REPUBLIQUEALGERIENNEDEMOCRATIQUEETPOPULAIRE
MINISTEREDEL’ENSEIGNEMENTSUPERIEURETDELARECHERCH
ESCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M’sila

Faculté des Mathématiques et de l’Informatique
Département des Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématiques et numérique

THÈME

Sur la soulution numérique des équations intégrales de Volterra - Fredholm en utilisant le troisiéme polynôme de Chebeyshev

Présentée par :
AMROUNE Nassiba
Soutenu publiquement le: 20/06/2023.

Devant le jury composé de:

GAGUI Bachir	M.C.A	UniversitédeM’sila	**Président:**
NADIR Mostefa	Prof	UniversitédeM’sila	**Encadreur:**
DJAIDJA Noui	M.C.B	UniversitédeM’sila	**Examinateur:**

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Je remercie **ALLAH***, qui m'a donné la force , la santé et la volonté de commencer et de terminer ce mémoire.*

Tout d'abord ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de professeur **Mostefa NADIR** *je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant mon préparation de ce mémoire.*

J'adresse mes sincères remerciements à Messieurs les professeurs **GAGUI Bachir** *et* **GASSMI abdelkader** *qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce mémoire.*

Enfin, je remercie tous mes amis de prés ou de loin, et les étudiants de ma promotion de spécialité **Analyse Mathématique et Numérique**

Dédicace

Je dédie ce travail à la mémoire de mes chers parents

AMROUNE Abdelkarim & GUETTOUCHE. Haizia *, je ne saurais trop vous dire merci pour vos conseils, votre soutien et vos encouragements.*

et pour vos prières qui m'ont accompagné tout le long de mes études. Ce travail est le fruit de tous vos sacrifices mieux que des mots. Il reflète tout l'amour que je ressens pour vous

A mes chers frères : **Djaber & Mossabe & Haroune & Mondher**

A toutes mes deux familles **AMROUNE & GUETTOUCHE.**

&

La promotion de mathématiques 2023

A toutes les personnes que j'aime.

Table des matières

0.1 Introduction

Dans ce mémoire,nous traitons l'un des sujet les plus important de l'analyse mathématique et numérique ,qui est la solution

numérique de les équations intégrales de voltrra-fredhom .

ces équationes apparaissent dans de nombreuses applications en physique et en ingénierie.

Comme la resolution analytique de ce type des équations est souvent n'est pas évidente et sont difficile à trouver

les gens sont plus intéressés par la résolution numérique

les méthode des résoudre numériquement des équations intégrales jouent un role trés important des domaine scientifique

Ainsi notre mémoire se compose de trois chapitres:

Le Premier chapitre est une introduction à l'analyse numérique on a utilisé les notions de base de l'analyse fonctionnelle, et la théorie des opérateurs bornés, compacts et intégraux.

Le Deuxième chapitre est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, qui a pour objectif, de familiariser le lecteur de ce travail avec le concept d'équation intégrale. On trouve aussi une étude sur l'existence et l'unicité des équations intégrales du types Volterra-Fredholm .il y a égalment une étude sur les polynôme de chebyshev .

Le Troisième chapitre est destiné à l'étude de la résolution numérique des équations intégrales type Volterra-Fredholm en utilisant les méthodes collocations avec le troisiéme polynôme de Chebyshev tout en montrant l'efficacité de cette méthode par des exemples illustrés.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Linéarité des opérateurs

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

- *Condition additive*

$$\forall \varphi_1,\ \varphi_2 \in E,\ \text{on a}\ \ A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

- *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E,\ \lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \text{on a}\ \ A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0).$$

L'opérateur linéaire A est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F, est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G.

Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \ \ \forall\, x \in E.$$

La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_2)$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β, telles que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \; \forall \; x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_2)$.

1.1.2 Opérateurs compact :

Définition 1.1.1 *Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F. Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.*

Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G, il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F.

Théorème 1.1.1 *(critère de compacité)*

Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E, la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans F.

Preuve. Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact. ■

Théorème 1.1.2 *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Théorème 1.1.3 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Preuve. Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de E, alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autres part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. $\blacksquare$

Théorème 1.1.4 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F, convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A et compact.

