REPUBLIQUE ALGERIENNE
DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et Numérique

Thème

Sur les problèmes de la commande optimale

Présenté par :
M^r *BELHOUT* Nouri

Soutenu publiquement le : 05/06/2024.

Devant le jury composé de :

Président :	M^r *BLIZAK* Tahar	M.C.B,	Université de M'sila
Encadreur :	M^r *TOUAHRIA* Messaoud	M.C.B,	Université de M'sila
Examinateur :	M^r *DECHOUCHA* Noureddine	M.A.A,	Université de M'sila

Année universitaire 2023/2024.

Table des matières

Table des figures

Notations

max	Le maximum.
min	Le minimum.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs .
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$	L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes,à coefficients dans $\mathbb{R}$.
A^t	Transposée de la matrice A.
A^{-1}	La matrice inverse de la matrice A .
e^A	Matrice exponentielle de la matrice A .
$\det(A)$	Déterminant de la matrice .
$\mathrm{rg}(A)$	Le rang de la matrice A.
$\dim(\mathbb{R}^n)$	La dimension de $\mathbb{R}^n$
$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	La dérivée de $x(t)$ par rapport à la variable t
$< .,. >$	Le produit scalaire
$\perp$	L'orthogonalité.
$L^p(\Omega, \mathbb{K})$	L'ensemble des applications mesurables de Ω dans $\mathbb{K}$, de puissance p intégrables sur Ω , pour $1 \leq p < +\infty$. .
$\mathcal{O}$	Matrice d'observabilité .
x	Vecteur d'état.
y	Vecteur de sortie .
H	Fonction Hamiltonienne

$\vert . \vert$	Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe .
$\vert\vert . \vert\vert$	Norme sur $\mathbb{R}^n$.
x^T	Transposée du Vecteur x .
$x \in \mathbb{R}^n$	vecteur de composantes x_i
$C^1(\mathbb{R}^n)$	L'ensemble des fonctions Continument différentiables.
$A \succ 0$	La matrice A est définie positive.

Dédicaces

Avec l'aide de Allah,
J'ai pu achever ce modeste travail que je dédie :
À la personne qui a toujours été et restera mon exemple et mon idole, qui a tout sacrifié pour me voir heureux/heureuse, mon cher père **Ramadan**
À l'autre personne importante, la source de force et d'amour qui me conseille toujours et se sacrifie pour moi, ma chère mère **Qamir**
À ma femme et mes enfants, **Adam** et **Ayham**
À mes frères **Saeeda** , **Kamal**, **Adel**, **Faisal**, **Souad** et mon oncle **Farid**
À tous les enseignants qui m'ont enseigné .
À touts mes amis .

Nouri

Remerciements

Au nom d'Allah, et avant tout, je remercie Allah de m'avoir accordé la force, le courage et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Nos remerciements vont aussi à Mr.Touahria Messaoud, Docteur à l'université Mohammed Boudiaf de M'sila, d'avoir proposé et accepté de dirigé ce travail, pour son aide précieuse, ses remarques constructives, ses conseils, son soutien, et pour son sérieux suivi dans la préaration de ce travail.

Nous remercions également les membres de jury pour l'intérêt à mon travail et de l'avoir examiné Nous exprimons vivement notre gratitude à l'ensemble de nos enseignants qui nous ont suivi inlassablement durant tout notre cursus universitaire. Enfin, nos meilleurs remerciements vont à tous ceux qui nous ont aidé de prés où de nos enseignants qui nous ont suivi inlassablement durant tout notre cursus universitaire. Enfin, nos meilleurs remerciements vont à tous ceux qui nous ont aidé de prés où de loin, encouragé tout au long de notre parcours universitaire en particulier nos familles et nos amis(es).

Merci à tous

Introduction

Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie de tous les jours : comment par exemple, arriver à destination le plus rapidement possible, minimiser sa consommation. Pour un système dynamique dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant ou maximisant un critère donné. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le dix-neuvième siècle avec le calcul des variations.

Les problèmes de contrôle optimal reposent sur l'utilisation des mathématiques et des concepts d'ingénierie pour déterminer les valeurs optimales des variables qui contrôlent le système, telles que les signaux internes et externes, et les variables environnementales. Les exemples de problèmes de contrôle optimal incluent la conception d'un système de contrôle optimal pour atteindre une performance spécifique, comme déterminer le temps et le coût optimaux pour transporter une cargaison d'un endroit à un autre, ou déterminer le temps optimal pour refroidir une substance à une température donnée .

Le contrôle optimal est une branche de l'ingénierie et des mathématiques qui vise à déterminer comment contrôler un système dynamique pour atteindre les meilleures performances possibles en fonction de critères spécifiques. Le contrôle optimal implique la conception de systèmes de contrôle pour atteindre un état optimal, que ce soit en réduisant la consommation d'énergie, en réalisant une précision élevée ou en obtenant une réponse rapide .

L'intérêt de notre mémoire porte sur les problèmes de contrôle optimale. Elle se compose de trois chapitres :

▶ **Chapitre 01** :

Donner des généralités sur les équations différentielles et quelques définitions liées à la théorie du contrôle (contrôlabilité, observabilité, stabilité ...).

▶ **Chapitre 02** :

Présentation de la formulation mathématique du problème général de contrôle, de contrôle optimal et du principe du maximum de Pontryagin (PMP) qui donne des condition nécessaire et suffisante d'optimalité.

▶ **Chapitre 03** :

On appliquent PMP principalement sur un système dynamique linéaire quadratique (LQ). pour déterminer la lois de commande optimale en minimisant un coût quadratique et on termine le chapitre par quelques exemples pratiques.

Chapitre 1

Introduction à la théorie du contrôle

Dans ce chapitre, on considère un système dynamique dont l'état est décrit par une fonction x dite fonction d'état. Cette fonction dépend de variables réelles notées pour l'instant abstraitement t et vérifie des relations (souvent différentielles) plus ou moins compliquées appelées lois de comportement. En théorie du contrôle (ou commande) on veut agir sur le système en agissant sur l'état, via des fonctions qu'on appelle contrôles (ou commandes).

1.1 Notions générales sur les équations différentielles

1.1.1 Généralités

Dans la suite on suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 1.1 *On appelle équation différentielle d'ordre n , toute relation F entre t , x et les dérivées de x donnée par*

$$F(t, x, x', ..., x^n) = 0 \tag{1.1}$$

Toute fonction $x(t)$ vérifiant (1.1) est appelle solution de l'équation différentielle .

Définition 1.2 *1.Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si elle est de la forme :*

$$a_0(t)x + a_1(t)x' + a_2(t)x'' + ... + a_n(t)x^{(n)} = b(t) \tag{1.2}$$

ou les (a_i), pour $i = 0, ..., n$ et b sont des fonctions réelles continues sur un intervalle I

2. Une équation différentielle d'ordre n , ou sans second membre si la fonction b est nulle :

$$a_0(t)x + a_1(t)x' + a_2(t)x'' + ... + a_n(t)x^{(n)} = 0. \tag{1.3}$$

3 . Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants si

$$a_0x + a_1x' + a_2x'' + ... + a_nx^{(n)} = g(t) \tag{1.4}$$

ou les (a_i), *pour* $i = 0, ..., n$ *sont des constantes et* g *est une fonction réelle continue.*

1.1.2 Équation différentielle du premier Ordre

Définition 1.3 *Une équation différentielle du premier ordre est de la forme :*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.5}$$

