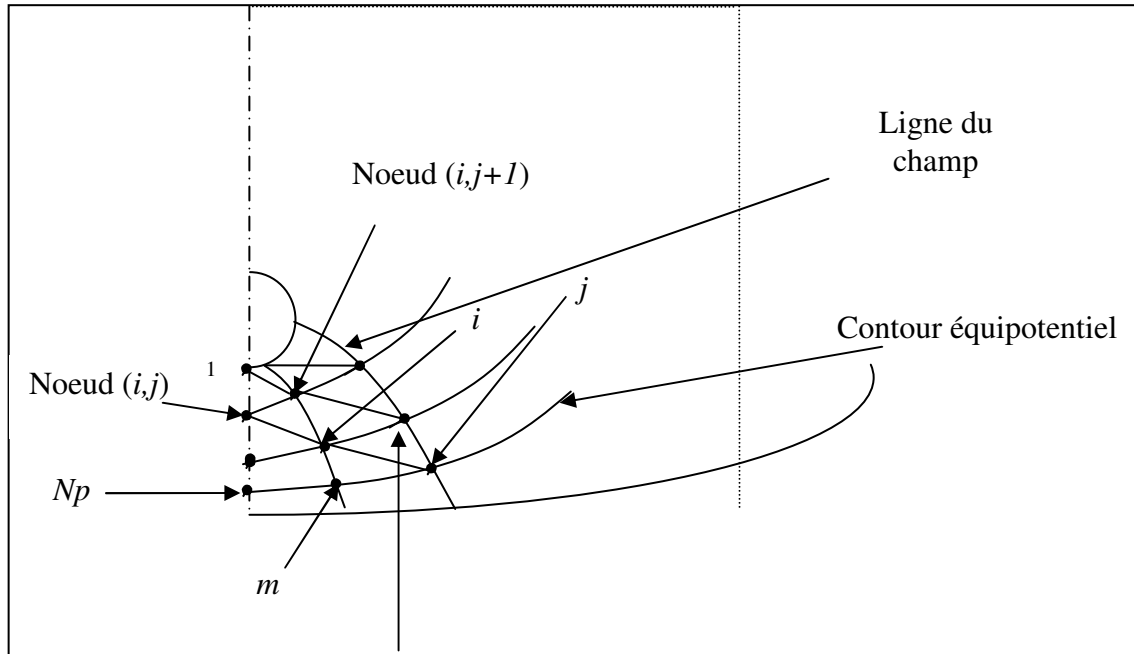


Figure IV.6: Représentation d'une portion de lignes du champ et de contours équipotentiels.

IV.4.2.1-Méthode d'interpolation / extrapolation:

Pour pouvoir calculer le champ au nœud (i, j) dont i et j sont respectivement le $i^{\text{ème}}$ contour équipotentiels et la $j^{\text{ème}}$ ligne du champ, un polynôme d'interpolation $f(r)$ d'ordre deux du potentiel calculé aux nœuds $(i-1, j)$, (i, j) , $(i+1, j)$ a été formulé. La variable r est la longueur mesurée le long de la ligne du champ, elle commence de la surface du conducteur et se termine au nœud d'interpolation. L'intensité du champ électrique au nœud désiré est obtenue par dérivation du polynôme d'interpolation selon r . En ce qui est des champs aux nœuds à la surface du conducteur, ils sont déterminés par extrapolation du polynôme d'interpolation des potentiels aux nœuds respectivement $(1, j)$, $(2, j)$, $(3, j)$, et $(N_{bmpo}+1, j)$, (N_{bmpo}, j) , $(N_{bmpo}-1, j)$ avec $N_{bmpo}+1$ est le nombre total de contours équipotentiels.

IV.4.2.1-Méthode des différences finies (MDF):

La méthode rappelle celle que nous utilisons pour les équations différentielles. Il s'agit, à partir du développement de Taylor de discrétiser les dérivées de la fonction par une combinaison de certaines de ses valeurs.

Selon l'utilisation des différences à gauche, à droite ou centrée, on obtient différents schémas de discrétisation aux différences finies. Tous ne sont pas équivalents, et une étude fine est nécessaire pour choisir le schéma représentant le meilleur compromis.

La générale de la méthode va nous permettre d'aborder les notions de consistance, de stabilité et de convergence.

- 1- **Consistance:** Une méthode numérique est consistante si l'erreur de discrétisation de l'équation tend vers zéros (0) lorsque le pas de discrétisation tend vers "0".
- 2- **Stabilité:** une fois le schéma discret choisi, il va être nécessaire de la résoudre de Processus de résolution, à la vue des équations sera la plupart d temps itératif. On calculera les valeurs de "U" de proche en proche: une valeur donnée de "U" . Sera donc calculée en utilisant le résultat du calcul d'autres valeurs de "U". Des erreurs d'arrondi étant inévitables sur machine, la méthode sera stable si ces erreurs ne s'amplifient pas (trop) au cours du calcul.
- 3- **convergence:** après s'être assuré que le schéma discret tend vers l'équation, que ce schéma conduit à un calcul stable, on dispose d'une solution. Le schéma utilisé est dit convergent si sa solution ainsi obtenue tend vers la solution de l'équation de départ, lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéros "0".

Donc, la consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes pour assurer la convergence [31].

IV.4.3-Etape 3: Résolution de l'équation de Poisson :

Cette étape constitue l'étape de résolution de l'équation de Poisson par la MEF dont la procédure d'exécution est donnée ci-dessus. Cependant, nous avons introduit une troisième condition aux limites du potentiel correspondant au champ critique du minimum d'ionisation dans la formulation en éléments finis. Cette condition est insérée sur la frontière distante de L_C par rapport à la surface du conducteur.

Résoudre l'équation de Poisson prétend la connaissance de la densité de la charge d'espace qui, malheureusement n'est pas connue au préalable et son estimation sur la frontière L_C est donnée par :

$$\rho_{R_c,1} = \rho_e \cos(\Theta_i / 2) \quad i=2, 3, \dots, n \quad (\text{IV-21})$$

Avec ρ_e est la valeur de $\rho_{i,1}$ à $\Theta_i = 0$ et $R_c = L_C + R_0$.

L'estimation de la charge d'espace pour les autres nœuds du maillage est obtenue en utilisant la méthode simplifiée des caractéristiques vérifiant l'équation de continuité du courant, dans laquelle les lignes caractéristiques représentant l'évolution spatiale de la charge d'espace sont celles du champ électrique.

IV.4.3.1-Méthode simplifiée des caractéristiques:

Considérons le cas de la polarité positive. A partir des équations (IV-2) et (IV-3) et (IV-1) et en considérant la mobilité des ions constante, nous aurons :

$$\nabla \cdot (\mu \cdot \rho \cdot E) = 0 \Rightarrow \nabla(\mu \cdot \rho) \cdot E + \rho \cdot \mu \cdot \nabla \cdot E = 0 \Rightarrow E \nabla \rho + \rho \cdot \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (\text{IV-22})$$

$$(\text{IV-15}) \Rightarrow \nabla \rho = -\frac{\rho^2}{\epsilon_0 \cdot E} \quad (\text{IV-23})$$

Le long des lignes de champ, l'équation (IV-16) peut s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\rho^2}{\epsilon_0 \cdot E} \quad (\text{IV-24})$$

L'intégration de (IV-17) donne les valeurs de la densité de la charge d'espace aux nœuds localisés le long des lignes de champ. Les valeurs du champ E sont initialement prises égales à celles obtenues dans l'étape 2.

Pour la résolution de l'équation (IV-17), nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta d'ordre « 4 » corrigée. Un organigramme simple permet d'effectuer les calculs :

- Donner ρ_e ;
- Calculer h ;
- $I=0$ à $n-1$, calculer : $\rho_{i+1,j} = \rho_{i,j} + h \left(-\frac{\rho_{i,j}^2}{\epsilon_0 E_{i,j}} \right)$
- Les valeurs corrigées : $\rho_{i+1,j} = \rho_{i,j} + \frac{h}{2} \left(-\frac{\rho_{i,j}^2}{\epsilon_0 E_{i,j}} - \frac{\rho_{i+1,j}^2}{\epsilon_0 E_{i+1,j}} \right)$
- Fin

h : est la distance entre le nœud considéré et le nœud précédent suivant la ligne du champ.

Ayant estimé toutes les charges aux nœuds du maillage, la résolution de l'équation de Poisson par la MDF devient aisée de même que l'estimation des valeurs du champ électrique par la méthode d'interpolation / extrapolation. Ces dernières seront utilisées pour réestimer la

densité de la charge d'espace aux nœuds. Cette procédure se poursuit jusqu'à ce que l'erreur sur le potentiel (E_{rr}) devienne inférieure à une valeur prédéterminée prise égale à $\delta_1 = 10^{-3}$. L'erreur est définie telle que :

$$E_{rr} = \frac{|\phi^{(l)} - \phi^{(l+1)}|}{\phi_{av}}, \quad \text{avec : } \phi_{av} = \frac{(\phi^{(l)} + \phi^{(l+1)})}{2},$$

Où : l est le numéro de l'itération.

