UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Par

BACHIRI FATIHA

Sujet

Théorèmes du point fixe et Applications aux Equations intégrales

Devant le jury :

Mr. NADIR Mostefa………… Prof. Univ de M'sila Président
Mme. KHIRANI Amina ……M.C.B. Univ de M'sila Rapporte
Mme. BOUNEB Noura…… M.C.B. Univ de M'sila Examinateur

Promotion : 2016 / 2017

Remerciements

Au nom du Dieu Clément et Miséricor*dieux*

Avant tout, je remercie ***DIEU*** *le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années de recherche et que grâce à Lui ce travail de a pu être réaliser.* ***Je Lui dois tout.***

Je tiens à exprimer ma profonde grantitude envers (Mon encadreur; Madame ***A****mina* ***KHIRANI*** *) qui a accepté d'encadrer ce travail. Je la remercie aussi pour sa guidance, ses conseils et pour m'avoir écouté et encouragé durant la préparation de cette mémoire. Merci aussi pour toutes les relecteures, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de cette mémoire de Master.*

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Professeur ***M****ostefa* ***NADIR***

Docteur ***N****oura* ***BOUNEB***

Je ne saurais oublier dans mes remerciements tous ceux qui m'ont apporté leur contribution et leur aide de près ou de loi et de ce fait m'ont permis d'achever ce travail.

Finalement, je voudrais, maintenant, une place toute particulièrment à mes parents. Je profite de cette occasion pour leur exprimer mon attachement très profonde reconnaissance.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers parents

A mes frères, mes soeurs et mes amies

.

Table des matières

Introduction

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base en montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations. La théorie du point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire appliquée aux équations intégrales puis qu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaires différent.

Dans ce mémoire, on va étudier des différents théorèmes du point fixe tels que le théorème de Banach, Schauder et de Leray-Schauder. Etant donnés un ensemble M et une application $T : M \to M$, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles T admet un point fixe dans M. Ces théorèmes sont importants dans les mathématiques car ils ont plusieurs applications, par exemple trouver les racines d'un polynôme, ou montrer l'existence des solutions numériques des équations intégrales.

Un de ces théorème est le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est pas donc nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le Théorème de Banach (par exemple, l'identité).

Le théorème de Leray-Schauder, est aussi appelé théorème de continuité, représentent un outils puissant d'existence en étudiant les equations d'opérateur. Par des moyens de théorème de continuité nous pouvons obtenir une solution d'équation donnée si nous commençons par une des solution de l'équation simple.

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement est une fonction d'une ou plusieurs variables, se produit sous signe intégral. Cette définition plutôt générale tient compte de beaucoup de différentes formes spécifiques et dans la pratique beaucoup de types distincts surgissent. Dans la théorie classique d'équations intégrales on distingue les équations de Fredholm (Ivare Fredholm (1866-1927), mathématicien Suédois) et les équations de Volterra (Vito Volterra (1860-1940), mathématicien Italian). Dans une équation de Fredholm les régions d'intégrations sont fixées, tandis que dans une équation de Volterra une région est variable. Quelques équations intégrales s'appellent singulières, quelques auteurs appellent une équation singulière si l'intégrale ne peut pas être interprétée comme d'habitude (c'est-à-dire: dans le sens de Riemann ou de Lebesgue), mais doit être considéré en tant qu'intégrale de valeur principale.

Le mémoire se compose de quatre chapitres, il nous a semblé utile de l'entamer par un chapitre consacré aux rappels sur les notions de l'analyse fonctionnelle, les espaces métriques, l'espace Hilbert, l'espace $L^p([a,b])$, et on représente les opérateurs compacts et ses propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques théorèmes du point fixe (Le théorème du point fixe de Banach, Schauder et de Leray-Schauder) dans des espaces de Banach.

Le troisième chapitre, est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, tel que on va présenter une classification pour les équations intégrales linéaires et non-linéaires, comme on a donné des exemples sur ces équations, puis on va montrer la théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm et la série de Neumann enfin on étude l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra par quelques méthodes (de Résolvante et d'approximation successive).

Le quatrième chapitre, on expose le but de notre travail, concertant l'application de certaines théorèmes de point fixe (Le théorème du point fixe de Banach, Schauder et de

Leray-Schauder) sur les équations intégrales (celles de Volterra, et celles de Fredholm) à fin de prouver l'éxistence de solution de ces équations.

Ensuite ces chapitres sont suivies d'une ANNEXE, C'est une partie purement pratique, elle met en oeuvre certaines techniques de résolution analytique et numérique des équations intégrales de Volterra par les méthodes (méthode d'approximation successive, de Simpson modifiée et des Trapèzes qu'on propose), avec un comparaison enter les deux méthodes numérique (méthode de Simpson modifiée et de Trapèzes).

Chapitre 1

RAPPELS ET NOTIONS FONDAMENTALES

Dans ce chapitre on presente un rappel sur les notions de l'analyse fonctionnelle et on donne quelques notations sur les opérateurs et ses propriétés, qui l'on utilisera dans les chapitre qui se suivent.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Définitions (Rappels)

Commençant par rappeler la définition d'un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel normé) *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant pour tout x, y dans E et α dans $\Bbbk$*

(i) $\|x\| = 0$ si seulement si $x = 0$.

(ii) $\|x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (homogènéité).

(iii)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2 (Espace métrique complet) *On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

Définition 1.1.3 (Espace de Banach) *Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

Définition 1.1.4 (Produit scalaire) *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $\langle .,. \rangle$ possédant les propriétés suivantes:*

pour tout $x,\ y,\ z$ dans E et $\alpha,\ \beta$ dans $\mathbb{R}$,

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$.

(iv) $\langle x, x \rangle = 0$ *implique* $x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un espace préhibertien.

Remarque 1.1.1 *Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante*

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition 1.1.5 (Espace de Hilbert) *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.*

Définition 1.1.6 (Espace $C[a, b]$) *Des fonctions continues sur $[a, b]$,de norme* $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,\ b]} |x(t)|$.

Définition 1.1.7 (Espace $L^1(\Omega)$) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $L^1(\Omega)$ des fonctions intégrable sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$,on pose*

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|\, dx.$$

Définition 1.1.8 (Espace $L^p(\Omega)$) *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \quad \textit{mesurable et} \quad |f(x)|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = (\int_\Omega \ |f(x)|^p\, dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, vérifiant

$$\exists\ c > 0 \ \textit{telle que}\ |f(x)| \leq c,\ \textit{p.p. sur}\ \Omega.$$

La norme est notée par

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{c > 0, \ \ |f(x)| \le c, \ p.p. \ sur \ \Omega\}.$$

Remarque 1.1.2 *Si $f \in L^\infty(\Omega)$, on a*

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty \ , \ p.p. \ sur \ \Omega.$$

Définition 1.1.9 (Ensemble convexe) *Une partie C d'un espace vectoriel réel E est dite convexe si et seulement si*

$$\forall x, y \in C, \quad \forall \alpha \in [0,1] : \quad \alpha x + (1-\alpha) y \in C$$

Inégalité de Hölder

Soient p et q deux exposants conjugues (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et $f \in L^p, \ g \in L^q$ alors,

$$f.g \in L^1 \text{ et } \int |fg| \le \|f\|_p . \ \|g\|_q .$$

Un cas particulier de l'inégalité de Hölder

Pour $p = q = 2$, on a

$$\int |fg| \ dx \le \left(\int |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

cette inégalité est appelée inégallité de Cauchy - Schwarz.

1.2 Notions sur les opérateurs

Notons tout d'abord qu'on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace $C[a,b]$ des fonctions continues de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx$$

et de la norme de convergence uniforme $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|$.

1.2.1 Opérateurs intégrales linéaires

Définition 1.2.1 *Soit* $K : C\ [a,b] \times C\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire* A *sur* $C\ [a,b]$ *est définit par:*

$$\begin{aligned} A : \varphi \in C\ [a,b] \to A\varphi \in C\ [a,b] \\ (A\varphi)(x) \quad = \textstyle\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt. \end{aligned}$$

où la fonction $K(x,t)$ *s'appelle noyau de l'opérateur intégrale* A.

1.2.2 Opérateurs compacts

Définition 1.2.2 (Compacité) *Soit* U *un ensemble d'un espace normé* X, U *est dit compact si de tout recouvrement de* U *par des ouverts de* U *on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e.*

$$\forall\ V_j,\ j \in J\ \ (ouverts)\ \ tels\ que\ U \subset \bigcup_{j\in J} V_j,\ \exists V_{j(k)},\ j(k) = 1, 2, ..., n$$

$$tel\ que\ U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j(k)}$$

Définition 1.2.3 (Opérateur compact) *Soit* A *un opérateur linéaire d'un espace normé* E *dans un espace normé* F, *on dit que* A *est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné* G *dans* E *à un ensemble relativement compact* $A(G)$ *dans* F. *Autrement dit, la fermeture* $\overline{A(G)}$ *est compact.*

Théorème 1.2.1 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Théorème 1.2.2 *Un combinaison linéaire* $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ *des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Définition 1.2.4 (opérateur complètement continu) *L'opérateur* A *est dit complètement continu, s'il est continu et compact.*

Théorème 1.2.3 *le produit* AB *de deux opérateurs bornés* A *et* B *est compact si l'un des opérateurs* A *ou* B *est compact.*

Théorème 1.2.4 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F, convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A est compact.

Théorème 1.2.5 *Soit A un opérateur borné de E dans F, à image $A(E)$ de dimension finie. Alors A est compact .*

Théorème 1.2.6 *L'opérateur identique I de E dans E est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

Théorème 1.2.7 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact .*

Théorème 1.2.8 *L'opérateur intégral A de $C(\partial G)$ dans $C(\partial G)$ à noyau continu ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $C(\partial G)$ si ∂G est de classe C^1.*

1.2.3 Opérateurs produits

Soient A_1 et A_2 deux opérateurs intégraux sur $L_P(E)$ avec des noyaux K_1 et K_2 respectivement, l'opérateur produit noté A_1A_2 envoie aussi $L_P(E)$ dans $L_P(E)$, où

$$(A_1A_2)\varphi = A_1(A_2\varphi).$$

Si les noyaux K_1 et K_2 justifient l'interchangement de l'ordre d'intégration alors ,on peut déduire le noyau K du produit A_1A_2 en fonction de K_1 et K_2.

$$\begin{aligned} A_1A_2\varphi(x) &= \int K_1(x,z) \int A_2\varphi(z)\,dz \\ &= \int K_1(x,z)\,dz \int K_2(z,y)\,\varphi(y)\,dy \\ &= \int \varphi(y)\,dy \int K_1(x,z)\,K_2(z,y)\,dz. \end{aligned}$$

D'où l'opérateur A_1A_2 est un opérateur intégral de noyau,

$$K(x,y) = \int K_1(x,z)\,K_2(z,y)\,dz.$$

Notons que si, on prend $A_1 = A_2 = A$, de noyau $K_1 = K_2 = K$, alors l'opérateur $A_1 A_2 = A^2$ admet le noyau $K_2(x, y)$ donné par

$$K_2(x, y) = \int K(x, z) K(z, y) \, dz,$$

Par itération le noyau $K_n(x, y)$ de A^n est

$$K_n(x, y) = \int K(x, z) K_{n-1}(z, y) \, dz.$$

Dans la suite le noyau $K_n(x, y)$ sera appelé noyau itéré de $K(x, y)$.

