



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de
l'Informatique Département des
Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématiques et Numérique

Thème

Linearized solution of two dimensional flow

Présenté par:

M^{elle} : MAHCHOUCHE Dalal

Soutenu publiquement le : xx/06/2021.

Devant le jury composé de :

Président:	<i>M^r NADIR Mostefa</i>	Prof,	Université de M'sila
Encadreur:	<i>M^r GASMI Abdelkader</i>	Prof,	Université de M'sila
Examineur:	<i>M^r GAGUI Bachir</i>	M.C.A,	Université de M'sila

Année universitaire : 2020/2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Table des matières

Remerciements	1
Résumé	2
Dédicace	4
Notations	5
Introduction	1
1 Introduction à la Mécanique des fluides	3
1.1 Définition d'un fluide	3
1.2 Fluide de parfait	4
1.3 Fluide incompressible	4
1.4 Fluide Compressible	4
1.5 Caractéristique Physique	4
1.5.1 Masse volumique	4
1.5.2 Densité	5
1.5.3 Volume massique	5
1.6 Le fluide non visqueux	5
1.7 Écoulement potentiel	5
1.8 Quelques équations de la mécanique des fluides	6
1.8.1 Equation de conservation de la masse	6
1.8.2 Conservation de l'énergie du fluide	7

1.8.3	Equation d'Euler	8
1.8.4	Equation de Bernoulli	9
1.8.5	Equation de Navier stokes	10
1.8.6	Transformation de Hilbert	10
1.8.7	Transformation de Schawarz-Christoffel	10
1.9	Transformation conformes	11
1.9.1	Les fonctions holomorphes	11
1.10	Formule série de tylore	12
1.10.1	Série de Taylor	12
1.10.2	Théorème de Taylor	13
1.11	Les écoulements des fluides	16
1.11.1	Écoulement stationnaire	16
1.11.2	Écoulement incompressible	16
1.11.3	Écoulements irrotationnels	17
1.11.4	Écoulements uniformes	17
1.11.5	Écoulement bidimensionnelle	18
1.12	Fonction potentielle complexe	18
1.12.1	Potentiel de vitesse	19
2	Solution approximative d'un écoulement sur une rampe pour grand nombre Froude	20
2.1	Formulation du problème	21
2.2	Les équations approximatives	27
2.2.1	Technique de perturbation	28
2.2.2	Approximation d'ordre zéro	28
2.2.3	Approximation de premier order	29
2.3	Résolution du problème	30
2.4	Résultats numériques et discussion	31
3	Solution linéarisée d'un écoulement sur une rampe.	37
3.1	Formulation du problème	38

3.2	Analyse	38
3.2.1	Cas d'écoulement supercritique: $F^2 > 1$	42
3.2.2	Cas d'écoulement souscritique: $F^2 < 1$	43
3.3	Conclusion et discussion	45
	Conclusion	48
	Bibliographie	49

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

Je tiens à remercier sincèrement **Mr.Gasmi Abdelkader**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour les efforts qu'il a consenti tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à tous les membres de jury. **Mr.Nadir Mostefa et Mr. Gagui Bachir** qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes collègues **Mr.Gasmi Abdelkader, Mr.Nadir Mostefa et Mr.Gagui Bachir** pour leurs aides et leurs encouragements.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé de loin ou de près à réaliser ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes parents et mes frères et ma soeur

A tout famille (Mahchouche)

Au sens de l'amour et de la compassion, pour le sourire de la vie et le secret de l'existence, à celle qui a été le secret de mon succès, à la plus

précieuse ma Mère Djaghdali Saadia

Au grand cœur et à mon cher père

Mahchouche Tayb

A mes très chers frères

Au cœurs purs et bons, mes amis et mes proches que j'ai dégusté avec eux les plus beaux moments, à tous mes professeurs honorés et à tous

les compagnons de mon humble chemin.

Et je prie Allah d'en faire une source d'inspiration pour chaque étudiant.

Notations

M : masse du fluide (kg).

V : volume du fluide (m^3).

ρ : masse volumique (kg/m^3).

ϖ : Poids volumique (N/m^3).

v : Volume massique (m^3/kg).

d : densité.

μ : La viscosité cinématique.

a : l'accélération par rapport au référentiel galiléen(O:x:y:z).

F : la densité volumique de force.

β : coefficient de compressibilité (m^2/N).

dV : variation de volume (m^3).

\vec{U} : le vecteur de vitesse.

$(u_x; u_y; u_z)$: champ de vitesse.

φ : le potentiel de vitesse.

ψ : la fonction de courant.

$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$: la fonction de potentiel complexe.

$z = x + iy$: la variable complexe associée à la fonction.

p : pression du fluide.

ρ : densité du fluide.

g gravité.

S : la surface.

\vec{n} : le vecteur normal unitaire à un élément de surface de S .

H : la transformation de Hilbert.

F : le nombre de Froude.

rot : Rotationnel.

\vec{grad} : gradient.

$\frac{d}{dt}, \frac{D}{Dt}$: dérivée matérielle.

$\frac{\partial}{\partial x}$: dérivée par rapport à x .

Δ : la placcien.

w : la variable de hodographe logarithmique.

$f'(t)$: la fonction de cartographie.

L' : la longueur de la rampe.

α : angle d'inclinaison.

Introduction générale

Dans ce mémoire on s'intéresse à un problème d'écoulement à surface libre stationnaire, d'un courant bidimensionnel, irrotationnel, invisible et incompressible dans un canal ouvert à un fond de forme escalier. Ce problème a de nombreuses applications dans des différents domaines de l'ingénierie, surtout en hydraulique. C'est pourquoi ce type de problèmes a reçu une attention considérable tout au long de l'histoire de la mécanique des fluides, au cours des 30 dernières années, et la littérature sur le sujet est riche.

Nous tenons compte de l'effet de la gravité, le problème ne peut être résolu que par une approche numérique à cause du terme non linéaire figurant dans la condition au bord de la surface libre. La solution est obtenue en utilisant une méthode de Hilbert et la technique de la perturbation introduite par S.N. Hanna et M.N. Abdel-Malek [7]

Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre : contient quelques notions préliminaires sur les écoulements potentiels et des définitions on mentionne spécialement les propriétés des (fluides incompressibles, lignes de courant) et les équations qui gouvernent les écoulements des fluides, on cite l'équation de (conservation de la masse et de l'équation de Bernoulli) Finalement on se termine chapitre par un petit rappel sur les transformations de Hilbert et de Schwarz-Christoffel.

Dans le deuxième chapitre : on traite la solution approximative du problème. Telle que les techniques de perturbation sont utilisées comme base pour la solution approximative du problème et on termine ce chapitre par la présentation de quelques résultats numériques trouvés et discussion.

Dans le troisième chapitre: Théorème de Fourier à double intégrale est utilisée comme base pour la solution du problème et on termine ce chapitre par la forme de la surface libre et présentation de quelques résultats .

Dans ce mémoire ,la méthode Hilbert ainsi que la technique de perturbation sont utilisées comme base pour la solution approximative des problèmes bidimensionnels. Tout d'abord, comme d'habitude, le plan de la potentiel complexe de la vitesse est transformé en un demi-plan supérieur auxiliaire. Alors une équation intégrale non linéaire présentée par la valeur principale de Cauchy est trouvée. Enfin, plusieurs approximations sont faites sur la base

d'un grand nombre de Froude et la technique de perturbation est appliquée sur la base des petites valeurs de angle d'inclinaison de la rampe.

Chapitre 1

Introduction à la Mécanique des fluides

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides. C'est une branche de la science de la physique qui étudie les écoulements des fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes.

1.1 Définition d'un fluide

Un fluide est un milieu matériel continu déformable, sans rigidité qui peut s'écouler c'est-à-dire subir de grandes variations de forme sous l'action de force plus les forces sont faibles, plus les variations de forme se déroulent lentement.

La notion de fluide s'oppose à celle de solide, cependant on considère les fluides et les solides comme des ensembles de particules matérielles infiniment petites.

-Solidement liées entre elles dans le cas des solides.

-Libres de se déplacer les unes par rapport aux autres dans le cas des fluides.

1.2 Fluide de parfait

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement

1.3 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

1.4 Fluide Compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles.

Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

1.5 Caractéristique Physique

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

1.5.1 Masse volumique

Masse volumique : La masse volumique d'un fluide est la masse de l'unité de volume de ce fluide. Elle s'exprime en kg/m^3 .

Les fluides sont caractérisés par leur masse volumique.1 :

$$\rho = \frac{Masse}{Volm} = \frac{M}{V}.$$

M : masse du fluide (kg).

V : volume du fluide (m^3).

ρ : masse volumique (kg/m^3).

1.5.2 Densité

Elle mesure le rapport de la masse volumique du fluide rapportée à un corps de référence. C'est une grandeur sans unité définie par :

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}.$$

Le corps de référence dépend de l'état physique du corps.

Eau : pour les solides et les liquides.

Air : pour les gaz.

1.5.3 Volume massique

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance, c'est l'inverse de la masse volumique :

$$v = \frac{V}{M} = \frac{V}{\rho V} = \frac{1}{\rho} (\text{m}^2/\text{kg}).$$

1.6 Le fluide non visqueux

Un fluide est dit non-visqueux (ou parfait) si l'on peut négliger les contraintes tangentielles.

1.7 Écoulement potentiel

On dit qu'un écoulement est potentiel si son vecteur vitesse est dérivé d'un potentiel c'est-à-dire :

$$\exists \phi / \vec{\text{grad}}\phi = u \vec{i} + v \vec{j}.$$

$$v = \nabla\phi.$$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, v = \frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

1.8 Quelques équations de la mécanique des fluides

1.8.1 Equation de conservation de la masse

Considérons un fluide occupant un volume v_0 de densité $\rho(x, t)$ et de frontière une surface fermée s . La quantité de masse m de fluide contenue dans ce volume est égale à :

$$m(t) = \int_{v_0} \rho(x, t) dv.$$

La variation de la masse est la masse m contenue dans le volume v_0 est donnée par :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{v_0} \rho(x, t) dv = \int_{v_0} \frac{\partial\rho}{\partial t}(x, t) dv. \quad (1.1)$$

D'autre part, la variation de la masse est égale au flux massique qui passe à travers la surface S . Soit \vec{n} est le vecteur normal unitaire à un élément de S , \vec{V} vecteur vitesse alors :

$$\int_s \rho V \vec{n} ds. \quad (1.2)$$

En identifiant les deux expressions (1.1) et (1.2) on obtient :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{v_0} \rho(x, t) dv = - \int_s \rho V \vec{n} ds.$$

D'après le théorème de divergence (Green-Ostogradsky) :

$$\int_s \rho V \vec{n} ds = \int_{v_0} \operatorname{div} \rho \vec{V} dv.$$

On obtient ainsi :

$$\int_{v_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} \right) = 0.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0.$$

Cette équation est connue sous le nom "équation de continuité".

