



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

*Solution faible d'un problème associé à une
équation différentielle de type de Riemann-Liouville*

Présentée par :
SADIOU Ilhem

Soutenu le : 06/06/2022.

Devant le jury composé de :

M^r MOKHTARI Abdelhak

M^r SAADI Abderachid

M^r BENMEDDOUR Mohamed Ourabah

M.C.A, Université de M'sila

M.C.A, Université de M'sila

M.A.A, Université de M'sila

Président.

Encadreur.

Examineur.

Remerciements

Je remercie avant tous *ALLAH* pour son aide, se *ALLAH* qui m'a donné la force, la volonté et le moral pour accomplir mon étude en master en mathématique.

Ainsi, je tiens également à ex
Mr. SAADI Abderachid pour avoir d'abord pro
nuel toute le long de la réalisation de ce mémoire et n'a pas ce
conseil

Je tiens à témoigner ma gratitude à **Mr. MOKHTARI Abdelhak** et **Mr. BENMED-
DOUR Mohamed Ourabah** d'avoir acce

Je remercie évidemment me
et soutenus pendant de nombreuse

Je voudrais également remercier tous me
année Master EDP et applications, souhaitons le bonheur et réussite dans la vie.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à ce
travail.

A tous MERCI

Dédicaces

Je dédie ce mode

À me

À mon sœurs et me

À mon enseignant.

À tous me

À chacun de

Ilhem

Table des matières

Notations	1
Introduction	2
1 Éléments de calcul fractionnaire	4
1.1 Espaces de Hilbert	4
1.2 Espace des fonctions régulières sur $]a, b[$	5
1.3 Espace $L^p(]a, b[)$	5
1.4 L'espace $W^{1,p}(]a, b[)$	7
1.5 Espace des fonctions absolument continues	7
1.6 Fonctions spéciales	8
1.7 Intégrales et dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	8
2 Espace de Sobolev fractionnaire de type de Riemann-Liouville	12
2.1 Espaces fonctionnels $AC_{a^+}^{\alpha,p}(]a, b[)$ et $AC_{b^-}^{\alpha,p}(]a, b[)$	12
2.2 Intégration par partie	13
2.3 Espace de Sobolev fractionnaire	15
2.4 Normes dans $W_{a^+}^{\alpha,p}(]a, b[)$	17
2.5 Quelques propriétés de $W_{a^+}^{\alpha,p}(]a, b[)$	21
3 Etude d'un problème aux limites associé à une équation différentielle de type de Riemann-Liouville	23
3.1 Cadre théorique	23
3.2 Cas des conditions mixtes homogènes	28
3.3 Cas des conditions intégrales homogènes	32
3.4 Cas des conditions non homogènes	34

Notations

\mathbb{N}	: Ensemble des nombres entiers naturels.
\mathbb{N}^*	: Ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
\mathbb{R}	: Ensemble des nombres réels.
\mathbb{C}	: Ensemble des nombres complexes.
$C^0(]a, b[) \equiv C(]a, b[)$: Espace des fonctions continues sur l'intervalle $]a, b[$.
$C^n(]a, b[)$: Espace des fonctions n fois dérivables avec continuité sur $]a, b[$.
$C^\infty(]a, b[)$: Espace des fonctions infiniment continument dérivables sur $]a, b[$.
$C_c^\infty(]a, b[)$: Espace des fonctions infiniment dérivables à support compact.
$L^p(]a, b[)$: Espace des fonctions de puissance $p \in [1, +\infty[$, intégrables sur $]a, b[$.
$L^\infty(]a, b[)$: Espace des fonctions essentiellement bornées sur $]a, b[$.
p'	: Conjugé de Hölder de p ($p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$).
$p.p.$: Presque partout.
$\text{supp } f$: Support de la fonction f .
$\frac{d}{dt}$: La dérivée usuelle.
$I_{a^+}^\alpha$: L'intégrale fractionnaire à gauche d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.
$I_{b^-}^\alpha$: L'intégrale fractionnaire à droite d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.
$D_{a^+}^\alpha$: La dérivée fractionnaire à gauche d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.
$D_{b^-}^\alpha$: La dérivée fractionnaire à droite d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.
$\langle g, f \rangle = g(h) \in \mathbb{R}$: Crochet de dualité avec f et $g \in E$.
$(g, h)_E$: Produit scalaire avec f et $g \in E$.
$\ h\ _E$: Norme de $h \in E$.
$\Gamma(\cdot)$: La fonction Gamma.
$\beta(\cdot, \cdot)$: La fonction Bêta.

Introduction

Le calcul fractionnaire est un nom attribué à plusieurs opérateurs mathématiques, Le plus connu Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard

Pendant longtemps plusieurs définitions, suite aux travaux de Joseph Liouville et Bernhard Riemann au milieu du 17e siècle, ont coexisté sans qu'il y ait une parfaite compatibilité entre elles.

On pourrait penser que cette recherche de dérivation fractionnaire est une question de mathématiques « pures » sans intérêt pour l'ingénieur. Pourtant un exemple simple de mécanique des fluides montre comment la dérivée d'ordre un demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne. La dérivée d'ordre un demi étant introduite, on doit être vigilant quant à sa définition précise dans les situations les plus générales. Il en est demême pour la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire, où est typiquement un nombre réel entre 0 et 1.

D'autre part, il est naturel de penser à étendre les concepts d'applications de la différentiabilité ordinaire à la différentiabilité fractionnaire, comme les méthodes connues de résolution des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles et des problèmes aux limites.

Parmi les cadres fonctionnels pour la résolution de problèmes aux valeurs aux limites, on trouve les espaces de Sobolev, car ces espaces sont considérés comme un cadre approprié pour résoudre de nombreux problèmes aux limites.

Dans ce travail, nous intéressons à la résolution des problèmes aux limites liés à des équations différentielles d'ordre fractionnaire définies sur un intervalle compact, et nous choisirons des espaces appropriés pour ces solutions appelés espaces de Sobolev fractionnaires liés à l'approche de Riemann-Liouville. Nous donnons d'abord une définition et quelques propriétés de ces espaces, puis nous traitons des problèmes aux valeurs aux limites de type Riemann-Liouville.

Notre travail est divisé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on introduit quelques concepts liés à la différenciation fractionnaire, et quelques espaces fonctionnels.

Dans le deuxième chapitre, on donne des définitions et propriétés concernant les espaces de Sobolev fractionnaires de type de Riemann-Liouville

Dans le troisième chapitre, on va étudier l'existence et unicité des solutions faibles des trois problèmes aux limites associé à une équation différentielle de type de Riemann-Liouville, en le

théorème de la Lax-Milgram pour résoudre les deux problèmes avec des conditions mixtes :

$$1. \begin{cases} D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x(t) + x(t) = f(t) & , t \in]a, b[, \\ D_{a^+}^\alpha x(a) = 0, x(b) = 0, \end{cases}$$

et les conditions intégrales :

$$2. \begin{cases} D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x(t) + x(t) = f(t) & , t \in]a, b[, \\ I_{b^-}^{1-\alpha} D_{a^+}^\alpha x(a) = 0, \quad I_{a^+}^{1-\alpha} y(a) = 0. \end{cases}$$

En fin, aussi on applique la méthode de formulation variationnelle et le théorème Stampacchia sur le problème intégrale non homogènes :

$$3. \begin{cases} D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x(t) + x(t) = f(t) & , t \in]a, b[, \\ I_{a^+}^{1-\alpha} x(a) = C, x(b) = D. \end{cases}$$

ÉLÉMENTS DE CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, on va introduire des notions et résultats préliminaires des fonctions spéciales lesquelles : fonction de Gamma, fonction de Bêta. On citera aussi en particulier certains résultats élémentaires des espaces fonctionnels et de calculs fractionnaire de type Riemann-Liouville.

Dans ce qui suit, soit $]a, b[$ ($-\infty < a < b < \infty$) un intervalle de \mathbb{R} .

1.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.1. [4] Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui complet pour la norme $(u, u)^{\frac{1}{2}}$.

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Théorème 1.1. (*Projection sur un convexe fermé*) [4] Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$, il existe $x \in K$ unique tel que

$$|f - x| = \min_{y \in K} |f - y|$$

De plus x est caractérisé par la propriété :

$$\begin{cases} x \in K \\ (f - x, y - x) \leq 0 \quad \forall y \in K. \end{cases}$$

On note $x = P_K f$ projection de f sur K .

Proposition 1.1. [4] Sous les hypothèses du théorème 1.1, on a

$$|P_K f_1 - P_K f_2| \leq |f_1 - f_2| \quad \forall f_1, f_2 \in H.$$

1.2 Espace des fonctions régulières sur]a,b[

Définition 1.2. (support d'une fonction).[10] soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle $\text{supp } f$ support de f , défini par.

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in]a, b[: f(x) \neq 0\}},$$

c'est-à-dire le plus petit sous ensemble fermé en dehors duquel f est identiquement nulle.

Définition 1.3. [7] Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^n([a, b])$ l'espace des fonctions qui sont n fois continue dérivable au voisinage de $[a, b]$, muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_c = \sum_{k=0}^n \max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)|.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0([a, b]) \equiv C([a, b])$ l'espace des fonctions f continues sur $[a, b]$, muni de la norme :

$$\|f\|_C = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

On note $C^\infty([a, b])$ l'espace des fonctions infiniment continument dérivables sur l'intervalle $[a, b]$.

Définition 1.4. (Espace des fonctions tests).[10] On désigne par $C_c^\infty(]a, b[)$ (l'espace des fonctions tests sur $]a, b[$), l'espace des fonctions réelles définies sur $]a, b[$ indéfiniment dérivables et à support compact.

Autrement dit,

$$C_c^\infty(]a, b[) = \{\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in C^\infty(]a, b[) : \text{supp } \varphi = K \subset]a, b[\text{ compact}\}$$

Théorème 1.2. (théorème de la moyenne) Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$ alors, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

1.3 Espace $L^p(]a, b[)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.5. [7]

1. Pour $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(]a, b[) = \left\{ f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et } \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

2. Pour $p = +\infty$, on pose

$$L^\infty(]a, b[) = \{f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable, } \exists M > 0 \text{ telle que } |f(t)| \leq M \text{ p.p. sur }]a, b[\}.$$

Théorème 1.3. [7]

1. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(]a, b[)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ définit par :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach.

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(]a, b[)$ est une espace normé quand le munit par la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ M \geq 0; f(t) \leq M \text{ p.p. sur }]a, b[\}.$$

Notation 1.1. Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugués de p i.e.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{où } p' = \frac{p}{p-1}.$$

Théorème 1.4. (Inégalité de Hölder).[4] Soient $f \in L^p(]a, b[)$ et $g \in L^{p'}(]a, b[)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ alors $f.g \in L^1(]a, b[)$ et :

$$\|f.g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}. \quad (1.1)$$

Remarque 1.1. Lorsque $p = p' = 2$, l'inégalité de Hölder devient l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Proposition 1.2. Pour tout $A, B > 0$, pour tout $p > 1$, on a :

$$(A + B)^p \leq 2^{p-1} (A^p + B^p). \quad (1.2)$$

Théorème 1.5. (Convergence dominée de Lebesgue).[4]

Soit (f_n) une suite des fonctions de $L^p(]a, b[)$. On suppose que :

a) $f_n(t) \rightarrow f(t)$ p.p. sur $]a, b[$,

b) il existe une fonction $g \in L^p(]a, b[)$ telle que pour chaque n , $|f_n(t)| \leq g(t)$ p.p. sur $]a, b[$.

Alors $f \in L^p(]a, b[)$ et $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$.