Définition 1.2.5 (Noyau dégénéré) *On appelle noyau dégénéré un noyau de la forme*

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(t).$$

Proposition 1.2.1 *Soit A un opérateur intégral à noyau dégénéré, l'image de A est de dimension finie.*

1.2.4 Opérateurs adjoints

Définition 1.2.6 *Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H_1 à valeurs dans un espace de Hilbert H_2, l'opérateur linéaire noté A^* défini de H_2 dans H_1 est dit opérateur adjoint de A si l'on a pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_2$*

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H_1}.$$

Théorème 1.2.9 (Existence de l'opérateur adjoint) *Soit A un opérateur linéaire borné, défini sur un espace de Hilbert H_1 à valeurs dans un espace de Hilbert H_2 alors, il existe un opérateur linéaire borné noté A^* défini de H_2 dans H_1 tel que l'on a pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_2$*

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H_1}.$$

De plus, on a $\|A\| = \|A^*\|$.

Proposition 1.2.2 *Soit A un opérateur intégrale défini à partir d'un noyau K continu sur $[a, b] \times [a, b]$ par la formule suivante:*

$$\forall x \in [a, b], \; A\varphi(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) \, dt.$$

Alors, l'opérateur A admet un unique opérateur adjoint A^* pour le produit scalaire usuel de L^2, défini par:

$$\forall x \in [a,b], \quad A^*\psi(x) = \int_a^b K(x,t)\,\psi(t)\,dt.$$

Preuve. Pour φ et ψ deux fonctions de $C\,[a,b]$, on écrit :

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, A^*\psi\rangle$$

donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t)\,A^*(\psi(t))\,dt &= \int_a^b A\varphi(x)\,\psi(x)\,dx \\ &= \int_a^b \left\{\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt\right\}\psi(x)\,dx. \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini relatif [4] aux intégrales doubles, on établit que

$$\begin{aligned} \langle A\varphi(x), \psi\rangle &= \int_a^b \int_a^b [K(x,t)\,\psi(x)\,dx]\,\varphi(t)\,dt \\ &= \int_a^b \varphi(t)\left[\int_a^b K(x,t)\,\psi(x)\,dx\right]dt \\ &= \int_a^b \varphi(t)\,A^*(\psi)(t)\,dt \end{aligned}$$

il en résulte que l'adjoint A^*est défini pour tout x dans $[a,b]$ par

$$A^*\psi(x) = \int_a^b K(t,x)\,\varphi(t)\,dt.$$

■

Corollaire 1.2.1 *Soit A l'opérateur intégral de noyau K, et A^*l'opérateur intégral de noyau K^*, avec*

$$K^*(t,x) = K(x,t)$$

Théorème 1.2.10 *Soit A un opérateur linéaire compact, défini sur un espace de Hilbert H_1dans un espace de Hilbert H_2 alors, l'opérateur adjoint A^*défini de H_2 dans H_1est aussi un opérateur linéaire compact .*

Définition 1.2.7 (Opérateur auto-adjoint) *Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur A est dit opérateur auto adjoint si, on a la relation*

$$A = A^*$$

où encore, pour tout $\varphi, \psi \in H$

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, A\psi\rangle.$$

Corollaire 1.2.2 *l'opérateur intégral A de noyau K est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau K est symétrique :*

$$K(x,t) = K(t,x), \forall x,t \in [a,b].$$

Chapitre 2

LA THÉORIE DU POINT FIXE

En analyse, les théorèmes de point fixe sont un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révélent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Le but de ce chapitre est rappeler quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes, puis le théorème de Schauder (qui en est la "généralisation" en dimension infinie) puis le théorème du point fixe de Leray-Schauder.

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach, (connu aussi sous le nom principe de contraction de Banach) il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Définition 2.1.1 *Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui même, T est une contraction (ou application contractante), S'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que, pour tout $x, y \in E$, on'ait*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\|$$

Théorème 2.1.1 (Théorème du point fixe de Banach) *Soit T une contraction dans un espace de Banach X. Alors T admet un unique point fixe.*

Remarque 2.1.1 *T^n note à l'opérateur qui obtenue par composer T avec lui-méme n fois, i.e.* $T^n = \underbrace{T \circ T \circ ... \circ T}_{n \text{ élément}}$.

Preuve. Fixer un élément arbitaire $z \in X$ et consider la sequence

$$(T^n(z))_{n=1}^{\infty}.$$

On note par z_n l'élément $T^n(z)$. pour $n = 1, 2, ...$ on a

$$\begin{aligned}
\|z_n - z_m\| &\leq \|z_n - z_{n-1}\| + ... + \|z_{m+1} - z_m\| \\
&= \|T(z_{n-1}) - T(z_{n-2})\| + ... + \|T(z_m) - T(z_{m-1})\| \\
&\leq c\,\|z_{n-1} - z_{n-2}\| + ... + c\,\|z_m - z_{m-1}\| \leq ... \leq \\
&\leq (c^{n-1} + c^{n-2} + ... + c^{m-1})\,\|z_1 - z\| \leq \tfrac{c^{m-1}}{1-c}\,\|z_1 - z\|
\end{aligned}$$

où on a supposé $n > m \geq 1$: $\|z_n - z_m\| \to 0$ quand $n, m \to \infty$ alors $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ est une sequence de cauchy. Comme X est un espace de Banach la sequence converge, i.e. il existe $x_0 \in X$ tel que $z_n \to x_0$ quand $n \to \infty$.Ici x_0 est un point fixe pour T comme

$$\|T(x_0) - x_0\| \leq \|T(x_0) - T(z_n)\| + \|z_{n+1} - x_0\| \leq c\,\|x_0 - z_n\| + \|z_{n+1} - x_0\|$$

où le premier member de l'équation est indépendant de n et l'auter member tend vers 0 quand $n \to \infty$.

L' unicité résulte de la propriété de contraction pour T. Si $x_0 \neq y_0$ deux points fixes de T alors on obenue

$$\|x_0 - y_0\| = \|T(x_0) - T(y_0)\| \leq c\,\|x_0 - y_0\| < \|x_0 - y_0\|$$

c'est une contraduction. ■

De la preuve on a:

1. la sequence $(T^n(z))_{n=1}^{\infty}$converge vers un unique point fixe indépendante de la choix de z .

2. pour un élément arbitraire $x \in X$ on a
$$\|x - x_0\| \leq \frac{1}{1-c} \|x - T(x)\|,$$
où x_0 note la point fixe de T, comme
$$\|x - x_0\| \leq \|x - T(x)\| + \|T(x) - T(x_0)\| \leq \|x - T(x)\| + c\|x - x_0\|$$

Le théoréme du point fixe de Banach peut être généraliser comme suite:

Théorème 2.1.2 *Soit T une application dans un espace de Banach X tel que T^N est une contraction dans X pour quelque entier positive N. Alors T admet un unique point fixe .*

Ce n'est pas nécéssaire de supposer que T est une application continue .

Preuve. Le théorème du point fixe de Banach imlique qu'il existe un unique point fixe pour T^N. Cet élément nomé x_0.

Maintenant on note que
$$\|T(x_0) - x_0\| = \|T^N(T(x_0)) - T^N(x_0)\| \leq c\|T(x_0) - x_0\|$$
implique que $T(x_0) = x_0$ comme point fixe pour $0 < c < 1$. L'unicité est clair comme point fixe pour T est aussi un point fixe pour T^N. ■

Théorème 2.1.3 *Soit F un sous-ensemble fermé dans un espace de Banach et soit $T : F \to F$ une application contractante, alors*

a) L'equation $Tx = x$, a une seul solution unique.

b) La solution unique x peut être obtenir par la limite de la suite (x_n) de F définie par $x_n = Tx_{n-1}$, $n = 1, 2, ...$, où x_0 est un arbitraire de F,
$$x = \lim_{n\to\infty} T^n x_0.$$

Preuve. [1] ■

2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Le Théorème du Point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 2.2.1 (Théorème du point fixe de type Schauder) *Soit X un espace de Banach, $K \subset X$ un sous-ensemble convexe, compact et non vide et soit $T : K \to K$ un opérateur continu. Alors T admet au moins un point fixe .*

Preuve. [16] ■

Le théorème du point fixe du schauder suivant est le plus utilisé dans les applications:

Théorème 2.2.2 *Soit X un espace de Banach, $D \subset X$ un ensemble convexe, fermè, borné et non vide. Et soit $T : D \to D$ un opérateur continue complet. Alors T admet au moins un point fixe.*

Preuve. [16] ■

2.3 Le principe de Leray-Schauder

Théorème 2.3.1 *Soit X un espace de Banach, $K \subset X$ un sous-ensemble convexe et fermé, $U \subset K$ un ensemble bornèe, ouvert dans K et $\varphi_0 \in U$ un élément fixe. Supposant que l'opérateur $T : \overline{U} \to K$ est continue, complet et satisfié la condition de limite*

$$\varphi \neq (1-\lambda)\,\varphi_0 + \lambda T(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in \partial U,\ \lambda \in (0,1)\,.$$

Alors T admet au moins un point fixe dans $\overline{U}$.

Preuve. [16] ■

Chapitre 3

INTRODUCTION AUX EQUATIONS INTEGRALES

Dans ce chapitre, on donne les définitions et les types des équations intégrales (classifications), avec une introduction à la théorie de ces équations (La théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm et Séries de Neumann ,...etc)

3.1 Equations intégrales et leurs classification

3.1.1 Définition des équations intégrales

Définition 3.1.1 *On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconue figure sous le singe d'intégration* $\int$ *.*

C'est en générale l'équation par rapport à l'inconnue φ *de la forme :*

$$\int_E K\left(x,t,\varphi\left(t\right)\right)dt = \lambda\varphi\left(x\right) + f\left(x\right),\ x \in E \tag{3.1}$$

où E *est un espace mesuré,* $f\left(x\right)$ *une fonction mesurable donnée sur* E*,* λ *un scalaire donné qui peut être réel ou complexe, et* $K\left(x,t,\varphi\left(t\right)\right)$ *une fonction mesurable sur* E^3 *appelée noyau de l'équation intégrale.*

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ *qui satisfait l'équation (3.1).*

3.1.2 Classification des équation intégrales

La classification des équations intégrales est centrée sur trois caractéristiques de base décrirent leur structure globale, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails.

i) Le type (espèce) d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue. Pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral. Cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral.

ii) La description historique Fredholm et Volterra concerne les bornes d'intégration. Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégrations sont fixées, dans l'équation de Volterra les bornes d'intégration sont indéfinies.

iii) L'adjective singulière est parfois employée d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si l'intégrant est non borné sur l'intervalle donné, évidement, une équation intégrale peut être singulière dans les deux sens.