1.8.2 Conservation de l'énergie du fluide

Nous allons évaluer l'évolution temporelle de l'énergie cinétique d'un élément de fluide de volume unité et de masse, en nous limitant aux écoulements de fluides incompressibles :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (1.3)$$

En utilisant l'équation de mouvement pour exprimer la dérivée eulérienne de la vitesse, (1.3) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + u_i f_i.$$

Soit, en décomposant le tenseur des contraintes comme précédemment en une partie isotrope $-p\delta_{i,j}$, et en un déviateur $d_{i,j}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = u_j \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + u_i \frac{\partial u_i d_{i,j}}{\partial x_j} - d_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i f_i. \quad (1.4)$$

Ou bien, en notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = u \cdot \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + \nabla \cdot (u \cdot d) - d \cdot \nabla u + u \cdot f. \quad (1.5)$$

Enfin, en tenant compte de la condition d'incompressibilité ($\nabla \cdot u = 0$), nous pouvons mettre le premier terme du membre de droite de (1.5) sous la forme d'une divergence, soit :

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = \nabla \cdot \left[u \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + u \cdot d \right] - d \cdot \nabla u + u \cdot f. \quad (1.6)$$

Récrivons cette équation d'évolution de l'énergie cinétique sous forme intégrale, en intégrant chacun des termes sur un volume V fixe et en utilisant le théorème de la divergence

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_v e_c dV \right) = \int_s \frac{\rho u^2}{2} u \cdot n dS + \int_s (\sigma \cdot u) \cdot n dS + \int_v (u \cdot f - \sigma \cdot \nabla u) dV. \quad (1.7)$$

Quelle est la signification physique des différents termes de (1.7)

1. le premier terme du second membre est l'écoulement d'énergie cinétique "convectée" par l'écoulement à travers la surface S .
2. le second terme est le travail, par unité de temps, des contraintes exercées sur la surface S .
3. le troisième terme est le travail, par unité de temps, des forces en volume .
4. enfin, le quatrième terme est associé à la déformation du volume V . Il représente l'énergie dissipée par viscosité lors de cette déformation.

1.8.3 Equation d'Euler

Soit ϑ un domaine délimité par une surface S . Ce volume est soumis à l'effet de a résultante des forces surfaciques

qui est donnée par la formule suivante :

$$- \iint_S P \vec{u}_\eta ds.$$

Où P est désigne la pression.

Par la transformation de l'intégrale de surface en une intégrale de volume on obtient :

$$- \iint_S p \vec{u}_\eta ds = - \iiint_\vartheta \overrightarrow{\text{grad}} P d\vartheta.$$

à Cette formule montre que l'élément de volume du fluide est soumis à la force ($\overrightarrow{\text{grad}} P$) exercée par le fluide en contact. Dans le cas où on ne considère que les forces surfaciques, l'équation de la balance des forces s'écrit alors :

$$\iiint_{\vartheta} \rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) d\vartheta = - \iiint_{\vartheta} \overrightarrow{\text{grad}} P d\vartheta,$$

Et comme le domaine étant arbitraire, on aura donc :

$$\rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P,$$

Lorsque le fluide est placé dans un champ (champ de pesanteur, champ magnétique,..., etc), chacun de ses éléments de volume est encore soumis à la force \vec{F}_{champ} .

Cette force doit être ajoutée au second membre de l'équation (1.8) de sorte que l'équation (1.8) doit s'écrire sous la forme :

$$\rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{F}_{champ}. \quad (1.8)$$

Cette equation est nomée l'équation d'Euler.

1.8.4 Equation de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement. Un certain travail est fourni lorsqu'il passe d'un point à un autre et ce travail est égal à la variation d'énergie mécanique. Dans le cas d'un fluide laminaire visqueux et incompressible, on obtient la relation suivante :

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \Delta \rho_{1,2}.$$

où p_i est la pression aux points A_i où $i = 1, 2$. Si le fluide non visqueux dans ce cas Δp_i . L'équation de Bernoulli se réduit à :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const.}$$

1.8.5 Equation de Navier stokes

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent le mouvement des fluides dans l'approximation des milieux continus. Elles gouvernent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. Claude Navier et George Stokes.

1.8.6 Transformation de Hilbert

Soit s une fonction définie sur \mathbb{R} , on appelle transformée de Hilbert la fonction \hat{s} définie par :

$$\hat{s}(t) = H\{s\}(t) = vp\{(h * s)(t)\} = vp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)h(t - \tau)d\tau\right\} = \frac{1}{\pi}vp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(t)}{t-\tau}d\tau\right\}.$$

Où H est la transformation de Hilbert et où :

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}.$$

Et

$$vp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)h(t - \tau)d\tau\right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} vp\left\{\int_{-\infty}^{t-\epsilon} s(t)h(t - \tau)d\tau vp\int_{t+\epsilon}^{+\infty} s(t)h(t - \tau)d\tau\right\}.$$

vp étant l'abréviation de valeur principale de Cauchy on peut montrer que pour tout réel $p > 1$, H est un opérateur borné de l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ dans lui-même.

1.8.7 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel est une transformation conforme très utilisée dans la résolution des problèmes d'écoulements, cette transformation réalise une transformation l'intérieur d'un polygone du plan complexe en demi-plan supérieur de la variable complexe λ .

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les points correspondants respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe réel du plan λ . on définit la transformation de Schwarz-Christoffel qui représente l'intérieur du polygone à demi plan supérieur par la formule :

$$\Omega = k \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\lambda + k.$$

où K et M sont des constantes complexes, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des nombres réels et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les angles intérieurs au polygone.

1.9 Transformation conformes

1.9.1 Les fonctions holomorphes

On peut définir un point z du plan complexe \mathbb{C} par la donnée de deux coordonnées réelles de différentes manières. Soit (x, y) les coordonnées cartésiennes d'un point du plan, pour utiliser la notion de variable complexe on introduit la variable z :

$$z = x + iy \text{ où } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ou bien encore

$$z = r \exp(i\theta), r = |z|, \theta = \text{Arg}(z).$$

Où r est le module de la variable z et θ son argument un disque dans le plan complexe est désigné par :

$$D = (z_0, r_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r_0\}.$$

D est appelé disque ouvert de centre z_0 et de rayon r_0 , la fonction :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Où φ et ψ sont deux fonctions réelles de deux variables elles vérifiant les équations de Cauchy- Riemann :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

$$\Delta\varphi = \Delta\psi = 0.$$

Les lignes $\varphi = \text{const}$ et $\psi = \text{const}$ constituent des familles orthogonales. La vitesse complexe est donnée par :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv.$$

1.10 Formule série de tylore

Formule intégrale de Cauchy

Soit f une fonction analytique partout à l'intérieur d'un contour fermé simple C parcouru dans le sens direct, ainsi que sur ce contour lui-même. Si z est un point quelconque intérieur à C , on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (1.9)$$

1.10.1 Série de Taylor

La correspondance entre un nombre complexe z dans le cercle de convergence et le nombre auquel la série $\sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k$ converge est à valeur unique.

En ce sens, une série de puissances définit ou représente une fonction f , pour un z spécifié dans le cercle de convergence, le nombre L vers lequel converge la série de puissances est défini comme étant la valeur de f en z , c'est-à-dire $f(z) = L$. Dans cette section, nous présentons quelques faits importants sur la nature de cette fonction f . Dans la section précédente, nous avons vu que chaque série de puissance a un rayon de conver-

gence R . Tout au long de la discussion de cette section, nous supposons qu'une série de puissance $\sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k$ a un rayon de convergence R positif ou infini. Différenciation et intégration des séries de puissance Les trois théorèmes qui suivent indiquent qu'une fonction f définie par une série de puissances est continue, différentiable et intégrable dans son cercle de convergence.

1.10.2 Théorème de Taylor

Soit f analytique dans un domaine D et soit z_0 un point in D , alors f a la représentation en série :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k. \quad (1.10)$$

valable pour le plus grand cercle C de centre à z_0 et de rayon R entièrement compris dans D .

Preuve

Soit z un point fixe à l'intérieur du cercle C et soit s la variable d'intégration. Le cercle C est alors décrit par $|s - z_0| = R$. Pour commencer, nous utilisons la formule intégrale de Cauchy pour obtenir la valeur de f en z :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\Pi i} \oint_c \frac{f'(s)}{s - z} ds = \frac{1}{2\Pi i} \oint_c \frac{f'(s)}{(s - z) - (z - z_0)} ds \\ &= \frac{1}{2\Pi i} \oint_c \frac{f'(s)}{(s - z_0)} ds \left\{ \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{s - z_0}} \right\} ds. \end{aligned} \quad (1.11)$$

En remplaçant z par $(z - z_0)/(s - z_0)$ dans (1.9) on a :

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{s - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{s - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{s - z_0}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z - z_0}{s - z_0}\right)^{n-1} + \frac{(z - z_0)^n}{(s - z_0)(z - z_0)^{n-1}}.$$

et donc (1.10) devenir

$$f(z) = \frac{1}{2\Pi i} \oint_c \frac{f'(s)}{s - z_0} ds + \frac{z - z_0}{2\Pi i} \oint_c \frac{f'(s)}{(s - z_0)^2} ds + \frac{(z - z_0)^2}{2\Pi i} \oint_c \frac{f'(s)}{(s - z_0)^3} ds + \dots$$

$$+ \frac{(z - z_0)^{n-1}}{2\Pi i} \oint_c \frac{f'(s)}{(s - z_0)^n} ds + \frac{(z - z_0)^n}{2\Pi i} \oint_c \frac{f'(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds.$$

En utilisant la formule intégrale de Cauchy pour les dérivés, (1.9) , nous pouvons récrire (1.11) comme :

$$f(z) = f(z_0) \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{n-1}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1} + R_n(z), \quad (1.12)$$

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2\Pi i} \oint_c \frac{f'(s)}{(s - z)(z - z_0)^n} ds.$$

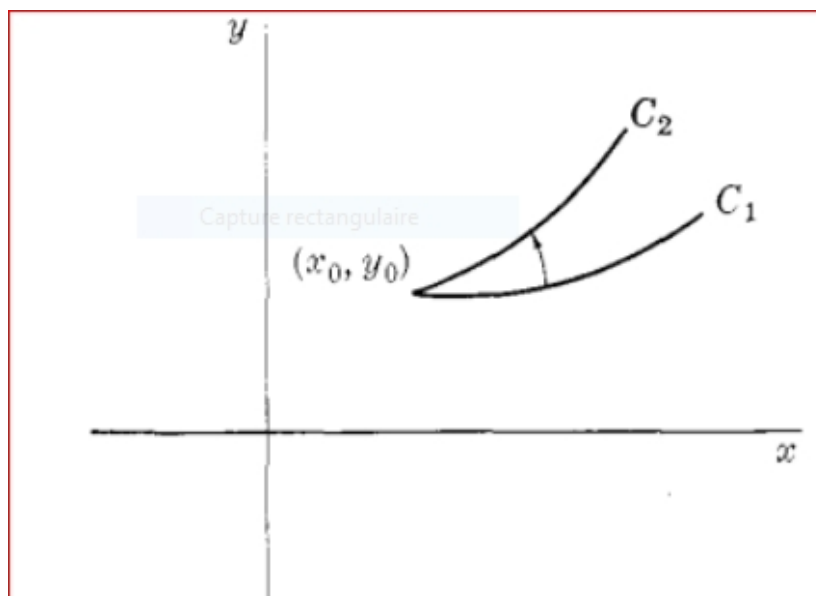
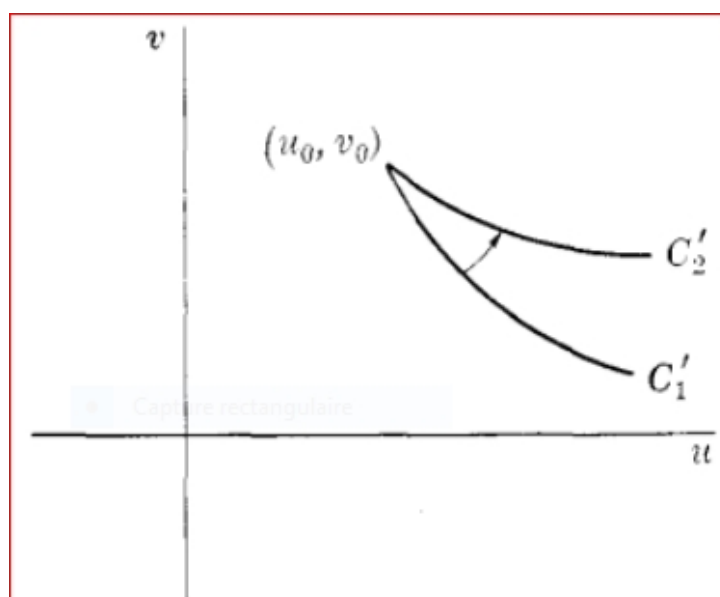
L'équation (1.12) est appelée formule de Taylor avec le reste R_n . Nous voulons maintenant montrer que $R_n(z) \rightarrow 0$ as.