Proposition 1.3. [4] Soit $f, g \in L^p(]a, b[)$ tel que :

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)dt = \int_a^b g(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(]a, b[).$$

Alors,

$$f = g \text{ p.p.}$$

Voici quelque critères topologique de l'espace de Lebesgue.

Théorème 1.6. [4]

1. L'espace $L^p(]a, b[)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,

2. L'espace $L^p(]a, b[)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$,

3. L'espace $L^p(]a, b[)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

1. On dit que g est une majorante intégrable des fonctions (f_n) .

1.4 L'espace $W^{1,p}(]a, b[)$

Définition 1.6. [4] L'espace de sobolev $W^{1,p}(]a, b[)$ d'ordre un sur $]a, b[$ est défini par :

$$W^{1,p}(]a, b[) = \left\{ u \in L^p : \exists g \in L^p \text{ tel que } \int_a^b u(t)\varphi'(t)dt = - \int_a^b g(t)\varphi(t)dt, \forall \varphi \in C_c^\infty(]a, b[) \right\},$$

où φ' est la dérivée classique de φ , et la fonction g satisfaisant ce qui précède condition est notée par u' la dérivée faible de u d'ordre 1. L'espace $W^{1,p}(]a, b[)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}.$$

(dans certains cas, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}$).

En particulier, pour $p = 2$, on pose :

$$H^1(]a, b[) = W^{1,2}(]a, b[).$$

La norme associée comme suivante :

$$\|u\|_{H^1(]a, b[)} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalent de la norme de $W^{1,2}(]a, b[)$.

Voici quelques caractéristiques topologiques de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(]a, b[)$.

Propriétés 1.1. [4]

1. L'espace $W^{1,p}(]a, b[)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,
2. l'espace $W^{1,p}(]a, b[)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$,
3. l'espace H est espace de Hilbert séparable.

1.5 Espace des fonctions absolument continues

Définition 1.7. [8] On désigne par $AC(]a, b[)$ l'espace des fonction primitives du fonctions intégrable :

$$AC(]a, b[) = \left\{ f / \exists \varphi \in L(]a, b[) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt \right\}.$$

On a : $\forall t \in]a, b[; f'(x) = \varphi(t)$ et $f(a) = c$,

On appelle $AC(]a, b[)$ l'espace des fonctions absolument continues sur $]a, b[$.

Définition 1.8. [8] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, nous notons $AC^n(]a, b[)$ l'espace des fonctions f dérivable l'ordre $(n - 1)$ continues tel que $f^{n-1} \in AC(]a, b[)$

est définie par :

$$AC^n(]a, b[) = \{f]a, b[\rightarrow \mathbb{R} \text{ et } f^{n-1} \in AC(]a, b[)\}.$$

En particulier : $AC^1(]a, b[) = AC(]a, b[)$.

Remarque 1.2. Si $1 \leq p < \infty$; $AC^{1,p}(]a, b[) = W^{1,p}(]a, b[)$.

1.6 Fonctions spéciales

On introduit quelques notions et propriétés des fonctions Gamma et de Bêta. Ce sont des fonctions qui jouent un rôle important dans la théorie de calcul fractionnaire.

Définition 1.9. [8] La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivant :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (\forall z \in \mathbb{C} \text{ tq } \operatorname{Re}(z) > 0),$$

avec $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

Propriétés 1.2. [8] Pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, on a :

1. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0^+) = +\infty$,
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
3. $\Gamma(n+1) = n!$.

Propriétés 1.3. [2] Pour $p > 0$, $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}.$$

Définition 1.10. [8] On définit la fonction Bêta comme suivante :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (\forall p, q \in \mathbb{C} \text{ tq } \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0).$$

Théorème 1.7. La fonction Bêta liée avec la fonction Gamma par la relation :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (\operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0).$$

1.7 Intégrales et dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

On introduit quelques définitions et propriétés de l'intégrale et dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, la première primitive est donnée par l'expression :

$$\forall t \in [a, b] : (I_{a^+}^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

pour une second primitive et d'après le théorème du Fubini on a :

$$\begin{aligned} (I_{a^+}^1 f)^2(t) &= (I_{a^+}^1 f)(t)(I_{a^+}^1 f)(t) \\ &= \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau) d\tau \right) du \\ &= \int_a^t \left(\int_u^t du \right) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{1!} \int_a^t (t-\tau)^{2-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

En répétant le même procédé n fois, on trouve :

$$(I_{a+}^1 f)^n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

À travers la fonction Gamma qui est définis pars nous, on a ;

$$(I_{a+}^1 f)^n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Définition 1.11. [11] Soit $f \in L^1(]a, b[)$ une fonction intégrable sur $]a, b[$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f est définie par :

$$\forall t \in]a, b[; (I_{a+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De même manière, on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f , par :

$$\forall t \in]a, b[; (I_{b-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Cas particuliers : $\forall t \in]a, b[;$

$$\begin{cases} (I_{a+}^0 f)(t) = f(t), \\ (I_{b-}^0 f)(t) = f(t). \end{cases}$$

Théorème 1.8. [2] Soit $f \in L^1(]a, b[)$, pour tout $\alpha > 0$, $I_{a+}^\alpha f, I_{b-}^\alpha f$ existe tels que :

$$(I_{a+}^\alpha f), (I_{b-}^\alpha f) \in L^1(]a, b[).$$

Proposition 1.4. [2] Soit $\alpha > 0, \beta > 0$, et soit $f \in L^1(]a, b[)$. Alors :

$$I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f = I_{a+}^\beta I_{a+}^\alpha f = I_{a+}^{\alpha+\beta} f, I_{b-}^\alpha I_{b-}^\beta f = I_{b-}^\beta I_{b-}^\alpha f = I_{b-}^{\alpha+\beta} f.$$

Proposition 1.5. [2] Pour $\alpha > 0, \beta > 0$, on a :

$$\left(I_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

et

$$\left(I_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}.$$

Proposition 1.6. [7] Soit $\alpha > 0$, notons que les fractions de l'intégration des opérateurs sont bornées dans $L^p([a, b])$, i.e. on a les estimations suivantes :

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_{L^p} \leq \left(\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \|f\|_{L^p}, \quad (1.3)$$

et

$$\|I_{b-}^\alpha f\|_{L^p} \leq \left(\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \|f\|_{L^p}. \quad (1.4)$$

Définition 1.12. On définit les espace des fonctions $I_{a^+}^\alpha(C([a, b]))$ et $I_{b^-}^\alpha(C([a, b]))$ pour $\alpha > 0$ et $1 \leq p \leq \infty$ par

$$I_{a^+}^\alpha(C) = \{f : f = I_{a^+}^\alpha \varphi, \quad \varphi \in C([a, b])\},$$

et

$$I_{b^-}^\alpha(C) = \{f : f = I_{b^-}^\alpha \varphi, \quad \varphi \in C([a, b])\}.$$

Maintenant, on définit la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :

Définition 1.13. [11] Soit $f \in L^1(]a, b[)$ une fonction intégrable sur $]a, b[, 0 < \alpha < 1$. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de la fonction f est définie par :

$$(D_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

De même manière, on définit la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de la fonction f , par :

$$(D_{b^-}^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b (\tau-t)^{-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

Définition 1.14. [3] Soit $f \in L^1(]a, b[)$ possède la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche $D_{a^+}^\alpha f$ d'ordre $\alpha \in]0, 1]$ sur l'intervalle $]a, b[$ si $I_{a^+}^{1-\alpha} f$ absolument continue. Dans ce cas $I_{a^+}^{1-\alpha}$ est identifié à son absolument continue et $D_{a^+}^\alpha f$ est définie par :

$$D_{a^+}^\alpha f = \frac{d}{dt} (I_{a^+}^{1-\alpha} f).$$

Plus, on pose :

$$D_{a^+} f = Df.$$

Définition 1.15. [3] soit $f \in L^1(]a, b[)$ possède la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite $D_{b^-}^\alpha f$ d'ordre $\alpha \in]0, 1]$ sur l'intervalle $]a, b[$ si $I_{b^-}^{1-\alpha} f$ absolument continue. Dans ce cas $I_{b^-}^{1-\alpha}$ est identifié à son absolument continue et $D_{b^-}^\alpha f$ est définie par :

$$D_{b^-}^\alpha f = -\frac{d}{dt} (I_{b^-}^{1-\alpha} f).$$

Plus, on pose :

$$D_{b^-} f = -Df.$$

Proposition 1.7. [8] Si $\alpha > 0, \beta > 0$ et $\forall f(t) \in L^p(]a, b[)$ ($1 \leq p \leq \infty$), on a :

$$\left(D_{a^+}^\beta I_{a^+}^\alpha f\right)(t) = \left(I_{a^+}^{\alpha-\beta} f\right)(t), \quad \forall t \in]a, b[,$$

et

$$\left(D_{b^-}^\beta I_{b^-}^\alpha f\right)(t) = \left(I_{b^-}^{\alpha-\beta} f\right)(t), \quad \forall t \in]a, b[.$$

Proposition 1.8. [8] Soit $\alpha > 0$, et soit $f \in L^p(]a, b[)$ ($1 \leq p \leq \infty$), alors on a les égalités suivants :

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(t), \quad \forall t \in]a, b[,$$

et

$$(D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f)(t) = f(t), \quad \forall t \in]a, b[.$$

Nous allons également utiliser la notion

$$D_{a+}^{\alpha} f = I_{a+}^{-\alpha} f = (I_{a+}^{\alpha})^{-1} f, \quad \alpha > 0.$$

Proposition 1.9. [2] Pour $\alpha > 0, \beta > 0$, on a :

$$\left(D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1},$$

et

$$\left(D_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}.$$

Théorème 1.9. [5]

1. Si $\alpha > 0$, et $p \geq 0$, on a $I_{a+}^{\alpha} f, I_{b-}^{\alpha} f \in L^p(]a, b[)$ pour toute $f \in L^p(]a, b[)$.
2. Si $\alpha > 0, p \geq 1$ et $p > \frac{1}{\alpha}$, alors la fonction $I_{a+}^{\alpha} f$ et $I_{b-}^{\alpha} f$ sont continues sur $]a, b[$ pour toute $f \in L^p(]a, b[)$.

ESPACE DE SOBOLEV FRACTIONNAIRE DE TYPE DE RIEMANN-LIOUVILLE

Ce chapitre présente quelques définitions et propositions des espaces fonctionnels $AC_{a^+}^{\alpha,p}(]a, b[)$ et $AC_{b^-}^{\alpha,p}(]a, b[)$ et aussi l'espace de Sobolev fractionnaire.

2.1 Espaces fonctionnels $AC_{a^+}^{\alpha,p}(]a, b[)$ et $AC_{b^-}^{\alpha,p}(]a, b[)$

Définition 2.1. [6] On note $AC_{a^+}^{\alpha,p}(]a, b[)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ qui ont la représentation :

$$f(t) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha-1} + I_{a^+}^{\alpha} \varphi(t), \quad (2.1)$$

avec $(c, \varphi) \in \mathbb{R} \times L^p(]a, b[)$.

Définition 2.2. [6] On note $AC_{b^-}^{\alpha,p}(]a, b[)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ qui ont la représentation :

$$f(t) = \frac{d}{\Gamma(\alpha)} (b - t)^{\alpha-1} + I_{b^-}^{\alpha} \psi(t), \quad (2.2)$$

avec $(d, \psi) \in \mathbb{R} \times L^p(]a, b[)$.

Théorème 2.1. [6] Soit $0 < \alpha \leq 1$ et soit $f \in L^1(]a, b[)$, alors f possède une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α sur l'intervalle $]a, b[$, si et seulement si $f \in AC_{a^+}^{\alpha,1}(]a, b[)$, qui ont été représenté par l'égalité (2.1).