3.1.3 Equations intégrales linéaires

a-Equation intégrale de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm tel que les deux limites d'intégration sont constantes une équation, à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme:

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt, \tag{3.2}$$

où $f(x), K(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe.

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

1. Si $h(x) = 0$, l'équation (3.2) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = 0. \tag{3.3}$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

2. Si $h(x) = c = constante \neq 0$, l'équation (3.2) s'écrit

$$c\,\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{3.4}$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de second espèce.

3. Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (3.2) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 3.1.1 *1. Si $f(x) = 0$, l'équation (3.2) est dite homogène.*

2. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (3.2) est dite non homogène.

b-Equation intégrale de Volterra

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra telle que l'un des deux limites d'intégration est variable, une équation de la forme

$$h(x)\,\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{3.5}$$

1. On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si $h(x) = 0$, donc l'équation (3.5) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0. \tag{3.6}$$

2. On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si $h(x) = c = constante \neq 0$, donc l'équation (3.5) s'écrit

$$c\,\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{3.7}$$

3. Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (3.5) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

Remarque 3.1.2 *1. Si $f(x) = 0$, donc l'équation (3.5) est dite homogène.*

2. Si $f(x) \neq 0$, donc l'équation (3.5) est dite non homogène.

Remarque 3.1.3 *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyou K vérifie la condition*

$$K(x,t) = 0, \ pour \ \ x < t.$$

c-Equation intégrale d'Abel

On appelle équation intégrale linéaire d'Abel une équation de la forme

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt = f(x)\,. \tag{3.8}$$

où α est une constante, $0 < \alpha < 1$.

3.1.4 Equations intégrales non-linéaires

a-Equation intégrale de Fredholm

L'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))\, dt = 0. \tag{3.9}$$

est appelée équation intégrale de Fredholm de second espèce, de la forme

$$c\,\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))\, dt. \tag{3.10}$$

où $c = constante \ \neq 0$,

et troisième espèce, de la forme

$$h(x)\,\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))\, dt. \tag{3.11}$$

b-Equation intégrale de Volterra

L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t,\varphi(t))\, dt = 0. \tag{3.12}$$

est appelée équation intégrale de Volterra de second espèce, de la forme

$$c\,\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t,\varphi(t))\, dt. \tag{3.13}$$

où $c = constante \ \neq 0$,

et troisième espèce, de la forme

$$h(x)\,\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t,\varphi(t))\, dt. \tag{3.14}$$

Remarque 3.1.4 *1. Si $f(x)=0$, donc l'équation est dite homogène.*

2. Si $f(x)\neq 0$, donc l'équation est dite non homogène.

c-Equation intégrale d'Abel

On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{\alpha-1}\,g(\varphi(t))\,dt. \tag{3.15}$$

où $-\infty<x,\ 0<\alpha<1$ et $g:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ tel que $g(0)=0$ et $g(x)>0$ pour tout $x>0$.

Pour plus d'informations voir [13]

d-Equations intégrales de Uryson et de Hammerstein

1. On appelle équation intégrale de Uryson une équation de la forme

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{\Omega}K(x,t,\varphi(t))\,dt,\ t\in\Omega \tag{3.16}$$

où K et f sont des fonction arbitraires.

Ou

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{\Omega}K(x,t)F(\varphi(t))\,dt,\ t\in\Omega$$

tel que F est une fonction non linéaire.

2. On appelle équation intégrale de Hammerstein une équation de la forme

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{\Omega}K(x,t)\ \ g(t,\varphi(t))\,dt,\ t\in\Omega \tag{3.17}$$

Pour plus d'informations voir [3]

Remarque 3.1.5 *L'équation de Hammerstein est un cas particulière de l'équation de Uryson.*

3.1.5 Equations intégrales mixtes

a-Equation intégrale de Fredholm-Volterra

On appelle équation de Fredholm-Volterra une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x,t)+\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y,t)\,dy+\lambda\int_0^t F(t,s)\varphi(x,s)\,ds=f(x,t)\,,\ t\in[0,T],\ T<\infty. \tag{3.18}$$

La fonction h détermine le type de l'équation intégrale.

b-Equation intégrale de Volterra-Fredholm

On appelle équation de Volterra-Fredholm une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x,t)+\int_0^t\int_a^b K(x,t)\ \ F(t,s)\ \ \varphi(y,s)\,dyds=f(x,t)\,,\ t\in[0,T],\ T<\infty. \tag{3.19}$$

3.1.6 Equations intégrales singulières

On dit q'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.

Définition 3.1.2 *Considérons l'équation intégrale suivante*

$$\varphi(x)=f(x)+\int_T M(x,t)\ \ K(x,t)\ \ \varphi(t)\,dt. \tag{3.20}$$

On dit que (3.20) est singulière si $M(x,t)$ admet une singularité ou le domaine T n'est pas bornée.

Singularité de type Volterra et Fredholm

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce de la forme

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^x M(x,t)\ \ K(x,t)\ \ \varphi(t)\,dt,\ a\leq x<\infty. \tag{3.21}$$

où $K(x,t)$ est faiblement singulier, en générale $K(x,t)$ donnons par

$$K(x,t)=\begin{cases} \mid x-t\mid^{-\alpha},\ 0<\alpha<1 \\ \log\ \ |x-t| \end{cases}$$

Alors

(i) L'équation (3.21) est de Volterra.

(ii) Si $x=b$, l'équation (3.21) est de Fredholm.

(iii) Le cas où $K(x,t) = |x-t|^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ s'appelle singularité algébriques.

(iv) Le cas où $K(x,t) = \log|x-t|$, s'appelle singularité logarithmiques.

Définition 3.1.3 (Equation intégrale de Carleman) *On appelle équation intégrale de Carleman une équation de la forme*

$$a(x)\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{b(t)}{t-x}\,\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{3.22}$$

où a, b et φ sont des fonctions continues.

Pour plus d'informations voir [19]

Singularité de type de Cauchy

Soit D un domaine bornée et convexe dans un plan complexe, alors l'intégrale de Cauchy donné par la formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt = f(x),\ \ t \in \mathbb{C}. \tag{3.23}$$

Définition 3.1.4 *On appelle équation intégrale de Cauchy une équation de la forme*

$$a(x)\varphi(x) + b(x)\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt + \int_{\Gamma}K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{3.24}$$

telle que $\Gamma = \partial D$.

3.2 Introduction à la théorie des équations intégrales

3.2.1 Généralités

Lemme 3.2.1 *Soit K une fonction de l'espace $L^2(]a,b[\times]a,b[)$, alors l'opérateur T défini par:*

$$T\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)\ \ \varphi(t)\,dt,\ \ x \in]a,b[\tag{3.25}$$

est bien défini, en tant qu'opérateur de $L^2(]a,b[)$ dans lui-même.

Preuve. La linéarité est évidente, seule la continuité (et le fait que $T\varphi$ est un élément de $L^2(]a,b[)$ si $\varphi \in L^2(]a,b[)$, qui en sera une conséquence immédiate) est à démontrer.

Bien entendu, nous voulons majorer

$$\int_a^b (T\varphi(x))^2\,dx = \int_a^b (\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt)^2 dx \quad x \in]a,b[$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\int_a^b (T\varphi(x))^2\,dx \leq \int_a^b (\int_a^b |K(x,t)|^2\,dt)\,(\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt)dx \;\leq M^2 \int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt$$

avec $M^2 = \int\int_{]a,b[\times]a,b[} |K(x,t)|^2\,dtdx < \infty$, puisque $K \in L^2(]a,b[\times]a,b[)$.

Ce qui prouve que (3.25) définit bien un opérateur continu de $L^2(]a,b[)$ dans lui-même, et montre au passage que sa norme est majorée par M. ■

Lemme 3.2.2 *Soit $K \in L^2(]a,b[\times]a,b[)$. L'opérateur intégral A de noyau K est compact de $L^2(]a,b[)$ dans lui-même.*

Preuve. Nous admettrons qu'il est possible d'approcher le noyau K dans $L^2(]a,b[\times]a,b[)$ par une suite de noyaux $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dégénérés, notons T_n l'opérateur intégral de noyau K_n.

D'après la proposition (1.2.1), T_n est un opérateur de rang fini. Montrons que la suite T_n converge vers T.

On a

$$(T_n - T)\,\varphi(x) = \int_a^b (K_n(x,t) - K(x,t))\,\varphi(t)\,dt$$

et

$$\begin{aligned} \|(T_n - T)\,\varphi\| &= \textstyle\int_b^b (\int_a^b (K_n(x,t) - K(x,t))\,\varphi(t)\,dt)^2 dx \\ &\leq (\textstyle\int\int_{]a,b[\times]a,b[} |K_n(x,t) - K(x,t)|^2\,dtdx)\,\|\varphi\|^2 \\ &= \|K_n - K\|_{L^2(]a,b[\times]a,b[)}\,\|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0, d'après le choix de K_n, ce qui achève la démonstration. ■

3.2.2 La théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm

Dans ce paragraphe on désigne par A l'opérateur linéaire compact dans un espace normé E dans lui même.

Nous présentons la théorie de base pour une équation $\varphi - A\varphi = f$, on défnie l'opérateur

$$T = I - A$$

où I l'opérateur identité.

Théorème 3.2.1 (Premier Théorème de Riesz) *L'espace nul de l'opérateur T, i.e. le noyau de l'opérateur T, définie par*

$$\ker(T) = \{\varphi \in E;\ T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous-espace de dimension finie.

