



المسيلة : 2023/04/12

رقم : 2023 /GM /..05.....

مستخلص اللجنة العلمية لقسم الهندسة الميكانيكية
بخصوص تقييم مطبوعة جامعية

بناء على التقارير الإيجابية الواردة من السادة أعضاء لجنة دراسة وتقييم مطبوعة جامعية , والآتية
أسمائهم :

- الأستاذ حرايز توفيق
- الأستاذ خيرانى أمينة
- الأستاذ يزيد فارس
- أستاذ محاضر أ
- أستاذ محاضر أ
- أستاذ محاضر أ
- جامعة محمد بوضياف - المسيلة
- جامعة محمد بوضياف - المسيلة
- جامعة عمار ثلجي - الأغواط

صادق أعضاء اللجنة العلمية على قبول المطبوعة المنجزة من طرف الأساتذة : قشي سمية

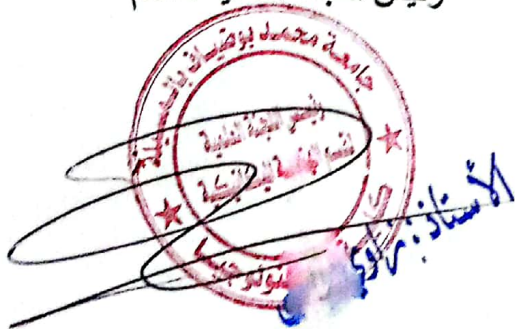
أستاذة محاضرة - ب - قسم الهندسة الميكانيكية , كلية التكنولوجيا , جامعة محمد بوضياف بالمسيلة.

MATHEMATIQUES 4

- تحت عنوان :

وفق البرنامج المقترح لطلبة السنة الثانية جذع مشترك للتكنولوجيا.

رئيس اللجنة العلمية للقسم



RÉPUBLIQUE ALÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF -M'SILA-



N° d'ordre:

Exercices Corrigés pour le Module

Série Mathématique 04

(Analyse Complexe)

Par:

SOMIA GUECHI

Pour:

Deuxième année Licence
Domaine : Sciences et Technologies

Courriels:

somia.guechi@univ-msila.dz

guechi.s2711@gmail.com

Année: 2021/2022

Table des matières

1	Nombres et fonctions complexes	1
1.1	Nombres complexes	1
1.2	Exercices corrigés sur les nombres complexes	2
1.3	Fonctions complexes	3
1.4	Exercices corrigés sur les fonctions complexes	4
2	Dérivation et intégration dans un domaine complexe	6
2.1	Dérivation dans un domaine complexe	6
2.2	Exercices corrigés	7
2.3	Intégration le long d'une courbe	8
2.4	Exercices corrigés sur l'intégration dans \mathbb{C}	10
3	Points singuliers et série de Laurent	15
3.1	Points singuliers	15
3.2	Séries entières	15
3.3	Séries de Taylor	16
3.4	Série de Laurent	17
3.5	Formules intégrales de Cauchy	17
3.6	Exercices corrigés	18
4	Théorème des résidus	23
4.1	Calcul des résidus	23
4.2	Calcul d'intégrales réelles par les complexes	23
4.3	Exercices corrigés	24

Chapitre 1

Nombres et fonctions complexes

1.1 Nombres complexes

♡ Il ya trois formes d'un nombre complexe

Forme algébrique :	Forme trigonométrique :	Forme exponentielle :
$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$	$z = z (\cos \theta + i \sin \theta),$	$z = R \times e^{i\theta}.$
	$R = z = \sqrt{x^2 + y^2}$: Le module de z ,	
	$\theta = \arg(z) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$: L'argument ¹ de z .	

♡ Le conjugué de z et $\bar{z} = x - iy$ alors $\operatorname{Re}(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

♡ **Formule de Moivre** : Si $z_1 = R_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ et $z_2 = R_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ alors

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= R_1 \times R_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)], \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{R_1}{R_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)], \\ z_1^n &= R_1^n (\cos n\theta_1 + i \sin n\theta_1). \end{aligned}$$

♡ **Racine n-ième d'un nombre complexe** : Si $z = R (\cos \theta + i \sin \theta)$ d'après la formule de Moivre

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = R^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

¹ Si $-\pi < \theta \leq \pi$ l'ongle θ est appelé l'argument principale noté par $\operatorname{Arg}(z)$, on a

$$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

♡ Courbe dans le plan complexe :

Le cercle de rayon R et de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ \Rightarrow $|z - z_0| = R$ ou la forme polaire
 $z(t) = z_0 + R \times e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Le segment de droite reliant deux points z_0 et z_1 \Rightarrow $z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$, ou
 $z(t) = (1 - t)z_0 + tz_1$, $t \in [0, 1]$.

Le disque ouvert de rayon R et de centre z_0 \Rightarrow $|z - z_0| < R$.

Le disque fermé de rayon R et de centre z_0 \Rightarrow $|z - z_0| \leq R$.