Dans ce cas,

$$(I_{a^+}^{1-\alpha} f)(a) = c, \\ \forall t \in]a, b[; (D_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \varphi(t).$$

Théorème 2.2. [6] Soit $0 < \alpha \leq 1$ et soit $f \in L^1(]a, b[)$, alors f possède une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α sur l'intervalle $]a, b[$, si et seulement si $f \in AC_{b^-}^{\alpha,1}(]a, b[)$, qui ont

été représenté par l'égalité (2.2).

Dans ce cas,

$$(I_{b^-}^{1-\alpha} f)(b) = d,$$

$$\forall t \in]a, b[; (D_{b^-}^\alpha f)(t) = \psi(t).$$

Remarque 2.1. .

- a) Il est facile de voir que théorème 2.2 implique la suivante (pour tout $1 \leq p < \infty$) : f possède la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche $D_{a^+}^\alpha f \in L^p(]a, b[)$ si et seulement si $f \in AC_{a^+}^{\alpha,p}(]a, b[)$, représenté par l'égalité (2.1).
- b) Il est facile de voir que théorème 2.2 implique la suivante (pour tout $1 \leq P < \infty$) : f possède la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite $D_{b^-}^\alpha f \in L^p(]a, b[)$ si et seulement si $f \in AC_{b^-}^{\alpha,p}(]a, b[)$, représenté par l'égalité (2.2).

Proposition 2.1. [3] Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors on a l'inclusions $AC_{a^+}^{\alpha,p}(]a, b[) \subset L^q(]a, b[)$ et $AC_{b^-}^{\alpha,p}(]a, b[) \subset L^q(]a, b[)$ pour toute $1 \leq q < \frac{1}{1-\alpha}$.

2.2 Intégration par partie

Proposition 2.2. [6] Si $0 < \alpha < 1$, $f \in C(]a, b[)$ et $f(b) = 0$ alors $I_{b^-}^{1-\alpha} f \in C(]a, b[)$, $(I_{b^-}^{1-\alpha} f)(b) = 0$, et

$$D_{b^-}^\alpha f = I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{b^-}^1 f) = I_{b^-}^{1-\alpha} (-D^1 f) \in C(]a, b[).$$

Par conséquent, $f \in I_{b^-}^\alpha (C(]a, b[))$.

Démonstration. Si $f \in C(]a, b[)$ et $f(b) = 0$, alors :

$$f(t) = I_{b^-}^1 (D_{b^-}^1 f) (t)$$

$$\Leftrightarrow I_{b^-}^{1-\alpha} f(t) = I_{b^-}^{1-\alpha} I_{b^-}^1 (D_{b^-}^1 f) (t)$$

$$= I_{b^-}^1 I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{b^-}^1 f) (t)$$

$$= I_{b^-}^1 I_{b^-}^{1-\alpha} (-D^1 f) (t)$$

d'où

$$I_{b^-}^1 I_{b^-}^{1-\alpha} f(t) = I_{b^-}^1 I_{b^-}^{1-\alpha} (-D^1 f) (t)$$

$$I_{b^-}^\alpha f(t) = I_{b^-}^{1-\alpha} (-D^1 f) (t)$$

$$D_{b^-}^\alpha f(t) = I_{b^-}^{1-\alpha} (-D^1 f) (t).$$

Cela signifie à travers le théorème 1.8 $I_{b^-}^{1-\alpha} f \in C(]a, b[)$ et $D_{b^-}^\alpha f = I_{b^-}^{1-\alpha} (-D^1 f) \in C(]a, b[)$ et $(I_{b^-}^{1-\alpha} f)(b) = 0$.

D'où $f \in I_{b^-}^\alpha (C(]a, b[))$. □

Théorème 2.3. [7] Soient $\alpha > 0, 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$ (en outre, nous supposons que $p > 1$ et $q > 1$ lorsque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$). Alors on a :

$$\int_a^b f(t) (I_b^\alpha - g)(t) dt = \int_a^b (I_a^\alpha f)(t) g(t) dt, \quad \forall f \in L^p(]a, b[), g \in L^q(]a, b[).$$

Théorème 2.4. [6] Si $0 < \alpha \leq 1$, alors :

$$\int_a^b f(t) (D_b^\alpha - g)(t) dt = \int_a^b (D_a^\alpha f)(t) g(t) dt, \quad \forall f \in AC_{a^+}^\alpha(]a, b[) \text{ et } \forall g \in C^1(]a, b[), \quad (2.3)$$

satisfaisant condition aux limites $g(a) = g(b) = 0$.

Démonstration. Soit $f \in AC_{a^+}^\alpha(]a, b[)$ de l'équation (2.1) de sorte que $(c, \varphi) \in \mathbb{R} \times L^1(]a, b[)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) (D_b^\alpha - g)(t) dt &= \int_a^b f(t) I_b^{1-\alpha} (D_b^1 - g)(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{c}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1} + I_{a^+}^\alpha \varphi(t) \right) I_b^{1-\alpha} (D_b^1 - g)(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{c}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1} I_b^{1-\alpha} (D_b^1 - g)(t) dt + \int_a^b I_{a^+}^\alpha \varphi(t) I_b^{1-\alpha} (D_b^1 - g)(t) dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t-a)^{\alpha-1} I_b^{1-\alpha} (D_b^1 - g)(t) dt + \int_a^b I_{a^+}^\alpha \varphi(t) I_b^{-\alpha} I_b^1 - D_b^1 - g(t) dt \\ &= c I_b^\alpha - I_b^{1-\alpha} D_b^1 - g(a) + \int_a^b I_{a^+}^\alpha \varphi(t) I_b^{-\alpha} g(t) dt \\ &= c I_b^\alpha - I_b^1 - I_b^{-\alpha} D_b^1 - g(a) + \int_a^b I_{a^+}^{-\alpha} I_{a^+}^\alpha \varphi(t) g(t) dt \\ &= c I_b^1 - D_b^1 - g(a) + \int_a^b D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha \varphi(t) g(t) dt \\ &= c g(a) + \int_a^b D_{a^+}^\alpha f(t) g(t) dt \\ &= \int_a^b D_{a^+}^\alpha f(t) g(t) dt, \quad \forall g \in C_c^\infty(]a, b[). \end{aligned}$$

□

Théorème 2.5. [3] Soit $0 \leq \frac{1}{p} < \alpha < 1, 0 \leq \frac{1}{q} < \alpha < 1$, alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) (D_b^\alpha - g)(t) dt &= (I_{a^+}^{1-\alpha} f)(a) g(a) - f(b) (I_b^{1-\alpha} g)(b) + \int_a^b (D_{a^+}^\alpha f)(t) g(t) dt, \\ &\forall f \in AC_{a^+}^{\alpha,p}(]a, b[) \text{ et } \forall g \in AC_{b^-}^{\alpha,q}(]a, b[). \end{aligned}$$

Démonstration. [3] Représentent les fonctions f et g par les équations (2.1) et (2.2) respectivement de sorte que $(c, \varphi) \in \mathbb{R} \times L^p(]a, b[)$ et $(d, \psi) \in \mathbb{R} \times L^q(]a, b[)$. L'hypothèse $0 < \frac{1}{p} < \alpha < 1$

garantit que $1 \leq p' \leq \frac{1}{1-\alpha}$ lors $AC_b^{\alpha,q}([a, b]) \subset L^{p'}([a, b])$, alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) (D_{b^-}^\alpha g)(t) dt &= \int_a^b f(t) \psi(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{c}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1} + I_{a^+}^\alpha \varphi(t) \right) \psi(t) dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t-a)^{\alpha-1} \psi(t) dt + \int_a^b I_{a^+}^\alpha \varphi(t) \psi(t) dt \\ &= c(I_{b^-}^\alpha \psi)(a) + \int_a^b I_{a^+}^\alpha \varphi(t) \psi(t) dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_a^b (D_{a^+}^\alpha f)(t) g(t) dt &= \int_a^b \varphi(t) g(t) dt \\ &= \int_a^b \varphi(t) \left(\frac{d}{\Gamma(\alpha)} (b-t)^{\alpha-1} + I_{b^-}^\alpha \psi(t) \right) dt \\ &= \frac{d}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(t) (b-t)^{\alpha-1} dt + \int_a^b \varphi(t) I_{b^-}^\alpha \psi(t) dt \\ &= d(I_{a^+}^\alpha \varphi)(b) + \int_a^b I_{a^+}^\alpha \varphi(t) \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(t) (D_{b^-}^\alpha g)(t) - (D_{a^+}^\alpha f)(t) g(t)) dt &= c(I_{b^-}^\alpha \psi)(a) + \int_a^b I_{a^+}^\alpha \varphi(t) \psi(t) dt - d(I_{a^+}^\alpha \varphi)(b) - \int_a^b I_{a^+}^\alpha \varphi(t) \psi(t) dt \\ &= c(I_{b^-}^\alpha \psi)(a) - d(I_{a^+}^\alpha \varphi)(b) \\ &= (I_{a^+}^{1-\alpha} f)(a) g(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (I_{b^-}^{1-\alpha} g)(b) (b-a)^{\alpha-1} (I_{a^+}^{1-\alpha} f)(a) \\ &\quad - (I_{b^-}^{1-\alpha} g)(b) f(b) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (I_{a^+}^{1-\alpha} f)(a) (I_{b^-}^{1-\alpha} g)(b) (b-a)^{\alpha-1} \\ &= (I_{a^+}^{1-\alpha} f)(a) g(a) - (I_{b^-}^{1-\alpha} g)(b) f(b), \end{aligned}$$

puisque

$$(I_{a^+}^\alpha \varphi)(b) = f(b) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} c (b-a)^{\alpha-1}, (I_{b^-}^\alpha \psi)(a) = g(a) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} d (b-a)^{\alpha-1}, c = (I_{a^+}^{1-\alpha} f)(a) \text{ et } d = (I_{b^-}^{1-\alpha} g)(b). \quad \square$$

2.3 Espace de Sobolev fractionnaire

Définition 2.3. [6] Soit $0 < \alpha \leq 1$ et soit $1 \leq p < \infty$, l'espace de Sobolev $W_{a^+}^{1,p}([a, b])$ est défini par :

$$W_{a^+}^{1,p}([a, b]) = \left\{ u \in L^p, \exists g \in L^p \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([a, b]), \text{ tel que } \int_a^b u(t) D_{b^-}^\alpha \varphi(t) dt = \int_a^b g(t) \varphi(t) dt \right\},$$

$g = u_{a+}^{\alpha}$ est appelé la dérivé à gauche au sens faible de u d'ordre $\alpha \in]0, 1[$.

Remarque 2.2. [6] Si $\varphi \in C_c^{\infty}(]a, b[)$, on a : $D_{b-}^1 \varphi = -D^1 \varphi = -\varphi'$, les dérivées faibles fractionnaire à gauche u'_{a+} de u coïncident avec la dérivée faible classique $u' = D^1 u$, donc :

$$W_{a+}^{1,p}(]a, b[) = W^{1,p}(]a, b[) = AC^{1,p}(]a, b[) = AC_{a+}^{1,p}(]a, b[)$$

Théorème 2.6. [6] Si $0 < \alpha \leq 1$ et $1 \leq p < \infty$, on a :

$$W_{a+}^{\alpha,p}(]a, b[) = AC_{a+}^{\alpha,p}(]a, b[) \cap L^p(]a, b[).$$

Démonstration. Si $u \in AC_{a+}^{1,p}(]a, b[)$, de la théorème 2.1 on a : $D_{a+}^{\alpha} u \in L^p(]a, b[)$, et de la théorème 2.4, on a :

$$\int_a^b u(t) (D_{b-}^{\alpha} \varphi)(t) dt = \int_a^b (D_{a+}^{\alpha} u)(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(]a, b[),$$

où $u_{a+}^{\alpha} = g = D_{a+}^{\alpha} u = \frac{d}{dt} I_{a+}^{1-\alpha} u \in L^p(]a, b[)$.