Théorème 3.2.2 (Deuxième Théorème de Riesz) *L'espace image de l'opérateur T, i.e. l'image de l'opérateur T, définie par*

$$\mathrm{Im}\ T = T(E) = \{\psi;\ \exists\varphi \in E,\ T\ \varphi = \psi\},$$

est un sous-espace linéaire fermé et de co-dimension finie

Théorème 3.2.3 (Troisième Théorème de Riesz) *Il existe un unique $r \in N$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur T tel que:*

$$\begin{aligned}
&\{0\} = \ker(T^0) \subset \ker(T^1) \subset \ldots\ldots \subset \ker(T^r) = \ker(T^{r+1}) = \ldots \\
&E = \mathrm{Im}(T^0) \supset \mathrm{Im}(T^1) \supset \ldots\ldots\ldots\ldots \supset \mathrm{Im}(T^r) = \mathrm{Im}(T^{r+1}) = \ldots
\end{aligned}$$

Et on a la somme directe $E = \ker(T^r) \oplus \mathrm{Im}(T^r)$

Théorème 3.2.4 (Alternative de Fredholm) *On considère les équations intégrales homogènes duales, l'une de l'autres, issues d'un noyau $K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$, qui sont donc définies par:*

$$\textit{trouver } \varphi \in [a,b] \ \textit{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\ \varphi(t)\,dt = 0 \tag{3.26}$$

$$\textit{trouver } \psi \in [a,b] \ \textit{ tel que } \psi(x) - \int_a^b K(t,x)\ \psi(t)\,dt = 0 \tag{3.27}$$

On considère pour $f \in C[a,b]$ et $g \in C[a,b]$ les équations intégrales avec seconds membres

$$\textit{trouver } \varphi \in [a,b] \ \textit{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\ \varphi(t)\,dt = f(x) \tag{3.28}$$

$$\textit{trouver } \psi \in [a,b] \ \textit{ tel que } \psi(x) - \int_a^b K(t,x)\ \psi(t)\,dt = g(x) \tag{3.29}$$

Alors on a l'alternative :

- Ou bien les équations (3.26) et (3.27) n'ont que les solutions triviales $\varphi \equiv 0$ *et* $\psi \equiv 0$*, et dans ces cas les équations (3.28) et (3.29) admettent une unique solution* $\varphi \in [a,b]$ *et* $\psi \in [a,b]$ *pour chaque* $f \in C[a,b]$ *et* $g \in C[a,b]$*.*

- Ou bien les équations (3.26) et (3.27) ont le même nombre fini m *de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations (3.28 et (3.29) sont résolubles si et seulement si pour toute solution* φ *de (3.26) et toute solution* ψ *de (3.27) on a*

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$$

Dans ces conditions, la solution générale de (3.28) s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \widetilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i$$

où $\widetilde{\varphi}$ *est une solution particulière de (3.28) et les* $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq m}$ *forme une famille libre de solution de (3.26).*

Théorème 3.2.5 (Séries de Neumann) *Soit* A *un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach* E *dans lui même, avec* $\|A\| < \lambda$*.*

Alors $A_\lambda = A - \lambda I$ *admet un opérateur inverse borné donné par la série*

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}},$$

de plus

$$(A - \lambda I)^{-1} \leq \frac{1}{\|\lambda\| - \|A\|}$$

3.3 Quelques méthodes de résolution pour les équations intégrales

Dans cette partie on va présenter quelques méthodes de résolution pour les équations intégrales de Volterra et de Fredholm

3.3.1 La méthode de Résolvante

Définition 3.3.1 (Résolvante d'une équation intégrale) *On appelle résolvonte de l'équation intégrale, toute fonction $R(x,t;\lambda)$ donnée par*

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \ K_{n+1}(x,t).$$

où les K_n sont les noyaux itérés définis par la relation de récurrence suivante

$$K_1(x,t) = K(x,t)\,, \quad K_n(x,t) = \int_t^x K(x,s) \ K_{n-1}(s,t)ds$$

Lemme 3.3.1 *La résolvante $R(x,t;\lambda)$ vérifie l'équation suivante*

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_t^x K(x,s) \ R(s,t;\lambda)ds$$

a) Pour l'équation inteqrale de Fredholm

On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \ \varphi(t)\,dt \tag{3.30}$$

où $K(x,t)$ noyau continu et $f \in C[a,b]$.

Théorème 3.3.1 *La solution de l'équation intégrale (3.30) avec $K(x,t)$ noyau continu est unique dans $C[a,b]$ pour $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, et pour $f \in C[a,b]$ est donnée par*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) \ f(t)dt$$

i.e. il existe un opérateur inverse

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda R, \quad |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

b) Pour L'équation intégrale de volterra

On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) \ \varphi(t)\,dt \tag{3.31}$$

où $K(x,\ t)$ est une fonction continu pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$, et $f(x)$ est continu lorsque $0 \leq x \leq a$.

Théorème 3.3.2 *Soit $K(x,t)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$, et $f(x)$ est continue lorsque $0 \leq x \leq a$.*

L'équation (3.31) admet une solution unique et continue donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,t;\lambda)\ f(t)dt.$$

Théorème 3.3.3 *Soit l'équation intégrale de Volterra de première espèce*

$$\int_a^x K(x,t)\ \varphi(t)dt = f(x) \tag{3.32}$$

telles que f, K des fonctions continues, dérivables sur $[a,\ b]$,

$$K(x,x) \neq 0 \quad et \quad \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\ dxdt < \infty.$$

Alors, il existe une solution unique et continue de l'équation (3.32).

Preuve. On remarque d'abord qu'on

$$f(a) = \int_a^a K(x,t)\ \varphi(t)dt = 0$$

L'équation (3.32) peut être transformée en une équation de Volterra de deuxième espèce en utilisant la règle de Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^x K(x,t)\, \varphi(t)dt = K(x,x)\, \varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} K(x,t)\, \varphi(t)dt = f'(x)$$

Comme $K(x,x) \neq 0$, alors

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} - \int_a^x \frac{K'_x(x,t)}{K(x,x)} \varphi(t)dt.$$

Qui est une équation de Volterra de deuxième espèce, et par le théorème 3.3.2 on obtient l'existence et l'unicité de la solution φ. ■

3.3.2 La méthode d'approximations successives

a) Pour l'équation intéqrale de Fredholm

Pour l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\ \varphi(t)\, dt$$

Les itérations suivantes de la méthode des approximations successives sont définies par

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x) \\ \varphi_n(x) &= \lambda K \varphi_{n-1} + f \qquad n = 1, 2... \end{aligned}$$

Lemme 3.3.2 $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^k K^k f \quad$ *où* $\quad K^k = \underbrace{K(K(...K))}_{k\ fois}$

Théorème 3.3.4 *Soit l'équation intégrale de Fredholm*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\ \varphi(t)\, dt$$

avec $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ *et* $K(x,t)$ *noyau continu admet une solution unique* $\varphi(x) \in C[a,b]$ *pour tout* $f(x) \in C[a,b]$.

Cette solution est donée par une serie de Neumann convergente

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K^k f$$

et satisfait

$$\|\varphi(x)\|_C \leq \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda| M(b-a)}$$

Si $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, *alors il existe un opérateur inverse* $(I - \lambda K)^{-1}$.

b) Pour l'équation intégrale de volterra

Considérant l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\ \varphi(t)\, dt$$

où $K(x,t)$ est un noyau continu, $K(x,t) \in C([a,b] \times [a,b])$.

La méthode d'appraximation successive est définie par les itération suivantes:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x) \\ \varphi_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \lambda^n K^k f = \lambda K \varphi_{n-1} + f \end{aligned}$$

Théorème 3.3.5 *Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

avec $K(x,t)$ noyau continu et $\lambda \in \mathbb{R}$ admet une solution unique $\varphi(x) \in C[0,a]$ pour tout $f(x) \in C[0,a]$.

Cette solution est donnée par un serie de Neumann uniformément convergente

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^n \left(K^k f\right)(x)$$

et satisfait

$$\|\varphi(x)\|_C \leq \|f\|_C \;\; \exp(|\lambda|\, Ma)$$

Chapitre 4

APPLICATIONS DES THÉORÈMES DU POINT FIXE AUX EQUATIONS INTÉGRALES

Ce chapitre représente le but de ce mémoire, où on va présenter quelques applications du principe de contraction de Banach, théorème de Schauder et du théorème de Leray-Schauder sur les équations intégrales de Volterra et de Fredholm.

4.1 Applications du principe de Banach

a) Application sur l'équation intégrale de Fredholm

Théorème 4.1.1 *Soit l'équation suivante*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)dt = f(x)$$

cette équation admet une solution unique $\varphi \in L^2([a,b])$, *si le noyau* K *est continu sur l'intervalle* $[a,b]$ *avec*

$$f \in L^2([a,b]) \quad et \quad |\lambda|\,K < 1\ ,\ \ où\ \ K = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\ dxdt}$$

Preuve. On considère l'équation

$$(T\varphi)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)dt, \tag{4.1}$$

puisque $f \in L^2([a,b]),\ T\varphi \in L^2([a,b])$. Si

$$\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)dt \in L^2([a,b]).$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz, donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)dt\right| &\leq \int_a^b |K(x,t)\,\varphi(t)|\,dt \\ &\leq \left(\int_a^b |K(x,t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

donc

$$\left|\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b |K(x,t)|^2\,dt\right)\left(\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt\right),$$

alors

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)dt\right|^2 dx &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,t)|^2\,dt\right)\left(\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt\right)dx \\ &\leq \int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dtdx \int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt.\end{aligned}$$

Puisque

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dtdx < \infty \quad \text{et} \quad \int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt < \infty,$$

alors l'équation (4.1) est satisfaisante et T de $L^2([a,b])$ dans lui-même.

Notons que la démonstration ci-dessous est également que l'opérateur défini par

$$(A\varphi) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

est borné, donc par le théorème 2.1.3 l'équation $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique, pour $|\lambda|\,K < 1$. ■

Théorème 4.1.2 *Soit A est un opérateur borné dans l'espace de Hilbert $L_2([a,b])$ tel que*

$$A\varphi = \int_a^b K(x,t,\varphi(t))\,dt,$$

et que

$$|K(x,t;z_1) - K(x,t;z_2)| \leq V(x,t)\,|z_1 - z_2|\,,$$

avec la codition

$$\int_a^b \int_a^b |V(x,t)|\,dxdt = P^2 < \infty.$$

alors l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \; K(x,t;\varphi(t))dt \;= f(x) \tag{4.2}$$

admet une solution unique pour tout second membre $f(x) \in L_2([a,b])$, *à condition que* $|\lambda|\,P < 1$.

Preuve. Pour l'équation intégrale de Fredholm on considère l'opérateur

$$T\varphi = f(x) + \lambda A\varphi = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t;\varphi(t))\,dt,$$

alors

$$\begin{aligned}
\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| &= |\lambda|\,\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \\
&= |\lambda| \left\| \textstyle\int_a^b (K(x,t;\varphi_1(t)) - K(x,t;\varphi_2(t)))\,dt \right\| \\
&= |\lambda|\,[\textstyle\int_a^b [\int_a^b |K(x,t;\varphi_1(t)) - K(x,t;\varphi_2(t))|\,dt]^2 dx]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\lambda|\,[\textstyle\int_a^b [\int_a^b V(x,t)\,|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\,dt]^2 dx]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\lambda|\,[\textstyle\int_a^b [(\int_a^b |V(x,t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}}]^2 dx]^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda|\,[\textstyle\int_a^b [(\int_a^b |V(x,t)|^2\,dt)\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|^2] dx]^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda|\,[\|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 \textstyle\int_a^b \int_a^b |V(x,t)|^2\,dtdx]^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda|\,[\|\varphi_1 - \varphi_2\|^2\,P^2]^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|\,P
\end{aligned}$$

Si $|\lambda|\,P < 1$, l'opérateur T est une contraction qu'il implique que l'équation $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique, d'où l'équation (4.2). ■

b) Application sur l'équation intégrale de Volterra

Théorème 4.1.3 *Soit* $K(x,t)$ *est une fonction continue pour* $x,t \in [a,b]$, *et bornée uniformément, tel que*

$$|K(x,t)| \leq M, \quad M > 0$$

alors l'équation de Volterra

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{4.3}$$

admet une solution unique $\varphi(x)$ *pour tout* $f(x)$ *dans* $L_2([a,b])$ *et tout* λ *de* $\mathbb{R}$.