La couronne de centre z_0 \Rightarrow $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$,
 R_1 le rayon interne et
 R_2 le rayon externe

1.2 Exercices corrigés sur les nombres complexes**Exercice 01 :**

1. Soit $w = u + iv$, exprimer les fonctions u et v en fonction de x et y dans les exemples suivants :

$$A) w = z^3 \quad B) w = ze^z \quad C) w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad D) w = \frac{z - i}{1 - i\bar{z}} \quad E) w = \cos(z)$$

Solution :

On a $z = x + iy$,

$$(a) w = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 - i(y^3 - 3x^2y) \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \\ v(x, y) = -y^3 + 3x^2y \end{cases}$$

$$(b) w = ze^z = (x + iy) e^{(x+iy)} = (x + iy) e^x e^{iy} = (x + iy) e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y \\ v(x, y) = xe^x \sin y + ye^x \cos y \end{cases}.$$

$$(c) w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{z^2 + 1}{z} \right) \times \frac{\bar{z}}{\bar{z}}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2} \frac{x^3 + x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad v(x, y) = \frac{-1}{2} \frac{y^3 + y}{x^2 + y^2}.$$

$$(d) w = \frac{z - i}{1 - i\bar{z}} = \frac{x + i(y - 1)}{1 - y - ix} \times \frac{1 - y + ix}{1 - y + ix}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{-2xy + 2x}{(1 - y)^2 - x^2} \quad \text{et} \quad v(x, y) = \frac{x + (1 - y)^2}{(1 - y)^2 - x^2}.$$

$$(e) w = \cos(z) = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y. \text{ (ou } \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{).}$$

2. Ecrire les nombres complexes sous forme algébrique :

$$A) w = \frac{3 + 2i}{1 - i}, \quad B) w = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} - i - 1 \right)^7,$$

Solution :

$$(a) w = \frac{3 + 2i}{1 - i} = \frac{3 + 2i}{1 - i} \times \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i,$$

$$(b) w = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} - i - 1 \right) = i.$$

3. Trouver l'ensemble des points, tel que $c \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C}$:

$$A) \operatorname{Re}(z^2) \geq 1 \quad B) 1 < |z - 3| < 2 \quad C) \arg(z) = \frac{\pi}{2} \\ D) |z - i| = 4 \quad E) az + \bar{a}\bar{z} + c = 0.$$

Solution :

$$(a) \operatorname{Re}(z^2) \geq 1 \Rightarrow x^2 - y^2 \geq 1,$$

L'équation générale d'un Hyperbole est $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

(b) $1 < |z - 3| < 2 \Rightarrow$ L'ensemble des points est la couronne de centre $z_0 = 3$ et de rayon interne $r_1 = 1$ et de rayon externe $r_2 = 2$.

(c) $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ L'ensemble des points est la demi-droite de l'équation $x = 0$.

(d) $|z - i| = 4 \Rightarrow$ L'ensemble des points est le cercle de centre $z_0(0, 1)$ et de rayon $R = 4$.

(e) On pose $a = \alpha + i\beta$ et $z = x + iy \Rightarrow az + \bar{a}\bar{z} + c = 0 \Rightarrow \beta y = \alpha x + \frac{c}{2}$ alors l'ensemble des points est une droite.

1.3 Fonctions complexes

♣ La forme générale d'une fonction complexe ² ³ est

$$\omega = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z \in \mathbb{C} \text{ et } x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

tel que $u = \operatorname{Re}(f)$ et $v = \operatorname{Im}(f)$.

² f est *uniforme* : si une seule valeur de ω correspond à chaque valeur de z .

³ f est *multiforme* : si plusieurs valeurs de ω correspondent à chaque valeur de z .

♣ f admet une limite $l = a + ib$ en $z_0 = x_0 + iy_0$, a, b, x_0 et y_0 sont des réels alors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = a \text{ et } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = b.$$

♣ f est dite continue en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

♣ f est dite continue dans $D \subset \mathbb{C}$ si elle est continue en tous les points de D .

♣ Fonctions élémentaires

1. *Fonction exponentielle* :

$$\blacklozenge e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

$$\blacklozenge e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1+z_2},$$

$$\blacklozenge \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

2. *Fonction logarithmique*⁴ : $\forall z \in \mathbb{C}^*$:

$$\log(z) = \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Log}(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z), \quad -\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$$

$\text{Log}(z)$: est la valeur principale de $\log(z)$.

1.4 Exercices corrigés sur les fonctions complexes

Exercice 01 : Résoudre les équations :

$$A) z^4 - z^2 + 1 = 0 \quad B) \sin z = 5 \quad C) \exp(e^z) = 1$$

$$D) \log(z) = i - 1 \quad E) z^{1-i} = 4.$$

Solution :

1. (a) $z^4 - z^2 + 1 = 0$, on pose $w = z^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{w}$

alors $z^4 - z^2 + 1 = 0 \Rightarrow w^2 - w + 1 = 0$ donc $S = \left\{ -e^{i\frac{\pi}{6}}, -e^{-i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{-i\frac{\pi}{6}} \right\}$.

(b) $\sin z = 5 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 5 \times 2i \Rightarrow (e^{iz})^2 - 10i(e^{iz}) - 1 = 0$

donc $S = \left\{ -i \log(5 + 4\sqrt{6})i, -i \log(5 - 4\sqrt{6})i \right\}$.

⁴Les fonctions logarithmiques complexes \log ont des propriétés analogues à celles des fonctions logarithmiques réelles, mais ne sont pas vérifiées pour Log .

$$(c) \exp(e^z) = 1 \Rightarrow e^z = 2ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = \log(2ik\pi) = \ln(2k\pi) + i\left(\frac{1}{2} + k'\right)\pi, \\ k' \in \mathbb{Z}$$

$$(d) \log(z) = i - 1 \Rightarrow z = e^{-1}(\cos(1) + i\sin(1)).$$

$$(e) z^{1-i} = 4 \Rightarrow \log(z^{1-i}) = \log(4) \Rightarrow (1-i)\log z = \ln(4) + i2k\pi, \Rightarrow \log z = \\ \frac{\ln(4) + i2k\pi}{(1-i)},$$

$$\text{alors } \ln|z| + i\theta = \frac{\ln(4) + i2k\pi}{(1-i)} \times \frac{1+i}{1+i} \text{ donc } |z| = \ln 2 - k\pi \text{ et } \theta = \ln 2 + k\pi.$$

2. Trouver les valeurs de : A) $\log(1-i)$, B) i^i C) $(-1)^{\sqrt{2}}$.

Solution :

$$(a) \log(1-i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{-\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(b) i^i = e^{i\log i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(c) (-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log(-1)}$$

Chapitre 2

Dérivation et intégration dans un domaine complexe

2.1 Dérivation dans un domaine complexe

★ **Domaine complexe** : Un domaine dans un plan complexe est un ensemble *ouvert* et *connexe*.