Donc $u \in W_{a+}^{\alpha,p}(]a, b[)$.

Inversement, soit $u \in W_{a+}^{\alpha,p}(]a, b[)$, c'est-à-dire $u \in L^p(]a, b[)$, $\exists g \in L^p(]a, b[)$ tel que :

$$\int_a^b u(t) (D_{b-}^{\alpha} \varphi)(t) dt = \int_a^b g(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(]a, b[).$$

Pour montrer que $u \in AC_{a+}^{\alpha,p}(]a, b[) \cap L^p(]a, b[)$, il suffit de vérifier que u possède une dérivée à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α : $D_{a+}^{\alpha} u \in L^p(]a, b[)$. Puisque $I_{a+}^{1-\alpha} u$ est absolument continue sur $]a, b[$ et classique de ses dérivés de la première ordre appartient à $L^p(]a, b[)$, tel que :

$$\begin{aligned} \int_a^b u(t) (D_{b-}^{\alpha} \varphi)(t) dt &= \int_a^b u(t) I_{b-}^{1-\alpha} (D_{b-}^1 \varphi) dt \\ &= \int_a^b u(t) I_{b-}^{1-\alpha} (-D^1 \varphi) dt \\ &= \int_a^b (I_{a+}^{1-\alpha} u)(t) (-D^1 \varphi)(t) dt \\ &= - \int_a^b (I_{a+}^{1-\alpha} u)(t) (D^1 \varphi)(t) dt. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_a^b u(t) (D_{b-}^{\alpha} \varphi)(t) dt = - \int_a^b g(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(]a, b[).$$

Alors, $I_{a+}^{1-\alpha} u \in W_{a+}^{1,p}(]a, b[)$, donc $I_{a+}^{1-\alpha} u$ est absolument continue et classique de ses dérivés de la première ordre appartient à $L^p(]a, b[)$.

D'où ; $W_{a+}^{1,p}(]a, b[) = AC_{a+}^{\alpha,p}(]a, b[) \cap L^p(]a, b[)$. □

Proposition 2.3. [6]

1. Si $0 < \alpha \leq 1$ et $(1 - \alpha)p < 1$ tel que $AC_{a+}^{\alpha,p}(]a, b[) \subset L^p(]a, b[)$.

Donc $W_{a+}^{\alpha,p}(]a, b[) = AC_{a+}^{\alpha,p}(]a, b[) \cap L^p(]a, b[) = AC_{a+}^{\alpha,p}(]a, b[)$.

2. Si $(1 - \alpha)p \geq 1$, tel que $W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b[\cdot]) = AC_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b[\cdot]) \cap L^p(\cdot, b[\cdot])$ ce dernier est un ensemble de fonction qui appartiennent à $AC_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b[\cdot])$ qui vérifie la condition $(I_{a^+}^{1-\alpha}u)(a) = 0$.

Démonstration. .

1. Si $(1 - \alpha)p < 1$, on a : $u \in L^p(\cdot, b[\cdot])$ tel que $u(t) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}(t - x)^{\alpha-1} + I_{a^+}^\alpha \varphi(t)$ et $\varphi \in L^p(\cdot, b[\cdot])$, d'où $I_{a^+}^\alpha \varphi(t) \in L^p(\cdot, b[\cdot])$.

Il suffit de prouver que $(t - x)^{\alpha-1} \in L^p(\cdot, b[\cdot])$, i.e. $\int_a^b (|t - x|^{\alpha-1})^p dt < \infty$.

Donc ; $\int_a^b (|t - x|^{\alpha-1})^p dt = \int_a^b |t - x|^{(\alpha-1)p} dt$.

Il faut $(\alpha - 1)p > -1$ pour l'intégral à un sens, c'est-à-dire $\int_a^b (|t - x|^{\alpha-1})^p dt < \infty$.

Alors $(\alpha - 1)p < 1$.

2. Si $(1 - \alpha)p \geq 1$, on a aussi $u \in L^p(\cdot, b[\cdot])$ mais $(t - x)^{\alpha-1} \notin L^p(\cdot, b[\cdot])$ et $I_{a^+}^\alpha \varphi \in L^p(\cdot, b[\cdot])$.
Donc, il faut que $c = 0$ pour que $u \in L^p(\cdot, b[\cdot])$, de sorte que $c = (I_{a^+}^\alpha u)(a)$.
Ainsi ; $(I_{a^+}^\alpha u)(a) = 0$.

□

2.4 Normes dans $W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b[\cdot])$

Définition 2.4. [6] Soit $\alpha \in]0, 1[$, l'espace $W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b[\cdot])$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{tel que } u \in W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b[\cdot]),$$

où $\|\cdot\|_{L^p}$ désigne le classique norme dans $L^p(\cdot, b[\cdot])$.

Théorème 2.7. [6] La norme $\|\cdot\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$ est équivalent à la norme $\|u\|_{a, W_{a^+}^{1,p}}$ donné par ;

$$\|u\|_{a, W_{a^+}^{1,p}} = (|I_{a^+}^{1-\alpha} u(a)|^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Supposons que $(1 - \alpha)p < 1$, pour $u \in W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b[\cdot])$ on a :

$$u(t) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}(t - a)^{\alpha-1} + I_{a^+}^\alpha \varphi(t) \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi \in L^p(\cdot, b[\cdot]).$$

Alors :

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_a^b \left| \frac{c}{\Gamma(\alpha)}(t - a)^{\alpha-1} + I_{a^+}^\alpha \varphi(t) \right|^p dt$$

En utilisant l'inégalité (1.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p}^p &\leq 2^{p-1} \left(\frac{|c|^p}{\Gamma(\alpha)^p} \int_a^b (t - a)^{(\alpha-1)p} dt + \int_a^b |I_{a^+}^\alpha \varphi(t)|^p dt \right) \\ &\leq 2^{p-1} \left(\frac{|c|^p}{\Gamma(\alpha)^p} \int_a^b (t - a)^{(\alpha-1)p} dt + \|I_{a^+}^\alpha \varphi(t)\|_{L^p}^p \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (1.3), on trouve :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p}^p &\leq 2^{p-1} \left(\frac{|c|^p}{\Gamma(\alpha)^p} \int_a^b (t-a)^{(\alpha-1)p} dt + \frac{(b-a)^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha+1)^p} \|\varphi(t)\|_{L^p}^p \right) \\ &\leq 2^{p-1} \left(\frac{|c|^p}{\Gamma(\alpha)^p} \left[\frac{1}{(\alpha-1)p+1} (t-a)^{(\alpha-1)p+1} \right]_a^b + k^p \|\varphi(t)\|_{L^p}^p \right) \quad \left(k = \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\ &\leq 2^{p-1} \left(\frac{|c|^p}{\Gamma(\alpha)^p} \frac{1}{(\alpha-1)p+1} (b-a)^{(\alpha-1)p+1} + k^p \|\varphi\|_{L^p}^p \right). \end{aligned}$$

En observant que $(\alpha a + \beta b \leq (\alpha + \beta)a + (\alpha + \beta)b$, alors :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p}^p &\leq 2^{p-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)^p ((\alpha-1)p+1)} (b-a)^{(\alpha-1)p+1} + k^p \right) |c|^p \\ &\quad + 2^{p-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)^p ((\alpha-1)p+1)} (b-a)^{(\alpha-1)p+1} + k^p \right) \|\varphi\|_{L^p}^p \\ &= L_{\alpha,0} (I_{a^+}^{1-\alpha} u(a) + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p) \quad (c = (I_{a^+}^{1-\alpha} u)(a) \text{ et } \varphi = D_{a^+}^\alpha u) \\ &= L_{\alpha,0} \|u\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}^p. \end{aligned}$$

$$\text{où } L_{\alpha,0} = 2^{p-1} \left(\frac{(b-a)^{(\alpha-1)p+1}}{\Gamma(\alpha)^p ((\alpha-1)p+1)} + k^p \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}^p &= \|u\|_{L^p}^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p \\ &\leq L_{\alpha,0} \|u\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p \\ &\leq L_{\alpha,0} \|u\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}^p + \|u\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}^p \quad \left(\text{car } \|u\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}^p = |I_{a^+}^{1-\alpha} u(a)|^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p \right) \\ &\leq (L_{\alpha,0} + 1) \|u\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}^p \\ &\leq L_{\alpha,1} \|u\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}^p \end{aligned}$$

$$\text{où } L_{\alpha,1} = L_{\alpha,0} + 1.$$

Alors,

$$\|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}^p \leq L_{\alpha,1} \|u\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}^p.$$

D'autre part, nous allons prouver qu'il existe une constante $M_{\alpha,1} > 0$ de telle sorte que

$$\|u\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}^p \leq M_{\alpha,1} \|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}^p, \quad u \in W_{a^+}^{\alpha,p}.$$

Soit $u \in W_{a^+}^{\alpha,p}$, et d'après le théorème de la valeur intermédiaire il existe $t \in]a, b[$, tel que :

$$(I_{a^+}^{1-\alpha} u)(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (I_{a^+}^{1-\alpha} u)(s) ds,$$

et d'après l'absolue continuité, on a :

$$(I_{a^+}^{1-\alpha} u)(t) = (I_{a^+}^{1-\alpha} u)(t_0) + \int_{t_0}^t D^1 (I_{a^+}^{1-\alpha} u)(s) ds, \quad \forall t \in]a, b[.$$

Donc

$$\begin{aligned} |(I_{a^+}^{1-\alpha}u)(t)| &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |(I_{a^+}^{1-\alpha}u)(s)| ds + \int_{t_0}^t |D_{a^+}^\alpha u(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{b-a} \|I_{a^+}^{1-\alpha}u\|_{L^1} + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^1}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité (1.3), on trouve :

$$\begin{aligned} |(I_{a^+}^{1-\alpha}u)(t)| &\leq \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|u\|_{L^1} + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^1}, \quad \forall t \in]a, b[\\ &\leq \frac{(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|u\|_{L^1} + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^1}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$|(I_{a^+}^{1-\alpha}u)(a)| \leq \frac{(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|u\|_{L^1} + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^1}.$$

En répétant l'inégalité $(\alpha + \beta \leq (\alpha + \beta)a + (\alpha + \beta)b)$, on déduit que :

$$\begin{aligned} |(I_{a^+}^{1-\alpha}u)(t)| &\leq \left(\frac{(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + 1 \right) \|u\|_{L^1} + \left(\frac{(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + 1 \right) \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^1} \\ &\leq \left(\frac{(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + 1 \right) (\|u\|_{L^1} + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^1}) \\ &\leq M_{\alpha,0} (\|u\|_{L^1} + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^1}). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$\begin{aligned} |(I_{a^+}^{1-\alpha}u)(t)| &\leq M_{\alpha,0} \left(\left(\int_a^b |1|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b |u|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |1|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b |D_{a^+}^\alpha u|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &= M_{\alpha,0} \left((b-a)^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{L^p} + (b-a)^{\frac{1}{p'}} \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p} \right) \\ &= M_{\alpha,0} \left((b-a)^{\frac{p-1}{p}} \|u\|_{L^p} + (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p} \right) \\ &= M_{\alpha,0} (b-a)^{\frac{p-1}{p}} (\|u\|_{L^p} + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}), \end{aligned}$$

où $M_{\alpha,0} = \frac{(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + 1$. Alors :

$$|(I_{a^+}^{1-\alpha}u)(t)|^p \leq M_{\alpha,0}^p (b-a)^{p-1} (\|u\|_{L^p} + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p})^p.$$