Corollaire 1.1.1 *La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

Théorème 1.1.5 *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

Théorème 1.1.6 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Noyau faiblement singulier

Définition 1.1.2 *On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur $G \times G \subset R^n \times R^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que,*

$$\forall x, y \in G,\ x \neq y,\ \exists M > 0,\ |K(x,y)| < \frac{M}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

Théorème 1.1.7 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

1.1.3 Equations aux Opérateurs compacts:

Equations de second espèce

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ défini l'équation de second espèce donné par

$$\varphi - A\varphi = f \; ; \quad \varphi, \; f \in X$$

où f est un fonction donnée et φ la fonction inconnue

Théorème 1.1.8 *Le noyau de l'opérateur T défini par*

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X \; ; \; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous espace fermé et de dimension finie

Théorème 1.1.9 *La suite d'ensemble des noyaux*

$$N(T), N\left(T^2\right), ..., N(T^n), ...$$

est une suite croissante stationnaire. Autrement dit,elle ne contient qu'un nombre fini d'ensemble distincts , c'est à dire il existe un entier $p \in N$ tel que

$$\{0\} \subset N(T), N\left(T^2\right) \subset .... \subset N(T^p) = N\left(T^{p+1}\right) = ...$$

Le nombre p est appelé le nombre de Riez de l'opérateur compact A pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$

Théorème 1.1.10 *L'image de l'opérateur T défini par ,*

$$\operatorname{Im} T = T\left(X\right) = R\left(T\right) = \left\{\psi = T\varphi;\ \text{telle que}\ \ \varphi \in X\right\}$$

est un sous espace fermé

Le nombre de Riez p pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$ et le nombre de Riez q pour l'ensemble des images $\{R\left(T^n\right)\}$ sont égaux. Autrement dit

$$p = q$$

Théorème 1.1.11 *Les sous espaces $N\left(T^n\right)$ et $R\left(T^n\right)$ sont supplémentaires. Autrement dit*

$$X = \ker T^n \oplus \operatorname{Im} T^r \equiv N\left(T^n\right) \oplus R\left(T^n\right)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz

Lemme 1.1.1 *L'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si,T^r est injectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Lemme 1.1.2 *L'opérateur $T = I - A$ est surjectif si et seulement si T^r est surjectif pour tout $r \in\ \mathbb{N}$*

Théorème 1.1.12 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur$T = I - A$ est injectif si et seulement si il est surjectif, de plus l'opérateur admet un inverse $T^{-1} = \left(I - A\right)^{-1}$ borné*

Théorème 1.1.13 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors, pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

admette une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

admette la solution triviale $\varphi = 0$.

1.2 Principe du point fixe

soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui même, alors pour tout $x \in E$, tel que

$$x = T(x)$$

s'appelle un point fixe de l'opérateur T.

Soit T un opérateur continu dans un espace de Banach E dans lui même et on définit la suite (x_m) par

$$x_{m+1} = T(x_m), m = 0, 1, ... \tag{I.1.1}$$

qui converge vers $x = x^*$, pour $x_0 \in E$, alors x^* est un point fixe de l'opérateur T c'est -à-dire

$$x^* = T(x^*). \tag{I.1.2}$$

On peut le voir direction d'après l'équation $(I.1.1)$, et que l'opérateur T est continu

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{m+1} = \lim_{m\to\infty} T(x_m) = T(x^*)$$

Définition 1.2.1 *Soit T un opérateur défini d'un espace de Banach E dans lui même, T est une contraction (ou application contractante), s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que, pour tout $x, y \in E$ on ait*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\| \tag{I.1.3}$$

Remarque 1.2.1

1. Si $k \geq 0$ dans la relation, T est dit Lipschitzienne

2. L'application Lipschitzienne est nécessairement continue.

3. Si $k < 1$ dans la relation $(I.1.3)$, T est dite une contraction.

Théorème 1.2.1 *Soit E un espace de Banach et F un sous-ensemble fermé de E et soit f une application contractante de F dans E, alors il existe un unique $z \in F$, tel que*

$$f(z) = z.$$

Théorème 1.2.2 *Soit F un sous-ensemble fermé dans un espace de Banach E et soit T : $F \rightarrow F$une application contractante, alors*

- L'équation $Tx = x$, admet une solution unique
- La solution unique x peut être obtenu par la limite de la suite $\{x_n\}$de F définie par $x_n = Tx_{n-1},\ n = 1, 2.....$,où x_0 est un élément arbitraire de F,

$$x = \lim_{n \to \infty} T^n x_0$$

Théorème 1.2.3

Si T un opérateur continu dans un espace de Banach E, tel que pour $m \in N$, l'opérateur T^m est contractant, alors l'équation $T^m x = x$, admet une seule solution, cette solution est le point fixe.