Tstransformations conformes

Supposons que le point (x_0, y_0) du plan des xy soit transfomé en le point (u_0, v_0) du plan des uv (*figure1.1* et *figure1.2*) cependant que les coupant que les courbes C_1 et C_2

[se coupant en (x_0, y_0)] sont respectivement transformées en C'_1 et C'_2 [se coupant en (u_0, v_0)].

Une transformation telle que l'angle entre C_1 et C_2 en (x_0, y_0) est égale en grandeur et sens, l'angles entre C'_1 et C'_2 en (u_0, v_0) , est dite conforme en (x_0, y_0) une transformation qui conserve les angles en grandeur mais pas nécessairement en sens, est dite isogonale.

Figure1.1 : Le plan de xy .Figure1.2 : Le plan de uv .

Si $f(z)$ est analytique et si $f'(z) \neq 0$ en tous les points d'un ouvert connexe R , la transformation $w = f(z)$ est conforme en tous points de R .

Théorème

Une fonction polygène définie dans une région est conforme sur Ω cette région si et seulement si elle y est analytique. Une fonction polygène sur cette même région est anticonforme si et seulement si elle y est analytique en \bar{z} (c-à-d anti-analytique ou anti-holomorphe).

1.11 Les écoulements des fluides

Dans la vie quotidienne, dans la nature et dans le domaine industriel, les écoulements sont toujours présents. La circulation de l'oxygène dans notre organisme est l'un des exemples de l'importance de l'écoulement dans la vie humaine. Les tsunamis, les cyclones ou les coulées de lave sont aussi des exemples de l'écoulement mais qui conduisent quelquefois à de grands dégâts pour l'humanité

1.11.1 Écoulement stationnaire

Les écoulements stationnaires, sont les l'écoulements dont les composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps. Dans ce type des écoulement on a :

$$\partial_t u = \partial_t \rho = \partial_t T = \partial_t p = 0.$$

Un tel écoulement est possible lorsque le domaine, les forces massiques appliquées, les sources de chaleur et les conditions de bord sont elles aussi indépendantes du temps. par exemple

Les équations de Navier-Stokes stationnaires s'écrivent :

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases}$$

1.11.2 Écoulement incompressible

Un écoulement est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure sa masse volumique est constante :

$$\rho = \text{cte.}$$

1.11.3 Écoulements irrotationnels

Un écoulement est appelé écoulement irrotationnel si :

$$\text{rot}(\vec{V}) = \vec{0}.$$

Naturellement, un écoulement qui n'est pas irrotationnel est dit rotationnel. Un écoulement potentiel est un écoulement irrotationnel. En effet, on a :

$$U = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right).$$

$$\text{rot}U = \left\{ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \right\} = 0.$$

1.11.4 Écoulements uniformes

Un écoulement bidimensionnel à surface libre est dit uniforme si l'écoulement est de vitesse constante :

$$A_1 = A_2$$

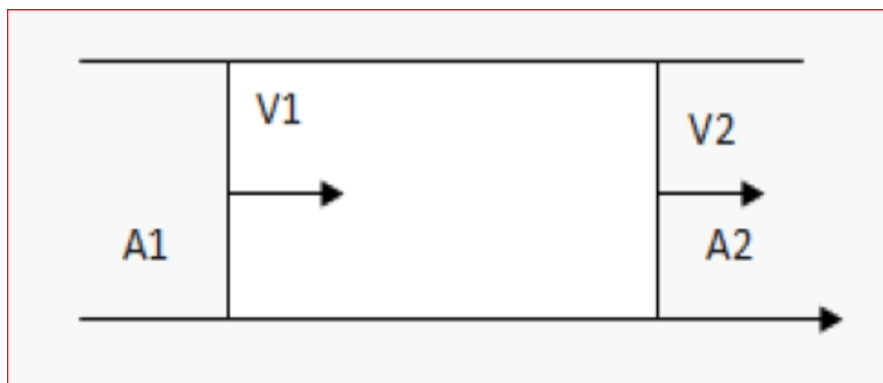


Figure 1.3 : Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme

1.11.5 Écoulement bidimensionnelle

Un écoulement est dite bidimensionnel, si toutes ces caractéristique sont dépendantes de deux variables spatiales (x, y) et du temps t .

1.12 Fonction potentielle complexe

Fonction de courant

Si l'écoulement est incompressible alors l'équation de continuité (conservation de la masse) se réduit à :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0.$$

En deux dimensions $\vec{V} = (u(x, y), v(x, y))$ où u et v sont les composantes de la vitesse :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Cela implique que la forme différentielle $-vdx + udy$ est une totale d'une certaine fonction ψ tel que :

$$d(\psi) = -vdx + udy.$$

Alore, on :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy &= -vdx + udy \\ \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}, \end{aligned}$$

ψ s'appelle la fonction de courant et les surfaces définies par les lignes $\psi = \text{constante}$ sont des lignes de courant.

1.12.1 Potentiel de vitesse

Si l'écoulement est irrotationnel alors sa vitesse dans tout le domaine de l'écoulement l'équation suivante :

$$\text{rot}(\vec{V}) = 0.$$

En deux dimensions $\vec{V} = (u(x, y), v(x, y))$ où u et v sont les composantes de la vitesse :

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Cela implique que la forme différentielle $u dx + v dy$ est une différentielle totale d'une certaine fonction φ tel que :

$$d(\varphi) = u dx + v dy.$$

Alore, on :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy &= u dx + v dy. \\ \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} . \end{aligned}$$

Le symbole φ représente le potentiel de vitesse.

On définit la fonction f de la variable complexe $z = x + iy$ comme suit :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

cette fonction est dite fonction potentiel.

Chapitre 2

Solution approximative d'un écoulement sur une rampe pour grand nombre Froude

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution numérique du problème d'écoulement bidimensionnel considéré, en tenant compte des forces de la gravité et nous négligeons la tension de surface, en utilisant la méthode de Hilbert et la technique de la perturbation .

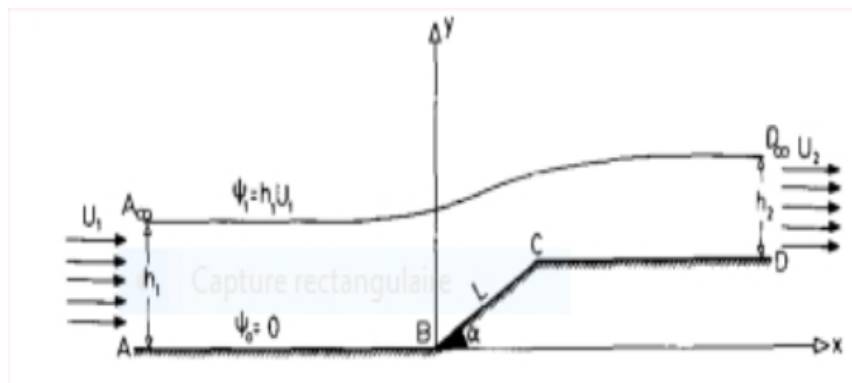


Figure 2.1 : Plan z

2.1 Formulation du problème

On considère dans cette étude un problème d'un mouvement irrotationnel bidimensionnel, c'est-à-dire que la vitesse de cet écoulement est dérivée d'un potentiel $\varphi(x, y)$ satisfaisant l'équation :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1)$$

Le fluide est considéré comme non visqueux et incompressible, soumis à l'action de la force gravitationnelle et ayant une surface supérieure libre.

A l'origine on considère que l'écoulement est uniforme avec une vitesse U_1 c'est-à-dire dans la direction positive de l'axe des abscisses x et de profondeur h_1 le fond de l'écoulement se compose d'un paroi horizontal AB, paroi incliné BC avec un angle d'inclinaison α et longueur L ; et un paroi horizontal CD. Où le fond s'étend de $-\infty$ (point A) à $+\infty$ (point D) : Le domaine est illustré dans la *Figure 2.1*. Pour plus de commodité, nous choisissons le point B comme origine dans le plan z , l'axe des abscisses x est confondu sur la paroi AB et l'axe des y est perpendiculaire

passant par le point B. On introduit la fonction potentiel :

$$W(z) = \varphi(x, y) - i\psi(x, y),$$

est une fonction analytique de z dans la région d'écoulement, avec une vitesse complexe :

$$\frac{dW(z)}{dz} = u(x, y) - iv(x, y) = qe^{-i\theta}. \quad (2.2)$$

Soit les variables sans dimension z', q' et w' :

$$z' = \frac{z}{h_1}, q' = \frac{q}{u_1}, f' = \frac{f}{\psi_1}. \quad (2.3)$$

où

$$\psi_1 = U_1 h_1,$$

La condition sur la surface libre, où la pression est uniforme, est obtenue à partir de Bernoulli équation. La condition de Bernoulli sur la surface libre, sous forme adimensionnelle, peut être écrite :

$$q'^2 + \frac{2}{F^2}(y' - 1) = 1, \quad (2.4)$$

où F est le nombre de Froude défini par :

$$F = \frac{U_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad (2.5)$$

La hauteur de la rampe est notée par, où :

$$\epsilon = \frac{l \sin \alpha}{h_1} = l' \sin \alpha. \quad (2.6)$$

Sous forme sans dimension, (2.2) devient :

$$\xi = \frac{dW'}{dz'} = q' e^{-i\theta}. \quad (2.7)$$

on a

$$w = In\xi = Inq' - i\theta, \quad (2.8)$$

où w est appelé la variable d'hodographe logarithmique.

Ensuite, à partir de (2.7) et (2.8) nous obtenons :

$$z' = \int e^{-w} dW'. \quad (2.9)$$

En utilisant la transformation de Schwartz-Christoffel, nous transformons la région de l'écoulement du plan f' sur la moitié supérieur d'un plan t auxiliaire, de sorte que les points suivants correspondent :(voir les figures 2.2 et 2.3) :

$$\begin{aligned} B : w' = 0, & \quad t = 0, \\ D, D_\infty : w' \rightarrow +\infty, & \quad t = 1, \\ A, A_\infty : w' \rightarrow -\infty, & \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.10)$$

La transformatiuon utilisé est donnée par :

$$w'(t) = -\frac{1}{\Pi} \ln(1-t), 0 \leq \arg(1-t) \leq \Pi. \quad (2.11)$$

Pour la seconde moitié du problème, pour exprimer w en fonction de la variable unique t , on introduire la méthode de Hilbert pour un problème de valeurs aux limites mixtes dans le demi-plan supérieur, le solution générale dont pour une fonction analytique $Q(t)$ dans le demi-plan supérieur, est bien connue (voir [1,3,14,15,17-19]).