A partir de l'inégalité (1.2), on obtient :

$$|(I_{a^+}^{1-\alpha}u)(t)|^p \leq 2^{p-1} M_{\alpha,0}^p (b-a)^{p-1} (\|u\|_{L^p}^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p).$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|u\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}^p &= |I_{a^+}^{1-\alpha}u(a)|^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p \\ &\leq 2^{p-1} M_{\alpha,0}^p (b-a)^{p-1} (\|u\|_{L^p}^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p) + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p \\ &= 2^{p-1} M_{\alpha,0}^p (b-a)^{p-1} \|u\|_{L^p}^p + (2^{p-1} M_{\alpha,0}^p (b-a)^{p-1} + 1) \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité $(\alpha + \beta) \leq (\alpha + \beta)a + (\alpha + \beta)b$, on trouve :

$$\begin{aligned} \|u\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}^p &\leq (2^{p-1} M_{\alpha,0}^p (b-a)^{p-1} + 1) \|u\|_{L^p}^p \\ &\quad + (2^{p-1} M_{\alpha,0}^p (b-a)^{p-1} + 1) \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p \\ &\leq (2^{p-1} M_{\alpha,0}^p (b-a)^{p-1} + 1) (\|u\|_{L^p}^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p) \\ &= M_{\alpha,1} \|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}^p, \end{aligned}$$

$$\text{où } M_{\alpha,1} = 2^{p-1} M_{\alpha,0}^p (b-a)^{p-1} + 1.$$

Donc la norme $\|\cdot\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$ équivalent à la norme $\|u\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}$.

• Si $(1 - \alpha)p \geq 1$, alors $W_{a^+}^{\alpha,p}([a, b]) = AC_{a^+}^{\alpha,p}([a, b]) \cap L^p([a, b])$ ce dernier est un ensemble de fonctions qui appartiennent à $AC_{a^+}^{\alpha,p}([a, b])$ qui vérifient la condition $c = (I^{1-\alpha}u)(a) = 0$, nous avons

$$\|u\|_{L^p}^p = \|I_{a^+}^\alpha \varphi\|_{L^p}^p$$

de l'inégalité (1.3), on déduit que :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p}^p &\leq \frac{(b-a)^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha+1)^p} \|\varphi\|_{L^p}^p \\ &= \frac{(b-a)^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha+1)^p} \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p \quad (D_{a^+}^\alpha u = \varphi) \\ &\leq L_{\alpha,0} \|u\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}^p, \end{aligned}$$

$$\text{où } L_{\alpha,0} = \frac{(b-a)^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha+1)^p}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}^p &= \|u\|_{L^p}^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p \\ &\leq L_{\alpha,0} \|u\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p \\ &= L_{\alpha,0} \|u\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}^p + \|u\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}^p \\ &= L_{\alpha,1} \|u\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}^p, \end{aligned}$$

$$\text{où } L_{\alpha,1} = L_{\alpha,0} + 1.$$

Alors :

$$\|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}^p \leq L_{\alpha,1} \|u\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}^p, \quad \text{avec } L_{\alpha,1} > 0.$$

D'autre part, on a $(I_{a^+}^{1-\alpha}u)(a) = 0$ alors

$$\begin{aligned} \|u\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}^p &= \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p \\ &\leq \|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}^p \\ &\leq M_{\alpha,1} \|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}^p, \quad \text{et } M_{\alpha,1} = 1. \end{aligned}$$

Enfin, $\|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$ équivalent à la norme $\|u\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}$.

La preuve est terminée. □

2.5 Quelques propriétés de $W_{a^+}^{\alpha,p}(\]a, b[)$

Théorème 2.8. [6] Pour $\alpha > 0$ et $1 \leq p < \infty$, l'espace $W_{a^+}^{\alpha,p}(\]a, b[)$ muni des les normes $\|\cdot\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$ et $\|\cdot\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}$ est complet.

Démonstration. [6] Soit $0 < \alpha \leq 1$, il suffit de montrer que $W_{a^+}^{\alpha,p}(\]a, b[)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{a,W_{a^+}^{\alpha,p}}$ est complet.

Soit $\{u_n\} \subseteq W_{a^+}^{\alpha,p}(\]a, b[)$ est une suite de Cauchy, alors on a $\{u_n\} \in AC_{a^+}^{\alpha,p}(\]a, b[) \cap L^p(\]a, b[)$ donc, $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\]a, b[)$. Puis $\{I_{a^+}^{1-\alpha}u(a)\}$ et $\{D_{a^+}^\alpha u_n\}$ sont des suites de Cauchy dans \mathbb{R} et $L^p(\]a, b[)$ respectivement. Ainsi $L^p(\]a, b[)$ est un espace complet alors il existe les fonctions u et u^α dans L^p , tel que

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u & \text{dans } L^p(\]a, b[), \\ D_{a^+}^\alpha u_n \rightarrow u^\alpha & \text{dans } L^p(\]a, b[). \end{cases} \quad (\text{avec } n \rightarrow \infty)$$

En écrit :

$$u_n(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} I_{a^+}^{1-\alpha} u(a)(t-a)^{-\alpha} + I_{a^+}^\alpha \varphi_n(t), \text{ pour toute } \varphi_n \in L^p(\]a, b[),$$

On a :

$$\begin{cases} I_{a^+}^{1-\alpha} u_n(a) \rightarrow I_{a^+}^{1-\alpha} u(a) & \text{dans } L^p(\]a, b[), \\ I_{a^+}^\alpha \varphi_n \rightarrow I_{a^+}^\alpha \varphi & \text{dans } L^p(\]a, b[), \end{cases}$$

puisque $\varphi \in L^p(\]a, b[)$.

En effet, si $(t-a)^{-\alpha} \in L^p(\]a, b[)$, alors

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} I_{a^+}^{1-\alpha} u_n(a)(t-a)^{-\alpha} \in L^p(\]a, b[)$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} I_{a^+}^{1-\alpha} u(a)(t-a)^{-\alpha} \in L^p(\]a, b[)$$

D'où

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} I_{a^+}^{1-\alpha} u_n(a)(t-a)^{-\alpha} \rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} I_{a^+}^{1-\alpha} u(a)(t-a)^{-\alpha} p.p.$$

D'autre part, $\forall n; |u_n| \leq M$, on déduit que

$$\left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} I_{a^+}^{1-\alpha} u_n(a)(t-a)^{-\alpha} \right| \leq \frac{M}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha},$$

ce dernier appartient à $L^p(\]a, b[)$, et par la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} I_{a^+}^{1-\alpha} u_n(a)(t-a)^{-\alpha} \rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} I_{a^+}^{1-\alpha} u(a)(t-a)^{-\alpha} \quad \text{dans } L^p(\]a, b[).$$

Le même travail pour $I_{a^+}^\alpha \varphi(t)$, on trouve alors

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} I_{a^+}^{1-\alpha} u(a)(t-a)^{-\alpha} + I_{a^+}^\alpha \varphi(t), \text{ pour toute } \varphi \in L^p(\]a, b[).$$

Donc : $u \in W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b]$ et est la limite de $\{u_n\}$ dans $W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b]$ muni de la norme $\|\cdot\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}$, donné par

$$\|u_n\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}^p = |I_{a^+}^{1-\alpha} u_n(a)|^p + \|D_{a^+}^\alpha u_n\|_{L^p}^p.$$

D'affirmer que $u \in L^p(\cdot, b]$, il suffit d'examiner les cas $(1-\alpha)p < 1$ et $(1-\alpha)p \geq 1$, dans le seconde cas pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_{a^+}^{1-\alpha} u_n(a) = 0$, par conséquent $c = 0$ alors $u_n(t) = I_{a^+}^\alpha \varphi_n$ et $u(t) = I_{a^+}^\alpha \varphi$, de pour tout $\varphi \in L^p(\cdot, b]$ on a

$$\varphi_n \rightarrow \varphi,$$

d'où

$$I_{a^+}^\alpha \varphi_n \rightarrow I_{a^+}^\alpha \varphi,$$

conclure la preuve. \square

Remarque 2.3. Soit l'application identité $i : (W_{a^+}^{\alpha,p}, \|\cdot\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}) \rightarrow (W_{a^+}^{\alpha,p}, \|\cdot\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}})$ est un homéomorphisme linéaire .

Théorème 2.9. [6] Pour $\alpha > 0$ et $1 < p < \infty$, l'espace $W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b]$ muni des les normes $\|\cdot\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$ et $\|\cdot\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}$ est réflexive.

Démonstration. [6] L'espace produit $E = L^p(\cdot, b] \times L^p(\cdot, b]$ et considérer l'espace $W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b]$ muni de la norme $\|\cdot\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$. On définit l'opérateur suivant :

$$T : W_{a^+}^{\alpha,p} \rightarrow E$$

$$u \rightarrow (u, D_{a^+}^\alpha u)$$

En remarquant $\|T(u)\|_E = (\|u\|_{L^p}^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$, d'où T est un isométrie. D'autre part, $T(W_{a^+}^{\alpha,p})$ est un sous espace fermé dans E . Il en résulte (cf. [[6].Corollaire1 partie V.7.3]) que $T(W_{a^+}^{\alpha,p})$ est réflexif, et par conséquent $W_{a^+}^{\alpha,p}$ est aussi réflexif.

À partir de l'équivalence des normes, il s'ensuite que $W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b]$ avec la norme $\|\cdot\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}$ est également réflexive (d'après Remarque 2.3 et utilisation [[9].Remarque 1 partie V.7.3]). \square

Théorème 2.10. [6] Pour $\alpha > 0$ et $1 \leq p < \infty$, l'espace $W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b]$ muni des les normes $\|\cdot\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$ et $\|\cdot\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}$ est séparable.

Démonstration. [6] En effet l'espace produit et considère l'espace $W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b]$ muni de la norme $\|\cdot\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$ et aussi l'opérateur T défini dans la preuve de théorème au-dessus. On remarque que $\|T(u)\|_E = (\|u\|_{L^p}^p + \|D_{a^+}^\alpha u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$, d'où T est une isométrie. D'autre part, $T(W_{a^+}^{\alpha,p})$ est séparable entant que sous-ensemble de E un espace séparable, et par conséquent $W_{a^+}^{\alpha,p}$ est séparable muni de la norme $\|\cdot\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$. Depuis l'équivalence des normes $\|\cdot\|_{W_{a^+}^{\alpha,p}}$ et $\|\cdot\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}$ implique la séparabilité de $W_{a^+}^{\alpha,p}(\cdot, b]$ muni de la norme $\|\cdot\|_{a, W_{a^+}^{\alpha,p}}$ (d'après Remarque 2.3 et utilisation [[9].Remarque 1 partie V.7.3]). \square

ETUDE D'UN PROBLÈME AUX LIMITES ASSOCIÉ À UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE TYPE DE RIEMANN-LIOUVILLE

Out au long de ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité des solutions faibles des problèmes associé à une équation différentielle de type de Riemann-Liouville par application du méthode formulation variationnelle et le théorème de Lax-Milgram et Stampacchia.

3.1 Cadre théorique

H désigne un espace de Hilbert et H' son dual topologique.