Preuve. Pour l'équation intégrale de Volterra on considère l'opérateur

$$T\varphi = f(x) + \lambda A\varphi = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

avec

$$A\varphi = \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

et on démontre que l'opérateur T^n est un contraction pour $n \in \mathbb{N}$, ainsi $T\varphi$ admet un point fixe

$$\begin{aligned}
T\varphi &= f + \lambda A\varphi, \\
T^2\varphi &= T(T\varphi) = T(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda A(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2\varphi, \\
&. \\
&. \\
&. \\
T^n\varphi &= f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + ... + \lambda^{n-1} A^{n-1} f + \lambda^n A^n \varphi,
\end{aligned}$$

Afin que

$$\begin{aligned}
\|T^n\varphi_1 - T^n\varphi_2\| &= \|\lambda^n A^n\varphi_1 - \lambda^n A^n\varphi_2\| = |\lambda|^n \|A^n\varphi_1 - A^n\varphi_2\| \\
\|T^n\varphi_1 - T^n\varphi_2\| &= |\lambda|^n \left\| \textstyle\int_a^x K_n(x,t)\,(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))\,dt \right\|.
\end{aligned}$$

Pour détèrminer $K_n(x,t)$, on utilise la relation.

$$\begin{aligned}
A\varphi &= \textstyle\int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \\
A^2\varphi &= \textstyle\int_a^x K(x,t) \int_a^t K(t,z)\,\varphi(z)\,dz \\
&= \textstyle\int_a^x \varphi(z)\,dz \int_z^x K(x,t)\,K(t,z)\,dt \\
&= \textstyle\int_a^x K_2(x,z)\,\varphi(z)\,dz, \text{ où } \ K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)\,K(z,t)\,dz,
\end{aligned}$$

par reccurence on obtient

$$\begin{aligned}
K_1(x,t) &= K(x,t), \\
K_2(x,t) &= \textstyle\int_t^x K(x,z)\,K(z,t)\,dz, \\
K_3(x,t) &= \textstyle\int_t^x K_2(x,z)\,K(z,t)\,dz, \\
&. \\
&. \\
&. \\
K_n(x,t) &= \textstyle\int_t^x K_{n-1}(x,z)\,K(z,t)\,dz,
\end{aligned}$$

puisque par l'hypothèse on a $|K(x,t)| \leq M$, alors

$$|K_n(x,t)| \leq \frac{M^n (x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad a \leq t \leq x \leq b. \tag{4.4}$$

pour $n = 1$ l'expression (4.4) est vrai. On Suppose qu'elle est vrai pour $m \in \mathbb{N}$,

$$|K_m(x,t)| \leq \frac{M^m (x-t)^{m-1}}{(m-1)!}$$

alors

$$\begin{aligned}
|K_{m+1}(x,t)| &= \left|\textstyle\int_t^x K_m(x,z)\,K(z,t)\,dz\right| \\
&\leq \textstyle\int_t^x |K_m(x,z)\,K(z,t)|\,dz \\
&\leq \tfrac{M^{m+1}}{(m-1)} \textstyle\int_t^x (x-z)^{m-1}\,dz \\
&\leq \tfrac{M^{m+1}}{m} (x-z)^m.
\end{aligned}$$

ainsi

$$\|T^n\varphi_1 - T^n\varphi_2\| \leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on obtient

$$\frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1,$$

Afin que T^n un opérateur est une contraction implique T admet un point fixe unique,

$$T\varphi = \varphi \Longleftrightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Ce point fixe est la solution de l'équation (4.3). ■

Théorème 4.1.4 *Soit $K : [0,\ T] \times [0,\ T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction continue satisfait la condition de Lipschitz suivante :*

$$|K(x,t,u) - K(x,t,v)| \leq L\,|u - v\,|$$

pour tout : $(x,t) \in [0,\ T] \times [0,\ T]$, et $u, v \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $f \in C\,[0,\ T]$ l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt \qquad (0 \leq x \leq T) \tag{4.5}$$

admet une solution unique $\varphi \in C\,[0,\ T]$. De plus, pour tout $\varphi_0 \in C\,[0,\ T]$ la suite des fonctions $\{\varphi_n\}$ définie par

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi_n(t))dt \qquad (0 \leq x \leq T)$$

la suite $\{\varphi_n\}$ converge uniformément dans $C\,[0,\ T]$ vers une solution unique φ.

Preuve. Soit E est l'espace de Banach de $C\,[0,\ T]$ muni de la norme

$$|g| = \max_{0 \leq x \leq T} |g\,(x)| \exp\left(-Lx\right)$$

cette norme est équivalente à la norme sup $\|y\|$ .En effet

$$\exp\left(-Lx\right)\|y\| \leq |y| \leq \|y\|$$

de plus, elle est aussi complète.

On définit $F : E \to E$ par

$$F\left(\varphi\right)(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt$$

A fin de prouver que l'équation (4.5) admet une solution, il faut montrer que $F : E \to E$ admet un point fixe.

On montre que F est contractante.

$$\begin{aligned}
|F\left(\varphi_1\right) - F\left(\varphi_2\right)| &\leq \max_{0 \leq x \leq T} \exp\left(-Lx\right) \textstyle\int_0^x |K(x,t,\varphi_1\,(t)) - K(x,t,\varphi_2\,(t))|\,dt \\
&\leq L \max_{0 \leq x \leq T} \exp\left(-Lx\right) \textstyle\int_0^x |\varphi_1\,(t) - \varphi_2\,(t)|\,dt \\
&= L \max_{0 \leq x \leq T} \exp\left(-Lx\right) \textstyle\int_0^x \exp\left(Lt\right)\exp\left(-Lt\right)|\varphi_1\,(t) - \varphi_2\,(t)|\,dt \\
&\leq L\,|\varphi_1 - \varphi_2| \max_{0 \leq x \leq T} \exp\left(-Lx\right) \textstyle\int_0^x \exp\left(Lt\right)dt \\
&= L\ \ |\varphi_1 - \varphi_2| \max_{0 \leq x \leq T} \exp\left(-Lx\right)\ \tfrac{\exp(Lx)-1}{L} \\
&\leq \left(1 - \exp\left(-Lx\right)\right)|\varphi_1 - \varphi_2|
\end{aligned}$$

Puisque $(1-\exp(-Lx)) < 1$, alors F est contractante, d'après le principe de Banach F admet un point fixe unique $\varphi \in E$ de plus la suite $\{\varphi_n\}$ définie ci-dessus converge uniformément vers le point fixe φ pour la norme $|y|$ ainsi que pour la norme sup $\|y\|$. ■

4.2 Application du théorème de Schauder

a) L'équation intégrale de Fredholm

Théorème 4.2.1 *On Considère l'équation intégrale non linéaire de Fredholm*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt, \quad -\infty < a \leq x \leq b < +\infty \tag{4.6}$$

Supposant que $f(.)$ est une fonction bornée et $K(x,t,y)$ satisfait les conditions suivantes:

$$|K(x,t,y)| \leq g_1(x)\, g_2(t)\, \phi(|y|), \qquad \left|\frac{\partial K}{\partial y}\varphi(x,t,y)\right| \leq g_1(x)\, g_2(t)\, \psi(|y|),$$

où $g_1(.)$ est une fonction positive, bornée et mesurable, $\phi(.)$ est une fonction positive et mesurable qui vérifie la condition:

$$\sup_{y\geq 0}\frac{\phi(y)}{y} = L < +\infty,$$

et $\psi(.)$ est une fonction continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus, on suppose qu'il existe une fonction strictement positive et continue $\mu(.)$ qui vérifie la condition suivante:

$$\|g_1\ .\mu\|_\infty \left\|\frac{g_2}{\mu}\right\|_1 < \frac{1}{L}.$$

Sous ces conditions, l'équation intégrale non linéaire (4.6) admet une solution dans $C([a,\ b])$.

Preuve. On note par $\|.\|_\mu$ la norme définit sur $X = C([a,\ b])$ par $\|\varphi\|_\mu = \sup_{x\in[a,\ b]} |\mu(x)\varphi(x)|$, l'espace X muni de la norme $\|.\|_\mu$ est un espace de Banach.

Soit $r \geq 0$ est un nombre réel positif, et soit B_r une boule fermée de X définit par

$$B_r = \left\{\varphi \in C([a,\ b]); \quad \|\varphi\|_\mu \leq r\right\}.$$

C'est clair que B_r est un sous ensemble fermé et convexe de X. Alors, démontrer que l'opérateur T associé avec l'équation (4.6) est continue sur X.

la conclusion est:

$$T\left(B_r\right) \subset B_r, \quad \forall r \geq \frac{\|f\|_\mu}{1 - L\left\|g_1\right\|_\mu \left\|\frac{g_2}{\mu}\right\|_1} = r_0.$$

D'après le théorème du point fixe de schauder, l'équation intégrale non linéaire (4.6) admet une solution dans B_{r0} et par suite elle admet une solution dans $C([a,\ b])$. ■

b) L'équation intégrale de Volterra

Soit l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt \qquad (a \leq x \leq b) \tag{4.7}$$

Telle que $K : [a,\ b] \times [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifie les conditions suivantes:

1. $K(x,t,0) = 0$ pour tout : $x,t \in [a,\ b]$
2. $\dfrac{\partial K(x,t,z)}{\partial z} < \left|\dfrac{1 - \|f\|}{b-a}\right|$

alors pour tout $f \in C([a,\ b])$ telle que $\|f\| < 1$ l'équation (4.7) admet une solution $\varphi \in C([a,\ b])$.

Preuve. On va montrer que $T\left(B\left(0,1\right)\right) \subset B\left(0,1\right)$ i.e. pour si $\|\varphi\| \leq 1$, alors $\|T\varphi\| \leq 1$.
En effet :

$$\begin{aligned}
\|T\varphi\| &= \left\|f\left(x\right) + \textstyle\int_a^x K\left(x,t,\varphi\left(t\right)\right)dt\right\| \\
&\leq \left\|f\left(x\right)\right\| + \left\|\textstyle\int_a^x K\left(x,t,\varphi\left(t\right)\right)dt\right\| \\
&\leq \left\|f\left(x\right)\right\| + \textstyle\int_a^x \left|K\left(x,t,\varphi\left(t\right)\right)\right| dt \\
&\leq \left\|f\left(x\right)\right\| + \textstyle\int_a^x \left|K\left(x,t,\varphi\left(t\right)\right) - K(x,t,0)\right| dt \\
&\leq \left\|f\left(x\right)\right\| + \textstyle\int_a^x \left|(\varphi - 0)\,\frac{\partial K(x,t,\varphi(t))}{\partial\varphi}\right| dt \\
&\leq \left\|f\left(x\right)\right\| + \|\varphi\|\,\tfrac{1-\|f(x)\|}{b-a}\left(b-a\right) < 1
\end{aligned}$$

D'après le Théorème Schauder T admet un point fixe, d'où l'équation admet une solution.