Théorème 1.2.4

Soient A un opérateur borné dans un espace de Banach E dans lui même et g un élément de E, alors l'opérateur défini par

$$T\varphi = \alpha A\varphi + g$$

a un point fixe, pour $|\alpha|$ suffisamment petit, de plus, si k est une constante positive, telle que

$$\|A\varphi\| \leq k \|\varphi\|,\ \varphi \in E$$

alors $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique pour $|\alpha| k < 1$.

puisque l'opérateur A est borné, alors il existe une constante k, telle que

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad \text{pour} \quad \varphi_1, \varphi_2 \in E$$

ainsi

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| = |\alpha| \|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq |\alpha| k \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

et par conséquent T est une contradiction ,lorsque $|\alpha| k < 1$.

dans ce cas et par le théorème précédant,T admet un point fixe unique.

Théorème 1.2.5 *(de krasnoselkii)* *soient E un espace de Banach et $C \subset E$ un cône dans E.on suppose que $\Omega_{1,}$ Ω_2 deux sous-ensembles ouverts dans E, avec $0 \in \Omega_{1,}\,\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et soit*

$$T : C \cap \left(\overline{\Omega_1} \backslash \Omega_2\right) \to C$$

un opérateur compact, tel que

1. $\|Tu\| \leq \|u\|$, $u \in C \cap \Omega_1$ et $\|Tu\| \geq \|u\|$, $u \in C \cap \Omega_2$,

2. $\|Tu\| \geq \|u\|$, $u \in C \cap \Omega_1$ et $\|Tu\| \leq \|u\|$, $u \in C \cap \Omega_2$

si (1) *ou* (2) *est vérifie, alors T admet un point fixe dans $C \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right)$.*

Théorème 1.2.6 *(de krasnoselkii) Soit F un sous-ensemble non vide, fermé E et A, B convexe de et deux opérateurs, tels que*

1. $A(F) + B(F) \subseteq F$

1. A est une application contractante

2. B est continu et $B(F)$ est relativement compact.

alors, il existe un $y \in F$ avec

$$Ay + By = y$$

Chapitre 2

Equations intégrales et leurs classification

2.1 Classification des équations intégrales

2.1.1 Equations intégrales de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x,t) = 0$ pour $x < t$

Définition 2.1.1 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme :*

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

Définition 2.1.2 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation à inconnue $\varphi(x)$ de la forme :*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

2.1.2 Equations intégrales de Fredholm

Définition 2.1.3 *On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme:*

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où φ est la fonction inconnue, f et k sont des fonctions connues,les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équations de Fredholm .

Définition 2.1.4 *On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où $\varphi(x)$ est la fonctions inconnue ,$k(x,y)$ et $f(x)$des fonctions donnés, λ est un facteur connue

2.1.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints ,apparaît dans une équation intégrale .

Définition 2.1.5 *On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \ , \ x \in [a,b] \tag{2.1.1}$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme:2

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dtds$$

où les fonctions k_1, k_2 et f sont connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Exemple 2.1.1

$$\varphi(x) = \exp(x) + x + 1 + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_0^1 \exp(x-t)\varphi(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

$$\varphi(x) = \frac{17}{2}x^2 + 11x + \int_a^x \int_a^b (s-t)\varphi(t)dtds$$

2.2 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (2.1.1)

Définition 2.2.1 *Soit X un espace normé et $T : X \to X$ un opérateur, T est dit un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique tel que*

$$T(\varphi_0) = \varphi_0, et \lim_{n\to\infty} T^n(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ pour tout } \varphi \text{ de } X$$

Théorème 2.2.1 *(principe de contraction).Soit X un espace normé. Si $T : X \to X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique φ , alors T est un opérateur de Picard*