★ **Fonction holomorphe (dérivable ou analytique)** : Une fonction complexe (1.1) est dite holomorphe dans un domaine complexe D si

1. Les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ existent en tout point $z \in D$.
2. f vérifient les conditions de Cauchy-Riemann¹

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

★ La dérivée d'une fonction complexe : Si f est holomorphe dans D alors

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z \in D.$$

★ La fonction u est dite harmonique si

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

¹Les conditions de Cauchy-Riemann aussi peuvent être écrits sous la forme $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

2.2 Exercices corrigés

Exercice 01 : Trouver un domaine Ω sur lequel les fonctions suivantes sont holomorphes, et donner l'expression de f' en fonction de z si elle existe.

$$\begin{aligned} a) f(z) &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}, & b) f(z) &= \frac{1}{z} + z \operatorname{Re} z, \\ c) f(z) &= \operatorname{Re} z, & d) f(z) &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \\ e) f(z) &= -e^x \sin y + i e^x \cos y, & f) f(z) &= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + 2i \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ g) f(z) &= \operatorname{Im} z, & h) f(z) &= \frac{\cos 2\theta}{r^2} - i \frac{\sin 2\theta}{r^2}. \end{aligned}$$

Solution : Vérifions les conditions de Cauchy-Riemann

1. (a) $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$

$$M_1) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 - x^2)^2} \neq \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-y^2 + x^2}{(y^2 - x^2)^2} \text{ alors la fonction } f \text{ n'est pas holomorphe.}$$

$$M_2) f(z) = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \neq 0, \text{ alors la fonction } f \text{ n'est pas holomorphe.}$$

(b) $f(z) = \frac{1}{z} + z \operatorname{Re} z = \frac{x - iy}{y^2 - x^2} + x^2 + ixy = \frac{1}{z} + \frac{z^2}{2} + \frac{z\bar{z}}{2},$

$$M_1) \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}, \text{ alors la fonction } f \text{ n'est pas holomorphe.}$$

$$M_2) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2} \neq 0, \text{ alors la fonction } f \text{ n'est pas holomorphe.}$$

(c) $f(z) = \operatorname{Re} z = x = \frac{z + \bar{z}}{2},$

$$M_1) \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \text{ alors la fonction } f \text{ n'est pas holomorphe.}$$

$$M_2) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ alors la fonction } f \text{ n'est pas holomorphe.}$$

(d) $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|z| + i\theta = \operatorname{Log}(z)$

$$M_1) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ alors la fonction } f \text{ est holomorphe.}$$

$$M_2) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \text{ alors la fonction } f \text{ est holomorphe.}$$

$$\text{Alors } \Omega = \mathbb{C} - \{(0, 0)\} \text{ et } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{z}.$$

(e) $f(z) = -e^x \sin y + ie^x \cos y = ie^z$, f est holomorphe sur

$$\Omega = \mathbb{C} \text{ et } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = ie^z.$$

(f) $f(z) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + 2i \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-1}{\bar{z}^2}$, f n'est pas holomorphe.

(g) $f(z) = \operatorname{Im} z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, f n'est pas holomorphe.

(h) $f(z) = \frac{\cos 2\theta}{r^2} - i \frac{\sin 2\theta}{r^2} = \frac{\cos 2\theta - i \sin 2\theta}{r^2} = \frac{1}{(re^{i\theta})^2} = \frac{1}{z^2}$, alors $\Omega = \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$
 et $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2}{z^3}$.

2.3 Intégration le long d'une courbe

♠ Définitions :

1. **Arc** : On appelle arc dans un domaine complexe D une application dérivable

$$\begin{aligned} \gamma &: [a, b] \longrightarrow D \\ &: t \longrightarrow \gamma(t) = x(t) + iy(t) \end{aligned}$$

$\gamma(a)$: est le point de départ (ou l'origine),

$\gamma(b)$: est le point d'arrive (ou l'extrémité).

2. **Chemin** : La réunion d'arcs.

3. **Chemin fermé (lacet)** : un chemin est dite fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

4. **Longueur d'un chemin** : Si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ et $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe est continue, alors la longueur de γ est définie comme étant

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

5. **Un domaine simplement connexe** : D du plan complexe simplement connexe si toute courbe fermée simple de D peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter D . Dans le cas contraire D est dit multiplement connexe.

♠ **Propriétés :** Soit γ une courbe dans le plan complexe, et $-\gamma$ la courbe γ orientée dans son sens inverse. on suppose $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, alors

1. $\int_{\gamma} f(z) + g(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz,$
2. $\int_{\gamma} \alpha f(z) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz, \quad \alpha \in \mathbb{C}$
3. $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz,$
4. $\int_{\gamma=\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$

♠ On définit l'intégrale de f le long de la courbe γ ² par trois formes :

1. **Méthode directe (la primitive) :** si f et F sont des fonctions *holomorphes* dans un domaine connexe D et telles que $F'(z) = f(z)$ alors

$$F(z) = \int f(z) dz,$$

si z_1 et z_2 sont deux points quelconques dans D , alors pour toute courbe γ de point initial z_1 et de point final z_2 on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = [F(z)]_{z_1}^{z_2}.$$

2. **Méthode de la décomposition :** soit f une fonction holomorphe sous forme (1.1) et $z = x + iy$, alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (u + iv)(dx + idy).$$

3. **Changement de variable :** Soit f une fonction continue, on pose $z(t) = \gamma(t) \Rightarrow dz = \gamma'(t) dt$ alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f[\gamma(t)] \gamma'(t) dt, \quad t \in [a, b].$$

♠ **Théorèmes de Cauchy :**

Si f est une fonction holomorphe dans un domaine D et sur sa frontière Γ

$$\oint_{\Gamma} f(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ce théorème fondamental est souvent appelé théorème de Cauchy, il est à la fois valable pour des domaines simplement connexes ou multiplement connexes.