En polarité négative, l'équation (IV-35) sera accompagnée d'un signe (-) et l'estimation de la densité de la charge d'espace est effectuée sur le plan et les frontières artificielles, ce qui n'est pas facile, encore, on favorise la programmation en polarité positive puis le résultat sera précédé d'un signe moins.

Une fois que la convergence du potentiel est acquise, nous déterminerons les charges discrètes localisées aux centres des éléments rectangulaires. Ces dernières sont calculées à partir des valeurs de la densité de la charge d'espace aux nœuds du maillage et sont déterminées par les équations suivantes :

$$q(i) = \rho(i)_{moy} \cdot \Delta_e(i), \quad (IV-25)$$

Avec : $\rho(i)_{moy} = (\rho_{(1)} + \rho_{(2)} + \rho_{(3)} + \rho_{(4)})/4$,

Où : $\rho_{(1)}, \rho_{(2)}, \rho_{(3)}, \rho_{(4)}$ sont les valeurs de la densité de la charge d'espace aux nœuds du triangle (i) et $\Delta_e(i)$ est la surface de rectangle.

IV.4.4-Etape 4 : Reconstitution du maillage:

Les charges discrètes estimées dans l'étape 3 modifient considérablement le champ électrostatique Laplacien et déforment les lignes de champ. En effet, le champ électrostatique en tout point du maillage est la superposition des champs créés par toutes les charges y compris celle simulant le système des électrodes. En fait cette dernière sera modifiée pour garder la même tension appliquée sur l'électrode active, elle est obtenue en utilisant la méthode de superposition.

Le potentiel à la surface de l'électrode active est donné sous la forme matricielle suivante :

$$V_{app} = V_1 + V_2 + V_3, \quad (IV-26)$$

Où : V_1 le potentiel crée par la charge d'espace discrète et son image sur l'axe (OXY);

V_2 le potentiel crée par la charge d'espace discrète et son image sur l'axe (O(-X)Y);

V_3 le potentiel crée par la charge simulant l'électrode active et son image.

Si, m est le nombre de charges d'espace discrètes et n le nombre de points sélectionnés sur le fil correspondants au nombre de lignes du champ, alors :

$$V_1 = \sum_{j=1}^m p_{ij} q_j \quad V_2 = \sum_{j=1}^m p'_{ij} q_j \quad V_3 = p_{i,1} qy \quad i=1, \dots, n \quad (\text{IV-27})$$

Les coefficients p_{ij} valent : $p_{ij} = \frac{1}{2\pi \cdot \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$. D'où R_1 et R_2 ont été déterminés dans

l'étape 1 et sont fonction des positions des charges. Les positions des charges discrètes ont été déterminées dans l'étape 3, et pour la position de la charge sur le fil (xq , yq), nous avons trouvé que : $xq = 0, yq = \sqrt{H^2 - k \cdot R_0^2}$, avec k un facteur à ajuster. La charge qy est prise égale à la moyenne du rapport $(V_{app} - V_1 - V_2) / p_{i1}$.

Ayant déterminé la charge qy , des calculs similaires à ceux de l'étape 1 en incluant le principe de superposition sont effectués. En commençant par recalculer le potentiel à la surface du fil, le facteur k est ajusté jusqu'à avoir la valeur du potentiel appliqué. Une fois cette condition satisfaite, la même procédure se poursuit jusqu'à l'obtention des nouvelles matrices du potentiel et du champ électrique. A ce stade les étapes (1-4) sont répétées, la densité de la charge d'espace sur la frontière L_c est prise égale aux valeurs obtenues à la fin du premier maillage, on est donc en présence du second maillage. Un troisième maillage, ou plus, sont effectués en répétant les mêmes procédures du second, jusqu'à ce qu'il prend une structure stationnaire, atteinte en ayant l'erreur relative e_{rr} , sur la densité de la charge d'espace entre deux maillages successifs, inférieure à une valeur $\delta_2 = 2\%$.

$$\text{Avec : } e_{rr} = \left(\frac{|\rho^{(l)} - \rho^{(l+1)}|}{\rho^l} \right) \cdot 100$$

IV.5- Résultats et interprétation

La méthode proposée a été appliquée à la configuration fil-cylindre coaxial. Pour illustrer les résultats obtenus, nous présentons le cas de l'électrode de rayon $R_0 = 0.2mm$ soumise à une tension $V_{app} = 20 kV$.

Le maillage final discrétisé est représenté sur la figure IV-10. Le nombre de lignes de champ tracées est 25, le nombre total de contours équipotentiels est 25. Les distributions spatiales du champ électrique, du potentiel, de la charge d'espace et de la densité du courant pour ce cas sont données respectivement sur les figures (IV-14), (IV-12), (IV-15) et (IV-17).

Les lignes de champ pour la configuration fil-cylindre sont représentées sur la figure (IV-8) il est bien indiqué, qu'en présence de la charge d'espace, les lignes du champ sont déformées ce qui met en doute l'hypothèse de Deutsch.

IV.5.1- Les lignes de champ :

Avant tout nous avons dire que les lignes du champs sont des lignes orientées selon les vecteurs champs. Avec les vecteurs champs sont tangent aux lignes de champs.

Donc:

- La valeur du champ est de moins en moins intense (diminue) lorsque l'on s'éloigne de la source (fil: particule chargée).
- Si $q < 0$: alors les vecteurs champs sont orientés vers la charge créatrice q . Les lignes de champs s'orientent vers la charge.
- Si $q > 0$: les vecteurs champs « fuient » la charge créatrice q . Les lignes de champ fuient la charge.

Les figures (IV.7) et (IV.8), montrent les variations des lignes du champ dans notre configuration. En général, les valeurs calculées sont en bon accord avec celles données par les modèles semi- analytique.

Il est pratique de représenter le champ électrique associé à une distribution de charges par une série de courbes appelées lignes de champ électrique. Ces lignes, en plus du fait qu'elles sont dotées d'un sens de parcours, sont construites de telle manière qu'elles aient les propriétés suivantes:

- En tout point d'une ligne de champ, le champ électrique \vec{E} est tangent à la ligne. Le sens de \vec{E} est de même que le sens de parcours de la ligne.
- Le nombre de lignes traversant une région de l'espace inter – électrode est proportionnel à l'amplitude du champ dans cette région.

Nous pouvons facilement trouver la forme des lignes de champ dans le cas d'une charge ponctuelle. Le champ créé par une telle charge est radial.

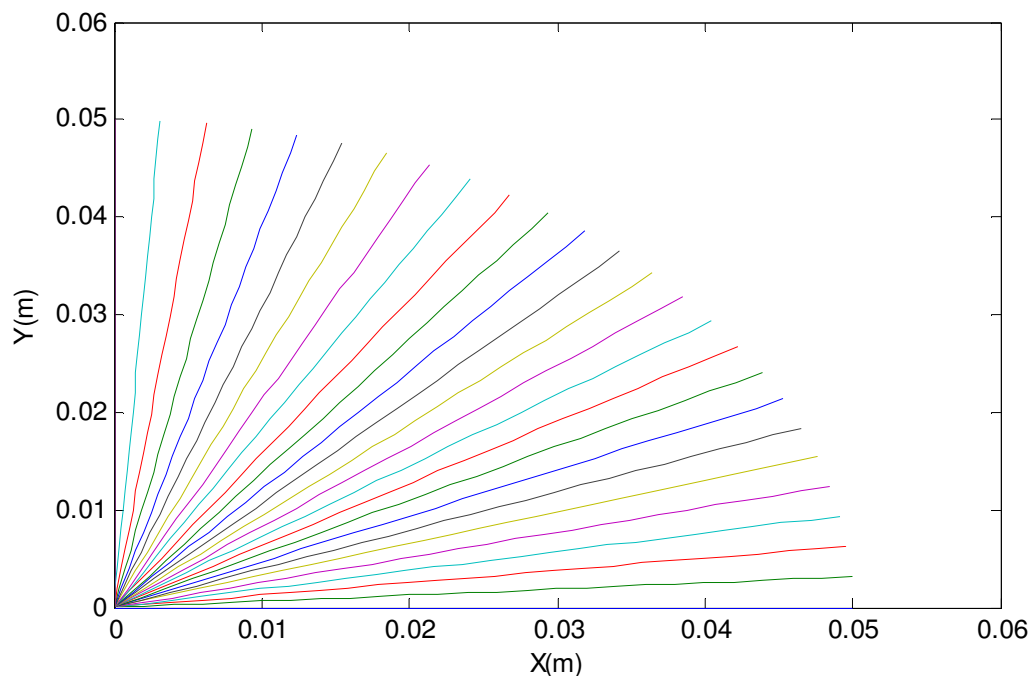


Figure IV.7 : Les lignes de champ pour un écart du domaine de calcul

Pour tout le système, les lignes de champ sont représentées sur la figure (IV.8) suivante :