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi_0)\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Théorèmes d'existence et d'unicité :

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \ , x \in [a,b] \tag{2.2.1}$$

où

1. $f \in C[a,b]$, $k_1(x,t) \in C(D_1)$,avec $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq t \leq x \leq b\}$
2. $\varphi \in C[a,b]$, $k_2(x;t) \in C(D_2)$,avec $D_2 = [a,b] \times [a,b]$
3. $M_1 = \max_{(x,t)\in D_1} |k_1(x,t)|$, et $M_2 = \max_{(x,t)\in D_2} |k_2(x,t)|$

Théorème 2.2.2 *Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une constante $c > 0$ tel que:*

$$\frac{1}{c}\left[M_1 + M_2 \exp(c(b-a))\right] \; < 1$$

Alors l'équation (2.2.1) a une solution unique $\varphi \in C\;[a,b]$, et cette solution peut être obtenir par la méthode d'approximation successive, à partir de $\varphi_0 \in C\;[a,b]$

Preuve. Soit l'opérateur intégral $T : C\,[a,b] \to C\,[a,b]$, défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned}
|T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left| \int_a^x k_1(x,t)\,(\varphi(t)-\psi(t))\,dt + \int_a^b k_2(x,t)\,(\varphi(t)-\psi(t))\,dt \right| \\
&\leq \int_a^x |k_1(x,t)|\,|(\varphi(t)-\psi(t))|\,dt + \int_a^b |k_2(x,t)|\,|(\varphi(t)-\psi(t))|\,dt \\
&\leq M_1 \int_a^x |(\varphi(t)-\psi(t))| \exp(-c\,(t-a)) \exp(c\,(t-a))\,dt + \\
&\quad M_2 \int_a^b |(\varphi(t)-\psi(t))| \exp(-c\,(t-a)) \exp(c\,(t-a))\,dt \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c}\,(\exp(c(x-a)-1) + \frac{M_2}{c}\,(\exp(c(b-a)-1)\right] \|\varphi-\psi\| \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c}\exp(c(x-a) + \frac{M_2}{c}\exp c(x-a+b-x)\right] \|\varphi-\psi\| \\
&\leq \frac{\exp(c(x-a)}{c}\,(M_1 + M_2\exp(c(b-x))\,\|\varphi-\psi\| \\
&\leq \frac{\exp(c(x-a)}{c}\,(M_1 + M_2\exp(c(b-a))\,\|\varphi-\psi\|
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|A\varphi(x) - A\psi(x)| \exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c}\,(M_1 + M_2\exp(c(b-a))\,\|\varphi-\psi\|\,, \text{pour tout } x \in [a,b]\,.$$

Alors

$$\|A\varphi - A\psi\| \leq \frac{1}{c}\,(M_1 + M_2\exp(c(b-a))\,\|\varphi-\psi\|$$

On déduit que l'opérateur A est Lipschitzien de constante $k = \dfrac{1}{c}\,(M_1 + M_2\exp(c(b-a))$

La condition supposée garantit que A est une contraction. Alors on applique principe de contraction ∎

2.3 polynôme de Chebyshev:

2.3.1 polynôme de Chebyshev:

le polynôme de Chebyshev $v_{n(x)}$du troisième type est un polynôme en $x$de degré n,défini par la relation

$$v_n\left(x\right)=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta},x=\cos\theta$$

La formule de récurrence à trois termes satisfaite par les polynômes de Chebyshev est la traduction de

l'identité trigonométrique élémentaire,

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\cos\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta=2\cos\theta\cos\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta \tag{2.3.1}$$