♠

²L'intégrale le long d'une courbe est aussi appelée intégrale le long d'un *chemin*, ou intégrale *curviligne complexe*.

2.4 Exercices corrigés sur l'intégration dans \mathbb{C}

Exercice 01 : Calculer $\int_{1-2i}^{3+i} (2z+3) dz$ par trois méthodes :

1. Méthode directe :

$$\begin{aligned} \int_{1-2i}^{3+i} (2z+3) dz &= [z^2 + 3z]_{1-2i}^{3+i} \\ &= [(3+i)^2 + 3(3+i) - (1-2i)^2 - 3(1-2i)] \\ &= 17 + 19i. \end{aligned}$$

2. La décomposition : Le long de la droite joignant $(1-2i)$ et $(3+i)$, il nous faut d'abord trouver l'équation $y = ax + b$ du segment.

$$\begin{cases} z = 1 - 2i \Rightarrow x = 1, y = -2 \\ z = 3 + i \Rightarrow x = 3, y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}.$$

On pose $z = x + iy \Rightarrow dz = dx + idy$ et on a $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \Rightarrow dy = \frac{3}{2}dx$ alors

$$\begin{aligned} \int_{1-2i}^{3+i} (2z+3) dz &= \int_1^3 \left[2 \left(x + i \left(\frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \right) \right) + 3 \right] \left[dx + \frac{3}{2}i dx \right] \\ &= \left(1 + \frac{3}{2}i \right) \int_1^3 [2x + i(3x - 7) + 3] dx \\ &= 17 + 19i. \end{aligned}$$

3. Changement de variable : Soit γ le segment d'extrémités $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 3 + i$ qui définie par

$$\gamma = \{z(t) \in \mathbb{C}, \text{ ou } z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \text{ et } t \in [0, 1]\},$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = 1 - 2i + t(2 + 3i) \\ &\Rightarrow dz = (2 + 3i) dt, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{1-2i}^{3+i} (2z+3) dz &= \int_0^1 [2(1-2i + t(2+3i)) + 3] (2+3i) dt \\ &= (2+3i) \int_0^1 (2-4i + 2t(2+3i) + 3) dt \\ &= 17 + 19i. \end{aligned}$$

Exercice 02 : Evaluer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(1+i-z)^2} dz, \quad \gamma \text{ un cercle de centre } z_0 = 1+i \text{ et de rayon } 2.$$

Solution :

Utilisons la forme polaire d'un cercle

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= z(\theta) = z_0 + R \times e^{i\theta} = 1+i + 2e^{i\theta}, \text{ ou } \theta \in [0, 2\pi] \\ \Rightarrow dz &= 2ie^{i\theta} d\theta, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z}{(1+i-z)^2} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\theta)}{(1+i-\gamma(\theta))^2} 2ie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} [(1+i)e^{-i\theta} + 2] d\theta \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

Exercice 03 :

1. Soit D un domaine borné, dont le bord est γ , γ est un cercle de centre $z_0 = 0$ et de rayon R , calculer :

a) $\int_{\gamma} x dz, \int_{\gamma} y dz, \text{ et } \int_{\gamma} \bar{z} dz.$

b) Calculer $\int_{\gamma} z^2 dz$, tel que :

♣ γ est l'union de segment horizontal de 0 à 1 et de segment vertical de 1 à $1+2i$.

♣ γ étant le segment de droite qui joint les points 0 et $1+2i$.

2. Soit γ le cercle dont l'équation $|z| = 1$, calculer : $\int_{\gamma} \frac{\log z}{z^2} dz, \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz, \int_{\gamma} \frac{dz}{|z|^2}.$

3. γ étant le segment de droite qui joint les points $1+i$ et $3+2i$, calculer

$$\int_{\gamma} (x^2 - y^2) dx - 2xy dy.$$

Solution :

1. Utilisons la forme polaire d'un cercle

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= z(\theta) = z_0 + R \times e^{i\theta} = R \times e^{i\theta}, \text{ ou } \theta \in [0, 2\pi] \\ \Rightarrow dz &= Rie^{i\theta}d\theta,\end{aligned}$$

(a) On pose $z(\theta) = \gamma(\theta)$ et $x = R \cos \theta = R \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ alors

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} x dz &= \int_0^{2\pi} \left(R \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) Rie^{i\theta} d\theta \\ &= R^2 \pi i.\end{aligned}$$

(ou on pose $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$).

(b) On pose $z(\theta) = \gamma(\theta)$ et $y = R \sin \theta = R \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ alors

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} y dz &= \int_0^{2\pi} \left(R \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) Rie^{i\theta} d\theta \\ &= -R^2 \pi.\end{aligned}$$

(ou on pose $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$).