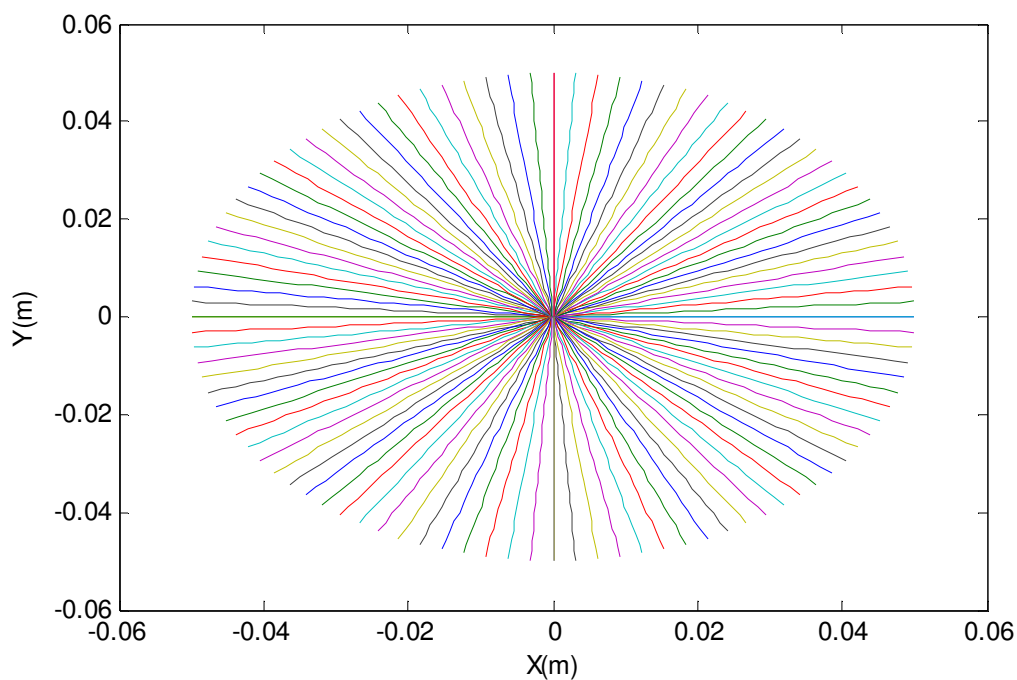


Figure IV.8 : Les lignes de champ pour la configuration fil-cylindre.

IV.5.2- Les contours équipotentiels :

On dit qu'une surface (qu'elle soit mathématique ou physique) est une surface équipotentielle, si le potentiel est le même en tout point de la surface (figure.IV.9).

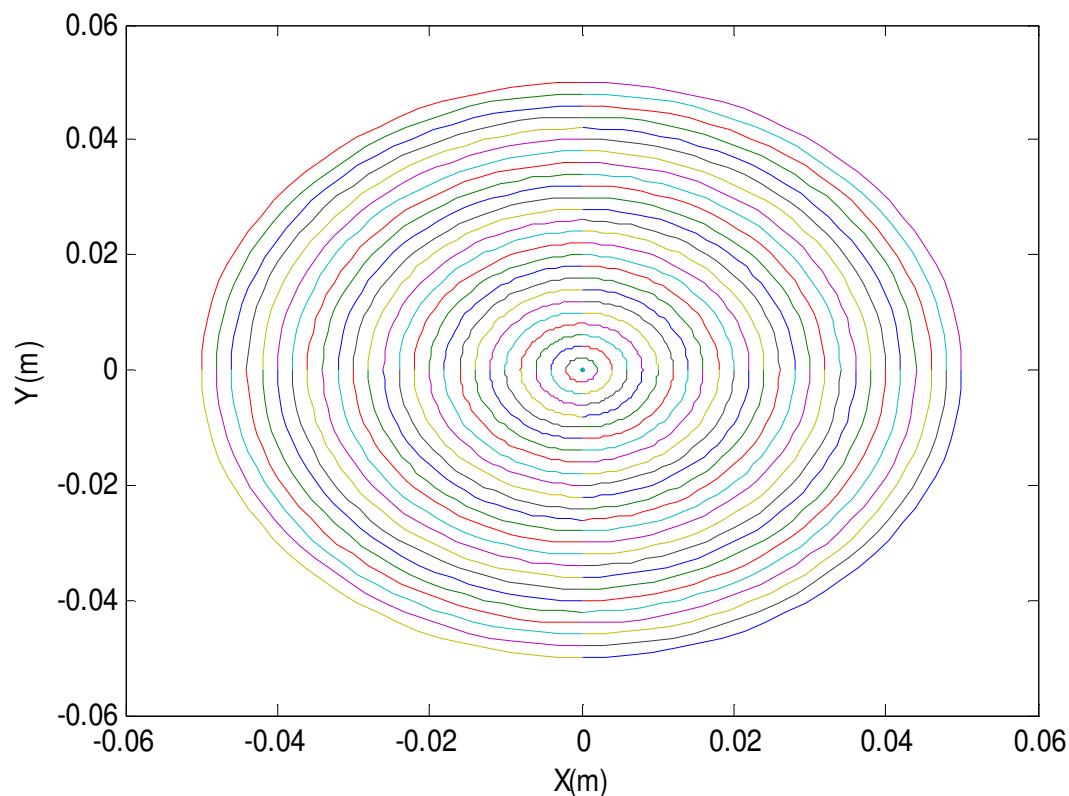


Figure IV.9 : Représentation des surfaces équipotentiels pour la configuration fil-cylindre.

Le potentiel d'une charge source donnée peut être représenté graphiquement par des surfaces équipotentiels. Les lignes du champ électrique de cette même charge source sont de sorte que la connaissance de l'une des représentations permet de déduire l'autre et vice versa.

IV.5.3- Le maillage :

Le maillage final discrétisé est représenté sur la figure (IV.9). Le nombre de lignes de champ tracées est 26, le nombre total de contours équipotentiels est 26.

- On se donne (26×26) points du domaine Ω . Nous souhaitons mailler ce domaine, de forme a priori quelconque, à partir de la donnée des (26×26) points.
- Chaque quadrilatère est formé par l'intersection de deux contours équipotentiel consécutifs avec deux lignes du champ consécutives.

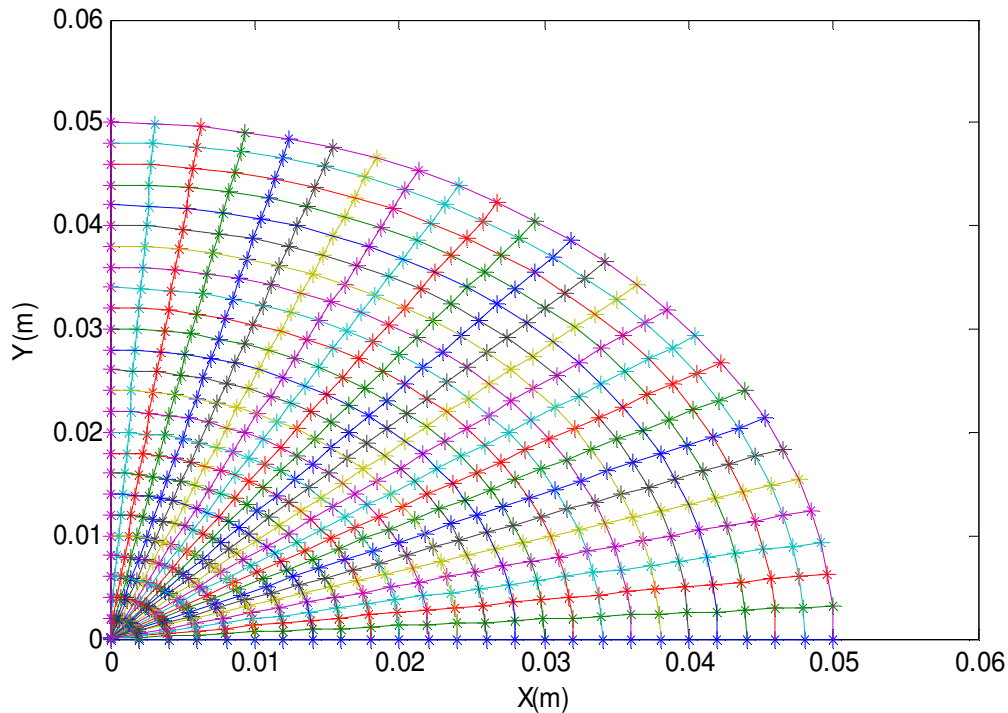


Figure IV-10 : Maillage généré pour la configuration fil-cylindre.
 ($R_0 = 0.2\text{mm}$, $V_{app} = 20\text{kV}$, $H = 50\text{mm}$)

IV.5.4- Le potentiel électrique :

Le potentiel électrique est l'une des grandeurs définissant l'état électrique d'un point de l'espace. Son unité est le volt (V). D'où l'analogie entre la dénivellation géographique et la différence de potentiel électrique appelée également tension et notée par ϕ .