■

4.3 Application du théorème de leray-Schauder

a) Resultats d'existence pour les équations intégrales de Fredholm

Dans cette partie on présente un théorème générale d'excicetence pour l'équation intégrale de Fredholm dans $\mathbb{R}^n$.

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t,\varphi(t))\,dt\ , \quad x \in [a,b] \tag{4.8}$$

On cherche aux solutions continues avec valeurs dans une boule donnée

$$B = \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ |z| \leq R\},$$

i.e., $\varphi \in C([a,b];B)$.

Théorème 4.3.1 *Soit $R > 0$ et $K : [a,b] \times [a,b] \times \overline{B}_R(0,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ est une application continu. Supposant que*

$$M\mu(]a,b[) \leq R,$$

où

$$M = \max_{[a,b]^2 \times \overline{B}_R(0,\mathbb{R}^n)} |K(x,t,z)|.$$

Alors (4.8) admet au moins une solution $\varphi \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$ avec $|\varphi|_\infty < R$.

Théorème 4.3.2 *Soit $K : [a,b] \times [a,b] \times B \to \mathbb{R}^n$ est continue. Supposant que*

$$|\varphi|_\infty < R \tag{4.9}$$

pour toute solution $\varphi \in C([a,b];B)$ de

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))\,dt\ , \quad x \in [a,b], \tag{4.10}$$

pour tout $\lambda \in (0,1)$. Alors l'équation (4.8) admet une solution dans $C([a,b],B)$.

Preuve. Soit $E = X = C([a,b];\mathbb{R}^n)$ muni de la norme $|.|_\infty$,

$$U = \{\varphi \in C([a,b];\mathbb{R}^n) \ : \ |\varphi|_\infty < R\},$$

φ_0 est la fonction nul et $T : \overline{U} \to C([a,b];\mathbb{R}^n)$ un opérateur donné par

$$T(\varphi)(x) = \int_a^b K(x,t,\varphi(t))\,dt \qquad (x \in [a,b]).$$

Si $\varphi \in C([a,b];B)$ une solution de (4.10) pour $\lambda \in (0,1)$, alors pour tout $x \in [a,b]$, on applique le théorème (4.3.1) on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= \lambda \left| \int_a^b K(x,t,\varphi(t))\,dt \right| \\ &\leq \lambda \int_a^b |K(x,t,\varphi(t))|\,dt \\ &\leq \lambda\ M\ \mu(]a,b[) \\ &\leq \lambda R < R \end{aligned}$$

Par suite φ satisfait (4.9). ■

b) Resultats d'exicetence pour les équations intégrales de Volterra

Cette partie présente le théorème générale d'existence pour l'équation intégrale de Volterra dans $\mathbb{R}^n$.

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x,t,\varphi(t))\,dt\ , \quad x \in [a,b] \tag{4.11}$$

On cherche aux solutions continues avec valeurs dans la boule

$$B = \{z \in \mathbb{R}^n\ :\ |z| \leq R\},$$

i.e., $\varphi \in C([a,b];B)$.

Théorème 4.3.3 *Soit $K : [a,b] \times [a,b] \times B \to \mathbb{R}^n$ est continue. Supposant que*

$$|\varphi|_\infty < R \tag{4.12}$$

pour toute solution $\varphi \in C([a,b];B)$ de

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t,\varphi(t))\,dt\ , \quad x \in [a,b] \tag{4.13}$$

pour tout $\lambda \in (0,1)$. Alors l'équation (4.11) admet une solution dans $C([a,b];B)$.

On donne un condition suffisante pour (4.12) dans le cas de l'équation dans $\mathbb{R}^n$

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x,t)\ f(t,\varphi(t))\,dt\ , \quad x \in [a,b]. \tag{4.14}$$

Corollaire 4.3.1 *Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \times B \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continus. Supposant que*

$$|K(x,t)| \leq 1 \tag{4.15}$$

pour tout $x, t \in [a,b]$, il existe une fonction continue et pas décroissante $\psi : (0,R] \to (0,\infty)$ et $\phi \in C([a,b];\mathbb{R}_+)$ telle que

$$|f(t,z)| \leq \phi(t)\,\psi(|z|) \tag{4.16}$$

pour tout $t \in [a,b]$, $z \in B$, et

$$|\phi|_{L^1[a,b]} \leq \int_0^R \frac{1}{\psi(\sigma)} d\sigma. \tag{4.17}$$

Alors (4.14) admet une solution $\varphi \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$ avec $|\varphi|_\infty \leq R$.

Preuve. Soit $\varphi \in C([a,b];B)$ une solution de (4.13) pour $\lambda \in (0,1)$.

Ici

$$K(x,t,z) = K(x,t) f(t,z)$$

Alors

$$|\varphi(x)| \leq \lambda \int_a^x |K(x,t)\ f(t,\varphi(t))|\, dt \leq \lambda \int_a^x \phi(t)\,\psi(|\varphi(t)|)\, dt \tag{4.18}$$

pour tout $x \in [a,b]$. Ici on a $\psi(0) = \lim\limits_{t\to 0} \psi(t)$. Soit

$$c(x) = \min\left\{R,\ \lambda \int_a^x \phi(t)\,\psi(|\varphi(t)|)\, dt\right\}.$$

C'est claire que c n'est pas décroissante. On cherche $c(b) < R$. Supposant le contraire.

Alors, si $c(a) = 0$, il existe un sous-intervale $[a', b'] \subset [a,b]$ avec

$$c(a') = 0,\ c(b') = R \ \text{ et } c(x) \in (0,R) \ \text{ pour } x \in (a', b').$$

Par (4.18),

$$|\varphi(x)| \leq c(x) \leq R \ \text{ dans } [a,b],$$

et ψ n'est pas décroissante sur $[0,R]$, on a

$$c'(t) = \lambda\phi(t)\,\psi(|\varphi(t)|) \leq \lambda\phi(t)\,\psi(c(t))$$

pour tout $t \in [a', b']$. Maintenant intégration de a' à b':

$$\begin{aligned} \int_{a'}^{b'} \frac{c'(t)}{\psi(c(t))} dt &= \int_0^R \frac{1}{\psi(\sigma)} d\sigma \\ &\leq \lambda \int_{a'}^{b'} \phi(t)\, dt \\ &\leq \lambda \int_a^b \phi(t)\, dt \\ &< \int_a^b \phi(t)\, dt, \end{aligned}$$

une contradiction. Si $c(b) < R$ et alors, par (4.18), $|\varphi(x)| < R$ pour tout $x \in [a, b]$. Donc $|\varphi|_\infty < R$ et le théorème (4.3.3) est vérifié. ■

Appendice A

ANNEXE

Dans cette partie on va présenter quelques méthodes de résolution analytique et numérique des équations intégrales.

A.1 La résolution analytique et la résolution numérique des équations intégrales

A.1.1 La résolution analytique

Dans cette partie on va appliquer la méthode de Résolvante et la méthode des approximations successives qui les on présenté dans le troisième chapitre sur les équations intégrales.

La méthode de Résolvante

Exemple A.1.1 *trouver une solution d'équation intégrale de Fredholm*

$$\varphi(x) = \frac{23}{6}x + \frac{1}{8}\int_0^1 xt\ \varphi(t)\,dt$$

par la méthode de Resolvante

Identifier: $K(x,t) = xt$ $\quad f(x) = \frac{23}{6}x \quad b-a=1 \quad M=1 \quad \lambda = \frac{1}{8}$

vérifier la condition: $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \qquad \frac{1}{8} < \frac{1}{1.1} < 1$

itération de nyau:

$$\begin{aligned}
K_1(x,t) &= xt \\
K_2(x,t) &= \int_0^1 K(x,t')\,K_1(t',t)\,dt' = \int_0^1 xt't'tdt' = xt\left[\frac{t'^3}{3}\right]_0^1 = \frac{xt}{3} \\
K_3(x,t) &= \int_0^1 K_2(x,t')\,K_2(t',t)\,dt' = \int_0^1 \frac{xt'}{3}t'tdt' = \frac{xt}{3}\left[\frac{t'^3}{3}\right]_0^1 = \frac{xt}{3^2} \\
&\dots \\
K_n(x,t) &= \frac{xt}{3^{n-1}}
\end{aligned}$$

Resolvante:

$$\begin{aligned}
R(x,t,\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_{k+1}(x,t) \\
&= xt + \frac{1}{8}\frac{xt}{3} + \frac{1}{8^2}\frac{xt}{3^2} + \frac{1}{8^3}\frac{xt}{3^3} + \dots + \frac{1}{8^n}\frac{xt}{3^n} + \dots \\
&= xt\left[1 + \frac{1}{8}\frac{1}{3} + \frac{1}{8^2}\frac{1}{3^2} + \frac{1}{8^3}\frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{8^n}\frac{1}{3^n} + \dots\right] \\
&= xt\frac{1}{1-\frac{1}{24}} \\
&= \frac{24}{23}xt
\end{aligned}$$

solution

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= f(x) + \lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)\,f(t)\,dt \\
&= \frac{23}{6}x + \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{24}{23}xt\ \frac{23}{6}tdt \\
&= \frac{23}{6}x + \frac{1}{2}x\int_0^1 t^2dt \\
&= \frac{23}{6}x + \frac{1}{2}x\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 4x
\end{aligned}$$

La méthode des approximations successives

Exemple A.1.2 *trouver la solution de l'équation intégrale de Fredholm*

$$\varphi(x) = \exp(x) + \frac{1}{\exp}\int_0^1 \varphi(t)\,dt$$

par la méthode des approximations successives et sous la forme de la série de Neumann.
Identifier: $K(x,t) = 1 \qquad f(x) = \exp(x) \qquad b-a=1 \qquad M=1 \qquad \lambda = \frac{1}{\exp}$
vérifier la condition: $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \qquad \frac{1}{\exp} < \frac{1}{1.1} < 1$

1) itérations

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \exp(x)\\
\varphi_1(x) &= \exp(x) + \tfrac{1}{\exp}\int_0^1 \varphi_0(t)\,dt = \exp(x) + \tfrac{1}{\exp}\int_0^1 \exp(x)\,dt\\
&= \exp(x) + \tfrac{1}{\exp}\left[\exp(x)\right]_0^1 = \exp(x) + 1 - \tfrac{1}{\exp}\\
\varphi_2(x) &= \exp(x) + \tfrac{1}{\exp}\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt = \exp(x) + \tfrac{1}{\exp}\int_0^1 \left(\exp(x) + 1 - \tfrac{1}{\exp}\right)dt = \exp(x) + 1 - \tfrac{1}{\exp^2}\\
&...\\
\varphi_n(x) &= \exp(x) + \tfrac{1}{\exp}\int_0^1 \varphi_{n-1}(t)\,dt = \exp(x) + 1 - \tfrac{1}{\exp^n}
\end{aligned}$$

En suite, la solution de l'équation intégrale de Fredholm est une limite des itérations

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\exp(x) + 1 - \frac{1}{\exp^n}\right) = \exp(x) + 1.$$

2) série de Neumann

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K^k f = f(x) + \lambda^1 K^1 f + \lambda^2 K^2 f + ...$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp(x)\\
Kf &= \textstyle\int_0^1 \exp(x)\,dt = \exp - 1\\
K^2 f &= \textstyle\int_0^1 (\exp - 1)\,dt = \exp - 1\\
&...\\
K^n f &= \exp - 1
\end{aligned}$$

En suite, la série de Neumann est

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \exp(x) + \tfrac{1}{\exp}(\exp - 1) + \tfrac{1}{\exp^2}(\exp - 1) + ... + \tfrac{1}{\exp^n}(\exp - 1) + ...\\
&= \exp(x) - (\exp - 1) + (\exp - 1) + \tfrac{1}{\exp}(\exp - 1) + \tfrac{1}{\exp^2}(\exp - 1) + ... + \tfrac{1}{\exp^n}(\exp - 1) + ...\\
&= \exp(x) - (\exp - 1) + (\exp - 1)\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{\exp^n}\\
&= \exp(x) - \exp + 1 + \tfrac{(\exp - 1)}{1 - \frac{1}{\exp}}\\
&= \exp(x) - \exp + 1 + \exp\\
&= \exp(x) + 1
\end{aligned}$$

Ainsi, l'approche de la série de Neumann produit la même solution.