Où f *est une fonction continue par rapport à* x *sur un intervalle* I *.*

1.1.2.1 Équation différentielle à variables séparables

Définition 1.4 *On appelle équation différentielle à variables séparables une équation de la forme :*

$$\dot{x}f(x) = g(t) \tag{1.6}$$

Où f *et* g *sont des fonctions continuent sur* I*.*

Méthode de résolution

Sachant que : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ alors :

$$\frac{dx}{dt}f(x) = g(t) \Longrightarrow f(x)dx = g(t)dt \Longrightarrow \int f(x)dx = \int g(t)dt.$$

Exemple 1.1 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$t\dot{x} = -e^x \tag{1.7}$$

On a : (1.7)

$$t\frac{dx}{dt} = -e^x \Longrightarrow tdx = -e^x dt \Longrightarrow -e^{-x}dx = \frac{dt}{t} \Longrightarrow \int -e^{-x}dx = \int \frac{1}{t}dt \Longrightarrow e^{-x} = \ln|t| + c$$

$$\Longrightarrow -x = \ln(\ln|t| + c) \Longrightarrow x(t) = -\ln(\ln|t| + c)$$

Alors :

$$x(t) = -\ln(\ln|t| + c), c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation différentielle (1.7) *.*

1.1.2.2 Équations différentielles homogènes :

Définition 1.5 *On dit que (équations différentielles homogènes) toute les équation so la forme :*

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est un fonction continue sur I

Résolution d'une équations différentielles homogènes :

On pose : $u = \dfrac{x}{t}$ donc : $(x = tu)$ qui donne $\dot{x} = u + t\dot{u}$

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$u + t\dot{u} = f(u) \Longrightarrow t\frac{du}{dt} = f(u) - u \quad tellque : (\dot{u} = \frac{du}{dt})$$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dt}{t} \Longrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dt}{t} \Longrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|t| + c \quad /c \in \mathbb{R}$$

On détermine u puis x , on obtient la solution générale grâce à la relation $x = tu$

Exemple 1.2 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$t\dot{x} = x + t \tag{1.8}$$

On pose :

$$u = \frac{x}{t}$$

$x = ut \Longrightarrow \dot{x} = u + \dot{u}t$ *On retrouve :* $t(u + \dot{u}t) = ut + t$

$u + \dot{u}t = u + 1 \Longrightarrow \dot{u}t = 1 \Longrightarrow t\dfrac{du}{dt} = 1 \Longrightarrow du = \dfrac{dt}{t}$ *ainsi :* $u = \ln|t| + c \quad , c \in \mathbb{R}$

d'oû : $\dfrac{x}{t} = \ln|t| + c$

$$Donc : \quad x(t) = t\ln|t| + ct \quad /c \in \mathbb{R}$$

c'est la solution générale de l'équation différentielle (1.8)

1.1.2.3 Équations différentielles linéaire du premier ordre :

Définition 1.6 *On appelle une (équation différentielle linéaire du premier ordre) tout équation de la forme :*

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{1.9}$$

Où a et b sont deux fonctions continuent sur I.

Un telle équation est appelée homogène lorsque b est nulle : $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$.

1. **Cas à coefficient constant**
   - La solution générale de l'équation homogène : $\dot{x}(t) = ax(t)$ est :

$$x(t) = Ce^{at} \quad / \quad C \in \mathbb{R}$$

   - Si b est fonction continue sur I et si g est solution particulière de l'équation

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b(t)$$

   Donc la solution générale est : $x(t) = Ce^{at} + g(t) \quad / \quad C \in \mathbb{R}$

2. **Équations différentielles linéaire homogène**
   - Si a est une fonction continue sur I et si A est primitive de a alors :

   La solution générale de l'équation homogène : $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$ est :

$$x(t) = Ce^{A(t)}, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

   On peut prendre : $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$
   - Si a et b sont des fonctions continues sur I et si A est primitive de a , g est solution particulière de l'équation

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

   Donc la solution générale est : $x(t) = Ce^{A(t)} + g(t) \quad / \quad C \in \mathbb{R}$

1.2 Systèmes différentiels linéaires

Un systèmes différentiels linéaires d'ordre un dans $\mathbb{R}^n$ défini sur I, est un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + ... + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + ... + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + ... + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Où les fonctions a_{ij} et b_i sont continues sur I pour tout $i, j = 1, 2, 3, ..., n$ si b_i on dit que le système linéaire est homogène

Donc la forme matricielle du système linéaire est donnée de la façon suivante. Notons :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad , \quad A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Donc le système s'écrit :

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

Alors le système précédent devient : $\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)$
Le système homogène quant à lui est : $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ Un vecteur solution sur un intervalle I est un vecteur $X(t)$.

1.3 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

La plupart des lois d'état en physique sont données par des équations différentielles ordinaires. on cherche une fonction x d'une seule variable réelle t à valeur dans $\mathbb{R}^n$ dérivable sur I et solution de

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \text{sur } I$$

f est une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$. En réalité l'équation précédente est un système différentiel dés que $n \geq 2$. Pour assurer l'unicité d'une éventuelle solution, il faut ajouter des conditions supplémentaires. Les primitives d'une fonction différant toutes d'une constante, on peut fixer la valeur de la fonction en on point donné. Il faut donc à ajouter à la relation différentielle des conditions "ponctuelles" à la fonction (et à ses dérivées) en un point donné on dit que **un problème de Cauchy.** On dispose alors d'un théorème général qui permet d'assurer l'existence et l'unicité des solutions des problèmes de Cauchy.

Theorem 1.1 *Soit le problème de Cauchy suivant : trouver x continue et dérivable sur l'intervalle (ou réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$ telle que :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) \quad (\forall t \in I) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sont donnés. On suppose que la fonction f continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ et que f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable x uniformément par rapport à la première t sur I, c'est-à-dire

$$\exists L \in \mathbb{R}^+, \ \forall t \in I, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n : \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Alors le problème de Cauchy admet une solution unique définie sur I.

La condition $x(t_0) = x_0$ dans le problème de Cauchy est une **condition initiale.**

1.4 Résolution numérique

On s'intéresse dans notre travail à la résolution du problème de Cauchy définit précédemment :

1.4.1 Méthode d'Euler

Considérons le problème :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0, \quad t \in [0, T] \end{cases} \tag{1.10}$$

Nous donnerons une subdivision comme suit :

$$0 = t_0 < t_1 < .... < t_n < t_{n+1} < ...... < t_N = T$$

et posons :

$$h_n = t_{n+1} - t_n \quad ; h = \max h_n; \quad 0 \leqslant n \leqslant N$$

La solution de (1.10) vérifie pour : $0 \leqslant n \leqslant N$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s))ds$$

On construit par récurrence une approximation x_n et $x(t_n)$ en remplaçant la relation précédente par :

$$x(t_{n+1}) = x_n + hf(t_n, x_n); \quad n = 0, 1, ..., N-1 \tag{1.11}$$

Ce qui revient à approcher, pour $s \in]t_n, t_{n+1}[$, $f(s, x(s))$ par $f(t_n, x_n)$

Exemple 1.3 *Soit l'exemple d'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = t - x(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

On résoudre cet exemple avec de la méthode d' Euler .