Donc, dans notre travail la variation du potentiel électrique suit la variation de la tension appliquée. Les figures (IV.11) et (IV.12) représentent la variation du potentiel électrique entre les électrodes du système de configuration fil – cylindre. Au voisinage du fil, le potentiel est égal à la tension appliquée. Sur le cylindre, il est égal à zéros (Conditions aux limites).

Le potentiel électrique en un point P situé dans le voisinage d'une source, est donné par le travail pour déplacer à vitesse constante une charge témoin q, d'un point de potentiel nul du point P considéré, divisé par la charge q.

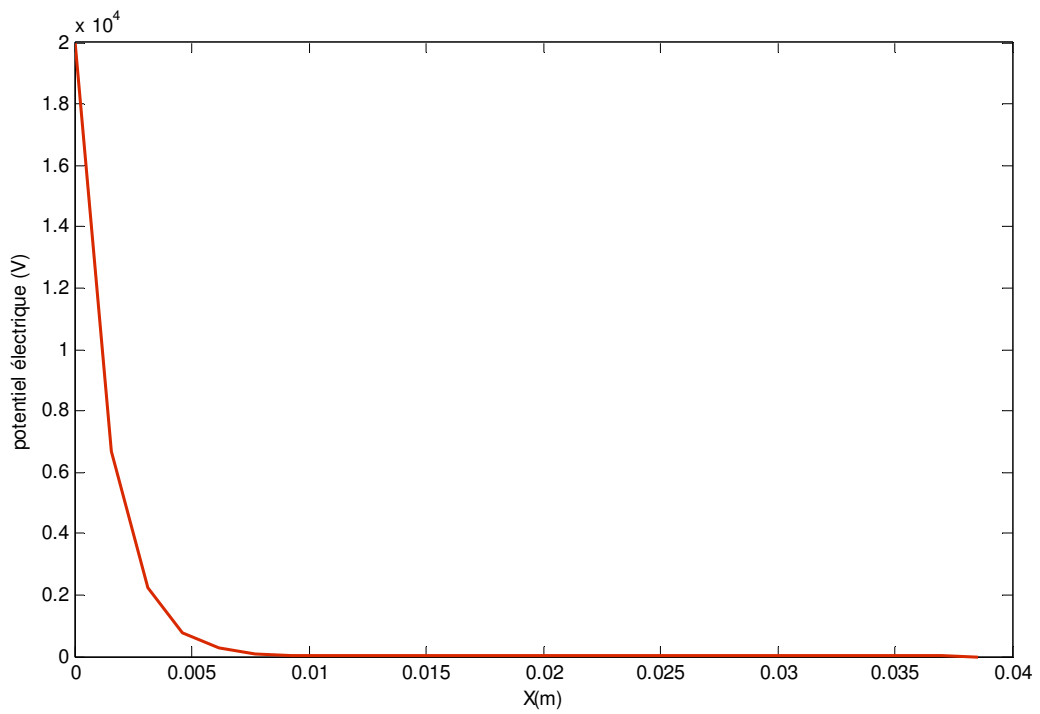


Figure IV.11 : Variation du potentiel entre les deux électrodes du système.

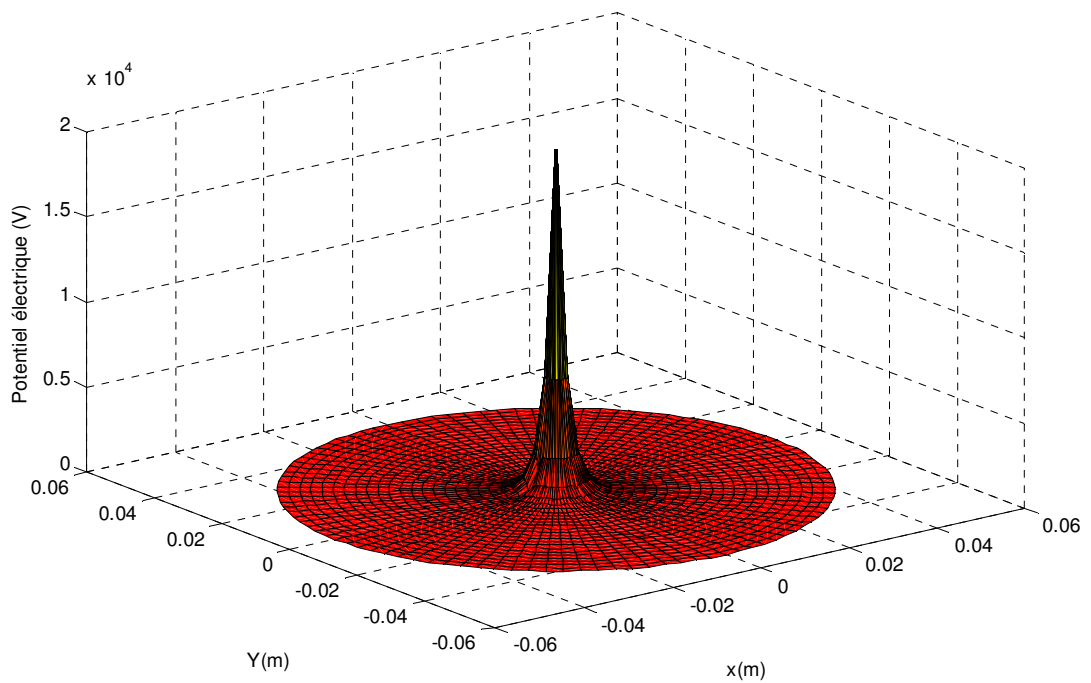


Figure IV.12 : Distribution spatiale du potentiel électrique.

IV.5.5- Le champ électrique :

Le champ critique du minimum d'ionisation étant calculé du modèle élaboré par AL - Hamouz [41]. Pour la valeur du champ seuil, nous avons effectué deux procédures d'exécution, l'une portant sur le modèle analytique de Hartmann [43] et Zebboudj [42] et l'autre sur les résultats expérimentaux.

A base de la valeur numérique de la tension seuil, Les résultats des distributions du champ électrique sont donnés par les figures (IV. 13) et (IV. 14).

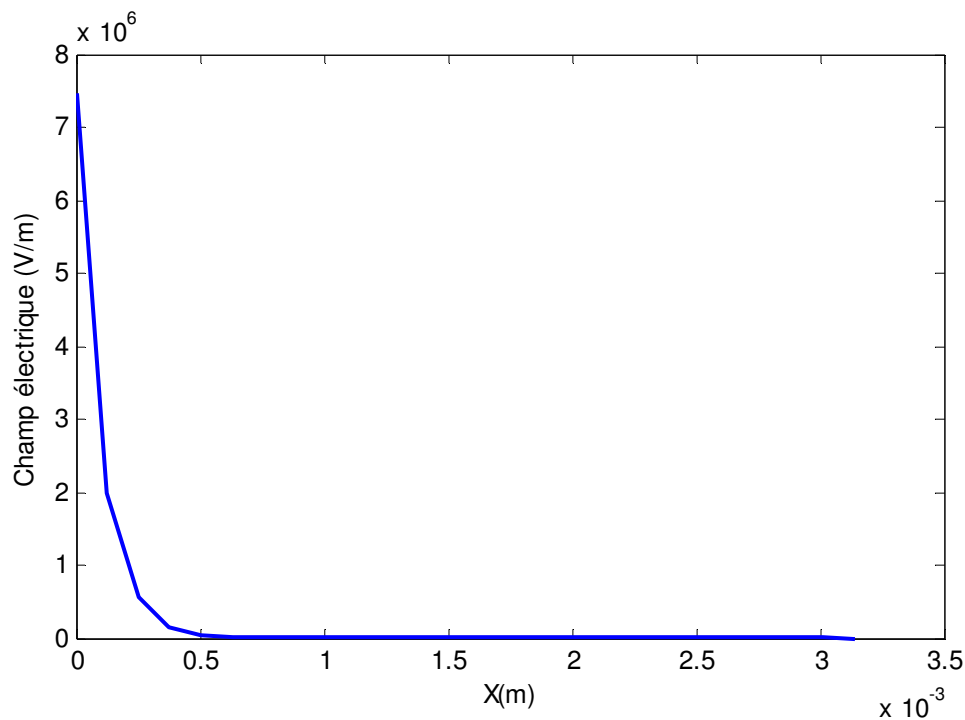


Figure IV.13 : Variation du Champ électrique entre les deux électrodes du système.