(c) On pose $z(\theta) = \gamma(\theta)$ alors

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_0^{2\pi} (Re^{-i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta \\ &= 2R^2 \pi.\end{aligned}$$

2. Il ya trois méthodes pour calculer l'intégrale $\int_{\gamma} z^2 dz$:

♣ Changement de variable : Soit γ_1 le segment d'extrémités $z_1 = 0$ et $z_2 = 1$ qui définie par

$$\gamma_1 = \{z(t) \in \mathbb{C}, \text{ ou } z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = t \text{ et } t \in [0, 1]\},$$

et γ_2 le segment d'extrémités $z_3 = 1$ et $z_4 = 1 + 2i$ qui définie par

$$\gamma_2 = \{z(t) \in \mathbb{C}, \text{ ou } z(t) = z_3 + t(z_4 - z_3) = 1 + 2it \text{ et } t \in [0, 1]\},$$

et on pose $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, alors

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} z^2 dz &= \int_{\gamma_1} z^2 dz + \int_{\gamma_2} z^2 dz \\ &= \int_0^1 t^2 dt + 2i \int_0^1 (1 + 2it)^2 dt \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{-2}{3}i - 4 \right) \\ &= \frac{-1}{3} (2i + 11).\end{aligned}$$

♣ Soit γ_3 le segment d'extrémités $z_1 = 0$ et $z_4 = 1 + 2i$ qui définie par

$$\gamma_1 = \{z(t) \in \mathbb{C}, \text{ ou } z(t) = (1 + 2i)t \text{ et } t \in [0, 1]\},$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} z^2 dz &= \int_0^{1+2i} z^2 dz \\ &= (1 + 2i) \int_0^1 (1 + 2i)^2 t^2 dt \\ &= \frac{-1}{3} (2i + 11). \end{aligned}$$

3. On le cercle dont l'équation $|z| = 1 \Rightarrow z_0 = 0$ et $R = 1$, utilisons la forme polaire d'un cercle

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= z(\theta) = z_0 + R \times e^{i\theta} = e^{i\theta}, \text{ ou } \theta \in [0, 2\pi] \\ \Rightarrow dz &= ie^{i\theta} d\theta, \end{aligned}$$

On pose $z(\theta) = \gamma(\theta)$ alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\log(z)}{z^2} dz &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{i\theta}{e^{2i\theta}} \right) ie^{i\theta} d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \theta e^{-i\theta} d\theta, \text{ (l'intégration par partie)} \\ &= -2\pi i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{e^{2i\theta}} \right) ie^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{|z|^2} &= \int_{\gamma} \frac{dz}{z\bar{z}} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{e^{i\theta} \times e^{-i\theta}} \right) ie^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = 0. \end{aligned}$$

4. Le long de la droite joignant $1 + i$ et $3 + 2i$, il nous faut d'abord trouver l'équation $y = ax + b$ du segment.

$$\begin{cases} z = 1 + i \Rightarrow x = 1, y = 1 \\ z = 3 + 2i \Rightarrow x = 3, y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

On pose $z = x + iy \Rightarrow dz = dx + idy$ et on a $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow dy = \frac{1}{2}dx$ alors

$$\begin{aligned} \int_{1+i}^{3+2i} (x^2 - y^2) dx - 2xydy &= \int_1^3 \left[x^2 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right)^2 \right] dx - 2x \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_1^3 [4x^2 - (x+1)^2] dx - 2(x^2 + x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_1^3 [3x^2 - 2x - 1] - 2i(x^2 + x) dx \end{aligned}$$

Chapitre 3

Points singuliers et série de Laurent

3.1 Points singuliers

Soit f une fonction uniforme. Un point en lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un point singulier ou une singularité de f .

1. **Singularités apparentes** : Le point singulier z_0 est appelé apparente de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
2. **Pôles** : Si l'on trouve un entier positif n tel que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \neq 0$, et $a \in \mathbb{C}$, alors z_0 est appelé *une pôle d'ordre n* , si $n=1$ alors z_0 est appelé *un pôle simple*.
3. **Singularités essentielles** : Une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

3.2 Séries entières

Une série de la forme

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots \\ = & \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

est appelée *série entière* en $(z - z_0)$. Nous pouvons obtenir le rayon de convergence R de la série entière par :

1. Critère de d'Alembert : $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ et $\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est convergente si $R < 1$, et diverge si $R > 1$.

2. Critère de d'Alembert : $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_{n+1}|}}$ et $\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est convergente si $R < 1$, et diverge si $R > 1$.

Exemple :

1. $\sum_{n=0}^{n=+\infty} z^n \Rightarrow a_n = 1$, alors $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = 1$, Cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| \geq 1$.
2. $\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{z^n}{n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$, alors $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = 1$, Cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$.

3.3 Séries de Taylor

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple D et sur D . Alors

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots$$

Ceci est appelé le théorème de Taylor et les séries précédentes sont appelées séries de Taylor ou développement de Taylor de $f(z)$. et le domaine de convergence de la dernière série est défini par $|z - z_0| < R$.

Quelques séries particulières : La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence.

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$, (valide pour $|z| < \infty$)
2. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$, (valide pour $|z| < \infty$)
3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$, (valide pour $|z| < \infty$)
4. $\log z = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots$, (valide pour $|z| < 1$)
5. $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^{n-1} z^n + \dots$, (valide pour $|z| < 1$)

3.4 Série de Laurent

On suppose que f est uniforme et holomorphe dans un domaine D sauf au pôle z_0 , alors la série de Laurent en z_0 de la fonction f est

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ avec } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

γ un contour fermé autour de z_0 .

Remarques :

– La partie

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots$$

est appelée *la partie analytique* de la série de Laurent.

– La partie

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

est appelée *la partie principale* de la série de Laurent.

– Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

– Si $z = z_0$ est une singularité essentielle de $f(z) \Rightarrow$ la partie principale du développement de Laurent possède une infinité de terme.

– Si $z = z_0$ est un pôle de $f(z) \Rightarrow$ la partie principale du développement de Laurent possède un nombre fini de termes.

– Pour développer rapidement une fonction en série de Laurent sans calculer les coefficients a_n , il est utile de connaître quelques développements de Taylor.