- **Méthode d'Euler fait sur Matlab** :

En Matlab , on peut facilement programmer la méthode d'Euler avec la fonction suivante :

```
 function[t,x]=Euler1(f,tmin,tmax,Nint,x0) % Méthode d'Euler .
 % Nint : nombre de sous intervalles N
 % tmin : temps t0
 % tmax : temps t0 + T

h = (tmax-tmin)/Nint; % valeur du pas
t = linspace(tmin,tmax,Nint + 1); % vecteur de t discrétise t=[tmin ;tmax]
x(1) =x0; % initialisation
for n = 2: Nint + 1
    x(n) = x(n -1) + h * feval(f,t(n - 1),x(n -1)); % calcul d'Euler
end
 end % fonction Euler
```

Le figure suivant représente la solution exacte et la solution par la méthode d'Euler :

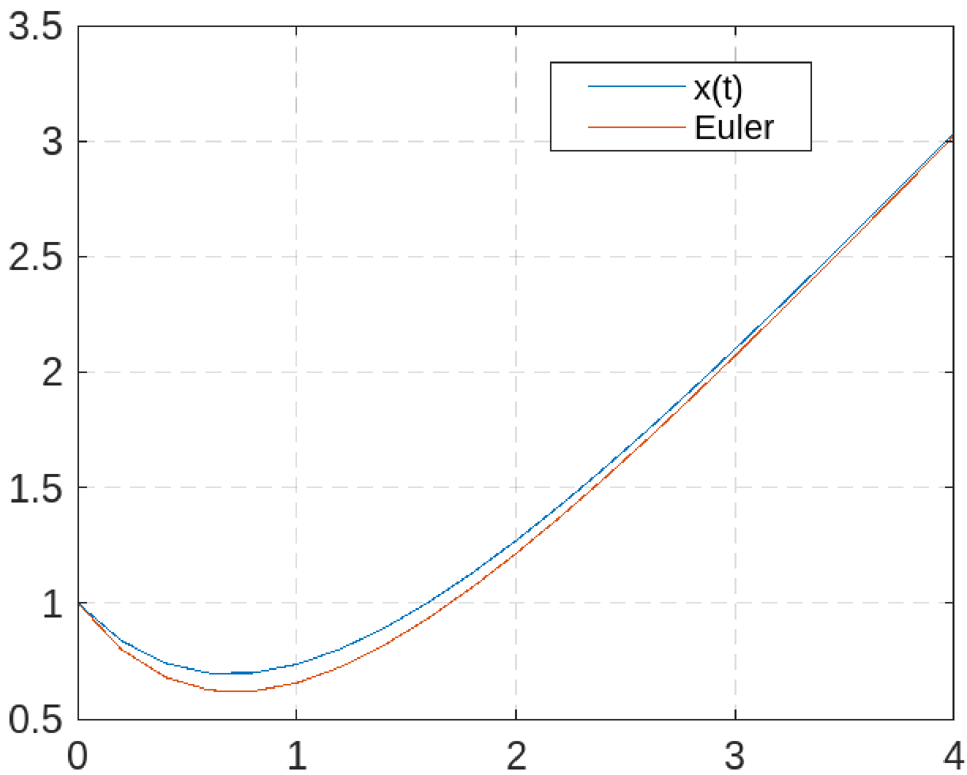


FIGURE 1.1: Compares les deux solutions

1.5 Les systèmes dynamiques

Un système dynamique est un concept mathématique utilisé pour décrire l'évolution d'un état au fil du temps selon des règles spécifiques. Formellement, un système dynamique est défini par un ensemble de règles qui décrivent comment un état donné du système évolue vers un autre état en fonction du temps. Ces règles peuvent être déterministes, c'est-à-dire que l'état futur est entièrement déterminé par l'état actuel, ou stochastiques, où l'état futur est déterminé de manière probabiliste. Il existe plusieurs types de systèmes dynamiques notamment :

1) **Systèmes dynamiques discrets** : Dans un système dynamique discret, le temps est divisé en instants discrets, et l'évolution du système se fait par des sauts discrets d'un état à un autre. Les systèmes dynamiques discrets sont souvent modélisés par des équations de récurrence ou des algorithmes itératifs .

2) **Systèmes dynamiques continus** : Dans un système dynamique continu, le temps est continu, et l'évolution du système se fait de manière continue dans le temps. Les systèmes dynamiques continus sont souvent modélisés par des équations différentielles.

3) **Systèmes dynamiques linéaires** : Dans un système dynamique linéaire, les règles qui décrivent l'évolution du système sont des fonctions linéaires. Les systèmes dynamiques linéaires sont souvent plus faciles à analyser mathématiquement que les systèmes non linéaires.

4) **Systèmes dynamiques non linéaires** : Dans un système dynamique non linéaire, les règles qui décrivent l'évolution du système sont des fonctions non linéaires. Les systèmes dynamiques non linéaires peuvent présenter des comportements complexes et parfois chaotiques.

5) **Systèmes dynamiques chaotiques** : Les systèmes dynamiques chaotiques sont des systèmes non linéaires sensibles aux conditions initiales, ce qui signifie que de petites variations initiales peuvent entraîner des différences significatives dans l'évolution du système. Les systèmes chaotiques peuvent présenter un comportement imprévisible à long terme .

1.5.1 Système de contrôle (ou commande)

Un système contrôlé est un système différentiel de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \qquad x(t) \in M \qquad u(.) \in \mathcal{U} \tag{1.12}$$

En générale le vecteur des états $x(t)$ appartient à une ensemble M de dimension n (on supposera ici que M est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$) , et les contrôles $u(.)$ appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles $\mathcal{U}$, qui est un ensemble des fonctions localement intégrables définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $U \in \mathbb{R}^m$ .On suppose le champ de vecteur f suffisament régulier, de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in M$ et tout contrôlé admissible $u(.) \in \mathcal{U}$, le système (1.12) admet une unique solution $x(t)$ telle que $x(0) = x_0$

,et que cette solution soit définie sur$[0,+\infty[$,On notera cette solution par $x^f(t,x_0,u(.))$ Quand il n'y a pas de risque de confusion, on pourra commettre dans cette notation le champ f, la condition initiale x_0 , ou bien le contrôlé $u(.)$.
Le système (1.12) est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant :

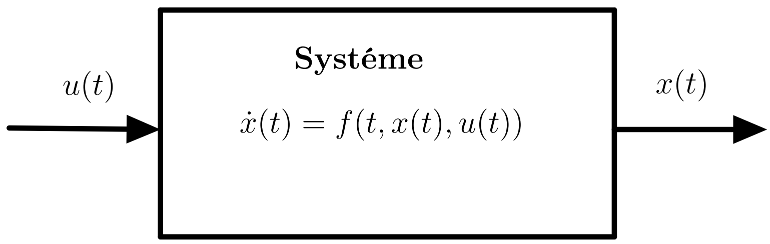


FIGURE 1.2: Schéma de représentation d'un système de contrôle

1.5.2 Quelques définitions

Définition 1.7 *(système de contrôle (commande))*
est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

où $x : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ désigne l'état et $u : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ le contrôle, n et m étant deux entiers naturels non-nuls.