Nous constatons que le champ créé par une charge ponctuelle q est donc radial: sa direction par la charge. Son amplitude varie avec l'inverse du carré de la distance à la charge. Le champ électrique est donc d'amplitude constante sur des sphères centrées en q .

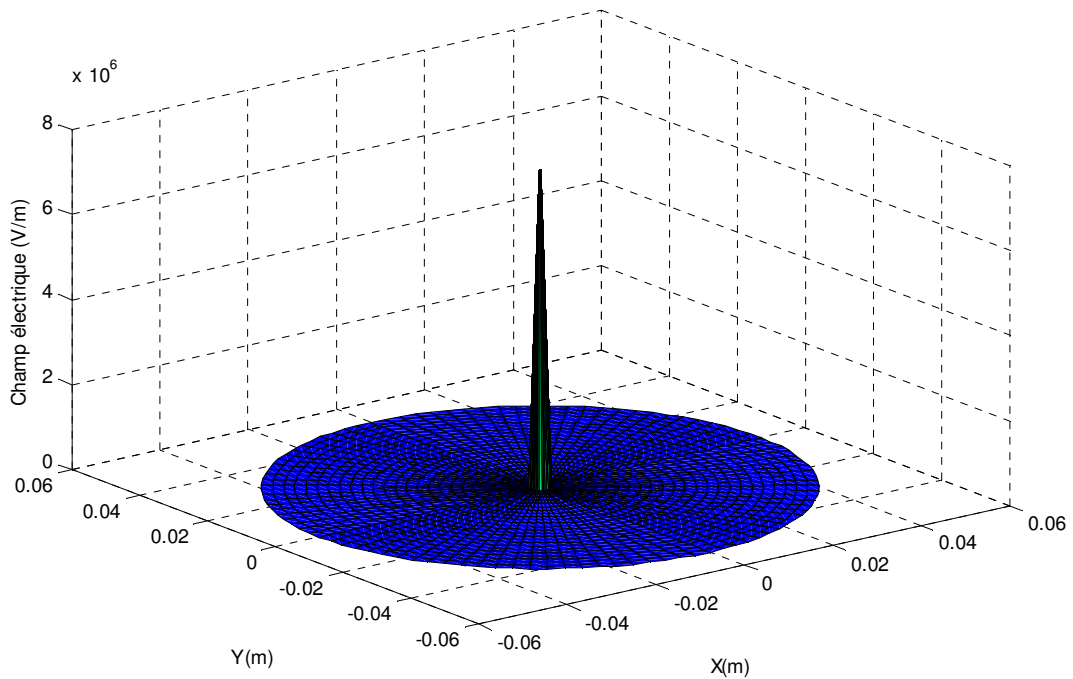


Figure IV.14 : Distribution spatiale du champ électrique.

Dans notre cas, nous n'avons pas suivi la méthode standard de calcul des variables additionnelles, telle que le champ électrique, utilisée souvent dans la MDF. Au lieu de se servir de l'approximation par différences finies, du potentiel qui donne un champ constant en chaque élément, nous avons préféré utiliser la méthode d'interpolation/extrapolation suivante:

1- Pour calculer la valeur du champ au nœud (i, j) le long de la i^{eme} ligne, un polynôme $f(r)$ d'ordre deux connectant les valeurs du potentiel aux nœuds $(i, j-1)$, (i, j) et $(i, j+1)$ est construit pour représenter la solution autour du nœud (i, j) , la variable r étant la longueur mesurée le long de la ligne du champ. L'intensité du champ au nœud désiré est ainsi obtenue par la simple dérivation du polynôme d'interpolation ($E = -\nabla\Phi$).

2- L'intensité du champ au nœud $(i,1)$ c'est-à-dire sur le fil, est déterminée par l'extrapolation du polynôme d'interpolation formé à partir des valeurs du champ calculées aux nœuds $(i,2)$, $(i,3)$ et $(i,4)$. La même procédure est utilisée pour l'évaluation du champ au nœud (i,Mc) , c'est-à-dire sur le cylindre.

IV.5.6- La densité de la charge d'espace :

Dans la zone d'ionisation, la densité de la charge d'espace est posée tout simplement égale à zéros (Figure IV.15). Dans la zone de dérive, elle est obtenue à partir de l'équation de continuité de la densité de courant. L'estimé initial ρ_0 est choisi sur la frontière R_c . Cet estimé est ajusté au fur et à mesure que le champ électrique calculé sur la frontière R_c se rapproche de la valeur du champ E_c .

La valeur de la densité de la charge d'espace sur la dernière ligne du champ, à la ligne de symétrie, a une influence sur le champ électrique. En effet, nous avons constaté que les lignes du champ tracées en utilisant le modèle d'Al-Hamouz qui les avaient prises nulles, sont considérablement déviées dans le cas non nul.

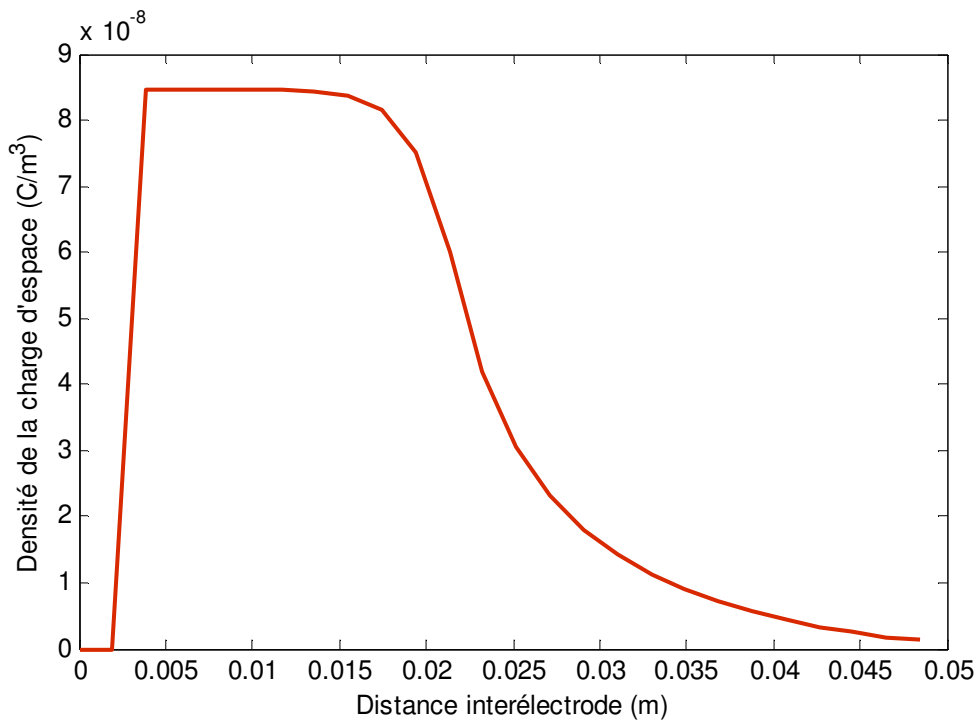


Figure IV.15 : Variation de la densité de la charge d'espace.

Nous rappelons que la valeur de la mobilité moyenne des ions positifs est prise égale à 2 [cm²/Vs].

IV.5.7- La densité de courant électrique :

La distribution de la densité du courant est représentée sur les figures (IV.16) et (IV.17). En considérant la tension seuil théorique.

La densité du courant représentée sur les figures, présente une forte valeur au voisinage du fil ($r=R_c$), qui diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne.

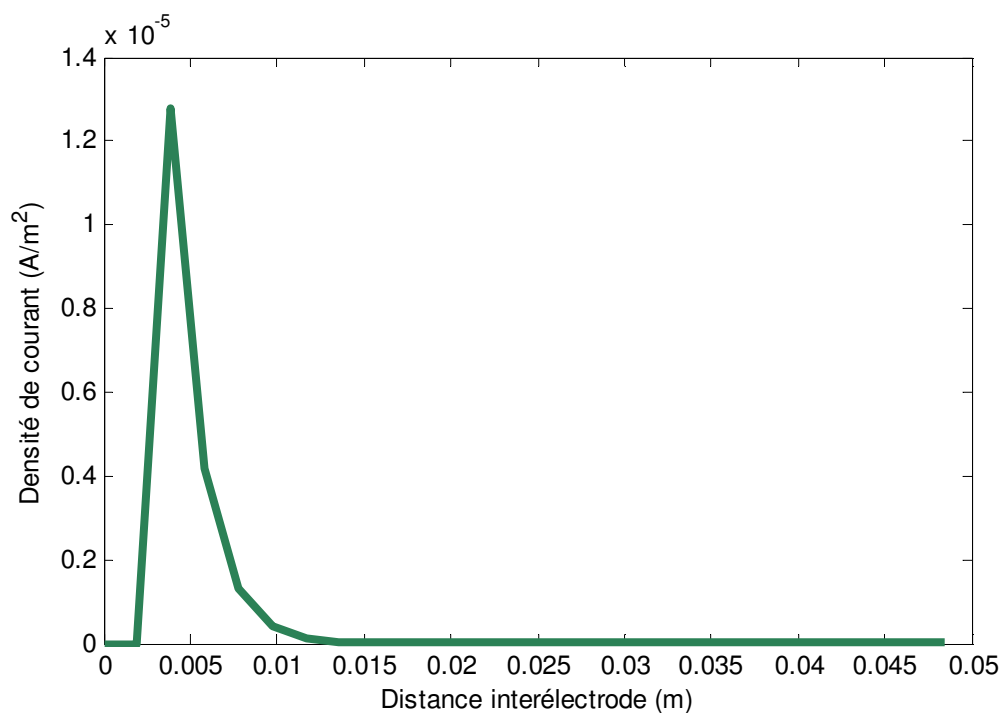


Figure IV.16 : Variation de la densité du courant entre les deux électrodes.