3.5 Formules intégrales de Cauchy

Une fonction f est dite analytique au point z_0 si elle est développable en série entière au voisinage de z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

alors Pour toute fonction analytique f , on a les formules intégrales de Cauchy :

1. Si a un pôle simple ou d'ordre 1

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i [f(z)]_{z=a},$$

et si a est à l'extérieure de Γ

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0.$$

2. Si a un pôle d'ordre n

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}f}{dz^{n-1}} \right]_{z=a}.$$

3. Si a et b deux pôles simples (d'ordre 1)

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2\pi i}{a-b} ([f(z)]_{z=a} - [f(z)]_{z=b}).$$

3.6 Exercices corrigés

Exercice 01 :

1. Donner le développement de Laurent de

a) $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z+4)}$ dans le domaine $2 < |z| < 4$

b) $f(z) = \frac{1}{(2z+1)(3z+1)}$ dans $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$,

c)* $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ dans $1 < |z| < 3$,

2. Trouver les singularité de f et indiquer leurs type :

a) $f(z) = \frac{z}{z+i}$ b) $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)(2z-3)^2}$

c) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ d) $f(z) = \cos \frac{1}{z}$

e) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ f)* $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3+1}$,

g)* $f(z) = \frac{z \cos z}{(z^2+1)^3}$, h)* $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$.

Solution :

1. (a) $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z+4)}$ dans le domaine $2 < |z| < 4$, Séparons d'abord la fraction

$$\frac{1}{(z+2)(z+4)}$$

en fractions simples

$$\frac{1}{(z+2)(z+4)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+4} \right)$$

et utilisons le développement de Taylor. de

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^{n-1} z^n + \dots, \text{ (valide pour } |z| < 1).$$

Ecrivons maintenant la série de Laurent de chaque fraction :

Puisque

$$\begin{aligned} 2 < |z| &\Rightarrow \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{2}{z}} \\ &= \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 - \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \dots \right), \end{aligned}$$

(valide pour $|\frac{2}{z}| < 1$)

Puisque

$$\begin{aligned} |z| < 4 &\Rightarrow \frac{1}{z+4} = \frac{1}{4\left(\frac{z}{4}+1\right)} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{z}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{4} + \left(\frac{z}{4}\right)^2 - \left(\frac{z}{4}\right)^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

(valide pour $|\frac{z}{4}| < 1$)

alors la série de Laurent de f est

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{(z+2)(z+4)} &= \frac{z+1}{2} \left(\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+4} \right) \\ &= \frac{z+1}{2} \left(\frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 - \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \dots \right) \right) \\ &\quad - \frac{z+1}{2 \cdot 4} \left(1 - \frac{z}{4} + \left(\frac{z}{4}\right)^2 - \left(\frac{z}{4}\right)^3 + \dots \right) \\ &= \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} - \frac{8}{z^4} + \dots \right) \\ &\quad - \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{z}{16} + \frac{z^2}{64} + \dots \right) \\ &= \frac{3}{8} - \frac{3z}{32} + \frac{3z^2}{128} - \dots - \frac{1}{2z} + \frac{1}{z^2} \\ &\quad - \frac{2}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

On remarque que la partie analytique est $\frac{3}{8} - \frac{3z}{32} + \frac{3z^2}{128} - \dots$, et la partie principale est $\frac{1}{2z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \dots$

(b) $f(z) = \frac{1}{(2z+1)(3z+1)}$ dans $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$, Séparons d'abord la fraction

$$\frac{1}{(2z+1)(3z+1)}$$

en fractions simples

$$\frac{1}{(2z+1)(3z+1)} = \frac{3}{3z+1} - \frac{2}{2z+1},$$

et utilisons le développement de Taylor. de

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^{n-1} z^n + \dots,$$

(valide pour $|z| < 1$).

Ecrivons maintenant la série de Laurent de chaque fraction :

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} < |z| &\Rightarrow \frac{1}{3z+1} = \frac{1}{3z\left(1 + \frac{1}{3z}\right)} \\ &= \frac{1}{3z} \frac{1}{1 + \frac{1}{3z}} \\ &= \frac{1}{3z} \left(1 - \frac{1}{3z} + \left(\frac{1}{3z}\right)^2 - \left(\frac{1}{3z}\right)^3 + \dots \right), \end{aligned}$$

(valide pour $\left|\frac{1}{3z}\right| < 1$).

Puisque $|z| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2z+1} = 1 - 2z + (2z)^2 - (2z)^3 + \dots$, (valide pour $|2z| < 1$)
alors la série de Laurent de f est

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2z+1)(3z+1)} &= \frac{3}{3z+1} - \frac{2}{2z+1} \\ &= \frac{3}{3z} \left(1 - \frac{1}{3z} + \left(\frac{1}{3z}\right)^2 - \left(\frac{1}{3z}\right)^3 + \dots \right) \\ &\quad - 2(1 - 2z + (2z)^2 - (2z)^3 + \dots) \\ &= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{9z^3} - \dots \right) - (1 - 4z + 8z^2 - 16z^3 + \dots) \\ &= -1 + 4z - 8z^2 + 16z^3 + \dots + \frac{1}{z} - \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{9z^3} - \dots \end{aligned}$$

On remarque que la partie analytique est

$$-1 + 4z - 8z^2 + 16z^3 + \dots,$$

et la partie principale est $\frac{1}{z} - \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{9z^3} - \dots$

- (a) Le point singulier de $f(z) = \frac{z}{z+i}$ est $z = -i$, ce point est un pôle simple car :

$$\lim_{z \rightarrow -z_0} (z - z_0)^1 f(z) = \lim_{z \rightarrow -z_0} (z + i)^1 f(z) = -i \neq 0.$$

- (b) Les points singuliers de $f(z) = \frac{e^z}{4(z+1)(z-\frac{3}{2})^2}$ sont $z_0 = -1$ et $z_1 = \frac{3}{2}$, ces points sont des pôles car :

$$\lim_{z \rightarrow -z_0} (z - z_0)^1 f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z + 1)^1 f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z}{(2z - 3)^2} = \frac{1}{25e} \neq 0.$$

$$\lim_{z \rightarrow -z_1} (z - z_1)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{3}{2}} \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{e^z}{4(z+1)} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{10} \neq 0.$$

- (c) Les points singuliers de $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ sont $z_k = k\pi$, ces points sont des pôles simples car :

$$\lim_{z \rightarrow -z_0} (z - z_0)^1 f(z) = \lim_{z \rightarrow k\pi} (z - k\pi) f(z) = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{z - k\pi}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{1}{\cos z} = \text{finie} \neq 0.$$

on utilise la règle de L'Hôpital.