Définition 1.8 *(la boucle ouverte et la boucle fermée)*
· *Un système contrôlé en **boucle ouverte** est une application $t \longmapsto u(t)$ d'une intervalle de temps.*
· *Un système contrôlé en **boucle fermée** est une application $u \longmapsto R(t)$ définie sur les variable d'état du système .*

Définition 1.9 *(point d'équilibre)*
On appelle point d'équilibre du système de contrôle (1.13) *:*
un couple $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ telle que : $f(x_e; u_e) = 0$

Définition 1.10 *(Trajectoire)*
On considère le système de contrôle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \qquad t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.14}$$

On appelle trajectoire d'un système de contrôle (1.14) *toute fonction régulière :*
$t \in [0, T] \longmapsto (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *qui vérifie* (1.14) *sur un intervalle* $[0, T]$ *de* $\mathbb{R}$ *.*

Définition 1.11 *(La fonction convexe) E est un espace vectoriel dans $\mathbb{R}$.*
On dit qu' une fonction $f : E \longmapsto \mathbb{R}$ est convexe si :
$\forall x_1, x_2 \in E, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$

Définition 1.12 *(Ensemble accessible)*
L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par :

$$Acc(x_0, T) = \left\{ x_u(T) \quad / \quad u \in U \right\}$$

Ou $x_u(.)$ est la solution du système (1.14) *associée au contrôle u .*

1.6 Commandabilité

La commandabilité d'un système dynamique est une propriété qui mesure la capacité à conduire le système d'un état final en utilisant admissible dans un temps fini .
Commandabilité des systèmes linéaires autonome :

Définition 1.13 *Un système défini par :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \qquad , t \in [0, T] \end{cases} \tag{1.15}$$

Est dit non autonome et il est dit autonome si les deux matrices $A(t) = A$ et $B(t) = B$ sont constantes

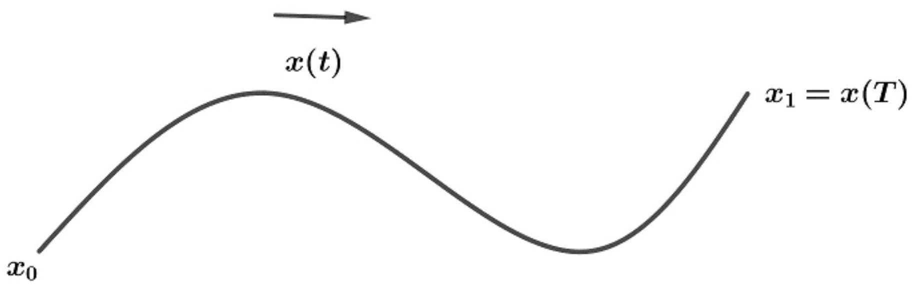


FIGURE 1.3: Les problème de commandabilité

Définition 1.14 *Le système autonome $\dot{X} = AX + BU$ où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, la commande $u \in \mathbb{R}^m$ et les matrices A et B sont constantes et de taille $n \times n$ et $m \times m$ respectivement est commandable si pour tous les états x_0 , $x_1 \in \mathbb{R}^n_*$,il existe une commande mesurable borné $u(t)$ telle que la trajectoire associé relie x_0 et x_1 en un temps fini T .*

Théorème 1.1 ***(condition de Kalman)***
Le système contrôle (1.15) *est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice de commandabilité de Kalman :*

$$C = (B, AB, ..., A^{n-1}B) \in \mathcal{M}_{n,nm}(\mathbb{R})$$

est de plain rang .
On dit que la paire de matrices (A, B) est commandable(contrôlable) et la matrice C est appelée matrice de Kalman.

Lemme 1.1 *La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire :*

$$\begin{aligned} \Phi : L^{\infty}([0,T], \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t)dt \end{aligned}$$

est surjective .

Remarque 1.1 *La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0*
Autrement dit : si un système linéaire autonome est commandable en temps T depuis x_0 alors il est commandable en tous temps depuis tout point .

Exemple 1.4 *Soit le système d'écrit par l'équation :*

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

Oû

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans la situation oû $n = 2$ états et $m = 2$ entrées .
Et la matrice de commandabilité associée :

$$C(A, B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2\times 4}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$C(A,B) = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Nous avons rang $C(A,B) = 2$ donc le système est commandable .

Exemple 1.5 *Soit le système suivent :*

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

oû

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \beta & -4 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nous avons $n = 2$ états et $m = 1$ entrée .

Et la matrice de commandabilité du système est :

$$C(A,B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \beta & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \beta + 4 \end{pmatrix}$$

$$C(A,B) = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & \beta + 4 \end{pmatrix}$$

Le système est commandable si seulement si le det $C(A,B)$est non nul ,c'est-à-dire $\beta \neq -8$

1.7 Stabilisation :

Un contrôle (ou une commande) en boucle ouverte est une application $t \longrightarrow u(t)$ d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles .

Un contrôle en boucle fermée , appelé aussi une rétroaction , ou un bouclage ,(ou encore un feed back) ,est une application $u \longrightarrow R(x)$ définie sur les variables d'état du système.Un des objectifs de la théorie du contrôle est de détermine des rétroactions qui stabilisant le système en un état particulier .

1.7.1 Bouclage statique

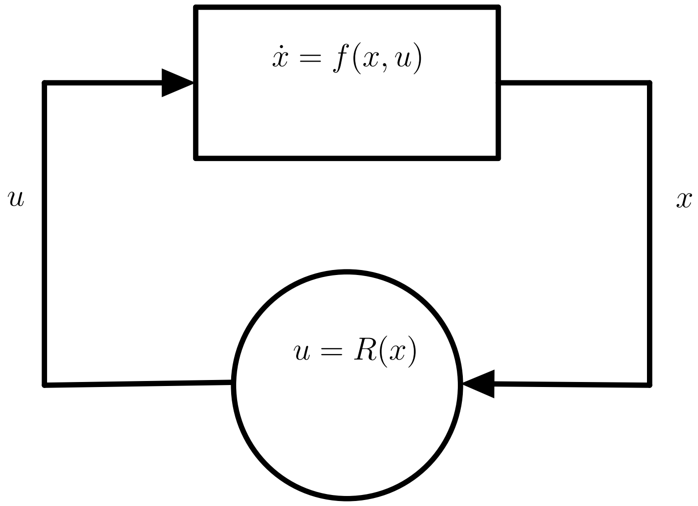
Définition 1.15 *(Bouclage statique)*

On dit que u est un bouclage statique du système(1.12) si sa valeur $u(t)$ à l'instant t ne dépend que de $x(t)$, c'est à dire $u = R(x)$ oû R est une fonction .

Ce système s'écrit tout simplement :

$$\dot{x} = f(x, R(x)) \tag{1.16}$$

Il est représente par la figure :



Le problème de la stabilisation (ou régulation) consiste à maintenir le système près d'un équilibre x^* . Il s'agit donc de construire une loi commande telle que x^* soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée .

1.7.2 Concepts de stabilité

On se donne un système :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1.17}$$

tel que $f(0) = 0$, admettant $x = 0$ comme équilibre (noter que par un changement de variable on peut toujours ramener l'équilibre à l'origine).

Définition 1.16 *L'équilibre $x = 0$ du système (1.16) est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.16), on ait*

$$||x(0)|| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad ||x(0)|| < \varepsilon.$$

Si l'équilibre n'est pas stable on dit qu'il est instable.

Définition 1.17 *L'équilibre $x = 0$ du système(1.17) est dit attractif s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.17) on ait*

$$||x(t)|| < r \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

L'équilibre $x = 0$ du système (1.17) est dit globalement attractif si pour toute solution $x(t)$ de (1.17) on a $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

L'ensemble $\mathcal{B}$ défini par la propriété

$$x(0) \in \mathcal{B} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

S'appelle le bassin d'attraction de l'origine. Ainsi $x = 0$ est attractif si $\mathcal{B}$ est un voisinage de 0. Il est globalement attractif si $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$

Définition 1.18 *L'équilibre $x = 0$ du système (1.17) est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif. Il est dit globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est stable et globalement attractif.*

Définition 1.19 *L'équilibre $x = 0$ du système (1.17) est dit exponentiellement stable s'il existe $r > 0$, $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ on ait :*

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t}; \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0$$

L'équilibre $x = 0$ du système (1.17) est dit globalement exponentiellement stable s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (1.17) on a :

$$\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t}. \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

On montre que, en général (voir[4]), stable n'implique pas attractif, attractif n'implique pas stable, exponentiellement stable implique asymptotiquement stable, et asymptotiquement stable n'implique pas exponentiellement stable .