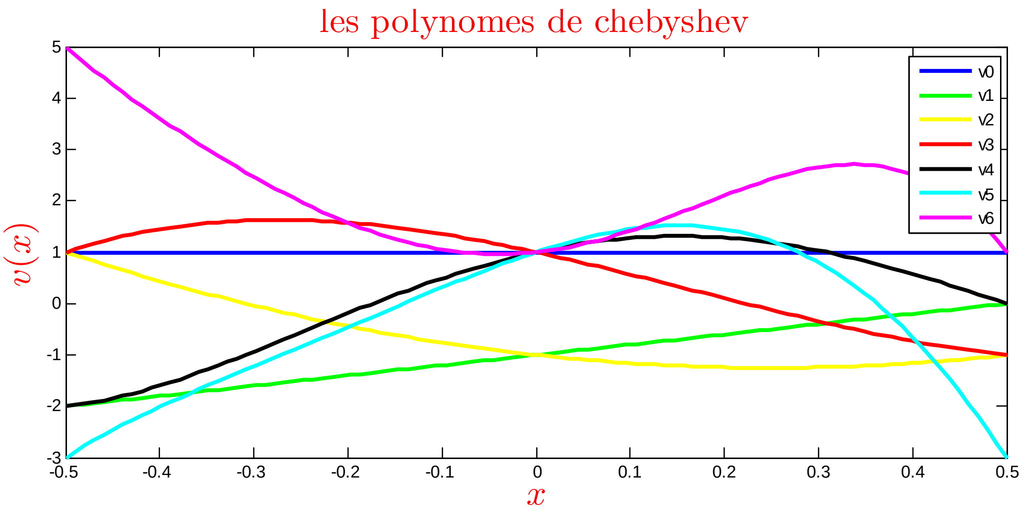
qui devient:

$$\begin{aligned} v_n &= 2xv_{n-1}\left(x\right)-v_{n-2}\left(x\right) \\ v_0 &= 1,n=2,3 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} v_0\left(x\right) &= 1 \\ v_1\left(x\right) &= 2x-1,v_2\left(x\right)=4x^2-2x-1, \\ v_3\left(x\right) &= 8x^3-4x^2-4x+1, \\ v_4\left(x\right) &= 16x^4-8x^3-12x^2+4x+1, \\ v_5\left(x\right) &= 32x^5-16x^4-32x^3-12x^2+6x-1, \\ v_6\left(x\right) &= 64x^6-32x^5-80x^4-16x^3+24x^2+2x+1 \end{aligned}$$

constatant que les fonctions $\{v_n\left(x\right),n=0,1,2.......\}$


les polynomes de chebyshev
v0
v1
v2
v3
v4
v5
v6
$v(x)$
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Chapitre 3

Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm

3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredhlolm :

Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équation intégrales de volterra-Fredholm de second espèce en utilisant les polynômes de Tchebychev.

3.1.1 Méthode de collocation

On considère l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \tag{3.1.1}$$

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à l'équation (3.1.1) consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.1.1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C([a,b])$ ou de $L^2([a,b])$. Soit $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ une base de X_n. On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$, telle que

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j(x), \quad x \in [a,b]$$

Pour déterminer les coefficients (c_j), on substituant, cette fonction dans l'équation (3.1.1), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$r_n(x) = \varphi_n(x) - \int_a^x k_1(x,t)\varphi_n(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)\varphi_n(t)dt - f(x)\ , \ \ x \in [a,b]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j(x) - \int_a^x k_1(x,t)dt \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j(t) - \int_a^b k_2(x,t)dt \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j(t) - f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \left\{ \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)\psi_j(t)dt \right\} - f(x) \quad , x \in [a,b]$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, ..., x_n \in [a,b]$, (i.e, aux points de collocation) ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x_i,t)\psi_j(t)dt \right\} c_j = f(x_i) \quad , i = 1, ..., n$$

qui s'écrit sous la forme $AC = F$, où

$$\begin{aligned} A &= \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x_i,t)\psi_j(t)dt, \ i,j = 1, ..., n \\ C &= (c_i)\,, \ i = 1, ..., n \\ F &= f(x_i)\,, \ i = 1, ..., n \end{aligned}$$

ce système admet une solution unique si $\det A \neq 0$, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

3.1.2 Méthode de collocation-Tchebyshev

On considère l'équation de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt, \ x \in [a,b] \qquad (3.1.2)$$

On définit les polynômes de Tchebyshev $T_i^*(x)$ de degré i sur $[a,b]$ comme suit

$$T_i^*\left(x\right) = T_i\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)$$

où $T_i(x)$ sont les polynômes de Chebyshev de degré i définit sur $[-1,1]$

On utilise la méthode de Collocation pour approximer la solution exacte $\varphi\left(x\right)$ de l'équation (3.1.2).