- (d) Le point singulier de $f(z) = \cos \frac{1}{z}$ est $z = 0$, ce point est la singularité essentielle car :

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \Rightarrow \cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \dots$$

alors la partie principale du développement de Laurent possède une *infinité* de terme.

- (e) Le point singulier de $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ est $z = 0$, ce point est la singularité apparente car :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{1} = 1, \text{ (on utilise la règle de l'Hôpital).}$$

Exercice 02 : Par les formules du Cauchy évaluer chacune des intégrales suivantes sur les courbes Γ indiquées :

1. Γ un cercle de centre $z = 1$ et de rayon 2

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2 + z + 1}{z - 1 - i} dz.$$

2. Γ un cercle de centre $z = 1 + i$ et de rayon 2

$$\oint_{\Gamma} \frac{z + e^{2z} + 1}{z^4} dz.$$

3. Γ un cercle de centre $z = 1$ et de rayon $\frac{1}{2}$

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{i2\pi z} + 1}{z^2 - 1} dz.$$

Solution :

1. Le pôle simple est $1 + i$ et se trouve à l'intérieur du cercle Γ , donc

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2 + z + 1}{z - 1 - i} dz = 2\pi i (z^2 + z + 1)_{z=i+1} = -6\pi + 4\pi i.$$

2. Le pôle est 0 (d'ordre 4) et se trouve à l'intérieur du cercle Γ , donc

$$\oint_{\Gamma} \frac{z + e^{2z} + 1}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \left[\frac{d^3}{dz^3} (z + e^{2z} + 1) \right]_{z=0} = \frac{8\pi i}{3}.$$

3. Les pôles sont 1 et -1 deux pôles simples, mais seul le pôle 1 est à l'intérieur du cercle Γ , donc

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{2i\pi z} + 1}{z^2 - 1} dz = 2\pi i.$$

Chapitre 4

Théorème des résidus

Pour obtenir le résidu d'une fonction f en $z = z_0$ on pourrait d'écrire le développement de $f(z)$ en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$. Dans beaucoup de cas on peut déterminer le résidu sans passer par le développement de Laurent.

4.1 Calcul des résidus

◇ **Calcul des résidus :**

Le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent est appelé résidu de la fonction au pôle $z = z_0$. Il est donné par

$$a_{-1} \equiv \text{Rés} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \right], \text{ Si } z_0 \text{ est un pôle d'ordre } k.$$

◇ **Théorème des résidus :** Si la fonction possède plusieurs pôles à l'intérieur d'un contour γ ,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left[\sum \text{Rés} \right], \quad \text{où } \sum \text{Rés} \text{ est la somme des résidus aux pôles.}$$

4.2 Calcul d'intégrales réelles par les complexes

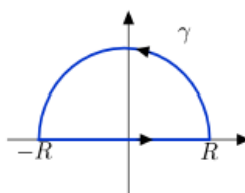
Au lieu de calculer une intégrale réelle directement, on calcule plutôt l'intégrale complexe en choisissant un contour adéquat, et les plus simples intégrales de contour sont

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$a) \oint_{\gamma} f(z) dz,$$

b) Utiliser le théorème des résidus, puis prendre $R \rightarrow +\infty$.

et $\gamma =$



$$2. \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

$$a) \text{ Poser } z = e^{i\theta}, \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, d\theta = \frac{dz}{iz}$$

b) Calculer $\oint_{\gamma} f(z) dz$ avec le théorème des résidus.

4.3 Exercices corrigés

Exercice 01 : Par le théorème des résidus évaluer chacune des intégrales suivantes sur les courbes γ indiquées :

1. γ un cercle de centre $z = 0$ et de rayon 1

$$\oint_{\gamma} \frac{z^2 + 2}{(z - 2)(2z + i)} dz.$$

2. γ un cercle de centre $z = 0$ et de rayon π

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(2z + \pi)^2 (z - \frac{\pi}{3})^3} dz.$$

3. γ un cercle de centre $z = 1$ et de rayon $\frac{1}{2}$,

$$\oint_{\gamma} \frac{z - \pi}{\sin \pi z} dz.$$

Solution :

1. Seul le pôle simple $\frac{-i}{2}$ est à l'intérieur du cercle γ , donc

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{z - \pi}{\sin \pi z} dz &= 2\pi i \left(\sum \text{Rés} \right) \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow -i} (z - 1) f(z) \right) \\ &= 2(\pi - 1)i. \end{aligned}$$

2. Les deux pôles $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont à l'intérieur du cercle γ , donc

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{1}{(2z + \pi)^2 (z - \frac{\pi}{3})^3} dz &= 2\pi i \left(\sum \text{Rés} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

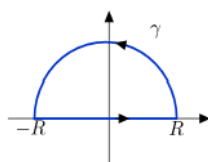
3. Seul le pôle simple $z = 1$ est à l'intérieur du cercle γ , donc