Soit $Q(t)$ une fonction analytique définie dans le demi-plan supérieur, le plan t , et supposons $Im(Q(t))$ satisfait la condition de Hölder à la frontière, $Im(t) = 0$, du plan t .

Si $Im(Q(t))$ est connu sur la frontière, alors $Q(t)$ est donné par la formule intégrale de Poisson :

$$Q(t) = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Im(Q(v))}{v-t} dv + \sum_{j=0}^{\infty} A_j t^j, \quad (2.12)$$

où A_j sont des constantes réelles, et f désigne une intégrale singulière au sens de Cauchy. Maintenant, nous essayons de relier la fonction $w(t)$ à la fonction $Q(t)$. D'après (2.12), nous trouvons que $Q(t)$ est exprimé en termes de ses parties imaginaires le long de l'axe réel, la frontière du plan t . Ainsi, nous devons examiner la valeur de $w(t)$ le long de la frontière du plan t , et nous trouvons cette :

$$\begin{aligned} Im(w(t)) &= -\theta(t), \quad t < 1, \\ Re(w(t)) &= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2}{F^2} \eta'(t) \right), \quad t > 1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

où

$$\theta(t) \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \alpha & 0 < t < 0, \\ 0 & t_c < t < 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

et

$$\eta'(t) = y'(t) - 1. \quad (2.15)$$

Cela signifie que nous connaissons la partie réelle ou imaginaire de $w(t)$ le long de la frontière du plan t . Il faut alors construire une fonction auxiliaire $H(t)$ qui fait la partie imaginaire de le quotient $Q(t) = w(t)/H(t)$ connu à la frontière du plan t . La forme générale de $H(t)$ est :

$$H(x) = \alpha \prod_j (t - b_j)^{\pm \frac{1}{2}}, \quad (2.16)$$

où b_j sont des constantes réelles, et $\alpha = \pm \sqrt{\pm 1}$.

Song [20] a montré que la solution finale est indépendante du choix particulier de $H(t)$. Nous choisir :

$$H(t) = -i\sqrt{t-1}, 0 \leq \arg(t-1) \leq \pi. \quad (2.17)$$

En utilisant (2.13) et (2.17), on obtient :

$$\operatorname{Im} Q(t) \begin{cases} \frac{\theta(t)}{\sqrt{t-1}}, & t < 1, \\ \frac{\ln(1 - \frac{2}{F^2} \eta'(t))}{2\sqrt{t-1}}, & t > 1. \end{cases} \quad (2.18)$$

Ensuite, nous examinons la condition en amont. Lorsque nous approchons du point A_∞ , c'est-à-dire que $t \rightarrow +\infty$:

$$H(t) \simeq -i\sqrt{t} \text{ et } w(t) = \operatorname{Im} q'(t) = 0.$$

Par conséquent :

$$Q(t) = w(t)/(-i\sqrt{t}) = 0.$$

et de (2.12), $A_j = 0$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Ainsi, (2.12) prend la forme

$$Q(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(Q(v))}{v-t} dv, \quad (2.19)$$

En utilisant (2.7), nous obtenons :

$$Q(t) = \frac{w(t)}{H(t)} = \frac{\ln q'(t) + i(-\theta(t))}{H(t)} = R(t) + iS(t). \quad (2.20)$$

Une forme équivalente de (2.19) est :

$$R(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(v)}{v-t} dv, \quad S(v) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(v)}{v-t} dv. \quad (2.21)$$

pour plus de détails sur la transformation de Hilbert, en utilisant (2.21) nous obtenons un ensemble d'équations intégrales, et pour notre travail nous n'avons besoin que du équations suivantes :

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln q'(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv + \frac{2\alpha}{\Pi} \tan^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \quad t > 1, \quad (2.22)$$

$$\ln q'_B = -\frac{\sqrt{1-t}}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln q'(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv - \frac{2\alpha}{\Pi} \tanh^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \quad 0 < t < t_c, \quad (2.23)$$

où

$$r = 1 - \sqrt{1-t_c}, \quad (2.24)$$

et $q'_B(t)$ est la vitesse d'écoulement sur la rampe.

Les coordonnées (x', y') d'un point sur la surface libre peuvent être obtenues en utilisant (2.9) et (2.11) comme suit :

$$z'(t) = (x_{\infty} + i) + \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^1 \frac{e^{-i\theta(v)}}{(1-v)q'(v)} dv, \quad t > 1.$$

Séparant la partie réelle et imaginaire, nous obtenons :

$$x'(t) = x'_{\infty} + \frac{1}{\Pi} \int_{\infty}^1 \frac{\cos \theta(v)}{(1-v)q'(v)} dv, \quad t > 1. \quad (2.25)$$

$$y'(t) = 1 + \frac{1}{\Pi} \int_{\infty}^1 \frac{\sin \theta(v)}{(1-v)q'(v)} dv, \quad t > 1. \quad (2.26)$$

à partir de (2.26), nous pouvons trouver la longueur de la rampe L' , et elle a la forme :

$$L'(t) = \frac{1}{\Pi} \int_{\infty}^{t_c} \frac{1}{(1-v)q'_B(v)} dv, \quad (2.27)$$

où $q'(t)$ est donné par (2.23).

Par conséquent, le système d'équations (2.4), (2.22), (2.23), (2.25), (2.26) et (2.27) décrit complètement notre problème.

2.2 Les équations approximatives

Pour un grand nombre de Froude F et pour un petit angle d'inclinaison α , auquel cas le changement de $\theta(t)$ sera très petit, nous pouvons approximer $\sin \theta(t)$ par $\theta(t)$ et $\cos \theta(t)$ par 1. Ayant fait ainsi, nous procéder à la suppression des nombres premiers et le système d'équations prend la forme :

$$q(t) \simeq 1 - \frac{1}{F^2} \eta(t), \quad t > 1. \quad (2.28)$$

$$\eta(t) \simeq -\frac{1}{\Pi} \int_t^{\infty} \frac{\theta(v)}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2} \eta(v) \right) dv, \quad t > 1, \quad (2.29)$$

$$\theta(t) \simeq -\frac{\sqrt{t-1}}{\Pi F^2} \int_1^{\infty} \frac{\eta(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv + \frac{2\alpha}{\Pi} \tan^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \quad t > 1, \quad (2.30)$$

$$x(t) \simeq x_{\infty} - \frac{1}{\Pi} \int_t^{\infty} \frac{1}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2} \eta(v) \right) dv, \quad t > 1, \quad (2.31)$$

$$\ln q_B(t) \simeq \frac{\sqrt{1-t}}{\Pi F^2} \int_1^{\infty} \frac{\eta(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv - \frac{2\alpha}{\Pi} \tanh^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \quad 0 < t < t_c, \quad (2.32)$$

$$L \simeq \frac{1}{\Pi} \int_0^{t_c} \frac{1}{(1-v)q_B(v)} dv. \quad (2.33)$$

2.2.1 Technique de perturbation

Développez $q(t)$, $\eta(t)$, $\theta(t)$ et $x(t)$ en fonction du petit paramètre α ,

$$q(t) = q_0(t) + \alpha q_1(t) + \alpha^2 q_2(t) + \dots, \quad (2.34)$$

$$\eta(t) = \eta_0(t) + \alpha \eta_1(t) + \alpha^2 \eta_2(t) + \dots, \quad (2.35)$$

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \alpha \theta_1(t) + \alpha^2 \theta_2(t) + \dots, \quad (2.36)$$

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \dots. \quad (2.37)$$

En employant les développements (2.34) - (2.37) dans les équations (2.28) - (2.31) et en assimilant les termes de puissance similaire de α , on obtient le:

2.2.2 Approximation d'ordre zéro

$$q_0(t) = 1 - \frac{1}{F^2} \eta_0(t). \quad (2.38)$$

$$\eta_0(t) = -\frac{1}{\Pi} \int_t^\infty \frac{\theta_0(v)}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2} \eta_0(v) \right) dv, \quad t > 1, \quad (2.39)$$

$$\theta_0(t) = -\frac{\sqrt{t-1}}{\Pi F^2} \int_1^\infty \frac{\eta_0(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv, \quad t > 1, \quad (2.40)$$

$$x_0(t) = x_\infty - \frac{1}{\Pi} \int_t^\infty \frac{1}{1-v} \left(1 + \frac{1}{F^2} \eta_0(v) \right) dv, \quad t > 1. \quad (2.41)$$

Cette approximation d'ordre zéro correspond au cas d'un écoulement sur fond plat. Solution de l'approximation d'ordre zéro est :

$$q_0(t) = 1, \quad (2.42)$$

$$\eta_0(t) = 0, \quad (2.43)$$

$$\theta_0(t) = 0, \quad (2.44)$$

$$x_0(t) = x_\infty - \frac{1}{\Pi} \int_t^\infty \frac{dv}{1-v}.$$

et on a

$$x_\infty = \frac{1}{\Pi} \int_0^\infty \frac{1}{1-v} dv.$$

par conséquent

$$x_0 = -\frac{1}{\Pi} \ln(t-1), \quad (2.45)$$

2.2.3 Approximation de premier ordre

$$q_1(t) = -\frac{1}{F^2} \eta_1(t), \quad t > 1, \quad (2.46)$$

$$\eta_1(t) = -\frac{1}{\Pi} \int_t^\infty \frac{\theta_1(v)}{1-v} dv, \quad t > 1, \quad (2.47)$$

$$\theta_1(t) = -\frac{\sqrt{t-1}}{\Pi F^2} \int_1^\infty \frac{\eta_1(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv + \frac{2}{\Pi} \tan^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \quad (2.48)$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{\Pi F^2} \int_t^\infty \frac{\eta_1(v)}{1-v} dv. \quad (2.49)$$

En général, approximation d'ordre n

$$q_n(t) = -\frac{1}{F^2} \eta_n(t),$$

$$\eta_n(t) = -\frac{1}{\Pi} \int_t^\infty \frac{1}{1-v} \left(\theta_n(v) + \frac{1}{F^2} \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j(v) \eta_{n-j}(v) \right) dv, \quad (2.50)$$

$$\theta_n(t) = -\frac{\sqrt{t-1}}{\Pi F^2} \int_1^\infty \frac{\eta_n(v)}{(v-t)\sqrt{v-1}} dv,$$

$$x_n(t) = -\frac{1}{\Pi F^2} \int_t^\infty \frac{\eta_n(v)}{1-v} dv.$$

où $n = 2, 3, 4, \dots$,

2.3 Résolution du problème

Solution de l'approximation du premier ordre : d'après (2.48), pour un très grand nombre de Froude F , on peut négliger le premier terme par rapport à. le second et un obtient :

$$\theta_1(t) \simeq \frac{2}{\Pi} \tan^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \quad t > 1. \quad (2.51)$$

En substituant dans (2.47) et en effectuant l'intégration, on trouve :

$$\eta_1(t) \simeq \frac{4r}{\Pi^2 \sqrt{1-r}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-r}{t-1}}, \quad t > 1. \quad (2.52)$$

Donc $q_1(t)$ prend la forme, de (2.46) :

$$q_1(t) \simeq -\frac{4r}{\Pi^2 \sqrt{1-r} F^2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-r}{t-1}}, \quad t > 1. \quad (2.53)$$

et

$$x_1(t) \simeq \frac{8r}{\Pi^3 F^2 \sqrt{t-1}}, \quad t > 1. \quad (2.54)$$

Pour un très grand nombre de Froude F , le premier terme de (2.32) peut être négligé par rapport au deuxième et nous obtenons :

$$\ln q_B(t) \simeq -\frac{2\alpha}{\Pi} \tanh^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right), \quad 0 < t_c < 1, \quad (2.55)$$

à partir de laquelle on peut trouver une expression approximative de la longueur de la rampe, en utilisant (2.33) :

$$L \simeq -\frac{1}{\Pi} \ln(1-t_c), \quad 0 < t_c < 1. \quad (2.56)$$

Pour un petit angle d'inclinaison α , nous ne considérerons qu'une solution approximative à l'ordre de α , et nous avons :

$$q(t) \simeq 1 - \alpha \frac{4r}{\Pi^2 F^2 \sqrt{1-r}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-r}{t-1}} + o(\alpha), \quad t > 1, \quad (2.57)$$

$$y(t) \simeq 1 + \alpha \frac{4r}{\Pi^2 \sqrt{1-r}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-r}{t-1}} + o(\alpha), \quad t > 1, \quad (2.58)$$

$$\theta(t) \simeq \frac{2\alpha}{\Pi} \tan^{-1} \left(\frac{r\sqrt{t-1}}{t-r} \right) + o(\alpha), \quad t > 1, \quad (2.59)$$

$$x(t) \simeq -\frac{1}{\Pi} \ln(t-1) + \alpha \frac{8r}{\Pi^3 F^2 \sqrt{t-1}} + o(\alpha), \quad t > 1. \quad (2.60)$$

Une quantité d'intérêt physique est la force de traînée sur la rampe causée par l'écoulement du fluide, qui est la composante horizontale de la force agissant sur la largeur unitaire de la rampe. En fait, cette force de traînée représente la variation du flux de quantité de mouvement due à la variation du flux produit par la rampe.