On suppose

$$\varphi(x) \simeq \varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i^*(x) \tag{3.1.3}$$

où $T_i^*(x)$ sont les polynômes de Tchebyshev de degré i définit sur $[a,b]$ et c_i des coefficients à déterminer.

Substituant (3.1.3) dans (3.1.2) on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} c_i T_i^*(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t) \sum_{i=0}^{n} c_i T_i^*(t)dt + \int_a^b k_2(x,t) \sum_{i=0}^{n} c_i T_i^*(t)dt$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \left[T_i^*(x) - \int_a^x k_1(x,t)T_i^*(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)T_i^*(t)dt\right] = f(x) \tag{3.1.4}$$

l'équation (3.1.4) peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \psi_i(x) = f(x)$$

où

$$\psi_i(x) = T_i^*(x) - \int_a^x k_1(x,t)T_i^*(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)T_i^*(t)dt$$

Soit $\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos\left(\dfrac{2i-1)\pi}{2n}\right)$, $i = 1,...,n$ les points de Tchebechev :

Alors les équations de collocation sont obtenues en prend des points x_j

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x_j) &= f(x_j), \quad j = 1,....,n & (3.1.5) \\ \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_{ij} &= f_j, \quad j = 1,....,n & (3.1.6) \end{aligned}$$

L'équation (3.1.5) représente un système linéaires de (n) inconnue qui s'écrit sous la forme

$$Ac = F$$

où

$$\begin{aligned} A &= \psi_{ij}, i, j = 1, ..., n \\ c &= (c_1, ..., c_n)^t \\ F &= (, f_1, ..., f_n)^t \\ c &= A^{-1}F \end{aligned}$$

3.2 Exemples Numériques

Dans cette section on va traité quelques exemples pour résoudre les équations intégrales linéaire de Volterra-Fredholm de second espèce par la méthode de collocation-Tchebyshev

Exemple 1.

Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) - \int_0^x e^{-(x+t)}\varphi(t)\,dt - \int_0^1 \varphi(t)\,dt = (1-x)\,e^{-x} + e^{-1} - 1$$

où $0 \leq x; t \leq 1$; et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée

par

$$\varphi(x) = e^{-x}$$

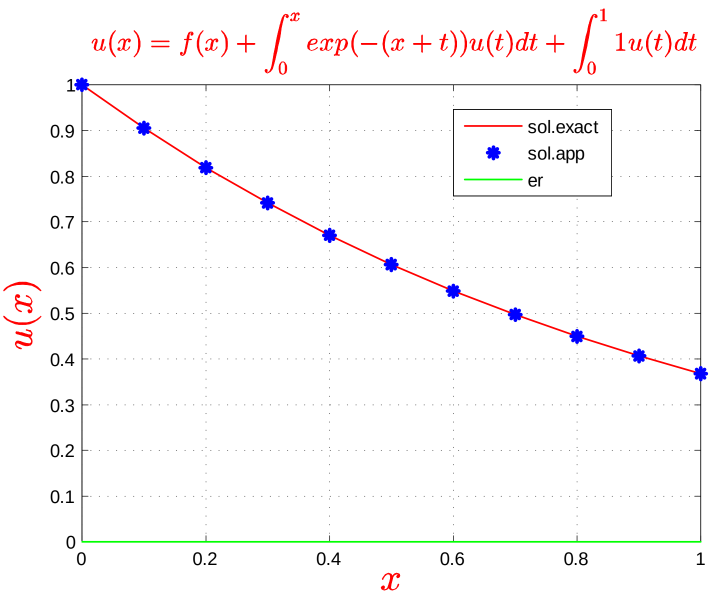
Table 1:

Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$

obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev, en certains points de Tchebychev, l'erreur est calculée pour $n = 10$