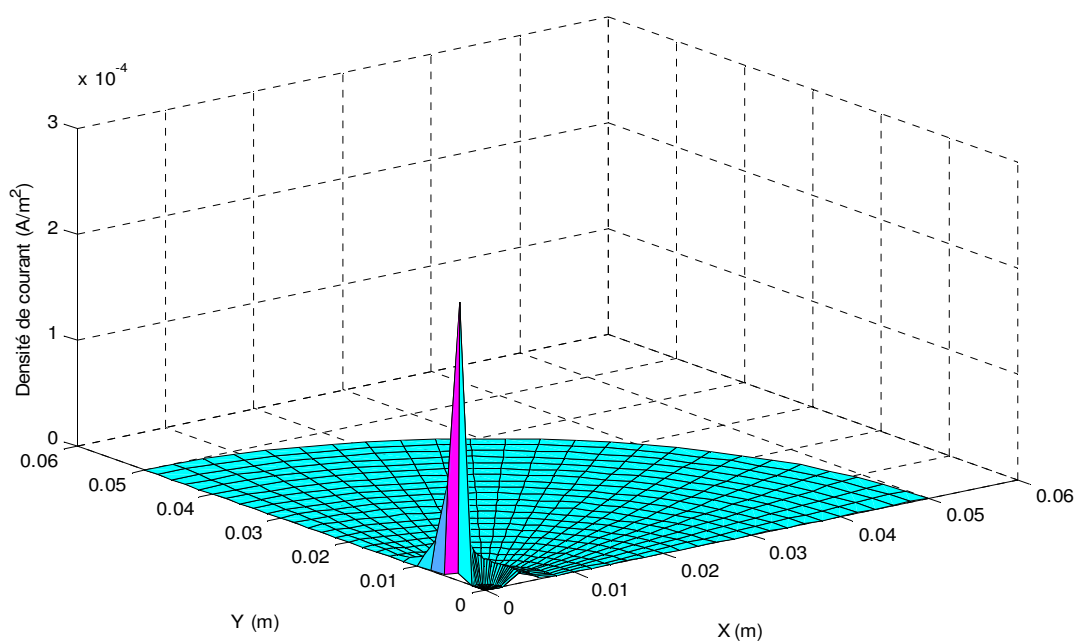


Figure IV.17 : Distribution spatiale de la densité du courant dans le domaine de calcul.

IV.6- Conclusion

Le modèle numérique que nous avons développé dans ce chapitre, a été élaboré dans le but de calculer les paramètres électriques dans l'espace inter-électrode lors de la décharge couronne en géométrie fil-cylindre. Le principe de calcul est la résolution itérative et simultanée des équations de Poisson et de continuité du courant. La méthode est basée principalement sur le modèle de Hartmann du champ seuil de l'effet couronne et sur le modèle numérique d'Al – Hamouz. La méthode de résolution choisie est celle des différences finies.

Le calcul numérique que nous avons proposé élimine la boucle permettant de vérifier la constance du champ électrique à la limite de la zone d'ionisation (équivalent au champ critique du minimum d'ionisation). En effet cette condition a été illustrée par la grandeur du potentiel électrique correspondant et est introduite dans la formulation en éléments rectangulaires et les résultats sont d'autant plus fiables que les contours équipotentiels sont tracés avec une bonne précision prise égale 0.3 % pour les faibles tensions appliquées et 0.1 % pour les plus élevées.

Bien que ce modèle nous a épargné d'une étape de résolution, mais l'estimation de la densité de la charge d'espace sur la frontière de la zone d'ionisation reste à vérifier. En effet, pour le premier de cette dernière, nous l'avons pris au hasard et nous l'avons ajusté en comparant le premier point sur le plan à ($y=0$) à celui obtenu par l'expérimentation (sans l'introduire dans le programme). Une fois, l'erreur est acceptable, l'estimé est ajusté, il sera utilisé dans les procédures qui suivent et est maintenu constant.

A vrai dire, la résolution numérique de la décharge couronne n'est qu'à son premier âge et beaucoup de travail reste à faire pour améliorer les modèles.

Le calcul numérique a donné des résultats satisfaisants pour des tensions appliquées nettement supérieures aux tensions seuil. Néanmoins, pour des tensions proches des tensions seuils, le résultat numérique présente un écart sur le champ supérieur à 10 %.

La validation de ce modèle par comparaison calcul/ mesure a été rendue possible par la précision des données expérimentales et numériques disponibles aux LGEB et LPGP sur les décharges.

Le but de notre travail était de développer un code numérique pour déterminer la distribution du champ électrique et la densité de la charge d'espace pour l'effet couronne dans l'air. Nous avons fait l'étude pour une configuration 2-D pour simplifier le travail et pour mettre au point la technique de redéfinition du maillage structuré. Nous avons essayé plusieurs techniques numériques pour résoudre les deux équations couplées, l'équation de la conservation de la charge et l'équation de poisson. Les deux équations ont été résolues par approximations successives et le code numérique développé pour la configuration fil – cylindre coaxiaux. Les méthodes numériques les plus utilisées pour résoudre ce problème sont donc la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des éléments de frontière, et la méthode de simulation de charges.

Le point le plus important et le plus original dans notre travail est la redéfinition du maillage structuré à chaque itération du calcul. Les nœuds de ce maillage structuré sont les points d'intersection entre les lignes de champ et les équipotentielles. Ce maillage structuré présente le grand avantage d'éliminer la diffusion numérique et d'améliorer la détermination de la distribution de champ électrique et de densité de charge entre les deux électrodes ainsi que celle de la densité de courant sur le cylindre mise à la terre.

Nous avons calculé le potentiel ϕ aux nœuds du maillage structuré par la méthode des différences finies ; elles sont utilisées comme quadrangles formés par l'intersection de deux lignes de champ consécutives avec deux contours équipotentiels consécutifs.

La redéfinition totale du maillage structuré qui est l'étape la plus difficile dans l'algorithme, est également la plus coûteuse en temps de calcul. Le facteur de sous relaxation de la charge a une influence très importante sur la durée de calcul. Ce facteur de sous relaxation doit être diminuer quand la densité de la charge injectée est augmentée : pour $\rho_{\max} > 25$, il faudrait diminuer ce facteur (jusqu'à 0.001 ?) ce qui se traduirait par une augmentation très importante du nombre d'itérations (et du temps de calcul) pour obtenir une solution satisfaisante.

L'algorithme (**MDF** et **MC** avec redéfinition totale du maillage structuré) a été appliqué. Cet algorithme converge bien vers la solution des deux équations couplées. Dans le cas du système fil – cylindre, les résultats numériques ont été comparés avec les résultats expérimentaux (caractéristique courant-tension, distribution de la densité de courant sur le plan et largeur de la zone chargée [30]). En tenant compte des conditions physiques et

expérimentales dans lesquelles les mesures ont été faites, des approximations retenues pour définir le modèle numérique (discrétisation, négligence de l'effet de quelques paramètres).

Deux méthodes numériques ont été examinées pour déterminer la densité de la charge ρ aux nœuds du maillage structuré : la méthode des caractéristiques **MC** et la méthode de Runge Kutta d'ordre 4. L'utilisation du maillage fixe pendant toutes les itérations ne permet pas de tenir compte de la variation de l'allure des lignes de champ, variation qui est due à l'influence de la charge d'espace (répulsion coulombienne) et qui modifie les lignes de champ. Nous avons donc choisi de calculer ρ aux nœuds situés sur les lignes de champ électrique qui sont les caractéristiques du problème.