Nous considérons une formulation variationnelle du problème à deux points :

$$\text{Trouver } x \in H \text{ tel que } a(x, y) = L(y) \quad \text{pour tout } y \in H \quad (3.1)$$

Il faut que a et L soit vérifiées :

1. $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur H , c'est-à-dire que $y \rightarrow L(y)$ est linéaire de H dans \mathbb{R} et il existe un constant $M > 0$ tel que

$$|L(y)| \leq M\|y\| \quad \text{pour tout } y \in H;$$

2. $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur H , c'est-à-dire que $x \rightarrow a(x, y)$ est une forme linéaire de H dans \mathbb{R} pour tout $x \in H$, et $y \rightarrow a(x, y)$ est une forme linéaire de H dans \mathbb{R} pour tout $y \in H$;
3. $a(\cdot, \cdot)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe une constante c telle que

$$|a(x, y)| \leq c\|x\|\|y\| \quad \text{pour tout } x, y \in H; \quad (3.2)$$

4. $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que

$$a(y, y) \geq \alpha\|y\|^2 \quad \text{pour tout } y \in H. \quad (3.3)$$

Théorème 3.1. (Théorème de Lax-Milgram)[4] Soit $a(x, y)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H . Alors pour tout $f \in H'$ il existe $x \in H$ unique tel que :

$$a(x, y) = \langle f, y \rangle, \quad \forall y \in H.$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le théorème suivant :

Lemme 3.1. (représentation de Riez-Fréchet)[4] soit $f \in H'$ il existe $x \in H$ unique tel que :

$$\langle f, y \rangle = (x, y), \quad \forall y \in H.$$

De plus $\|f\|_{H'} = \|x\|_H$.

Démonstration. Pour tout $x \in H$, l'application $y \rightarrow a(x, y)$ et une forme linéaire continue sur H : par conséquent, le théorème de représentation de Riesz-Fréchet entraîne qu'il existe un élément de H , noté $A(x)$, tel que

$$a(x, y) = \langle A(x), y \rangle \quad \text{pour tout } y \in H$$

Par ailleurs, la bilinéarité de $a(x, y)$ implique évidemment la linéarité de l'application $x \rightarrow A(x)$. De plus, en prenant $y = A(x)$, la continuité (3.2) de $a(x, y)$ montre que

$$\|A(x)\|^2 = a(x, A(x)) \leq c\|x\|\|A(x)\|,$$

c'est-à-dire que $\|A(x)\| \leq c\|x\|$ et donc $x \rightarrow A(x)$ est continue. Une autre application du Théorème de représentation de Riesz-Fréchet implique qu'il existe un élément de H , noté f , tel que $\|f\|_H = \|L\|_{H'}$ et

$$L(y) = \langle f, y \rangle \quad \text{pour tout } y \in H$$

Finalement, le problème variationnelle (3.1) est équivalent à :

$$\text{trouver } x \in H \text{ tel que } A(x) = f.$$

Pour démontrer le théorème il nous faut donc montrer que l'opérateur A est bijectif de H dans H (ce qui implique l'existence et l'unicité de x) et que son inverse est continu (ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à L). La coercivité (3.3) de $a(x, y)$ montre que

$$\alpha\|x\|^2 \leq a(x, x) = \langle A(x), x \rangle \leq \|A(x)\|\|x\|,$$

ce qui donne

$$\alpha\|x\| \leq \|A(x)\| \quad \text{pour tout } x \in H \tag{3.4}$$

alors A est injectif. Pour montrer que A est surjectif, c'est-à-dire que $\text{Im}(A) = H$, il suffit de montrer que $\text{Im}(A)$ est fermé dans H et que $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$. En effet, dans ce cas on voit que $H = \{0\}^\perp = (\text{Im}(A)^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}(A)} = \text{Im}(A)$, ce qui prouve bien que A est surjectif. Soit $A(x_n)$ une suite dans $\text{Im}(A)$ qui converge vers b dans H . En vertu de (3.4) on a

$$\alpha\|x_n - x_p\| \leq \|A(x_n) - A(x_p)\|$$

qui tend vers zéro quand n et p tendent vers l'infini. Donc x_n est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert H , c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $x \in H$. Alors, par continuité de A on en déduit que $A(x_n)$ converge vers $A(x) = b$, i.e. $b \in \text{Im}(A)$ et $\text{Im}(A)$ est donc fermé. D'autre part, soit $H \in \text{Im}(A)^\perp$; la coercivité (3.3) de $a(x, y)$ implique que

$$\alpha\|y\|^2 \leq a(y, y) = \langle A(y), y \rangle = 0,$$

c'est-à-dire que $y = 0$ et $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$, ce qui prouve que A est bijectif. Soit A^{-1} son inverse : l'inégalité (3.4) avec $x = A^{-1}(y)$ prouve que A^{-1} est continu, donc la solution x dépend continûment de f . \square

Remarque 3.1. [4] On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique $a(x, y) = a(y, x)$ pour tout $x, y \in H$, alors x caractérisé par la propriété,

$$x \in H; \quad \|x\|_H^2 - \int_a^b f(t)x(t)dt = \min_{h \in H} \left\{ \frac{1}{2} \|y\|_H^2 - \int_a^b y(t)x(t)dt \right\}.$$

Théorème 3.2. (Stampacchia)[4] Soit $a(x, y)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit K un convexe fermé et non vide.

Étant donné $L \in H'$, il existe $x \in K$ tel que pour tout $y \in K$,

$$a(x, y - x) \geq L(y - x). \quad (3.5)$$

Lemme 3.2. (Théorème de point fixe de Banach-méthode des approximation successives de Picard)[4] soit X un espace métrique complet et soit $S : X \rightarrow X$ une application telle que

$$d(Sy_1, Sy_2) \leq K d(y_1, y_2), \quad y_1, y_2 \in X \text{ avec } K < 1.$$

Alors S admet un point fixe unique, $x = Sx$.

Démonstration. [4]

D'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet il existe $f \in H$ tel que

$$L(y) = (f, y), \quad y \in H.$$

D'autre part, pour tout $x \in H$ fixé, l'application $y \rightarrow a(x, y)$ est une forme linéaire continue sur H , et grâce au théorème de représentation de Riesz-Fréchet il existe un élément de H , noté Ax tel que $a(x, y) = (Ax, y) \forall y \in H$. Il est clair que A est un opérateur linéaire de H dans H et que

$$|Ax| \leq c|x| \quad \forall x \in H$$

$$(Ax, x) \geq \alpha|x|^2 \quad \forall x \in H$$

Le problème 3.5 revient à trouver $x \in K$ tel que

$$(Ax, y - x) \geq (f, y - x) \quad \forall y \in K \quad (3.6)$$

d'où

$$(f - Ax, y - x) \leq 0 \quad \forall y \in K$$

Soit $\rho > 0$ une constante qui sera fixée ultérieurement. L'inégalité (3.6) équivaut à

$$\begin{aligned} (\rho f - \rho Ax + x - x, y - x) &\leq 0 \quad \forall y \in K \\ x &= P_K(\rho f - \rho Ax + x). \end{aligned}$$

Pour tout $y \in K$, on pose $Sy = P_K(\rho f - \rho Ay + y)$. Montrer que si $\rho > 0$ est convenablement choisi alors S est une contraction stricte, i.e. il existe $K < 1$ tel que

$$|Sy_1 - Sy_2| \leq K |y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in K$$

En effet, d'après proposition 1.1

$$|Sy_1 - Sy_2| \leq |(y_1 - y_2) - \rho(Ay_1 - Ay_2)|$$

et donc

$$\begin{aligned} |Sy_1 - Sy_2|^2 &\leq |y_1 - y_2|^2 - 2\rho\alpha |y_1 - y_2|^2 + \rho^2 c^2 |y_1 - y_2|^2 \\ &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2) |y_1 - y_2|^2 \end{aligned}$$

on doit choisir $\rho > 0$ tel que

$$K^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2 < 1$$

donc

$$\rho(\rho c^2 - 2\alpha) < 0$$

d'où

$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{c^2}$$

on voit que S admet un point fixe unique¹. □

Exemple 3.1. On veut résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = f(t) & \text{sur }]0, 1[, \\ x(0) = \alpha, x(1) = \beta \end{cases} \quad (3.7)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donnés et f fonction donnée.

Dans l'espace $H = H^1(]0, 1[)$ on introduit le convexe fermé

$$K = \{y \in H; y(0) = \alpha, y(1) = \beta\}.$$

On va montrer, si $f \in L^2(]0, 1[)$, le problème est formellement équivalent au problème variationnelle. On commence par multiplier l'équation (3.7) par $y - x$ où $y \in H$ et intégrer par partie, on trouve :

$$\int_0^1 x'(t)(y(t) - x(t))' dt + \int_0^1 x(t)(y(t) - x(t)) dt = \int_0^1 f(t)(y(t) - x(t)) dt \quad \forall y \in K$$

Donc

$$\int_0^1 x'(t)(y(t) - x(t))' dt + \int_0^1 x(t)(y(t) - x(t)) dt \geq \int_0^1 f(t)(y(t) - x(t)) dt \quad \forall y \in K$$

Alors

$$a(x, y - x) = \int_0^1 x'(t)(y(t) - x(t))' dt + \int_0^1 x(t)(y(t) - x(t)) dt$$

et

$$L(y - x) = \int_a^b f(t)(y(t) - x(t)) dt.$$

Maintenant, consulter régulièrement les conditions de la théorème de Stampacchia.

1. Si l'on cherche à calculer le point fixe par une méthode on a intérêt à choisir $\rho < \frac{2\alpha}{c^2}$ (qui minimise K) pour accélérer la convergence des itérations.

- a) $a(., .)$ est bilinéaire sur H , grâce à linéarité de l'intégrale et celle de la dérivé.
 b) $a(., .)$ est continue. Pour $x, y \in H$, on a :

$$\begin{aligned} |a(x, y)| &= \left| \int_0^1 x'(t)y'(t)dt + \int_0^1 x(t)y(t)dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 x'(t)y'(t)dt \right| + \left| \int_0^1 x(t)y(t)dt \right|, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schawartz, on obtient :

$$\begin{aligned} |a(x, y)| &\leq \|x'\|_{L^2}\|y'\|_{L^2} + \|x\|_{L^2}\|y\|_{L^2} \\ &\leq (\|x\|_{L^2} + \|x'\|_{L^2})(\|y\|_{L^2} + \|y'\|_{L^2}) \\ &= \|x\|_H\|y\|_H \end{aligned}$$

- c) $a(., .)$ est coercive, pour $x \in H$, on a :

$$\begin{aligned} a(x, x) &= \int_0^1 x'^2(t)dt + \int_0^1 x^2(t)dt \\ &= \|x'\|_{L^2}^2 + \|x\|_{L^2}^2 \\ &\geq c\|x\|_H^2 \end{aligned}$$

- d) $L(y)$ est linéaire (évident). On montré que $L(y)$ est continue, pour tout $y \in H$, on a :

$$|L(y)| = \left| \int_a^b f(t)y(t)dt \right|,$$

d'après l'inégalité Cauchy-Schwartz, on a :

$$\begin{aligned} |L(y)| &\leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{L^2}\|y\|_{L^2}, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} |L(y)| &\leq M\|y\|_{L^2} \\ &\leq M\|y\|_H. \end{aligned}$$

D'où la continuité de L .