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{z^2 + 2}{(z - 2)(2z + i)} dz &= 2\pi i \left(\sum \text{Rés} \right) \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow \frac{i}{2}} \left(z + \frac{i}{2} \right) f(z) \right) \\ &= \frac{-7\pi i}{8 + 2i}. \end{aligned}$$

Exercice 02 : Soit la fonction

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$$

1. Calculer l'intégrale $I = \int_{\gamma} f(z) dz$ avec γ le contour suivant



2. Sachant que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0, \text{ en déduire, } \lim_{R \rightarrow +\infty} I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Solution :

1. En utilisant la méthode des résidus, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} dz &= 2\pi i \left(\sum \text{Rés} \right) \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow i} \left[(z - i)^2 \frac{z^2}{(z - i)^2 (z + i)^2} \right]' \right) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} dz + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice 03 : Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 2)^2} dx$$

$$b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 - x + \frac{5}{4})^3} dx.$$

$$c) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(\theta) - 2} d\theta$$

$$d) \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \sin(\theta)} d\theta.$$

Solution :

1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 2)^2} dx \longrightarrow \oint_{\gamma} \frac{1}{(z^2 + 2)^2} dz = \oint_{\gamma} \frac{1}{(z - i\sqrt{2})^2 (z + i\sqrt{2})^2} dz$$

Seul le pôle $i\sqrt{2}$ est à l'intérieur du contour γ , donc

$$\begin{aligned}
 \oint_{\gamma} \frac{1}{(z^2 + 2)^2} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} dz + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \\
 &= 2\pi i \left(\sum \text{Rés} \right) \\
 &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2}} \left[\frac{1}{1!} \frac{d}{dz} (z - i\sqrt{2})^2 f(z) \right] \\
 &= 2\pi i \left(\frac{-i}{8\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Comme $\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ est paire, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 - x + \frac{5}{4})^3} dx \longrightarrow \oint_{\gamma} \frac{1}{(z^2 - z + \frac{5}{4})^3} dz = \oint_{\gamma} \frac{1}{(z - i - \frac{1}{2})^3 (z + i - \frac{1}{2})^3} dz$$

Seul le pôle $i + \frac{1}{2}$ (d'ordre 3) est à l'intérieur du contour γ , donc

$$\begin{aligned}
 \oint_{\gamma} \frac{1}{(z^2 - z + \frac{5}{4})^3} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2 - z + \frac{5}{4})^3} dz + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{(x^2 - x + \frac{5}{4})^3} dx \\
 &= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 - x + \frac{5}{4})^3} dx \\
 &= 2\pi i \left(\sum \text{Rés} \right) \\
 &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i + \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (z - i - \frac{1}{2})^3 f(z) \right] \\
 &= 2\pi i \left(\frac{-3i}{16} \right) \\
 &= \frac{3\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 - x + \frac{5}{4})^3} dx = \frac{3\pi}{8}.$$

3. Posons $z = e^{i\theta} \implies \theta = \frac{\ln z}{i}$, alors $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et on a $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(\theta) - 2} d\theta &= \oint_{\gamma} \frac{2}{i(z^2 - 4z) + 1} dz \\ &= \oint_{\gamma} \frac{2}{i(z - 2 - \sqrt{3})(z - 2 + \sqrt{3})} dz \end{aligned}$$

Les pôles sont $z = 2 \pm \sqrt{3}$ et seul le pôle $2 - \sqrt{3}$ (d'ordre 1) est à l'intérieur du contour γ , donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(\theta) - 2} d\theta &= \oint_{\gamma} \frac{2}{i(z^2 - 4z) + 1} dz \\ &= 2\pi i \left(\sum \text{Rés} \right) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2 - \sqrt{3}} \left[(z - 2 + \sqrt{3}) f(z) \right] \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{-i\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{-2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

4. Posons $z = e^{i\theta} \implies \theta = \frac{\ln z}{i}$, alors $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et on a $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \sin(\theta)} d\theta &= \oint_{\gamma} \frac{-1}{z^2 - 3iz - 1} dz \\ &= \oint_{\gamma} \frac{2}{i(z - i\frac{3+\sqrt{5}}{2})(z - i\frac{3-\sqrt{5}}{2})} dz \end{aligned}$$

Les pôles sont $z = i\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ et seul le pôle $i\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (d'ordre 1) est à l'intérieur du contour γ , donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \sin(\theta)} d\theta &= \oint_{\gamma} \frac{-1}{z^2 - 3iz - 1} dz \\ &= 2\pi i \left(\sum \text{Rés} \right) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \left[\left(z - i\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) f(z) \right] \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{i\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] S. MURRAY R. *Variables complexes : cours et problèmes*, volume 12 de Série Schaum, New York 1973.
- [2] F. BERTRANDE, D. FREDON, M. MAUMY-BERTRANDE. *Mathématiques analyse en 30 fiches*, Dound, Paris, 2009.
- [3] N. AMROUN. *Cours de Fonctions de variables complexes*. Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes, Algérie, 2009.
- [4] F. HAMMAD. *Exercices de révisions : Analyse complexe*. Université de Sidi Bejaia, Algérie, 2010.

Ce document donne les principales théorèmes, définitions, résultats et des exercices avec les solutions d'analyse complexe (Math 4). Il s'adresse aux étudiants de deuxième année de Licence des sciences et techniques ; Électronique, Génie Mécanique, Electromécanique, Génie Civil et Hydraulique, ainsi qu'aux étudiants des autres filières. Il est le fruit d'un enseignement de mathématiques pour les ingénieurs dispensé à la faculté de technologie de l'université de Msila, et le contenu du cours :

- ♡ Nombres Complexes,
- ♡ Fonctions Complexes,
- ♡ Dérivation dans un domaine complexe,
- ♡ Intégration dans un domaine complexe,
- ♡ Points singuliers et série de Laurent.