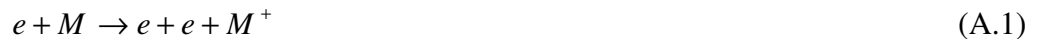
Le maillage structuré est redéfini à chaque itération en utilisant les valeurs numériques de ϕ calculées par **MDF**. La redéfinition du maillage structuré a été l'étape la plus délicate dans notre travail. La redéfinition du maillage à chaque itération en conservant les points de départ inchangés sur l'électrode active pendant toutes les itérations permet d'éliminer la diffusion numérique et d'obtenir une conservation assez satisfaisante du courant traversant les équipotentielles entre les deux électrodes. Pour une distribution discontinue de la charge sur le fil, l'application de **MDF** et **MC** avec cette technique de redéfinition du maillage (points de départ fixes) donne de bonnes solutions pour ρ_{\max} [7]. Pour une densité de la charge plus élevée, les lignes de champ s'écartent de façon marquée dans la zone chargée à cause de la répulsion coulombienne et s'accumulent fortement au voisinage de la frontière entre la zone d'ionisation et la zone de dérive : le maillage est très déformé et le calcul s'arrête.

Pour appliquer l'algorithme que nous avons utilisé à d'autres configurations, il est nécessaire de déterminer un maillage initial suffisamment régulier avant d'entrer dans la boucle des approximations successives. Ceci pourrait se faire en utilisant des transformations conformes. On peut aussi envisager d'utiliser un maillage de Delaunay [31] comme premier maillage et déterminer les lignes de champ et les équipotentielles à partir de la solution numérique obtenue pour l'équation de Laplace avec ce maillage non structuré. A partir de ce maillage structuré initial nous pouvons alors appliquer l'algorithme présenté dans notre mémoire.

L'AVALANCHE DE TOWNSEND DANS UN GAZ ET LE CRITERE DE CLAQUAGE

A.1- L'avalanche de Townsend- le coefficient α :

Rappelons que, lorsque des électrons libres d'un gaz sont soumis à un champ électrique, ils sont accélérés par ce champ et acquièrent une certaine énergie. A partir d'une certaine intensité du champ, cette énergie devient suffisante pour provoquer l'ionisation des molécules neutres M qu'ils heurtent on désigne ce phénomène par "ionisation des molécules par choc"; un choc élémentaire est appelé "collision". On écrit:



et l'on voit qu'une collision ionisante crée paire électron + ion positif.

Soient alors N le nombre d'électrons existant à l'abscisse ℓ , le long d'une ligne de force d'un champ électrique. Nous pouvons exprimer l'effet multiplicateur par l'accroissement dN du nombre d'électrons, le long d'un trajet élémentaire $d\ell$:

$$dN = N\alpha d\ell \quad (\text{A.2})$$

Où : α est appelé 1^{er} coefficient de Townsend.

On en déduit immédiatement l'expression générale de l'avalanche électronique:

$$N_2 = N_1 \exp \int_{\ell_1}^{\ell_2} \alpha d\ell \quad (\text{A.3})$$

On remarquera qu'une avalanche électrique se développe toujours en se dirigeant de la cathode vers l'anode, alors que les ions positifs migrent en sens inverse, mais beaucoup plus lentement, en direction de la cathode.

Le coefficient α est une fonction du champ électrique local et dépend de la nature du gaz dans lequel se développe l'avalanche. En outre, il obéit, en fonction de la pression et de la température du gaz, à la loi de similitude :

$$\frac{\alpha}{n} = f\left(\frac{E}{n}\right)$$

Où: n est le nombre de molécules du gaz par unité de volume.

Cette loi de similitude permet d'expliquer la loi de Paschen.

Du point de vue de sa nature physique, le coefficient α dépend :

- ❖ De l'énergie nécessaire à l'ionisation des molécules du gaz considéré. Cette énergie d'ionisation est de l'ordre de 10 à 16 eV (12.2 eV pour l'oxygène O_2 , 15.4 eV pour l'hydrogène H_2 , 15.5 eV pour l'azote N_2), etc ...
- ❖ De la loi de distribution en énergie des électrons. En effet, l'énergie acquise par les électrons, entre deux chocs successifs, obéit à une loi de distribution statistique, de telle sorte que seule une fraction des électrons atteint l'énergie nécessaire à l'ionisation. Cette fonction est liée à la "section efficace de collision" et une fonction croissante du champ, du moins dans le domaine des champs utilisés en électrotechnique.
- ❖ Enfin, le coefficient α est un coefficient apparent, qui résulte en fait de deux mécanismes contradictoires : la multiplication par collisions ionisantes, proprement dite, et l'attachement. Au – dessous d'une certaine énergie, un électron a tendance à s'attacher à des molécules neutres pour former un ion négatif. Ce mécanisme est exprimé par le coefficient d'attachement η .

On a donc en réalité $\alpha = \alpha' - \eta$.

Lorsque le champ est insuffisant, l'attachement l'emporte sur la multiplication, et la formulation d'une avalanche est impossible. Ainsi, dans l'air atmosphérique, aucune avalanche ne peut se fermer au-dessous de 26 kV/cm.

A.2- Définition du 2^{ème} coefficient de Townsend :

Si seul le processus d'avalanches issues des électrons-germes créés par des radiations naturelles existait, le courant recueilli par les électrons (électrons à l'anode, ions positifs à la cathode) restera infinitésimal.

Pour qu'une véritable décharge puisse se produire, il faut que les avalanches soient alimentées par des électrons-germes créés en nombre bien supérieur. Il existe de nombreux processus pouvant conduire à la création de ces nouveaux germes. Citons les plus importants :

Au sein du gaz : au lieu d'être ionisés par collision avec un électron, les molécules peuvent être excités; puis se désexciter en émettant un photon : le photon peut, à son tour, ioniser un autre atome (ou une molécule), par le processus appelé "photo-ionisation". Les mécanismes en jeu s'écrivent alors :



Où M^* désigne une particule excitée, $\overline{M^*}$ une particule métastable et $h\nu$ un photon.

Au niveau de la cathode : les ions positifs formés au cours des collisions ionisantes bombardent la cathode et peuvent en extraire des électrons.

C'est ce dernier processus qui a retenu l'attention de Townsend. Il introduit un deuxième coefficient γ , qui exprime la probabilité qu'un ion de créer un électron. Or, chaque électron créé à la cathode donne lieu à une avalanche, qui contiendra en bout de parcours N électrons, mais qui n'aura produit que $(N-1)$ ions positifs. Par définition du coefficient γ , la condition d'auto-entretien de l'avalanche s'écrira donc :

$$\gamma(N-1) = 1 \quad (\text{A.5})$$

Si, dans l'expression (A.3), nous posons $\ell_1 = 0$ (départ de l'avalanche à la cathode), et si nous posons, conformément à (A.5), $N_1 = \gamma(N_2 - N_1)$ nous obtenons :

$$\int_0^{\ell_2} \alpha dl = \log \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \quad (\text{A.6})$$

Cette relation est dite "critère de Townsend".

**MOUVEMENT DES CHARGES LIBRES (ions) DANS UN CHAMP
ELECTRIQUE ALTERNATIF**

B.1- La mobilité ionique :

Les particules chargées subissent normalement un mouvement désordonné d'agitation thermique et de diffusion. En présence d'un champ électrique, ces particules sont soumises de plus à une force unidirectionnelle de valeur \vec{E} . Qui leur communique une accélération dans la direction du champ; mais, sous l'effet des collisions élastiques, cette accélération est constamment contrariée.

Sous l'effet de cet ensemble de force, les particules acquièrent en définitive une composante de vitesse moyenne \vec{v} , proportionnelle à l'intensité du champ électrique et inversement proportionnelle à la fréquence des collisions. Cette description reste valable, à pression et température normales, dans tout le domaine des champs utilisés en électrotechnique.

Le mouvement des ions est alors régi par la loi simple

$$\vec{v} = \mu \vec{E}$$

Le coefficient μ , appelé mobilité ionique, a pour valeur dans l'air et dans les conditions restrictives indiquées plus haut :

$$\mu^+ \sim 1,5.10^{-4} \text{ m/s par v/m}$$

$$\mu^- \sim 1,8.10^{-4} \text{ m/s par v/m}$$

Ainsi l'ion consomme immédiatement, en frottement dans l'air, l'énergie qu'il acquiert dans le champ.

Un calcul simple montre que, dans l'étude de l'effet couronne, il n'est pas nécessaire de tenir compte de l'agitation thermique, ni de la diffusion, ni de la répulsion mutuelle des particules chargées de même signe.