La force de traînée D rendue sans dimension par référence à la quantité $\rho g h$; où ρ est le fluide densité, est donnée par :

$$D = \frac{1}{2} F^2 \int_{y=0}^{\epsilon} (1 - q^2) dy. \quad (2.61)$$

où c est donné par (2.6). L'équation (2.61) peut être intégrée plus facilement en utilisant (2.57) et (2.58), on obtient :

$$D = \frac{8\alpha \tan \alpha}{\pi^3} \left(e^{\pi \epsilon \cot \frac{1}{2}\alpha} - 1 \right) (1 - e^{-\pi \epsilon / 2 \sin \alpha}). \quad (2.62)$$

2.4 Résultats numériques et discussion

Des solutions approximatives pour les débits à grand nombre de Froude se retrouvent dans une large gamme des hauteurs de rampe. Résultats montrant l'élévation de la surface libre sur une plage de hauteurs de rampe ϵ , 0,002567 à 0,035513, pour fixe $\alpha = \frac{1}{6}\pi$, $F^2 = 10,0$ et sur une plage d'angles d'inclinaison $\alpha, \frac{1}{12}\pi$ pour fixe à $\frac{1}{6}\pi$ $\epsilon = 0,005012$, $F^2 = 10,0$ sont donnés dans les *Figure2.4* et *2.5*.

Effet du nombre de Froude F sur l'élévation de la surface libre pour fixe $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ et $\epsilon = 0,005012$ est donné sur la *figure2.6*.

Ces résultats démontrent l'augmentation monotone de l'élévation de la surface libre avec l'augmentation de la hauteur de la rampe, l'angle d'inclinaison et le nombre de Froude.

De *Figure 2.4* et 5, nous sommes en mesure de donner une formule approximative pour l'élévation maximale en termes de hauteur de rampe et d'angle d'inclinaison, à savoir :

$$\frac{y_{\max}}{h_1} \simeq 1.0 + 1.045807\epsilon, \text{ pour } F^2 = 10.0 \text{ et } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Et

$$\frac{y_{\max}}{h_1} \simeq 1.0 + 0.049636\alpha, \text{ pour } F^2 = 10.0 \text{ et } \epsilon = 0.005012.$$

ils sont tracés sur les *Figure 7* et 8, respectivement.

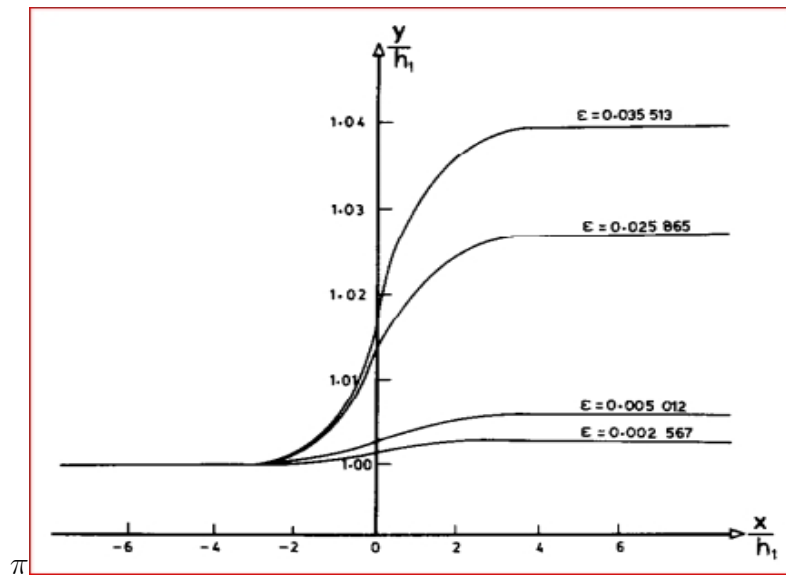


Figure 2.4 : Effet de la hauteur de rampe ϵ sur la surface libre profil pour $\alpha = \frac{1}{6}$ et $F^2 = 10.0$.

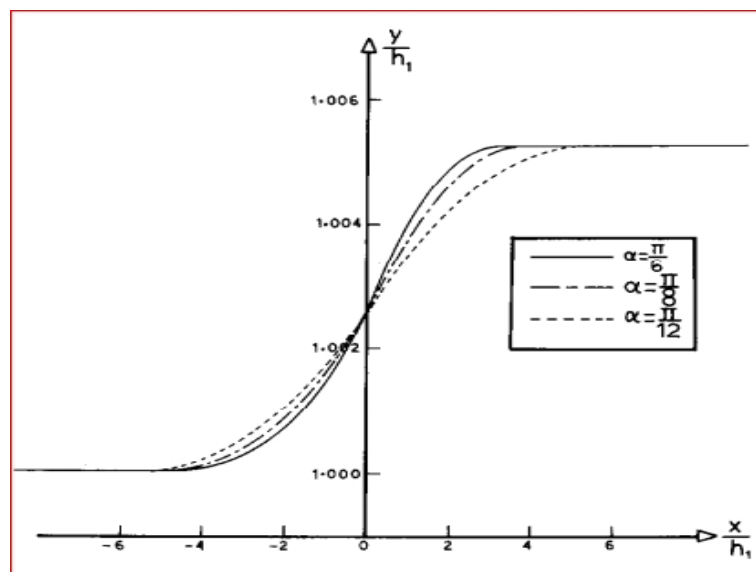


Figure 2.5 Effet de l'angle d'inclinaison (de la rampe sur le profil de surface libre pour $\epsilon = 0,005012$ et $F^2 = 10,0$.

La force de traînée D , comme indiqué sur la *figure 2.9*, augmente de façon monotone avec la rampe hauteur pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison. Forbes et Schwartz [10] considérant le cas des écoulements supercritiques sur un semi-circulaire obstruction avec un fond par ailleurs plat, a conclu que la forme limite de la surface libre profil aurait un

angle pointu de $120''$ à son apogée. Une conclusion similaire pourrait être faite avec en ce qui concerne l'écoulement sur une rampe. Le comportement des courbes, sur la *figure2.4*, pour différents E , appuie cette idée :

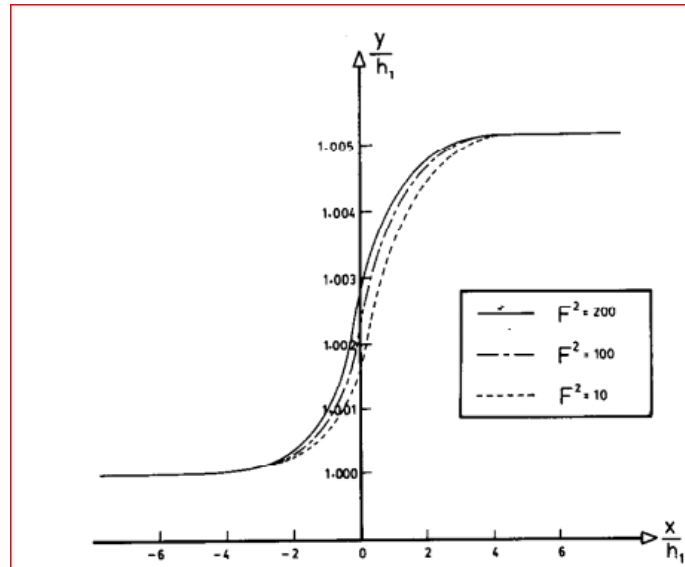


Figure2.6 : Effet du nombre de Froude sur le profil de surface libre pour $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ et $\epsilon = 0,005012$.

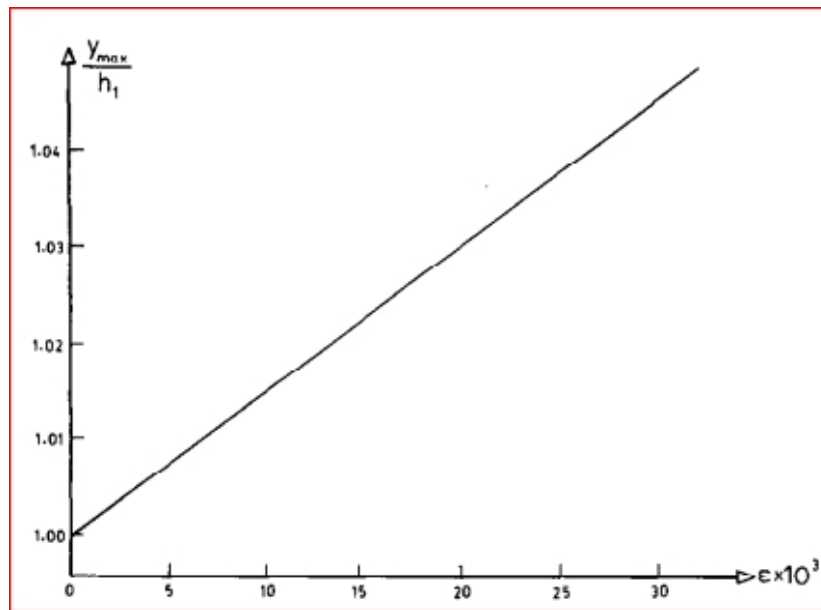


Figure 2.7 : Hauteur de surface libre maximale normalisée contre la hauteur de rampe ϵ pour $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ et $F^2 = 10.0$

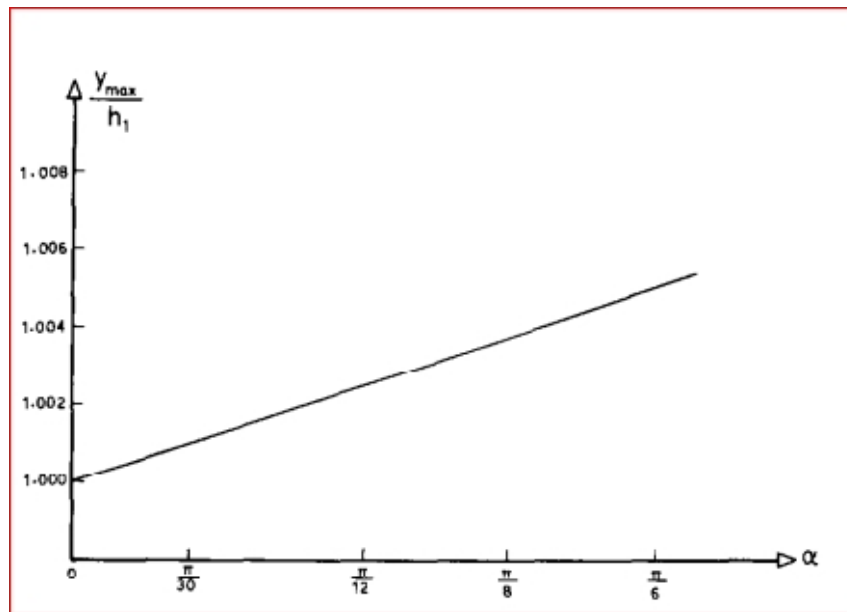


Figure 2.8 : Hauteur maximale de surface libre normalisée contre l'angle d'inclinaison α de la rampe pour $\epsilon = 0,005012$ et $F^2 = 10,0$.