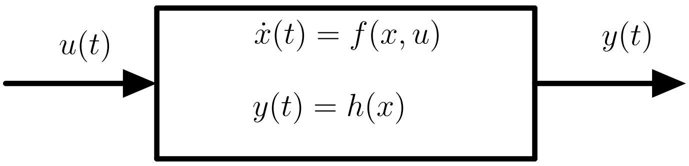
1.8 Observabilité

1.8.1 Système commandé-observé

Dans beaucoup de situations pratiques , une partie seulement de l'état du système,appelée la sortie ou la variable observée, est mesurée. Un système commandé-observé est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{1.18}$$

Oû le vecteur x est le vecteur des états du système, le vecteur u celui des contrôles (entrées) et le vecteur y celui des variables observées (sorties). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant :



Le système non linéaire sera dit observable si la sortie $y(t)$ *permet de retrouver l'état* $x(t)$ *. On ne donnera pas de définition précise ici renvoyant à la littérature [3] pour les détails. Un observateur pour le système* (1.18) *est un système .*

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, y(t), u(t)) \tag{1.19}$$

ayant comme entrées $u(t)$ *et* $y(t)$ *(la sortie du système* (1.18)*) et tel que l'erreur :*

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

tende vers 0 *quand* $t \longrightarrow \infty$*. L' équation de l'erreur est*

$$\dot{e} = f(x,u) - g(x-e, h(x), u)$$

Selon que $e = 0$ *est un équilibre GAS, asymptotiquement stable, ou exponentiellement stable, on dira que l'observateur est global, local ou exponentiel.*

1.8.2 Critère d'observabilité de Kalman

Soit le système linéaire commandé-observé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad u \in \mathbb{R}^m. \\ y(t) = Cx(t) \quad , \quad y \in \mathbb{R}^k. \end{cases} \tag{1.20}$$

Définition 1.20 *On dit que le système linéaire*(1.20) *est observable si pour tout état* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *, il existe un temps fini* T *et un contrôle admissible* $u(.) : [0;T] \longrightarrow U$ *tel que la connaissance de* $y(t)$ *pour* $t \in [0;T]$ *permet de déterminer* x_0 *.*

Il existe une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Théorème 1.2 *Le système linéaire* (1.20) *est observable si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman :*

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de plain rang . On dit que la paire $(A;C)$ est observable. Noter que la paire $(A;C)$ est observable si et seulement s'il existe $T>0$ tel que la matrice

$$\mathcal{O}_T = \int_0^T e^{sA'}C'Ce^{sA}ds$$

soit inversible .

Ici A' et C' désignent les matrices transposées des matrices A et C.

Exemple 1.6 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Oû

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$n = 3$ *états*

$p = 2$ *sorties*

$$\mathcal{O}(A,C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{O}(A,C) \in \mathbb{R}^{6\times 3}$$

$$\mathcal{O}(A,C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -7 \\ 22 & -6 & -1 \\ 8 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

Matrice de rang 3 $\Rightarrow$ *le système est observable .*

Chapitre 2

Contrôle optimal à horizon fini

La contrôlabilité est une notion fondamentale au théorie de la commande optimal. Dans ce chapitre nous présentons les différent résultats permettant de traiter cette théorie très importante. Le problème cette notion consiste à étudier la possibilité d'agir sur un système afin qu'il fonctionne dans un but désiré. En d'autre termes, on cherche la possibilité de transférer l'état d'un système dynamique d'un état initial x_0 vers un état désiré x_1 choisi à priori et ceci en un temps fixé.

2.1 Formulation mathématique

2.1.1 Problème de commande

Soient les ensembles des fonctions suivants :

$$U[0, t_f] = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m | \text{ est intégrable sur } [0, t_f]\}$$

$$\mathcal{U} = \bigcup_{t_f > 0} U[0, t_f] \ : \qquad \text{ensrmble des contrôles}$$

Pour chaque $t \geq 0$, on se donne un ensemble cible fermé $\chi(t) \subset \mathbb{R}^n$. En général on prend $\chi(t) = \{0\}$ On suppose que l'état de système $x : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ est donné par une équation différentielle ordinaire de la forme 1.17.

On supposera que f vérifie les conditions de théorème Cauchy-Lipschitz de sorte qu-on puisse assurer l'existence d'une solution unique noté $x_{[u,x_0]}(.)$.
Un problème de contrôle consiste en

— une classe de contrôle admissible : $U_{ad} \subset \mathcal{U}$.

— une équation différentielle de la forme 1.17 décrivant l'état de système.

— une famille d'ensemble cible χ.

Définition 2.1 *Soit x_0 dans $\mathbb{R}^n$, si on peut trouver $u \in U_{ad}$ et $t_1 > 0$ telle que $x_{[u,x_0]}(t_1) \in \chi(t_1)$, on dit que u envoie x_0 à la cible ; x_0 est dit contrôlable (où, commandable).*

Notons que :

— Trouver l'ensemble des état initiaux $x_0 \in \mathbb{R}^n$ que l'on peut envoyer à la cible c'et-à-dire l'ensemble des état initiaux contrôlable. On a alors un problème de **contrôlabilité.**

— Si on connait un état initial x_0 contrôlable, le problème de trouver un contrôle qui réalise la jonction entre de x_0 à la cible est généralement décrire une méthode constructive de calcul contrôle x_0 donné.
Un contrôle qui dépend de l'état de système est un **contrôle feedback.**

— Quand il n'y a pas unicité du contrôle, on peut aussi chercher le "meilleur" relativement à un critère (ou cout) donné. C'est alors le problème de **contrôle optimal.**

2.2 Problème de commande optimal

La formulation du problème de contrôle optimal est le suivant :

$$\begin{cases} min_u J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t))dt & (1) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & (2) \\ x(0) = x_0 \in M_0 & (3) \\ x(t_f) = x_1 \in M_1 & (4) \\ u \in U, t \in I = [0, t_f] \end{cases} \tag{2.1}$$

Où M_0 (ensemble de départ) et M_1 (Ensemble d'arrivée) sont des sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x(0) = x_0$ est la position initiale du système (2) . $x(t_f)$ est sa position terminale. En pratique, la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température ,... etc. $u(.)$ est la commande du système(2.1). U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}$.

$$J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t))dt$$

est appelé coût, critère de qualité ou but du problème (2.1). Cette fonctionnelle comporte deux parties :

$g(t_f, x(t_f))$ est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final t_f, il a son importance lorsque t_f, est libre, sinon il est constant. Le second terme intervenant dans la fonction objectif $\int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t))dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution définie par variables d'états. Cette trajectoire dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle de chaque commande sur l'intervalle de temps.

— La partie terminale exprime les objectifs à optimiser à l'instant final.

— La partie intégrale exprime les objectifs sur l'horizon de commande $[0, t_f]$.