B.2 - Trajectoire d'une charge autour d'un conducteur cylindrique :

Soit un conducteur cylindrique de rayon r , donc le champ superficiale est \vec{E} . Une charge d'espace q , placée à une distance ρ de l'axe du conducteur, sera soumise à un champ instantané :

$$E(\rho, t) = E_s \frac{r}{\rho} \cos \omega t \quad (\text{B.1})$$

Sa vitesse radiale instantanée sera exprimée par:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu E(\rho, t) \quad (\text{B.2})$$

De ces deux équations, on déduit l'équation différentielle du mouvement de la charge q :

$$\rho d\rho = \frac{\mu_r E_s}{\omega} \cos \varphi d\varphi \text{ avec } \varphi = \omega t \quad (\text{B.3})$$

Son intégration donne la distance de migration de la charge en fonction de φ , en prenant pour conditions initiales $\rho = r$ et $\omega t_0 = \varphi_0$

$$\rho(\varphi) = r \sqrt{1 + \frac{2\mu E_s}{r\omega} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)} \quad (\text{B.4})$$

- [1] Yali, B.SC.A, « Contribution à l'étude de l'influence des décharges de couronne sur la perte de volume d'une aspérité de glace portée à un potentiel élevée ». (Mémoire présenté à l'université du Québec à Chicoutimi. Avril 1993).
- [2] B.Nassira, « Etude de l'influence de la dynamique des neutres sur la réduction des oxydes d'azote d'un plasma froid traversé par une décharge couronne ». (Mémoire pour obtenir le grade de Magistère en physique des plasmas et gaz ionisés, université Abou Bekr BelKaid – Tlemcen, Juillet 2006).
- [3] I. Gallimberti, I. Marchesi and L. Niemeyer, "Streamer Corona at an Insulating surface". Proceedings of 7th International Symposium on High Voltage Engineering (ISH), Dresden (Germany), August 1991, Paper 41.10.
- [4] E. M.Van Veldhuizen and W.R.Rutgers, "Corona Discharges: Fundamentals and diagnostic", Faculty of Applied Physics, Private Communication, Technische Universiteit Eindhoven.
- [5] G. Le Roy, C.Gary, B. Hutzler, J. Lalot and C.Dubanton, "Les propriétés diélectriques de l'air et les très hautes tensions », Editions Eyrolles, Paris, 1984.
- [6] F.W.Peek, « Dielectric Phenomena in High Voltage Engineering », Mc Graw – Hill, New York, 1929.
- [7] L.B.Loeb, "Electrical Coronas, Their Basic Physical Mechanisms", University of California Press, United States, 1965.
- [8] R. S. Sigmond and M. Goldman, "Corona Discharges Physiques and Applications", Electrical Breakdown and Gas Discharge Part B, E. E. Kunhardt and L. H. Luessen, United States 1981.
- [9] A. Goldman, R. Hang and R. V. Lathan, "Journal of Applied Physics", 47:2418, 1976, referenced in "Electrical Breakdown and Gas Discharge Part B", E. E. Kunhardt and L. H. Luessen, United States 1981, PP.56.
- [10] M.YAO BI N'guessan Jean – Luc, Méthode des Eléments Finis mixtes et conditions aux limites absorbantes pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques hyperfréquences, thèse de doctorat, l'école centrale de LYON, 1995].
- [11] HARRINGTON, R.F., Time – Harmonic Electromagnetic **Fields**, Mc Graw – Hill New York, 1961.
- [12] GARDIOL, F., Hyperfrequences, Dunod, Paris,1987.
- [13] PETIT, R., Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique, Masson, Paris, 1989.
- [14] STRATION, J.A., Electromagnetic Theory, Mc Graw – Hill, New York, 1941.
- [15] COLTON D., KRESS R., Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Springer – Verlag, Berlin, 1992.

- [16] ZIENKIEWICZ, O.C., The Element Method, 3rd. ed. Mc Graw – Hill, London, 1997.
- [17] KONRAD, A., “Vectorial Variation Formulation of Electromagnetic Fields in Anisotropic Media”, IEEE Trans.Microwave Theory Tech., Vol. MTT – 24, PP.553-559. 1976.
- [18] MOYER, E.T., SCHROEDER, E.A., “Finite Element Formulations of Maxwell’s Equations – Advantages and Comparison Between Available Approaches”, IEEE Trans. Magnetics, Vol.27, PP.4217 – 4219, 1991.
- [19] C.Volat, “Modélisation physique et numérique par la Méthode des Eléments Finis de Frontière de la distribution du potentiel et du champ électrique le long d’un isolateur standard de poste 735 kV recouvert de glace0, université du Québec, Juin 2002.
- [20] B.Jacque, le champ électrique dans le vide, Série dirigée par Jacques Boutigny, PP.83 - 84.
- [21] L.SIGNAC, méthode numérique: systèmes linéaires. calcul matriciel et vecteurs propres équations différentielles. équations aux dérivées partielles optimisation. programmation linéaire et non linéaire, Ecole supérieure d'ingénieur de Poitiers , 2004.
- [22] BINNS K.J et P.J.LAWRENSON, « Analysis and computation of electric and magnetic field problems », Pergamon press ltd, 1973.
- [23] ASENJO E., N.MORALE, «Low Frequency Complex Field In Polluted Insulators », IEEE Trans. On Electrical Insulation, vol. EI- 17,no.3, PP.262-267, juin 1982.
- [24] Chavent G., « Méthodes aux différences finies », Technique de l’ingénieur, A550, 1993.
- [25] KATO S., H. KOKAI, Y. NAKAJIMA et T. KOUNO, “ Finite element method for calculation of potential distribution to the porcelain insulator with semi conducting surface layer”, Proceedings of 3th International Symposium on High – Voltage Engineering, Milan, no.12-11, aout 1979.
- [26] DHATT G. et G. TOUZOT, « Une présentation de la méthode des éléments finis », Maloire S.A. Editeur, Paris 1984.
- [27] F. BOUSSEKRA , R. DAHMOUNE, « Modélisation du champ électrique et de la densité de courant lors d’une décharge couronne mono – polaire par la méthode des éléments finis », Université du M’sila,2007.
- [28] J. L. Davis, J. F.Hoburg, 1986, J. Electrostat., Vol. 18, PP. 1-22.
- [29] W. Deutsh, 1933, Ann. Phys., Vol. 5, PP.588-612.
- [30] N. A. Kaptzov, 1947, OCIZ, PP. 587-630.

- [31] YALA HAKIM, Mémoire de Magister, calcul du champ électrique avec la géométrie fil cylindre et fil plan, U.A.M de Bejaïa, 2001.

- [32] V. I. Popkov, 1949, *Electrichestvo.*, Vol. 1, PP. 33-48.

- [33] M. P. Sarma, W. Janischewskyj, 1969, *IEEE Trans. Power Appar. Syst*, PP. 718 - 731.

- [34] W. Janischewskyj, G. Gela, 1979, *IEEE Trans. Power Appar. Syst*, PP.1000-1012.

- [35] J. S. Townsend, 1914, *Phil. Mag. Sci*, PP. 83-90.

- [36] T. Takuma, T. Ikeda, T. kawamoto, 1981, *IEEE. Trans. Power Appl. and Syst*, Vol. 100, PP. 4801-4810.

- [37] T. Takuma, T. Ikeda, T. kawamoto, 1987, *IEEE. Trans. Power. Deliv.*, Vol. 2, PP. 189-198.

- [38] M. Abdel-Salam, M. Fargually, S. Abdel- Sattar, 1983,*IEEE Trans. Electr. Ins*, Vol. 18, PP.110-119.

- [39] K. Adamiak, 1994, *IEEE Trans. Ind. Appl*, Vol. 30, PP. 387-393.

- [40] M. Abdel-Salam, Z. Al-Hamouz, 1993, *J. phys. D : Appl. Phy.*, Vol. 26, PP.2202-2211.

- [41] Z. Al-Hamouz, 1998, *Elect. Power Syst. Res.*, Vol. 48, PP. 57-63.

- [42] Y. Zebboudj, 2000, *IEE Proc.-Sci. Meas. Technol.*, Vol. 147, PP. 74-80.

- [43] G.Hartmann, 1984, *IEEE Trans. IA20*, PP.1647-1651.

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU
DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE ELECTROTECHNIQUE**

OPTION: COMMANDE ELECTRIQUE

Proposé et dirigé par : Monsieur : H.NOURI

**Présenté par : Melle: BOUGUERRA Zahra
Melle: HADJAB Meryem**

Thème :

**MODELISATION DE LA DECHARGE COURONNE EN GEOMETRIE
FIL-CYLINDRE**

Summary :

The well – known technique of charge simulation has been adapted to model the electrical characteristic of cylindrical geometry.

The study involved the evaluation of the electric field, voltage, and charge density distributions in the presence of mild corona quenching.

The probleme has been iterated differently than the classic solution of Pauthenier by modifying the assumptions used for solving Poisson's equation.

A comparative study of the classical and modified solutions is performed. The results of the charge simulation model show good agreement with the suggested modified solution of Poisson's equation.

Key words:

Electrical discharge, corona, ionisation,electric potential, electrical field, space charge, corona density, Poisson's equation,FDM.