- Pour ramonter à une solution classique dans (3.7) $y = x \pm h$ avec $h \in H_0^1$, et on obtient :

$$\int_0^1 x'(t)(y(t) - x(t))'dt + \int_0^1 x(t)(y(t) - x(t))dt = \int_0^1 f(t)(y(t) - x(t))dt,$$

alors :

$$\int_0^1 x'(t)h'(t)dt + \int_0^1 x(t)h(t)dt = \int_0^1 f(t)h(t)dt \quad h \in H_0^1$$

d'où,

$$\int_0^1 -x''(t)h(t)dt + \int_0^1 x(t)h(t)dt + x(1)(y(1) - x(1)) - x(0)(y(0) - x(0)) = \int_0^1 f(t)h(t)dt \quad h \in H_0^1$$

ensuite,

$$\int_0^1 (-x''(t) + x(t) - f(t))h(t)dt + x(1)(y(1) - x(1)) - x(0)(y(0) - x(0)) = 0,$$

on trouve

$$-x''(t) + x(t) = f(t) \quad p.p. \quad (3.8)$$

Revenant ensuite à (3.8), il reste $x(1)(y(1) - x(1)) - x(0)(y(0) - x(0)) = 0, \forall y \in H^1$, comme $y(1) = \beta$ et $y(0) = \alpha$ on déduit que $x(1) = x(0) = 0$.

Enfin, le problème (3.7) admet une solution unique.

3.2 Cas des conditions mixtes homogènes

Soit $\alpha \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $f \in L^2(]a, b[)$. On commence par le problème à deux points suivants :

$$\begin{cases} D_b^\alpha - D_{a^+}^\alpha x(t) + x(t) = f(t) & , t \in]a, b[, \\ D_{a^+}^\alpha x(a) = 0, x(b) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Le but de cette étape est seulement de trouver la formulation variationnelle vérifera l'équivalence précise avec (3.9).

L'existence et l'unicité est montrée dans les étapes suivantes :

I) Choisir de l'espace :

On pose :

$$H = \{x \in W_{a^+}^{\alpha,2}(]a, b[); \quad x(b) = 0\}.$$

H un sous espace fermé de l'espace $(W_{a^+}^{\alpha,2}(]a, b[), \|\cdot\|_{W_{a^+}^{\alpha,2}})$.

En effet, pour une suite $x_n \in H \subset W_{a^+}^{\alpha,2}(]a, b[)$ tend vers $x \in W_{a^+}^{\alpha,2}(]a, b[)$, on a : $0 = x_n(b) \rightarrow x(b)$. Alors : $x(b) = 0$, i.e. $x \in H$.

II) Établir de la formulation variationnelle :

On multiplie l'équation (3.9) par une fonction test suffisamment régulière $y(t)$, et on intègre :

$$\begin{aligned} (D_b^\alpha - D_{a^+}^\alpha x)(t)y(t) + x(t)y(t) &= f(t)y(t) \\ \int_a^b (D_b^\alpha - D_{a^+}^\alpha x)(t)y(t)dt + \int_a^b x(t)y(t)dt &= \int_a^b f(t)y(t)dt \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.5, on a :

$$\int_a^b (D_b^\alpha - D_{a^+}^\alpha x)(t)y(t)dt = (I_{a^+}^{1-\alpha}y)(a)(D_{a^+}^\alpha x)(a) - (I_{b^-}^{1-\alpha}(D_{a^+}^\alpha x))(b)y(b) + \int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t)(D_{a^+}^\alpha y)(t)dt,$$

d'où

$$\int_a^b (D_b^\alpha - D_{a^+}^\alpha x)(t)y(t)dt + (I_b^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b)y(b) - (I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) + \int_a^b x(t)y(t)dt = \int_a^b f(t)y(t)dt$$

Si on prend $y \in H$, on trouve :

$$(I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) = 0 \quad (\text{car } (D_{a^+}^\alpha x)(a) = 0)$$

$$(I_b^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b)y(b) = 0 \quad (\text{car } y(b) = 0)$$

Alors,

$$a(x, y) = L(y),$$

où

$$a(x, y) = \int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha y)(t)dt + \int_a^b x(t)y(t)dt,$$

$$L(y) = \int_a^b f(t)y(t)dt.$$

• Inversement, on montre qu'une solution faible est un solution classique.

En effet, suppose que $x \in H$, alors

$$a(x, y) = L(y), \quad \forall y \in H$$

d'où

$$\int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha y)(t)dt + \int_a^b x(t)y(t)dt = \int_a^b f(t)y(t)dt$$

Pour $y = \varphi \in C_c^\infty(]a, b[)$, on déduit que :

$$\int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha \varphi)(t)dt + \int_a^b x(t)\varphi(t)dt = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt$$

D'après théorème 2.4, on a :

$$\int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha \varphi)(t)dt = \int_a^b D_b^\alpha (D_{a^+}^\alpha x)(t)\varphi(t)dt$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha \varphi)(t)dt + \int_a^b x(t)\varphi(t)dt - \int_a^b f(t)\varphi(t)dt &= 0 \\ \int_a^b (D_b^\alpha - D_{a^+}^\alpha x)(t)\varphi(t)dt + \int_a^b x(t)\varphi(t)dt - \int_a^b f(t)\varphi(t)dt &= 0 \\ \int_a^b ((D_b^\alpha - D_{a^+}^\alpha x)(t) + x(t) - f(t))\varphi(t)dt &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$(D_b^\alpha - D_{a^+}^\alpha x)(t) + x(t) = f(t) \text{ p.p. dans }]a, b[. \quad (3.10)$$

Puisque $x \in H$, alors $x(b) = 0$. Reste à vérifier que $(D_{a^+}^\alpha x)(a) = 0$.

On a :

$$\int_a^b (D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t)y(t)dt = (I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) - (I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b)y(b) + \int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha y)(t)dt$$

$$\int_a^b (D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t)y(t)dt - (I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) + (I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b)y(b) = \int_a^b (f(t) - x(t)) y(t)dt$$

$$\int_a^b (D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t)y(t)dt + \int_a^b (x(t) - f(t)) y(t)dt = (I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) - (I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b)y(b)$$

$$\int_a^b ((D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t) + x(t) - f(t)) y(t)dt = (I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) - (I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b)y(b),$$

de l'équation (3.10), on obtient :

$$(D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t) + x(t) - f(t) = 0.$$

Alors

$$(I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) - (I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b)y(b) = 0, \quad y \in H$$

c'est-à-dire

$$(D_{a^+}^\alpha x)(a) = 0.$$

Alors x est un solution de problème (3.9).

III) Existence et unicité :

Théorème 3.3. *Le problème (3.9) admet une seule solution $x \in W_{a^+}^{\alpha,2}([a, b])$.*

Démonstration. Considérons en continu coercitive forme bilinéaire $a(., .)$ et linéarité et continuité de $L(., .)$ de sorte que

- $a(., .)$ est bilinéaire, grâce à linéarité de l'intégrale et celle de $D_{a^+}^\alpha$.
- $a(., .)$ est continue. Pour $x, y \in H$, on a :

$$\begin{aligned} |a(x, y)| &= \left| \int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha y)(t)dt + \int_a^b x(t)y(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |(D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha y)(t)| dt + \int_a^b |x(t)y(t)|dt \\ &\leq \|D_{a^+}^\alpha x\|_{L^2} \|D_{a^+}^\alpha y\|_{L^2} + \|x\|_{L^2} \|y\|_{L^2} \\ &\leq (\|x\|_{L^2} + \|D_{a^+}^\alpha x\|_{L^2}) (\|y\|_{L^2} + \|D_{a^+}^\alpha y\|_{L^2}) \\ &= \|x\|_{W_{a^+}^{\alpha,2}} \|y\|_{W_{a^+}^{\alpha,2}} \end{aligned}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} (\|x\|_{L^2} + \|D_{a^+}^\alpha x\|_{L^2}) (\|y\|_{L^2} + \|D_{a^+}^\alpha y\|_{L^2}) &= \|x\|_{L^2} \|y\|_{L^2} + \|x\|_{L^2} \|D_{a^+}^\alpha y\|_{L^2} \\ &\quad + \|y\|_{L^2} \|D_{a^+}^\alpha x\|_{L^2} + \|D_{a^+}^\alpha x\|_{L^2} \|D_{a^+}^\alpha y\|_{L^2} \\ &\geq \|x\|_{L^2} \|y\|_{L^2} + \|D_{a^+}^\alpha x\|_{L^2} \|D_{a^+}^\alpha y\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que a est continuité.

c) $a(., .)$ est coercive . Pour tout $x \in H$, on a :

$$\begin{aligned} a(x, x) &= \int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha x)(t) dt + \int_a^b x(t)x(t) dt \\ &= \int_a^b (D_{a^+}^\alpha x(t))^2 dt + \int_a^b (x(t))^2 dt \\ &= \|D_{a^+}^\alpha x\|_{L^2}^2 + \|x\|_{L^2}^2 \\ &= \|x\|_{W_{a^+}^{\alpha,2}}^2 \end{aligned}$$

D'où la coercivité de a .

d) Linéarité de L , $\forall y_1, y_2 \in H, \forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} L(\beta y_1 + \gamma y_2) &= \int_a^b f(t) (\beta y_1(t) + \gamma y_2(t)) dt \\ &= \beta \int_a^b f(t) y_1(t) dt + \gamma \int_a^b f(t) y_2(t) dt \\ &= \beta L(y_1) + \gamma L(y_2). \end{aligned}$$

D'où la Linéarité.

e) Continuité de L , $\forall y \in H$

$$|L(y)| = \left| \int_a^b f(t)y(t) dt \right|$$

d'après l'inégalité Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} |L(y)| &\leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|y\|_{L^2} \end{aligned}$$

on a $f \in L^2(]a, b[)$, d'où $\|f\|_{L^2} \leq M$.

Alors,

$$\begin{aligned} |L(y)| &\leq M \|y\|_{L^2} \\ &\leq M \|y\|_{W_{a^+}^{\alpha,2}}. \end{aligned}$$

D'où la continuité de L .

De a), b), c), d) et e) le problème (3.9) admet une solution unique. □

3.3 Cas des conditions intégrales homogènes

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x(t) + x(t) = f(t) & , t \in]a, b[, \\ I_{b^-}^{1-\alpha} D_{a^+}^\alpha x(a) = 0, & I_{a^+}^{1-\alpha} y(a) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

La solution est établit dans l'espace :

$$H = \{y \in W_{a^+}^{\alpha,2}(]a, b[); \quad I_{a^+}^{1-\alpha} y(a) = 0\},$$

c'est un sous-espace fermé de $W_{a^+}^{\alpha,2}(]a, b[)$.

En effet, pour une suite $x_n \in H \subset W_{a^+}^{\alpha,2}(]a, b[)$ tend vers $x \in W_{a^+}^{\alpha,2}(]a, b[)$.