2.2.1 Quelques définitions

Définition 2.2 *L'ensemble* $U = \{u(t) \quad , t \in I = [t_0, t_f]\}$ *est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut êtres non bornées, bornée ou du type bang-bang.*

Définition 2.3 *(Commande bornée)*
La commande $u(t)$ *est dite commande bornée si elle peut être minorer et majorer par des constantes* a_j *et* b_j *, par la forme suivante :*

$$a_j \leq u_j(t) \leq b_j \quad , \quad j = 1, ..., m \qquad t \in [0, t_f] \, .$$

Définition 2.4 *(Commande bang-bang)*
Un contrôle $u \in U$ *est appelé contrôle bang-bang , si pour chaque instant* t *et chaque indice :* $j = 1, ..., m$ *, On a* $|u_j(t)| = 1$

Définition 2.5 *(Le but de la commande)*
Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 = x(t_0)$ *,* $(x_0 \in M_0)$ *à une autre position* $x_1 = x(t_f)$ *,*$(x_1 \in M_1)$ *où*M_0 *est l'ensemble de départ, et* M_1 *l'ensemble d'arrivé.*

Définition 2.6 *(Temps optimal)*
On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f_0(t, x, u) = 1$ *,* $g(t_f, x(t_f)) = 0$ *et le temps final* t_f *est libre dans l'expression de*

$$min_u \int_0^{t_f} 1dt.$$

Définition 2.7 *(Coût optimal)*
On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final t_f *est fixé dans l'expression :*

$$min_u \left(g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u)dt \right)$$

Définition 2.8 *Le contrôle* $u(t)$ *,*$t \in [0, T]$ *est dit admissible s'il satisfait les contraintes :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \quad ; x(0) = x_0 \\ f_* \leq u(t) \leq f^* \end{cases}$$

f_* *minirant et* f^* *majorant.*
A *et* B *sont des matrices réelles.*

2.3 Quelques types de problèmes de la commande optimale

Il existe trois types de problèmes de commande optimal

2.3.1 Problème de Lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est égale à :

$$J(t_f, u) = \int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t))dt$$

C'est à dire $g \equiv 0$, et les contrôles $u(t)$ sont des fonctions définies de $[0, t_f]$ dans $\mathbb{R}$.

2.3.2 Problème de Mayer

Ici c'est le problème dont le critère est le suivant :

$$J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f))$$

où, $f_0 = 0$, $J(t_f, u)$ est le coût terminal. C'est-à-dire le critère à minimiser est diffèrent de celui de l'équation précédente. Il dépend uniquement la valeur terminale de l'état de contrôle du système.

2.3.3 Problème de Bolza (Mayer-Lagrange)

C'est le problème dont le critère à minimiser est égale à :

$$J(t_f, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t))dt$$

Notons que la formulation de Bolza est la plus générale pour la représentation d'un problème de contrôle optimal, il regroupe les deux précédentes formulations à savoir les formulations de Lagrange et de Mayer.

2.4 Systèmes linéaire de contrôle optimal

Considérons les systèmes linéaires de contrôle optimal sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \\ x(0) = x_0 \quad , t \in I = [0, t_f] \,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, A, B et r sont trois applications localement intégrables sur I à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^m$.
Où $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de dimension n et $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de n lignes et m colonnes.
l'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$.
Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour

tout contrôle u, le système (2.2) admet une unique solution :

$$x(.) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

absolument continue.

On considère le système homogène associé au système (2.2)

$$(EH) \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et on note x^i la solution de (EH) correspondant à une donnée initiale $x_0^i \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire la solution de

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad \forall t \in I, \ x^i(0) = x_0^i.$$

Nous avons un résultat donnant la structure de l'ensemble des solution de (EH) :

Proposition 2.1 *L'ensemble des solutions de (EH) est un espace vectoriel de dimension n. De plus les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

— $(x^1(0), ..., x^n(0)$ *sont linéairement indépendants dans* $\mathbb{R}^n$.

— *Pour tout t dans I,* $(x^1(t), ..., x^n(t)$ *sont linéairement indépendants dans* $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cas, $(x^1(.), ..., x^n(.))$ est un ensemble de solution fondamentale de (EH) (en fait une base de l'espace de solutions). La matrice

$$X(t) = (x^1(t), ..., x^n(t)),$$

est une matrice fondamentale du système. Elle est régulière pour tout t.

Lemme 2.1 *Si $X(.)$ et $Y(.)$ sont deux matrices fondamentales du système, alors il existe C matrice $n \times n$, régulière et constante telle que*

$$X(t) = Y(t)C \quad \textit{pout tout } t.$$

On peut maintenant donner la forme générale des solutions du système 2.2

Theorem 2.1 *Pour x_0 donné dans $\mathbb{R}^n$, l'unique solution de 2.2 est donné (grâce à la méthode de la variation de constante) par*

$$x_{[u,x_0]}(t) = X(t)X^{-1}(0)x_0 + \int_0^{t_f} X(t)X(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds$$

- Si $r = 0$, la solution du système s'écrit :

$$x_{[u,x_0]}(t) = X(t)X^{-1}(0)x_0 + X(t)\int_0^{t_f} X(s)^{-1}B(s)u(s)ds$$

Ceci est une résultat général pour des données A et B dépendants de t. Dans le cas où A ne dépend pas du temps les résultat est plus précis.

Theorem 2.2 *Si A est constante, une matrice fondamentale pour (EH) est*

$$X(t) = e^{At} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

l'unique solution de système linéaire est donné par

$$x_{[u,x_0]}(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^{t_f} e^{-As}B(s)u(s)ds$$

2.5 Principe du maximum de Pontrygin

Le principe du maximum de Pontryagin, également appelé principe de Pontryagin, est un concept fondamental en théorie du contrôle optimal introduit par le mathématicien russe Lev Pontryagin. Ce principe énonce des conditions nécessaires pour qu'une trajectoire soit optimale dans un problème de contrôle optimal avec des contraintes. Avant d'énoncer le principe du maximum, introduisons certaines définitions et propriétés essentielles

Définition 2.9 *Le Hamiltonien du système $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$ et $t \in [0, t_f]$ est la fonction :*

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\{0\}) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x, p, p_0, u) \longmapsto H(t, x, p, p_0, u) = p_0 f_0(t, x, u) + < p, f(t, x, u) >$$

Où $<,>$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et p est le vecteur adjoint.

Définition 2.10 *Le contrôle u est dit extrémal sur $[0, t_f]$ si la trajectoire du système $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$ du problème de contrôle (2.1) associée à u vérifie :*
$x(t) \in A_{cc}(x_0, t)$ et $t \in [0, t_f]$.

Définition 2.11 *Un contrôle $u^0(t)$,$t \in [0, t_f]$ est dit optimal si $u^0(.)$ est extrémal et $J(u^0(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, t_f]$.*

Théorème 2.1 *On considère le problème de contrôle optimal suivant : Déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 en minimisant le coût J. Le temps final peut être fixe ou non. Si le contrôle $u \in U$ associée à la trajectoire $x(.)$ est optimal sur $[0, t_f]$, alors il existe une application $p(t) : [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelée vecteur adjoint, et un réel $p_0 \leqslant 0$ tel que le couple $(p(.), p_0)$ est non trivial et tels que pour presque tout $t \in [0, t_f]$:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \quad , \quad x(0) = x_0 \\ \dot{p}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \quad , \quad p(t_f) = 0 \end{cases}$$

Où $H(t,x,p,p_0,u) =< p, f(t,x,u) > +p_0 f_0(t,x,u)$ *est le hamiltonien du système et on a la condition de maximisation presque partout sur* $[0,t_f]$

$$H(t,x(t),p(t),p_0,u(t)) = \max_{u\in U} H((t,x(t),p(t),p_0,u) \tag{2.3}$$

Remarque 2.1 *Si* f *et* f_0 *ne dépendent pas du temps* t *c'est à dire si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien* H *ne dépend pas de* t *et on a :*

$$\forall t \in [0,t_f], \max_{u\in U} H((t,x(t),p(t),p_0,u(t)) = cst$$

Remarque 2.2 *La convention* $p_0 \leqslant 0$ *conduit au principe du maximum. La condition* $p_0 \geq 0$ *conduira au principe du minimum.*

Remarque 2.3 *La condition terminal sur* p *est appelée condition de transversalité.*

Chapitre 3

Applications

3.1 Théorie Linéaire-Quadratique (LQ)

Le contrôle optimal linéaire-Quadratique (LQ) est un domaine de recherche important en théorie du contrôle. Dans ce cadre, le système à contrôler est supposé linéaire, et le coût associé est quadratique. Cette forme de coût quadratique est souvent naturelle et correspond à de nombreux problèmes pratiques. Les systèmes de contrôle LQ ont été largement étudiés depuis l'article de Kalman publié en 1960, et continuent de susciter un intérêt important en raison de leurs applications pratiques.