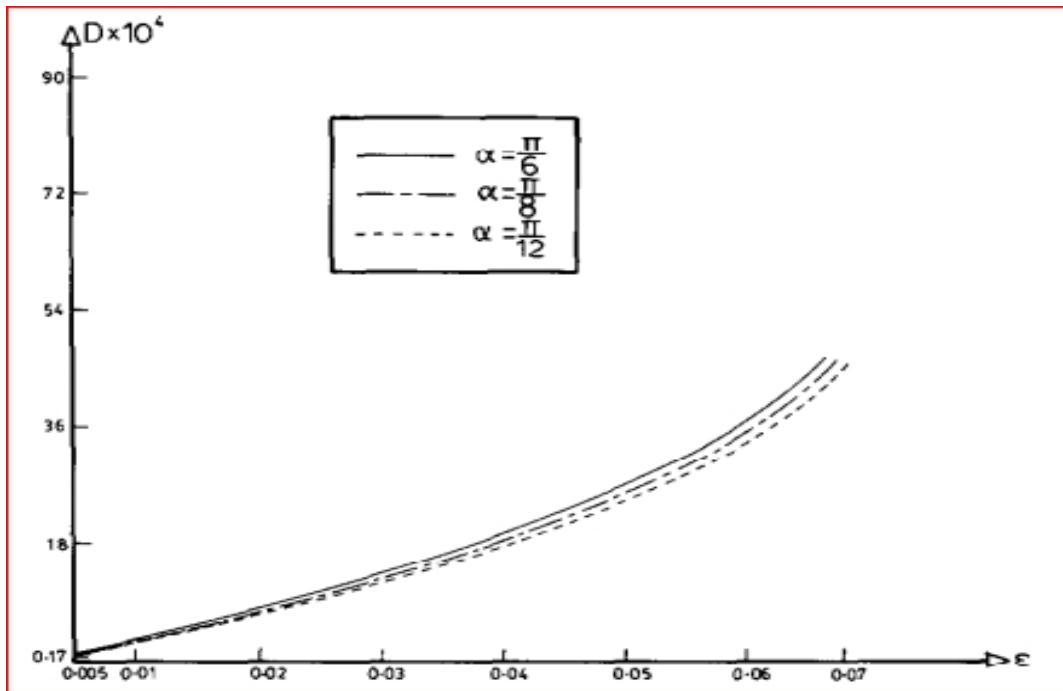


Figure 2.9 : La force de traînée D sur la rampe en fonction de la hauteur de rampe ϵ pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison α .

Chapitre 3

Solution linéarisée d'un écoulement sur une rampe.

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution numérique du problème d'écoulement bidimensionnel considéré, en tenant compte des forces de la gravité et nous négligeons la tension de surface, en utilisant le théorème de Fourier avec une double intégration et on termine ce chapitre par la forme de la surface libre et présentation de quelques résultats .

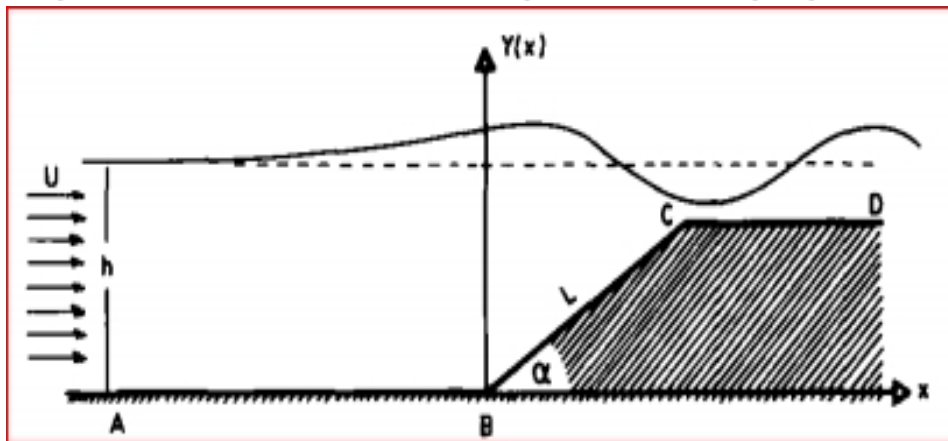


Figure 3.1 : Le plan physique ,plan Z , pour un écoulement à partir d'uniforme

3.1 Formulation du problème

Les écoulements considérés sont supposés non visqueux, irrotationnels, bidimensionnels, incompressibles et réguliers. Il découle donc des hypothèses précédentes que fonction de courant ψ et le potentiel de vitesse ϕ sont fonctions harmoniques des coordonnées (x, y) dans le plan physique et peuvent être définies de telle sorte que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u. \quad (3.1)$$

Et

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v. \quad (3.2)$$

Dans laquelle (u, v) sont les composantes (x, y) de la vitesse vecteur, respectivement. Puis le potentiel complexe :

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (3.3)$$

est une fonction analytique de $z = x + iy$ dans la région de écoulement et a la propriété importante que sa dérivée satisfait :

$$\frac{dw(z)}{dz} = u(x, y) - iv(x, y) = qe^{-i\theta}, \quad (3.4)$$

où q et θ sont la magnitude et la phase de la vecteur de vitesse.

Le fond est constitué d'un plan horizontal AB, d'un plan incliné BC à l'angle d'inclinaison α et de la longueur L , suivi d'un plan horizontal CD, où le fond s'étend de $-\infty$ (point A) à $+\infty$ (point D) comme indiqué dans la *figure3.1*.

3.2 Analyse

À partir de la *figure3.1*, la configuration inférieure peut être décomposée en

$$Y(X) = R(X) + (L/2) \sin \alpha, \quad (3.5)$$

par :

$$X = x - (L/2) \cos \alpha, \quad (3.6)$$

et $R(x)$ est représenté sur la *figure3.2*.

Maintenant, pour représenter $R(X)$ sous forme intégrale, on voit que il peut être décomposé en :

$$R(X) = S(X) + T(X). \quad (3.7)$$

Où

$$S(X) = \begin{cases} -(L/2) \sin \alpha, & X < 0, \\ (L/2) \sin \alpha, & X > 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

(see *figure3.3*).et

$$T(X) = \begin{cases} (L/2) \sin \alpha + (\tan \alpha)X, & -(L/2) \cos \alpha < X < 0, \\ -(L/2) \sin \alpha + (\tan \alpha)X, & 0 < X < (L/2) \cos \alpha, \\ 0, & |X| > (L/2) \cos \alpha, \end{cases} \quad (3.9)$$

(see *figure3.4*).Utiliser l'identité

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha k}{k} dk = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

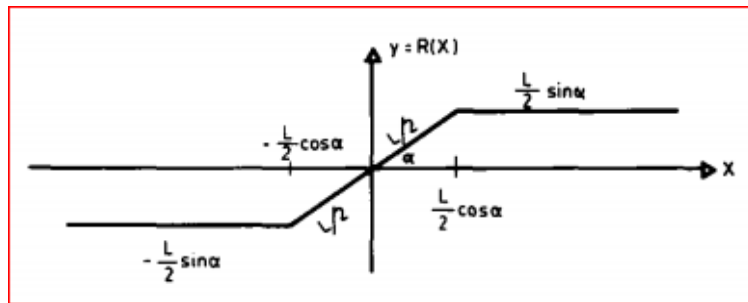


Figure 3.2: $R(X) = Y(x) - (L/2) \sin \alpha$, $X = x - (L/2) \cos \alpha$

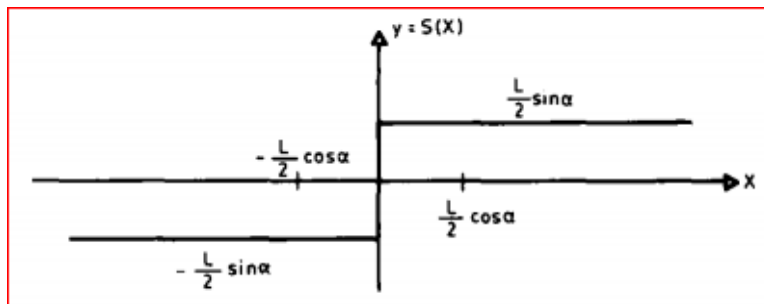


Figure 3.3 : $S(X)$ donné par l'équation (3.8)

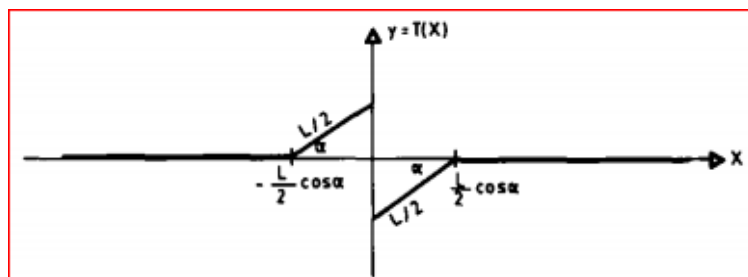


Figure 3.4 : $T(X)$ donné par l'équation (3.9)

dans (3.8) pour représenter $S(X)$ sous forme intégrale, on obtient :

$$S(X) = \frac{L \sin \alpha}{\Pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Xk}{k} dk, \quad (3.11)$$

Pour exprimer $T(X)$ sous forme intégrale, on applique théorème de Fourier à double intégrale :

$$T(X) = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} T(s) = \cos k(X - s) ds \right\} dk. \quad (3.12)$$

En remplaçant (3.9) dans (3.12), on obtient :

$$T(X) = \frac{2 \tan \alpha}{\Pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Xk}{k^2} \sin \left[\frac{L \cos \alpha}{2} k \right] dk - \frac{L \sin \alpha}{\Pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Xk}{k} dk. \quad (3.13)$$

Par conséquent à partir de (3.7), (3.11) et (3.13) nous obtenons :

$$R(X) = \frac{2 \tan \alpha}{\Pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Xk}{k^2} \sin \left[\frac{L \cos \alpha}{2} k \right] dk. \quad (3.14)$$

Par conséquent, à partir de (3.5), nous trouvons :

$$Y(X) = \frac{L \sin \alpha}{\Pi} + \frac{\tan \alpha}{\Pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \left(X - \frac{(L \cos \alpha)}{2} \right) k}{k^2} dk - \frac{\tan \alpha}{\Pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \left(X - \frac{(L \cos \alpha)}{2} \right) k}{k^2} dk. \quad (3.15)$$