Exemple A.1.3 *on utilise la méthode d'approximations successive qui on cite dans le troisième chapiter pour résoudre l'équation intégrale non linéaire deVolterra*

$$\varphi(x) = \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x\varphi^3(t)\,dt. \tag{1}$$

Pour approximation initial $\varphi_0(x)$, on peut choisir

$$\varphi_0(x) = 1. \tag{2}$$

La méthode d'approximations successive admit l'utilisation du formule d'étération

$$\varphi_{n+1}(x) = \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x\varphi_n^3(t)\,dt, \quad n \geq 0. \tag{3}$$

par substitution (2) dans (3) on obtenit sur les approximations

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1, \\
\varphi_1(x) &= \exp(x) + \tfrac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \textstyle\int_0^x x\varphi_0^3(t)\,dt \\
&= 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 - \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{35}{24}x^4 - \tfrac{67}{60}x^5 + ..., \\
\varphi_2(x) &= \exp(x) + \tfrac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \textstyle\int_0^x x\varphi_1^3(t)\,dt \\
&= 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{67}{60}x^5 + ..., \\
\varphi_3(x) &= \exp(x) + \tfrac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \textstyle\int_0^x x\varphi_2^3(t)\,dt \\
&= 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \tfrac{1}{5!}x^5 + \tfrac{1}{6!}x^6 + ...,
\end{aligned}$$

Etc. Alors, la solution $\varphi(x)$ de (1) est donnée par

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \exp(x).$$

A.1.2 La résolution numérique

Dans cette partie essentiellement pratique, nous exposerons en détail deux méthodes très usuelles pour la résolution numérique des équations intégrales de Volterra, et on va donner une comparaison entre les deux méthodes par des exemples numérique.

Méthode des Trapèzes

Soit l'équation intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \quad a \leq x \leq b \tag{4}$$

Notre objectif est de trouver une solution approchée à la solution exacte de cette équation en utilisant la méthode du trapèze. Pour ce faire, on commence par la discrétisation de l'intervalle $[a;b]$ en sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, c'est-à-dire nous choisissons des points $x_i,\ i = 0, 1, ..., N$ (des Neouds) tels que

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_j < x_n = b$$

supposant que ce système est équidistant, i.e. $x_j = a + j\ h$ avec $j = 0, 1, ..., n$, où h est le pas de la discrétisation.

Calculons la solution en ces nœuds, donc l'équation (4) devient

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \int_0^{x_j} K(x_j, t)\,\varphi(t)\,dt$$

la méthode des Trapèzes, nous amène à une seconde discrétisation par rapport à la variable d'intégration t .

on pose $t = (x_i)_{0 \le i \le j}$, il vient:

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} K(x_j, t)\,\varphi(t)\,dt$$

alors

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{j-1} \left[K(x_j, t_{i+1})\,\varphi(t_{i+1}) + K(x_j, t_i)\,\varphi(t_i)\right]$$

donc

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \left(\frac{h}{2}K(x_j, t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{h}{2}K(x_j, t_j)\,\varphi(t_j) + h\sum_{i=1}^{j-1} K(x_j, t_i)\,\varphi(t_i)\right) \tag{5}$$

On notons $\varphi_j = \varphi(x_j)$, $f_j = f(x_j)$ *et* $K_{ji} = K(x_{j,}x_i)$, alors la formule (5) devient

$$\varphi_j = f_j + \left(\frac{h}{2}K_{j0}\varphi_0 + \frac{h}{2}K_{jj}\varphi_j + h\sum_{i=1}^{j-1} K_{ji}\ \varphi_i\right)$$

donc on a, en général

$$\left(1 - \frac{h}{2}K_{jj}\right)\varphi_j = f_j + \left(\frac{h}{2}K_{j0}\varphi_0 + h\sum_{i=1}^{j-1} K_{ji}\ \varphi_i\right)$$

si $j = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \varphi(a) = f(x_0) \\ &\Longrightarrow \varphi(a) = f(a) \Longrightarrow \varphi(0) = f(0) \end{aligned}$$

on a

$$\varphi_0 = f_0$$

et par récurrence, on peut calculer la fonction φ en tous les nœuds x_j pour $j = 1, 2, ..., n.$

Méthode de Simpson Modifiée

Dans cette partie, nous introduisons une méthode appelée **méthode de Simpson modifiée [18]**, c'est une adaptation de la formule de quadrature de Simpson aux équations intégrales, en particulier celle de Volterra de seconde espèce.

Considérons l'équation de Volterra

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \quad a \leq x \leq b \tag{6}$$

et soit $x_0 = a < x_1 < ... < x_{2j-1} < x_{2j} < ... < x_{2n} = b$, une subdivision équidistante d'un pas h suffisamment petit. Notre objectif alors, est d'approximer la solution de cette équation aux noeuds d'indices pairs (i.e. au point x_{2j}).

On procède de la même manière que la méthode des trapèzes l'équation (6) devient

$$\begin{aligned} \varphi_{2j} &= g_{2j} + \int_a^{x_{2j}} K(x_{2j}\ ,t)\varphi(t)\,dt \\ &= g_{2j} + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{t_{2i}}^{t_{2i+2}} K(x_{2j}\ ,t)\varphi(t)\,dt \end{aligned} \tag{7}$$

Utilisons la formule de quadrature de Simpson

L'équation (7) devient

$$\varphi_{2j} = g_{2j} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{h}{3}(K_{2j2i}\ \varphi_{2i} + 4K_{2j2i+1}\ \varphi_{2i+1} + K_{2j2i+2}\ \varphi_{2i+2}) \tag{8}$$

puisque h suffisamment petit, on approxime φ_{2i+1} par $\frac{\varphi_{2i}+\varphi_{2i+2}}{2}$

l'équation (8) devient

$$\begin{aligned}
\varphi_{2j} &= g_{2j} + \sum_{i=1}^{j-1} \tfrac{h}{3} \left(K_{2j2i}\ \varphi_{2i} + 4K_{2j2i+1} \left[\tfrac{\varphi_{2i}+\varphi_{2i+2}}{2} \right] + K_{2j2i+2}\ \varphi_{2i+2} \right) \\
\varphi_{2j} &= g_{2j} + \sum_{i=1}^{j-1} \tfrac{h}{3} \left([K_{2j2i} + 2K_{2j2i+1}]\, \varphi_{2i} + [2K_{2j2i+1} + K_{2j2i+2}]\, \varphi_{2i+2} \right) \\
\varphi_{2j} &= g_{2j} + \tfrac{h}{3} \left(\sum_{i=0}^{j-1} [K_{2j2i} + 2K_{2j2i+1}]\, \varphi_{2i} + \sum_{i=0}^{j-1} [2K_{2j2i+1} + K_{2j2i+2}]\, \varphi_{2i+2} \right) \\
\varphi_{2j} &= g_{2j} + \tfrac{h}{3} \left(\sum_{i=0}^{j-1} [K_{2j2i} + 2K_{2j2i+1}]\, \varphi_{2i} + \sum_{i=1}^{j} [2K_{2j2i-1} + K_{2j2i}]\, \varphi_{2i} \right) \\
\varphi_{2j} &= g_{2j} + \tfrac{h}{3} [K_{2j0} + 2K_{2j1}]\, \varphi_0 + \tfrac{h}{3} [2K_{2j2j-1} + K_{2j2j}]\, \varphi_{2j} + \tfrac{2h}{3} \sum_{i=1}^{j-1} [K_{2j2i-1} + K_{2j2i} + K_{2j2i+1}]\, \varphi_{2i}.
\end{aligned}$$

d'où, finalement

$$\varphi_{2j} \left(1 - \tfrac{h}{3} [2K_{2j2j-1} + K_{2j2j}]\right) \quad = g_{2j} + \tfrac{h}{3} [K_{2j0} + 2K_{2j1}]\, \varphi_0 + \tfrac{2h}{3} \sum_{i=1}^{j-1} [K_{2j2i-1} + K_{2j2i} + K_{2j2i+1}]\, \varphi_{2i}$$

$$avec \quad j = 1, 2, .., n$$

on obtient de (6) pour $j = 0$, $\varphi_0 = g_0 = g(a)$.

Comparaison entre les deux méthodes Simpson modifiée et Trapèze

Dans toutes les exemples suivantes on désigne par (Sm) la méthode de Simpson modifiée et par (T) la méthode de Trapèze.