3.1.1 Position du problème de contrôle optimal LQ

Nous allons donc considérer un système de contrôle linéaire dans $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

On lui associé un coût quadratique du type :

$$C(u) = x(t_f)^T Q x(t_f) + \int_0^{t_f} \left(x(t)^T W(t) x(t) + u(t)^T U(t) u(t) \right) dt \tag{3.2}$$

Où $t_f > 0$ est fixé, et où, pour tout $t \in [0, t_f]$, $U(t) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, $W(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive, et $Q(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive. On suppose que les dépendances en t de A, B, W et U sont L^∞ sur $t \in [0, t_f]$. Par ailleurs le coût étant quadratique, l'espace naturel des contrôles est $L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$

Donc le système linéaire-quadratique suivant :

$$\begin{cases} minC(u) = \underbrace{x(t_f)^TQx(t_f)}_{\text{est le coût terminal}} + \underbrace{\int_0^{t_f} \left(x(t)^TW(t)x(t) + u(t)^TU(t)u(t)\right) dt}_{\text{est le coût intégral}} & \text{fonction coût quadratique} \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad \text{systeme dynamique} \\ x(0) = x_0 \quad \text{condition initiale} \\ x(t_f) = x_{t_f} \quad \text{condition finale} \end{cases}$$

Le problème de contrôle optimal est alors le suivant, que nous appellerons problème LQ (Linéaire - Quadratique).

Problème LQ : Un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ étant fixé, l'objectif est de déterminer les trajectoires partant de x_0 qui minimisent le coût $C(u)$.

Notons que l'on n'impose aucune contrainte sur le point final $x(t_f)$. Pour toute la suite, on pose

$$||x(t)||_W^2 = x(t)^TW(t)x(t) \quad ,||u(t)||_U^2 = u(t)^TU(t)u(t) \quad ,\text{et} \quad g(x) = x^TQx$$

de sorte que

$$C(u) = g(x(t_f)) + \int_0^{t_f} \left(||x(t)||_W^2 + ||u(t)||_U^2\right) dt$$

Les matrices Q, W, U sont des matrices de pondération .

Remarque 3.1 *Par hypothèse les matrices Q et $W(t)$ sont symétriques positives, mais pas nécessairement définies. Par exemple si $Q = 0$ et $W = 0$ alors le coût est toujours minimal pour le contrôle $u = 0$.*

Remarque 3.2 *on suppose pour alléger les notations que le temps initial est égal à 0. Cependant tous les résultats qui suivent sont toujours valables si on considère le problème LQ sur un intervalle $[0, t_f]$, avec des contrôles dans l'espace $L^2([0, t_f], \mathbb{R}^m)$.*

3.2 Existence de trajectoires optimales

Introduisons l'hypothèse suivante sur U .

$$\exists \alpha > 0 \quad | \quad \forall u \in L^2([0, t_f], \mathbb{R}^m) \qquad \int_0^{t_f} ||u(t)||_U^2 dt \geq \alpha \int_0^{t_f} u(t)^Tu(t)dt \tag{3.3}$$

Par exemple cette hypothèse est vérifiée :

- La application $t \mapsto U(t)$ est continue sur $[0, t_f]$ et t_f est fini .
- Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t \in [0, t_f]$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^m$ on ait $v^TU(t)v \geq cv^Tv$ On a le théorème d'existence suivant.

Théorème 3.1 *Sous l'hypothèse* (3.3)*, il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ.*

Démonstration : Montrons tout d'abord l'existence d'une telle trajectoire. Considérons une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de contrôles sur $[0,t_f]$ i.e. la suite $C(u_n)$ converge vers la borne inférieure des coûts. En particulier cette suite est bornée. Par hypothèse, il existe une constante $\beta > 0$ telle que pour tout $u \in L^2([0,t_f],\mathbb{R}^m)$ on ait $C(u) \geq \beta||u||_{L^2}$ On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0,t_f],\mathbb{R}^m)$ Par conséquent à sous-suite près elle converge faiblement vers un contrôle u de L^2 . Notons x_n (resp x) la trajectoire associée au contrôle u_n (resp u) sur $[0,t_f]$. D'après la formule de variation de la constante, on a, pour tout $t \in [0,t_f]$

$$x_n(t) = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X(s)^{-1}B(s)u_n(s)ds \tag{3.4}$$

(et la formule analogue pour $x(t)$) . On montre alors aisément que, à sous-suite près, la suite (x_n) converge simplement vers l'application x sur $[0,t_f]$ (en fait on peut même montrer que la convergence est uniforme).
Passant maintenant à la limite dans (3.4), on obtient, pour tout $t \in [0,t_f]$

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X(s)^{-1}B(s)u_n(s)ds$$

et donc x est une solution du système associée au contrôle u. Montrons qu'elle est minimisante. Pour cela on utilise le fait que puisque et donc $u_n \rightharpoonup u$ dans L^2 ,on a l'inégalité

$$\int_0^{t_f} ||u(t)||_U^2 dt \leqslant \liminf \int_0^{t_f} ||u(t)||_U^2 dt$$

et donc $C(u) \leqslant \liminf C(u_n)$. Mais comme (u_n) est une suite minimisante,$C(u)$ est égal à la borne inférieure des coûts, i.e. le contrôle u est minimisant, ce qui montre l'existence d'une trajectoire optimale. Pour l'unicité on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1 *La fonction C est strictement convexe.*

Preuve du lemme : Tout d'abord remarquons que pour tout $t \in [0,t_f]$, la fonction $f(u) = u^t U(t)u$ définie sur $\mathbb{R}^m$ est strictement convexe puisque par hypothèse la matrice $U(t)$ est symétrique définie positive. Ensuite, notons $x_u(.)$ la trajectoire associée à un contrôle u. On a pour tout $t \in [0,t_f]$

$$x_u(t) = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X(s)^{-1}B(s)u(s)ds$$

Par conséquent, comme dans la preuve du théorème 2.1.1, l'application qui à un contrôle u associe $x_u(t)$ est convexe, ceci pour tout $t \in [0,t_f]$. La matrice $W(t)$ étant symétrique positive, ceci implique la convexité de l'application qui à un contrôle u associe $x(t)^T W(t) w(t)$. On raisonne de même pour le terme $x(t_f)^T Q x(t_f)$. Enfin, l'intégration respectant la convexité, on en déduit que le coût est strictement convexe en u .

L'unicité de la trajectoire optimale en résulte trivialement.

Remarque 3.3 *(Extension du théorème 3.1)*
Si la fonction g apparaissant dans le coût est une fonction continue quelconque de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, bornée inférieurement ou convexe, et/ou si le système de contrôle est perturbé par une fonction $r(t)$, alors le théorème précédent reste vrai.