A la suite de Thomson 2, la forme de la surface libre est :

$$\eta(X) = \int_0^{\infty} \frac{\alpha(k) \cos(x_1 k)}{\cosh(rk) \left[1 - \frac{\tanh(rk)}{F^2 r k} \right]} dk - \int_0^{\infty} \frac{\alpha(k) \cos(x_2 k)}{\cosh(rk) \left[1 - \frac{\tanh(rk)}{F^2 r k} \right]} dk. \quad (3.16)$$

Où

$$r = -\frac{L}{2} \sin \alpha, x_1 = X - \frac{L \cos \alpha}{2}, x_2 = X + \frac{L \cos \alpha}{2}, \alpha(k) = \frac{\tan \alpha}{\Pi k^2}, F^2 = \frac{U^2}{gh}. \quad (3.17)$$

Définir

$$rk = t, X' = \frac{X}{r}, b = \frac{L \cos \alpha}{2r} = -\cot \alpha, \eta' = \frac{\eta}{h}, L' = \frac{L}{h}. \quad (3.18)$$

Using (3.17) et (3.18) dans (3.16), nous ge

$$\begin{aligned} \eta'(X') &= -\frac{L' \sin \alpha \tan \alpha}{2\Pi} \int_0^\infty \frac{\cos(X' - b)t}{t^2 \left(\cosh t - \frac{(\sinh t)}{F^2 t} \right)} dt \\ &+ \frac{L' \sin \alpha \tan \alpha}{2\Pi} \int_0^\infty \frac{\cos(X' + b)t}{t^2 \left(\cosh t - \frac{(\sinh t)}{F^2 t} \right)} dt. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Considérons maintenant la fonction :

$$G(z) = z^2 \left(\cos z - \frac{\sin z}{F^2 z} \right). \quad (3.20)$$

Pour évaluer les intégrations de (3.19), nous utilisons une méthode analytique bien connue de Cauchy, dont des exemples sont donnés dans la double croche de son mémoire sur la théorie des ondes,¹³ qui consiste à étendre le dénominateur en une série infinie de fractions partielles données par les zéros du dénominateur.

3.2.1 Cas d'écoulement supercritique: $F^2 > 1$

Les zéros de $G(z)$, définis dans (3.20), sont :

$$z_0 = z_1 = 0, z_{\pm n} = \pm i y_n, n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.21)$$

où y_2, y_3, y_4, \dots sont les zéros positifs de :

$$\tan y = F^2 y, \quad (3.22)$$

$G(z)$ est une fonction paire de z , donc $1/G(z)$ peut être développé sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{G(z)} &= \frac{F^2}{z^2(F^2 \cosh z - \frac{(\sinh z)}{z})} \\ &= \frac{A_0}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{z^2 + y_n^2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

d'où nous tirons

$$\frac{1}{G(z)} = \frac{F^2}{z^2(F^2 - 1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2F^2 \cos y_n}{(F^2 \cos^2 y_n - 1)(z^2 + y_n^2)}. \quad (3.24)$$

En remplaçant (3.24) dans (3.19), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \eta'(X') &= \frac{L' \sin \alpha \tan \alpha}{4} \left\{ \frac{F^2}{F^2 - 1} (|x'_1| - |x'_2|) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{y_n} \left(e^{-|x'_2| y_n} - e^{-|x'_1| y_n} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{2F^2 \cos y_n}{(F^2 \cos^2 y_n - 1)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

où $x'_i = x_i/r$, $i = 1, 2$ et x_i , $i = 1, 2$, sont définis dans (3.17).

3.2.2 Cas d'écoulement souscritique: $F^2 < 1$

Les zéros de $G(z)$, définis dans (3.20), sont :

$$z_0 = z_1 = 0, \quad z_{\pm 2} = u, \quad z_{\pm n} = \pm i y_n, \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (3.26)$$

où u est le zéro positif de :

$$\tan hx = F^2 x, \quad (3.27)$$

et y_3, y_4, y_5, \dots , sont les zéros positifs de :

$$\tan y = F^2 y, \quad (3.28)$$

$G(z)$ est une fonction paire de z ; donc $1/G(z)$ peut être développé sous la forme d'où nous tirons :

$$\frac{1}{G(z)} = \frac{A_0}{z^2} + \frac{A_1}{z^2 - u^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{A_n}{z^2 + y_n^2}. \quad (3.29)$$

d'où nous tirons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{G(z)} &= \frac{F^2}{z^2(F^2 - 1)} + \left(\frac{2F^2 \cosh u}{F^2 \cos^2 u - 1} \right) \frac{1}{z^2 - u^2} \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2F^2 \cos^2 y_n}{(F^2 \cos^2 y_n - 1)(z^2 + y_n^2)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Remplacer (3.30) dans (3.19). on a :

$$\begin{aligned} \eta'(X') &= \frac{L' \sin \alpha \tan \alpha}{2\Pi} \left\{ \frac{F^2}{F^2 - 1} \int_0^{\infty} \frac{\cos x'_2 t - \cos x'_1 t}{t^2} dt \right. \\ &+ \frac{2F^2 \cosh u}{F^2 \cosh^2 u - 1} \int_0^{\infty} \frac{\cos x'_2 t - \cos x'_1 t}{t^2 - u^2} dt \\ &\left. + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2F^2 \cos y_n}{F^2 \cos^2 y_n - 1} \int_0^{\infty} \frac{\cos x'_2 t - \cos x'_1 t}{t^2 + y_n^2} dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $x'_i = x_i/r, i = 1, 2$ et $x_i = 1, 2$, sont définis dans (3.17).

En effectuant des intégrations dans (3.31), on obtient :

$$\begin{aligned} \eta'(X') &= \frac{L' \sin \alpha \tan \alpha}{2} \left\{ \frac{F^2}{2(F^2 - 1)} (|x'_1| - |x'_2|) \right. \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2F^2 \cos^2 y_n}{(F^2 \cos^2 y_n - 1) y_n} \\ &\left. \times (e^{-|x'_2| y_n} - e^{-|x'_1| y_n}) \right\}_{X' < -\cot \alpha}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

et

$$\begin{aligned} \eta'(X') &= \frac{L' \sin \alpha \tan \alpha}{2} \left\{ \frac{F^2}{2(F^2 - 1)} (|x'_1| - |x'_2|) \right. \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2F^2 \cos y_n}{(F^2 \cos^2 y_n - 1)y_n} \left(e^{-|x'_2|y_n} - e^{-|x'_1|y_n} \right) \\ &\left. + \frac{2F^2 \cosh u}{(F^2 \cosh^2 u - 1)u} \sin x'_1 u \right\}_{|X'| < \cot \alpha}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

et

$$\begin{aligned} \eta'(X') &= \frac{L' \sin \alpha \tan \alpha}{2} \left\{ \frac{F^2}{2(F^2 - 1)} (|x'_1| - |x'_2|) \right. \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2F^2 \cos y_n}{(F^2 \cos^2 y_n - 1)y_n} \left(e^{-|x'_2|y_n} - e^{-|x'_1|y_n} \right) \\ &\left. + \frac{2F^2 \cosh u}{(F^2 \cosh^2 u - 1)u} \sin x'_1 u - \sin x'_2 u \right\}_{X' > \cot \alpha}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.3 Conclusion et discussion

L'écoulement bidimensionnel d'un fluide idéal sur une rampe a fait l'objet d'une enquête. La théorie linéarisée, dérivée sous l'hypothèse que la hauteur de la rampe $L \sin \alpha$, où L est sa longueur et α est l'angle d'inclinaison, est petit par rapport à la profondeur du canal h , prédit le existence de deux types de solutions différents.

Pour un écoulement sous-critique ($F^2 < 1$), une région sans onde est prédit en amont. Il semble qu'un train de vagues régulier en aval est généré après que le débit passe la rampe. Aussi, nous observons que la dépression (en ampleur) de la vague augmente avec l'augmentation du nombre de Froude F^2 , comme le montre la *figure3.5*, et avec la hauteur de la rampe, comme le montre la *figure3.6*. Pour un écoulement supercritique ($F^2 > 1$), la surface libre est en phase avec la configuration de la rampe et est exempt de vagues en aval. Il semble que la hauteur maximale atteinte par la surface libre augmente à mesure que le nombre de Froude, F^2 , diminue, comme indiqué sur la *figure3.7*, et à mesure que la hauteur de la rampe augmente, comme indiqué dans la *figure3.8*.

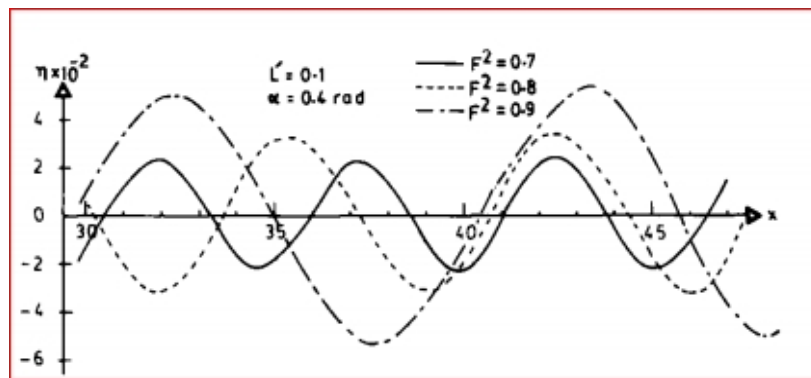


Figure 3.5 : Ondes en aval pour différentes valeurs de froude nombre et hauteur de rampe fixe

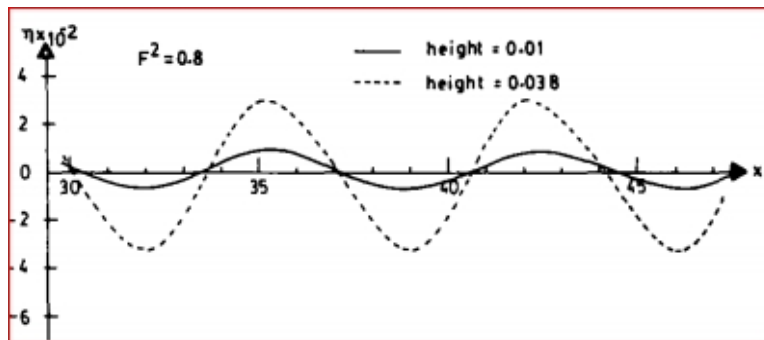


Figure 3.6 : vagues en aval pour différents vecteurs de hauteur de rampe et numéro de froude fixe