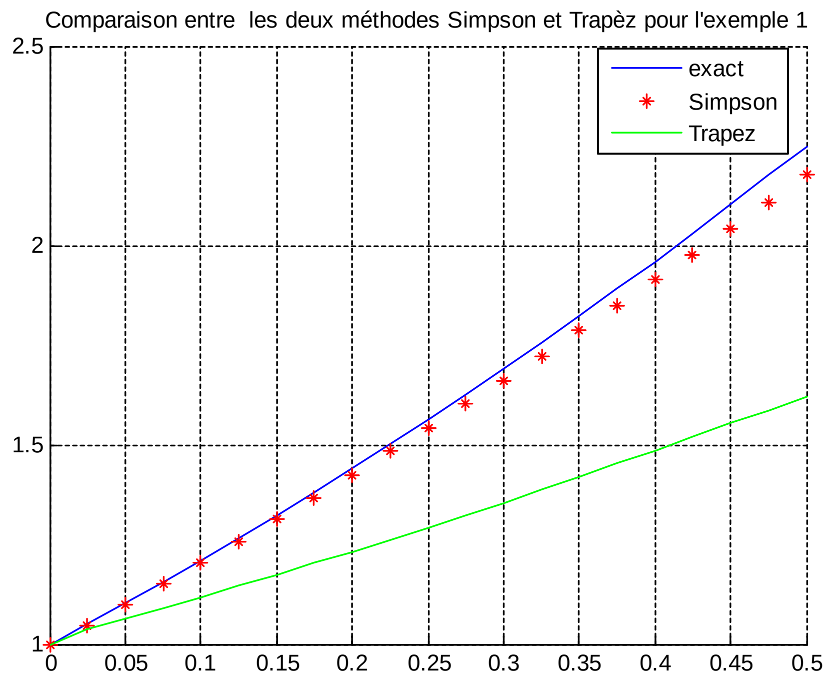
Exemple 1

Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \int_0^x \exp(-(x-t))\, \varphi(x)\, dt = \exp(-x) + 2x$$

Avec la solution exacte est $\varphi(x) = x^2 + 2x + 1$, on prend le pas $h = 0.0125$ et $n = 20$

x	exact	erreur (Sm)	erreur (T)
0	1.0000	0	0
0.0500	1.1025	0.0052	0.0386
0.1000	1.2100	0.0072	0.0923
0.1500	1.3225	0.0104	0.1487
0.2000	1.4400	0.0148	0.2079
0.2500	1.5625	0.0206	0.2700
0.3000	1.6900	0.0278	0.3352
0.3500	1.8225	0.0366	0.4035
0.4000	1.9600	0.0472	0.4750
0.4500	2.1025	0.0595	0.5498
0.5000	2.2500	0.0738	0.6280



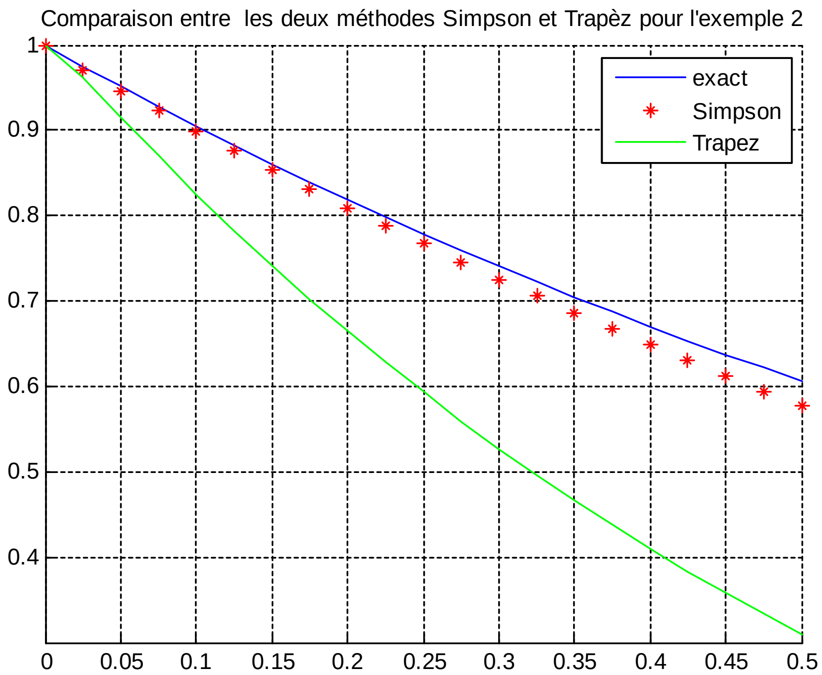
Exemple 2

Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \int_0^x \exp(-(x-t))\,\varphi(x)\,dt = (1-x)\exp(-x)$$

Avec la solution exacte est $\varphi(x) = \exp(-x)$, on prend le pas $h = 0.0125$ et $n = 20$

x	exact	erreur (Sm)	erreur (T)
0	1.0000	0	0
0.0500	0.9512	0.0045	0.0358
0.1000	0.9048	0.0056	0.0795
0.1500	0.8607	0.0073	0.1188
0.2000	0.8187	0.0095	0.1541
0.2500	0.7788	0.0121	0.1856
0.3000	0.7408	0.0151	0.2138
0.3500	0.7047	0.0183	0.2387
0.4000	0.6703	0.0218	0.2607
0.4500	0.6376	0.0254	0.2800
0.5000	0.6065	0.0291	0.2968



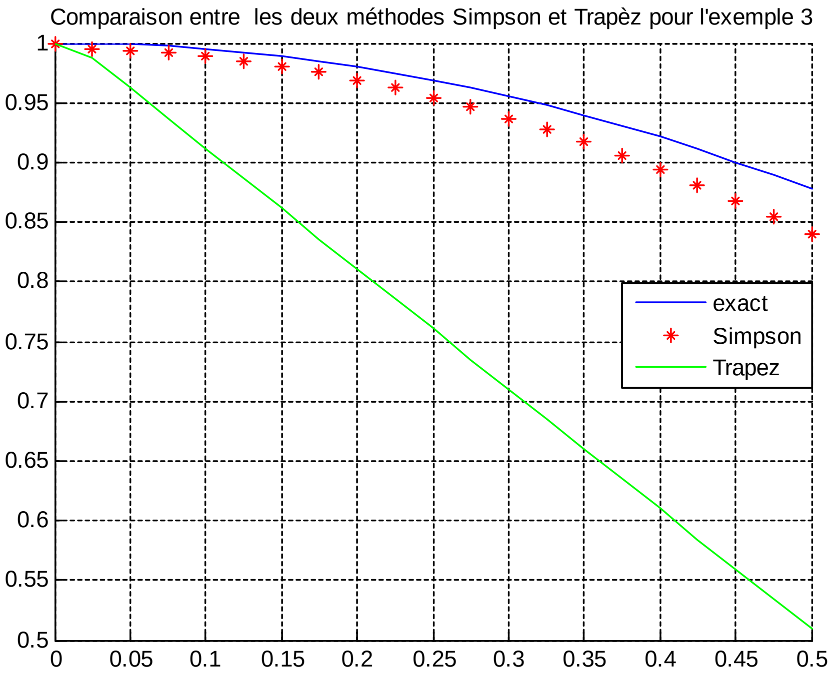
Exemple 3

Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \int_0^x \exp(-(x-t))\,\varphi(x)\,dt = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x + \exp(-x))$$

Avec la solution exacte est $\varphi(x) = \cos x$, on prend le pas $h = 0.0125$ et $n = 20$

x	exact	erreur (Sm)	erreur (T)
0	1.0000	0	0
0.0500	0.9988	0.0047	0.0367
0.1000	0.9950	0.0061	0.0834
0.1500	0.9888	0.0082	0.1276
0.2000	0.9801	0.0110	0.1694
0.2500	0.9689	0.0143	0.2086
0.3000	0.9553	0.0182	0.2453
0.3500	0.9394	0.0226	0.2795
0.4000	0.9211	0.0274	0.3113
0.4500	0.9004	0.0326	0.3406
0.5000	0.8776	0.0380	0.3674


Comparaison entre les deux méthodes Simpson et Trapèz pour l'exemple 3
1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
exact
Simpson
Trapez

.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats en théorie du point fixe dans des espaces de Banach, et on a appliqué quelques théorèmes du point fixe (principe de contraction de Banach qui garantit l'existence et l'unicite de solution, Schauder et de Leray-Shauder assurent l'existence de solution) sur quelques équations intégrales de type Fredholm et de Volterra, et aussi on a présenté quelques méthodes de résolution de ces équations, des méthodes analytiques comme la méthode de Résolvante (qui s'applique seulement sur les équations intégrales linéaire) et des approximations successives, et d'autre numériques comme la méthode de Simpson modifiée et des Trapèzes à fin de trouver une solution approchée, puis on a comparé entre les deux méthodes en utilisant des exemples proposés

Nous prévoyons dans le futur d'essayer d'ameliorer certains resultats afin de pouvoir les appliquer à l'étude d'équations intégrales non linéaires.

.

Bibliographie

[1] L. Debnath and P. Mikusninski, Introduction to Hilbert spaces with application, Academic press, New York, 1990.

[2] S. Delabriere and Y. Raynaud, Analyse convexe, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, 2000-2001.

[3] G.Emmanuele, Anexistence theorem for Hammerstein integral equations, Portu-galiae Mathematica,Vol. 51 Fasc. 4, 1994.

[4] T. Goudon, Intégration intégrale de lebesgue et introduction à l'analyse fonctionnelle, Ellipses Édition Marketing S.A., 2011.

[5] B. Gagui, Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz, Thèse de doctorat en science université de M'sila 2015.

[6] B. Gagui, Résolution des équations intégrales par les méthodes adaptatives, Mémoire de magister université de M'sila 2006.

[7] M. Guesba, Sur quelques équations intégrales non linéaires, Mémoire de magister université de M'sila 2012.

[8] A. Karoui, On the Existence of Continuous Solutions of Nonlinear Integral Equations, University of Carthage, Department of Mathematics, Faculty of Sciences of Bizerte, Jarzouna 7021, Tunisia.Appl.18(2005) 299-305.

[9] P. Kumlin, Functional Analysis, Mathematics Chalmers & GU, TMA 401/MAN 670, 2003/2004.

[10] M. Kern, Problèmes Inverses, Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, 2003.

[11] A. Khirani, Résolution des équations intégrales non linéaire type Volterra, Mémoire de magister université de M'sila 2011.

[12] M. Krasnov, A. Kissélev, Makarenko G, Equations intégales, problèmes et exercices, Editions Mir, Moscou, 1977.

[13] W. Mydlarczyk and W. Okrasi ́nski, Positive solutions to a nonlinear Abel-type integral equation on the whole line, Computers and Mathematics with Applications 41 (2001) 835-842.

[14] M. Moussai, Sur les solutions des équations intégrales et differentielles, Mémoire de magister université de M'sila 2009.

[15] M. Nadir, Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila 2004.

[16] R. Precup, Methods in Nonlinear Integral Equations, Springer-Science+Business Media, 2002.

[17] A. Rahmoune, Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales, Thèse de docteur en sciences université de M'sila 2011.

[18] A. Rahmoune, Résolution Numérique des Equations Intégrales, Mémoire de magister université de M'sila 2002.

[19] M. Terbeche, Constantin, Sacaliuc and Galina,Vornicescu, Solution of some singuler integral equation, Bull. Sci. math. 126 (2002) 379-387.

[20] A.M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications, Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.

Résumé

Les théorèmes du point fixe sont des outils très important dans l'analyse fonctionnelle, on les utilise afin de démontrer l'existence des solutions des différents genres d'équations.

Le but de ce travail est de faire une étude large sur la théorie du point fixe et ses applications, en particulier ses applications aux équations intégrales.

Abastrat

Fixed-point theorems are very important tools in functional analysis, they are used to prove the existence of solutions of different kinds of equations.

The aim of this work is to make a broad study of fixed point theory and its applications, in particular its applications to integral equations.

مـلـخص

نظريات النقطة الصامدة هي أدوات هامة جدا في التحليل الوظيفي، وتستخدم لإثبات وجود حلول لأنواع مختلفة من المعادلات.

الهدف من هذا العمل هو إجراء دراسة واسعة لنظرية النقطة الصامدة وتطبيقاتها، وبصفة خاصة تطبيقاتها على المعادلات التكاملية.