En utilisant théorème de convergence dominé de Lebesgue :

$$I_{a^+}^{1-\alpha} x_n(t) \longrightarrow I_{a^+}^{1-\alpha} x(t), \forall t \in]a, b[.$$

Donc :

$$0 = I_{a^+}^{1-\alpha} x_n(a) \longrightarrow x(a). \text{ Alors : } I_{a^+}^{1-\alpha} x(a) = 0, \text{ i.e. } x \in H.$$

Formulation variationnelle :

Pour trouver la formulation variationnelle on multiple l'équation (3.11) par une fonction test suffisamment régulière et on intègre par parties, on déduit que

$$\int_a^b (D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t) y(t) dt + \int_a^b x(t) y(t) dt = \int_a^b f(t) y(t) dt$$

d'où

$$\int_a^b (D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t) y(t) dt + \int_a^b x(t) y(t) dt + (I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b) y(b) - (I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) = \int_a^b f(t) y(t) dt$$

En utilisant les conditions aux limites, on trouve :

$$a(x, y) = L(y),$$

où

$$a(x, y) = \int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha y)(t) dt + \int_a^b x(t) y(t) dt,$$

$$L(y) = \int_a^b f(t) y(t) dt.$$

•Inversement, on suppose que $x \in H$, alors

$$a(x, y) = L(y), \quad \forall y \in H$$

d'où

$$\int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha y)(t) dt + \int_a^b x(t) y(t) dt = \int_a^b f(t) y(t) dt$$

Pour $y = \varphi \in C_c^\infty(]a, b[)$, on obtient :

$$\int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha \varphi)(t) dt + \int_a^b x(t) \varphi(t) dt = \int_a^b f(t) \varphi(t) dt$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha \varphi)(t) dt + \int_a^b x(t) \varphi(t) dt - \int_a^b f(t) \varphi(t) dt &= 0 \\ \int_a^b (D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t) \varphi(t) dt + \int_a^b x(t) \varphi(t) dt - \int_a^b f(t) \varphi(t) dt &= 0 \\ \int_a^b ((D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t) + x(t) - f(t)) \varphi(t) dt &= 0 \end{aligned}$$

D'où

$$(D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t) + x(t) = f(t) \text{ p.p. dans } [a, b]. \quad (3.12)$$

Puisque $x \in H$, on a : $(I_{a^+}^{1-\alpha} y)(b) = 0$. Reste à vérifier que $(I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b) = 0$.

On a :

$$\int_a^b (D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t) y(t) dt = (I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) - (I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b) y(b) + \int_a^b (D_{a^+}^\alpha x)(t) (D_{a^+}^\alpha y)(t) dt$$

$$\int_a^b (D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t) y(t) dt - (I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) + (I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b) y(b) = \int_a^b (f(t) - x(t)) y(t) dt$$

$$\int_a^b (D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t) y(t) dt + \int_a^b (x(t) - f(t)) y(t) dt = (I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) - (I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b) y(b)$$

d'où,

$$\int_a^b (D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x(t) + x(t) - f(t)) y(t) dt = I_{a^+}^{1-\alpha} y(a) D_{a^+}^\alpha x(a) - I_{b^-}^{1-\alpha} D_{a^+}^\alpha x(b) y(b),$$

de l'équation (3.12), qui donne :

$$(D_{b^-}^\alpha D_{a^+}^\alpha x)(t) + x(t) - f(t) = 0.$$

Enfin,

$$(I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) (D_{a^+}^\alpha x)(a) - (I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b) y(b) = 0, \quad y \in H$$

c'est-à-dire

$$(I_{b^-}^{1-\alpha} (D_{a^+}^\alpha x))(b) = 0.$$

Alors x est une solution de problème (3.11)

Théorème 3.4. *Le problème (3.11) admet une seule solution $x \in W_{a^+}^{\alpha,2}([a, b])$.*

Démonstration. À travers les condition de Lax-Milgram atteint en haut, on conclure que le problème (3.11) admet une solution unique. \square

Remarque 3.2. De même manière, on peut traiter le problème avec les conditions :

$$x(a) = 0, \quad (I_{a^+}^{1-\alpha} y)(a) = 0.$$

3.4 Cas des conditions non homogènes

On considère le problème linéaire non homogène à deux points suivant :

$$\begin{cases} D_b^\alpha D_{a^+}^\alpha x(t) + x(t) = f(t) & , t \in]a, b[, \\ I_{a^+}^{1-\alpha} x(a) = C, x(b) = D, \end{cases} \quad (3.13)$$

où $C, D \in \mathbb{R}$. Nous utilisons le théorème de Stampachia qui rappé au-dessous.

Proposition 3.1. *L'ensemble*

$$K = \{x \in W_{a^+}^{\alpha,2}(]a, b[); I_{a^+}^{1-\alpha} x(a) = C, x(b) = D\}$$

est un sous-ensemble non vide fermé et convexe de $W_{a^+}^{\alpha,2}(]a, b[)$.

Démonstration. La convexité de K est

$\forall x, y \in W_{a^+}^{\alpha,2}(]a, b[), \exists \lambda \in]0, 1[$:

$$I_{a^+}^{1-\alpha} ((1 - \lambda) x(a) + \lambda x(b)) \leq (1 - \lambda) I_{a^+}^{1-\alpha} x(a) + \lambda I_{a^+}^{1-\alpha} y(a) = (1 - \lambda) C + \lambda C = C,$$

$$(1 - \lambda) x(b) + y(b) \leq (1 - \lambda) D + \lambda D = D.$$

On va suivre les mêmes procédures au dessus pour montrer que K est fermé. □

Théorème 3.5. [3] Si $\alpha \in]0, 1]$, $f \in L^1(]a, b[)$, $g \in L^1(]a, b[)$ alors

$$\int_a^b (f(t)h(t) + g(t) (D_{a^+}^\alpha h) (t)) dt = 0 \quad h \in C_c^\infty(]a, b[),$$

puis g possède un dérivé fractionnaire à droit et $(D_{a^+}^\alpha g)(t) = -f(t), t \in]a, b[, p.p.$

Démonstration. Pour tout $h \in C_c^\infty(]a, b[)$, $h(t) = (I_{a^+}^1 h')(t), t \in]a, b[$, on a $(I_{a^+}^{1-\alpha} h) (t) = (I_{a^+}^1 I_{a^+}^{1-\alpha} h') (t), t \in]a, b[$, où $I_{a^+}^{1-\alpha} h' \in L^\infty(]a, b[) \subset L^1(]a, b[)$. Ainsi, $I_{a^+}^{1-\alpha} h$ a absolument continue. Puis, h possède une dérivé fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville donné par $D_{a^+}^\alpha h = I_{a^+}^{1-\alpha} h' \in L^\infty(]a, b[)$. Conséquent, nous avons de théorème 2.4

$$\int_a^b g(t) (D_{a^+}^\alpha h) (t) dt - \int_a^b (D_{b^-}^\alpha g) (t) h(t) dt = 0$$

d'où,

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) (D_{a^+}^\alpha h) (t) dt + \int_a^b f(t) h(t) dt &= 0 \\ \int_a^b f(t) h(t) dt + \int_a^b g(t) (I_{a^+}^{1-\alpha} h') (t) dt &= 0 \end{aligned}$$

en utilisant théorème 2.3, on trouve :

$$\int_a^b f(t) h(t) dt + \int_a^b (I_{b^-}^{1-\alpha} g) (t) h'(t) dt = 0, \quad \forall h \in C_c^\infty(]a, b[).$$

La preuve est complet. □

Théorème 3.6. [3] Le problème linéaire (3.13) a une solution unique $x \in W_{a+}^{\alpha,2}([a, b[)$.

Démonstration. [3] Le théorème de Stampacchia donne l'existence d'une fonction $x \in K$ telle que

$$a(x, y - x) \geq L(y - x)$$

et donc

$$\int_a^b (D_{a+}^{\alpha} x)(t) D_{a+}^{\alpha} (y(t) - x(t)) dt + \int_a^b x(t) (y(t) - x(t)) dt \geq \int_a^b f(t) (y(t) - x(t)) dt \quad \forall y \in K$$

On utilise l'inégalité précède avec fonction $x = y \pm h \in C_c^{\infty}([a, b[)$, on obtient :

$$\int_a^b (D_{a+}^{\alpha} x)(t) D_{a+}^{\alpha} (y(t) - y(t) + h(t)) dt + \int_a^b x(t) (y(t) - y(t) + h(t)) dt \geq \int_a^b f(t) (y(t) - y(t) + h(t)) dt$$

d'où

$$\int_a^b (D_{a+}^{\alpha} x)(t) (D_{a+}^{\alpha} h)(t) dt + \int_a^b x(t) h(t) dt \geq \int_a^b f(t) h(t) dt$$

Ensuite, on utilisant le théorème (3.5) en déduit

$$\int_a^b (D_{a+}^{\alpha} x)(t) (D_{a+}^{\alpha} h)(t) dt + \int_a^b (x(t) - f(t)) h(t) dt = 0 \quad \forall y \in C_c^{\infty}([a, b[).$$

Alors, il existe $x \in K$ unique solution de (3.13). □

Bibliographie

- [1] **R. A. Adams** : Sobolev Spaces, Academic Press, New York, Ny, USA, 1975.
- [2] **Y. Arioua** : Equation différentielles fractionnaires, pour les étudiants de première année Master EDP et application, *université de M'sila*, 2020/2021.
- [3] **L. Bourdin and D. Idczak** : fractional fundamental lemma and a fractional integration by parts formula : Applications to critical points of Bolza functionals and to linear boundary value problems. *Advances in Differential Equations*, Khayyam Publishing, 20 (3-4), pp.213-232, 2015.
- [4] **H. Brezis** : Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications, Masson, Paris, France, 1983.
- [5] **D. Idczak and M. Majewski** : Fractional fundamental lemma of order $\alpha \in (n - \frac{1}{2}, n)$ with $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, *Dynamic Systems and Applications*, vol. 21, no. 2-3, pp. 251- 268, 2012.
- [6] **D.Idczak and S. Walczak** : Fractionnal Sobolev spaces via Riemann-Liouville derivatives, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Lodz, Banacha 22, 90-238 Lodz, Poland,2013.
- [7] **A.A. Kilbas, O.I. Marichev and S.G.Samko** : Fractional Integrals and Derivatives -Theory and Applications, Gordonand Breach Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 1993.
- [8] **A.A. Kilbas, H.H. Srivastava, J.J. Trujillo** : Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *Elsevier Science B.V., Amsterdam*, 2006.
- [9] **L. W. Kantorowitch and G. P. Akilov** : Functional Analysis, Science, Moscow, Russia, 1984.
- [10] **A.Lesfari** : Distribution, analyse de FOURIER et transformation de Laplace, *ellipse*, 2012.
- [11] **I. Podlubny** : Fractional Differential Equations, *Academic Press, New York*, 1999.

ملخص

في هذا العمل قنا بدراسة ثلاث مسائل حدية مرتبطة بمعادلات تفاضلية كسرية الرتبة من نمط ريمان ليوفيل، حيث قدمنا أولاً الإطار الدالي والمتمثل في فضاءات سوبولاف كسرية الرتبة. ثم أثبتنا الوجود والوحدانية باستخدام طريقة الصياغة التغيرية، ونظرية لاكس-ميلغرام على المسألة ذات الشروط المختلطة المتجانسة، وذات الشروط التكاملية متجانسة، وطبقنا نظرية ستامباخيا على المسألة ذات الشروط غير المتجانسة. كلمات مفتاحية: مسائل ذات قيم حدية، فضاءات سوبولاف كسرية الرتبة، لاكس ميلغرام، ستامباخيا.

Résumé

Dans ce travail, on a étudié trois problèmes aux limites, associés aux équations différentielles d'ordre fractionnaire. On a donné d'abord le cadre fonctionnel lequel les espaces de Sobolev fractionnaire. Ensuite, on a pruvé l'existence et l'unicité en utilisant la formulation variationnelle et le théorème Lax-Milgram sur les deux problèmes avec des conditions homogène mixtes et intégrale, et théorème Stampacchia sur le problème non homogène.

Mots clés : Problème aux limites, Espace de Sobolev fractionnaire, Lax-Milgram, Stampacchia.

Abstract

In this work, we have studied three boundary value problems associated at differential euations of fractional ordre. First, we are established the functional aspect, wich is the fractional Sobolev spaces. Next, we used the variationnal formulation and The Lax-Milgram theorem for the problems of homogeniuous mixt and integral conditons, and the Stampaccia theorem for the problm with nonhomogenous conditins

Keywords: Boundary value problem, Fractional Sobilev spaces, Lax-Milgram, Stampacchia.