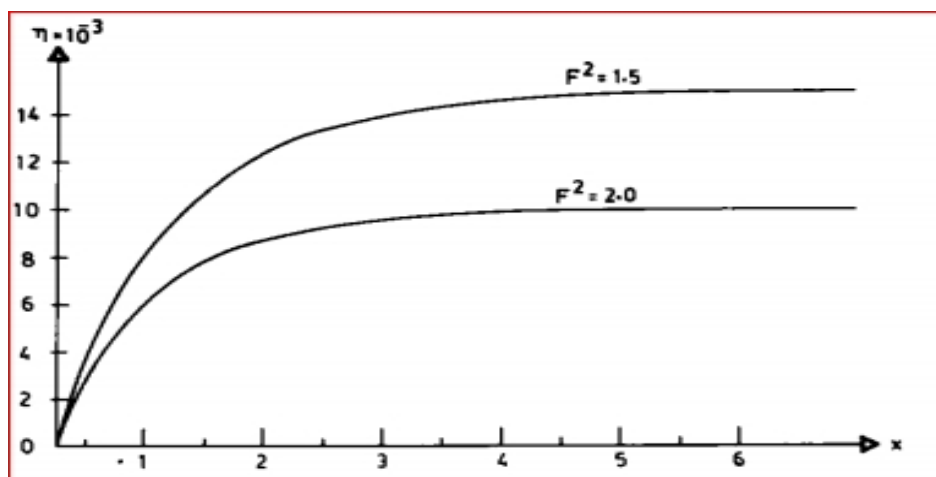


Figure 3.7: profils de Surface libres pour différents vecteurs de Froude nombre correspondant à $L' = 0, 1$, $\alpha = 0, 2 rad$

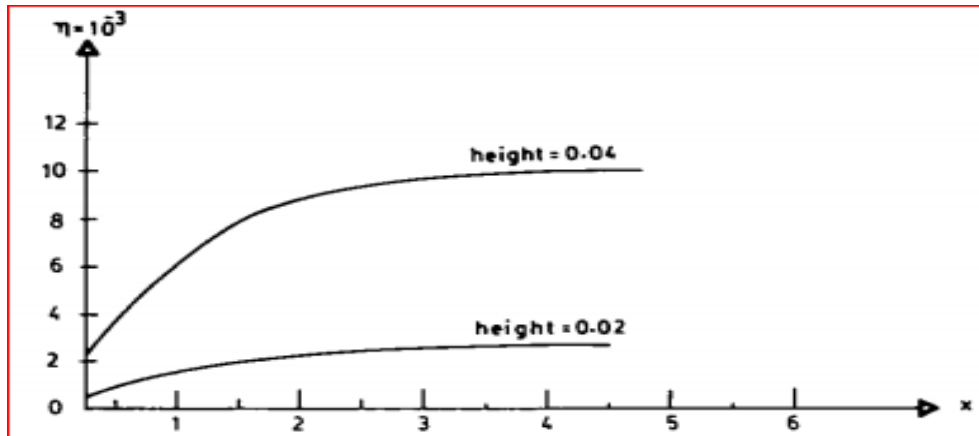


Figure 3.8 : Profils de surface libre pour différentes valeurs de hauteur rampe correspondant à $F^2=2,0$

Pour un débit critique ($F^2 = 1$), il n'y a pas de solution, car $\int_0^\infty (\sin xt)/t^3 dt$ devient illimité en raison d'une singularité du second ordre dans la fonction $G(z)$ donnée par (3.21), à

$z = 0$, ce qui est en accord avec les travaux de Vienne.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème d'écoulement sur une rampe, en tenant compte des forces de la gravité et nous négligeons la tension de surface

Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ la première étape : nous avons calculé la solution approximative de problème pour grand nombre Froude , en utilisant la méthode de Hilbert et la technique de la perturbation.
- ✓ La deuxième étape : Nous utilisons le théorème de Fourier à double intégrale pour trouver la forme de la surface libre du problème.

Bibliographie

- [1] P.Fichou. Mécanique des Fluides, Promotion IGE,(2002), 7-8.
- [2] Candel S. Mécanique des zuides, Dunod, 1990.
- [3] Mécanique des zuides I (Cours et Applications)mdf-sarr page 4 dans6.
- [4] G. Birkho and E. H. Zarantonello. Jets, wakes and cavities, New York, 1957
- [5] F.Dias and J.M. Vanden-Broeck, Flows emerging from a nozzle and . . . lling under gravity,J. Fluid. Mech, 213 (1990), 465-477.
- [6] M.B. Abd-el-Malek, Boundary integral methods and free surface problems, Ph.D. dissertation, University of Windsor, Windsor, Ontario, Canada, 1981.
- [7] M.B. Abd-el-Malek and S.Z. Masoud, Linearized solution of a flow over a ramp, Appl. Math. Mode&g 12 (1988) 406-410.
- [8] K.M. Agrawal, Non-linear theories in two-dimensional fully and partially cavitating flow, Ph.D. dissertation, University of Windsor, Windsor, Ontario, Canada, 1969.
- [9] J.M. Aitchison, A variable finite element method for the calculation of flow over a weir, Rutherford Laboratory Report, RL-79-069, 1979.
- [10] C. Bellevaux and D. Fruman, Surfaces libers non-lineaires dans les canaux decouverts, La Houille Blanche 24 (1969) 119-122.
- [11] M.I.G. Bloor, Large amplitude surface waves, J. Fluid Mech. 84 (1) (1978) 167-179.
- [12] Y.Z. Boutros, M.B. Abd-el-Malek and S.Z. Masoud, Linearized solution of a flow over a nonuniform bottom, J.Comput. Appl. Math. 16 (1986) 105-116.
- [13] Y.Z. Boutros, M.B. Abd-el-Malek and S.Z. Masoud, Hilbert's method for numerical solution of flow from a uniform channel over irregular bottom topographies, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 65 (1987) 215-228.
- [14] L.K. Forbes, On the wave resistance of a submerged semi-elliptical body, J. Engrg. Math. 15 (1981) 287-198.
- [15] L.K. Forbes and L.M. Schwartz, Free-surface flow over a semi-circular obstruction, Fluid Mech. 114 (1982) 299-314.
- [I6] A.C. King and M.I.G. Bloor, Free-surface flow over a step, J. Fluid Mech. 184(1987) 193-208.

- [17] N.E. Kochin, I.A. Kibel and N.V. Roze, *Theoretical Hydrodynamics* (Wiley/Interscience, New York, 1964).
- [18] H. Lamb, *Hydrodynamics* (Dover, New York, 6th ed., 1945). 1141 B.E. Larock and R.L. Street, A Riemann-Hilbert problem for non-linear fully cavitating flow, *J. Ship Research* 9 (3) (1965) 170-178.
- [19] T.H. Lim, *Integral equation methods for the numerical solution of free surface problems in inviscid flow*, Ph.D. dissertation, University of Windsor, Windsor, Ontario, Canada, 1978.
- [20] P. McIver, *Stationary waves in open channels*, Ph.D. thesis, University of Liverpool, Liverpool, United Kingdom, 1980.
- [21] N.I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations* (Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1953).
- [22] A.C. Smith and M.B. Abd-el-Malek, Hilbert's methods for numerical solution of flow from a uniform channel over a shelf, *J. Engrg. Math.* 17 (1983) 27-39.
- [23] A.C. Smith and T.H. Lim, The steady water wave: A numerical solution using the Riemann-H Internat. *J. Engrg. Sci.* 18(1980) 1399-152.
- [24] S.C. Song, *A quasi-linear and linear for non-separated and separated two-dimensional irrotational flow about lifting bodies*, Univ. Minnesota, Min. SAF Lab. Tech. Paper, B-43, 1963.
- [25] R.V. Southwell and G. Vaisey, *Relaxation methods applied to engineering problems. XII: Fluid motions characterised by free streamlines*, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 240 (1946) 117-161.
- [26] W. Thomson, *On stationary waves in flowing water*, *Phil. Mag.* 5 (xxii) (1886) pp. 353, 454, 516 and (xxiii) (1887) p. 52.
- [27] Abd-el-Kadre Amare, *Calcul Numerique D'un Jet Bidimensionnel D'un Fluide Devant Un Mur De Forme Quelconque*, These Doctorat en Sciences.
- [28] Mina B. Abd-el-Malek and S. Z. Masoud, *Linearized solution of a flow over a ramp for large Froude number, proximation of steady flow*, page 105-115.
- [29] Mina B. Abd-el-Malek and S. Z. Masoud, *Linearized solution of a flow over a ramp* *Appl. Math. Modelling*, 1988, Vol. 12, August, page 406-110.

- [30] F.G. Tricomi, *Integral Equations* (Interscience, New York, 1957).
- [31] G.Z. Watters and R.L. Street, Two-dimensional flow over sills in open channels, *Proc. ASCE* 90 (HY4) (1964) 107-140.
- [32] J.V. Wehausen and E.V. Laitone, *Surface waves*, *Handbuch der Physik*, VoZ. 9 (Springer, Berlin, 1960).
- [33] W. Wien, *Lehrbuch der Hydrodynamik* (Hirzel, Leipzig, 1900).

Résumé

Une méthode approximative est présentée pour résoudre le problème de l'écoulement stable à surface libre d'un fluide idéal sur une rampe semi-infinie dans le fond.

✓ Transformation Schwartz-Christoffel est utilisé pour cartographier la région d'écoulement, dans le plan de potentiel complexe, sur le demi-plan supérieur. La transformation de Hilbert ainsi que la technique de perturbation sont utilisées comme base pour la solution approximative du problème pour un grand nombre de Froude et un petit angle d'inclinaison de la rampe. On obtient des équations générales, sous forme intégrale, pour tout ordre d'approximation. La solution jusqu'à l'approximation du premier ordre est discutée et illustrée.

✓ Le fond est représenté sous forme intégrale en utilisant le théorème de la double intégrale de Fourier. En suivant la méthode proposée par Thomson 1 et Lamb a, on obtient un profil linéaire de surface libre, sous forme de série, pour les cas supercritique et sous-critique. Les résultats sont tracés pour les deux cas d'écoulement pour différentes formes du fond et différentes valeurs du nombre de Froude. L'effet du nombre de Froude et la hauteur du bas est discutée.

Abstract

An approximate method is presented to solve the problem of steady free-surface flow of an ideal fluid over a semi-infinite ramp in the bottom.

✓ Schwartz-Christoffel transformation

is used to map the region of flow, in the complex potential-plane, onto the upper half-plane. The Hilbert transformation as well as the perturbation technique are used as a basis for the approximate solution of the problem for large Froude number and small inclination angle of the ramp. General equations, in integral form, for any order of approximation are obtained. Solution up to first-order approximation is discussed and illustrated.

✓ The bottom is represented in integral form using Fourier's double-integral theorem. Following the method suggested by Thomson 1 and Lamb a, we obtain a linear free-surface profile, in series form, for the supercritical and subcritical cases. The results are plotted for the two cases of the flow for different shapes of the bottom and different values of the Froude number. The effect of the Froude number and the bottom height is discussed.

ملخص

تم تقديم طريقة تقريبية لحل مشكلة التدفق السطحي الحر المستقر لسائل مثالي على منحدر شبه لانهازي في القاع.

✓ تحول شوارتز كريستوفل يستخدم لرسم خريطة منطقة التدفق ، في المستوى المعقد المحتمل ، على مستوى النصف العلوي. يتم استخدام تحويل هيلبرت وكذلك تقنية الاضطراب كأساس للحل التقريبي للمشكلة لعدد كبير من Froude وزاوية ميل صغيرة للمنحدر. نحصل على معادلات عامة، في شكل متكامل، لأي ترتيب تقريبي. تمت مناقشة وتوضيح الحل حتى التقريب من الدرجة الأولى

✓ . يتم تمثيل الخلفية بشكل متكامل باستخدام نظرية فورييه للتكامل المزدوج. باتباع الطريقة التي اقترحها Thomson 1, Lamb ، نحصل على ملف تعريف سطح حر خطي ، في شكل تسلسلي ، للحالات فوق الحرجة ودون الحرجة. يتم رسم النتائج لحاليتي التدفق لأشكال مختلفة من الأسفل وقيم مختلفة لرقم Froude. تمت مناقشة تأثير رقم Froude وارتفاع القاع.