3.3 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : principe du maximum dans le cas LQ

Théorème 3.2 *La trajectoire x, associée au contrôle u, est optimale pour le problème LQ si et seulement s'il existe un vecteur adjoint $p(t)$ vérifiant pour presque tout $\in [0, t_f]$*

$$\dot{p}(t) = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t). \tag{3.5}$$

et la condition finale

$$p(t_f) = -x(t_f)^T Q. \tag{3.6}$$

De plus le contrôle optimal u s'écrit, pour presque tout $t \in [0, t_f]$:

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^T p(t)^T. \tag{3.7}$$

Démonstration voir [2]

Remarque 3.4 *Dans le cas d'un intervalle infini($t_f = +\infty$) la condition devient :*

$$\lim_{t \mapsto +\infty} p(t) = 0 \tag{3.8}$$

Remarque 3.5 *Définissons la fonction*

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, p, u) \longmapsto H(x, p, u) = p(Ax + Bu) - \frac{1}{2}(x^T W x + u^T U u)$$

en utilisant toujours la convention que p est un vecteur ligne de$\mathbb{R}^n$. Alors les équations données par le principe du maximum LQ s'écrivent .

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu.$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -pA + x^T W.$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

3.4 Exemples d'applications

Exemple 3.1 *On considère le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = u \\ \dot{x}_3 = u \end{cases}$$

Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $n = 3$ états et $m = 1$ entrée

La matrice de contrôlabilité du système est :

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang $C = 1 \neq (3 = n)$, donc le système n'est pas contrôlable.

Exemple 3.2 *Considérons le système dans $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t). \\ \dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + u(t). \\ |u(t)| \leqslant 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Le système (3.9) *est de type $\dot{X} = AX + Bu$*

Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ***La contrôlabilité du système*** (3.9) *:*

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où le rang de la matrice C est : rang $C = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$

Alors : le système (3.9) *est contrôlable .*

- ***Application du Principe du Maximum*** *:*

Le Hamiltonien du système (3.9) *s'écrit sous la forme :*

$$H(x, p, u) = p_1 x_2 + p_2(2x_2 + u) + p_0$$

Par ailleurs le système adjoint s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H(x,p,u)}{\partial x_1} = 0. \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H(x,p,u)}{\partial x_2} = -p_1 - 2p_2. \end{cases}$$

Notons que puisque le vecteur adjoint (p_1, p_2) *doit être non trivial ,* $2p_2$ *ne peut s'annuler sur un intervalle (sinon on aurait également* $p_1 = p_2 = 0$*) .*
D'autre part , la condition de maximisation nous donne :

$$p_2 u = \max_{|v| \leq 1} p_2(v)$$

Comme p_2 *ne s'annule sur aucun intervalle , on en déduit que , presque partout , le contrôle extrémal est* $u = signe(p_2)$ *On a :*

$$p_1 = cste \quad , \quad p_2(t) = -\frac{1}{2}p_1 + Ce^{-2t} \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

En particulier $p_2(t)$ *est strictement monotone , alors le contrôle a au plus une commutation .*
En posant $u = \varepsilon =^{+}_{-} 1$ *,puis en intégrant ,il vient :*

$$x_1(t) = -\frac{\varepsilon}{2}(t - t_0) + \frac{1}{2}\left(x_2(t_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(e^{2(t-t_0)} - 1\right) + x_1(t_0).$$

$$x_2(t) = -\frac{\varepsilon}{2} + \left(x_2(t_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)e^{2(t-t_0)}.$$

Exemple 3.3 *On considère le problème linéaire sans contraintes sur le contrôle :*

$$\begin{cases} \min_u J(T,u) = -x(1) - y(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt. \\ \dot{x}(t) = y(t). \\ \dot{y}(t) = u(t). \\ x(0) = 1, y(0) = 3. \\ u(t) \in U, t \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.10}$$

Le système (3.10) est de type $\dot{X} = AX + Bu$.
Alors :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Étude de la contrôlabilité du système (3.10) .
On a :

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et le rang de la matrice C est : rang $C = 2$
D'où : le système (3.10) est contrôlable .

- Le Hamiltonien associé au système (3.10) est

$$H(x, u, p_x, p_y, t) = p_x y + p_y u + p_0 \frac{u^2(t)}{2}.$$

Où $p_0 \leqslant 0$ et $p = (p_x, p_y)$ est le vecteur adjoint.

Les composantesp_x et p_y sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H(x,p,u)}{\partial x} = 0. \\ \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H(x,p,u)}{\partial y} = -p_x. \end{cases}$$

D'où ,on obtient :

$$\begin{cases} p_x = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ p_y = -C_1 t + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Posons : $p_0 = -1$

Alors le Hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$H(x, u, p_x, p_y, t) = p_x y + p_y u - \frac{u^2(t)}{2}$$

- Les conditions de transversalité sont :

$$\begin{cases} p_x(1) = 1 \\ p_y(1) = 1 \end{cases}$$

Alors : $C_1 = 1$, et $C_2 = 3$. Ainsi

$$\begin{cases} p_x(1) = 1 \\ p_y(1) = -t + 3 \end{cases}$$

- La condition de maximisation

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, p_x, p_y, t) = 0$$

D'où

$$p_y(t) - u(t) = 0 \Rightarrow p_y = u(t)$$

Donc le contrôle optimal est :

$$u^*(t) = -t + 3$$

Il reste à déterminer les trajectoires $x^*(t)$ associées au contrôle $u^*(t)$. On a :

$$\dot{y}(t) = u(t) = -t + 3 \Rightarrow y(t) = -\frac{t^2}{2} + 3t + C_3.$$

et

$$\dot{x}(t) = y(t) = -\frac{t^2}{2} + 3t + C_3 \Rightarrow x(t) = -\frac{t^3}{6} + 3\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$$

En utilisant les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 3$, on obtient

$$C_3 = 3, C_4 = -\frac{10}{3}$$

Donc la solution du problème de contrôle (3.10) est :

$$\begin{cases} u^*(t) = -t + 3 \\ \\ x^*(t) = -\dfrac{t^3}{6} + 3\frac{t^2}{2} + 3t + \dfrac{10}{3} \\ \\ y^*(t) = -\dfrac{t^2}{2} + 3t + 3 \end{cases}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons exposé des notions fondamentale sur la théorie du contrôle et aussi nous avons rappelé par l'un des outils de résolution d'un problème de commande optimal c'est le principe de maximum de Pontrygin et on fin nous terminons ce travail par l'application de ce principe au problème LQ et sur quelques exemples pratiques.

Bibliographie

[1] E.Tréla , Contrôle optimale : Théorie et Application , Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) , 2005 .

[2] E.Tréla , Contrôle optimale , Université d'Orléans , 2007 .

[3] C. Lobry , T. sari , Introduction à la théorie du contrôle , Mai 2003.

[4] H.K . Khalil, Nonlinear Systems, Prentice Hall (1996).

[5] K.Khaldi , contrôle optimal des systèmes dynamiques, Université Dahlab-Blid 1, 2019-2020.

[6] M. Bergounioux, Optimisation dans $\mathbb{R}^n$ et Introduction au Contrôle Optimal des Systèmes Linéaires, Cours et exercices, Université d'Orléans, 2001.

[7] K. Nachi, Contrôle optimal des EDO linéaires, Département de Mathématiques Université Oran1, Ahmed Ben Bella, mai 2020.

• ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة مشكلة في نظرية التحكم التي يمكننا التصرف بها عن طريق المتابعة (أو التحكم). والهدف بعد ذلك هو نقل النظام من حالة إبتدائية معينة إلى حالة حالة نهائية معينة، وذلك بإحترام معايير معينة .
الكلمات المفتاحية : نظرية التحكم، المبدأ الأقصى، التحكم أفضل

• Résumé

Le but de ce travail est étudier un problème de la théorie du contrôle sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (où contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

Mots clés : Théorie de contrôle , Principe de Maximum , Contrôle optimale.

• Abstract

The subject of this work is to study the problem of control theory on which can act pay means of commande function. The goal is then to bring the system from a given initial state to a certain final state,possibly respecting certain criteria.

Keys Words : Control theory , Maximum Principal , Optimal control.