Point x	Solution $\varphi_{ex}(x)$	Solution$\varphi_{app}(x)$	Erreur
$0.000000e+000$	$1.000000e+000$	$1.000000e+000$	$4.388864e-008$
$1.000000e-001$	$9.048374e-001$	$9.048374e-001$	$4.827391e-008$
$2.000000e-001$	$8.187308e-001$	$8.187308e-001$	$5.266786e-008$
$3.000000e-001$	$7.408182e-001$	$7.408182e-001$	$5.704697e-008$
$4.000000e-001$	$6.703200e-001$	$6.703200e-001$	$6.144723e-008$
$5.000000e-001$	$6.065307e-001$	$6.065307e-001$	$6.583083e-008$
$6.000000e-001$	$5.488116e-001$	$5.488116e-001$	$7.021441e-008$
$7.000000e-001$	$7.000000e-001$	$4.965853e-001$	$7.461441e-008$
$8.000000e-001$	$4.493290e-001$	$4.493290e-001$	$7.899420e-008$
$9.000000e-001$	$4.065697e-001$	$4.065697e-001$	$8.338678e-008$
$1.000000e+000$	$3.678794e-001$	$3.678794e-001$	$8.777662e-008$

$exmp1$



$_2.pdf$

Exemple 2

Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) - \int_0^x \sin(x+t)\varphi(t)\,dt - \int_0^1 xt\varphi(t)\,dt = x\cos 2x - \sin 2x + \sin x + \frac{2}{3}x$$

où$0 \leq x; t \leq 1$; et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée

par

$$\varphi(x) = x$$

Table 2:

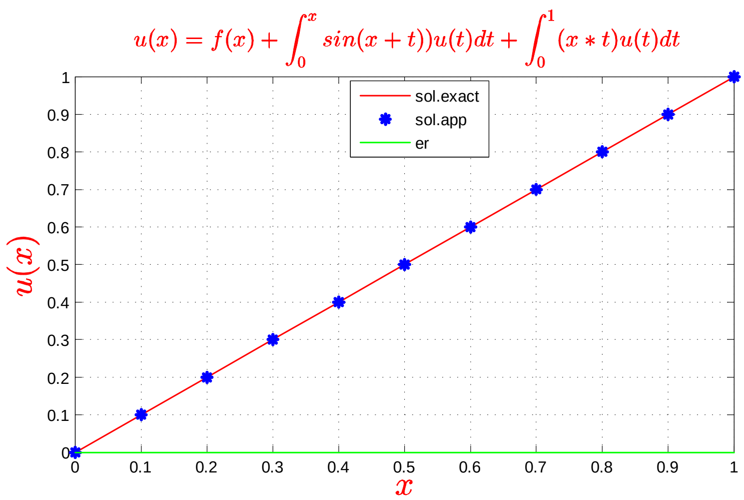
Nous présentons la solution approchée$\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$

obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev, en certains points de Chebyshev, l'erreur

est calculée pour $n = 10$

Point x	Solution$\varphi_{ex}(x)$	Solution $\varphi_{app}(x)$	Erreur
$0.000000e+000$	$0.000000e+000$	$1.176574e-015$	$1.176574e-015$
$1.000000e-001$	$1.000000e-001$	$9.999998e-002$	$1.903659e-008$
$2.000000e-001$	$2.000000e-001$	$2.000000e-001$	$3.786760e-008$
$3.000000e-001$	$3.000000e-001$	$2.999999e-001$	$5.623734e-008$
$4.000000e-001$	$4.000000e-001$	$3.999999e-001$	$7.379043e-008$
$5.000000e-001$	$5.000000e-001$	$4.999999e-001$	$9.002943e-008$
$6.000000e-001$	$6.000000e-001$	$5.999999e-001$	$1.042829e-007$
$7.000000e-001$	$7.000000e-001$	$6.999999e-001$	$1.157002e-007$
$8.000000e-001$	$8.000000e-001$	$7.999999e-001$	$1.232872e-007$
$9.000000e-001$	$9.000000e-001$	$8.999999e-001$	$1.259976e-007$
$1.000000e+000$	$9.999999e-001$	$9.999999e-001$	$1.228904e-007$

$exp2$



$_3.pdf$

Exemple 3: Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce:

$$\varphi\left(x\right)-\int_{0}^{x}x\varphi\left(t\right)dt-\int_{0}^{1}\left(x^{2}\right)\varphi\left(t\right)dt=\sin(2*x)-\left(x^{2}\right)\sin^{2}(1)-x\sin^{2}\left(x\right)$$

où$0\leq x;t\leq 1$; et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée

par

$$\varphi\left(x\right)=\sin(2x)$$

Table 3:

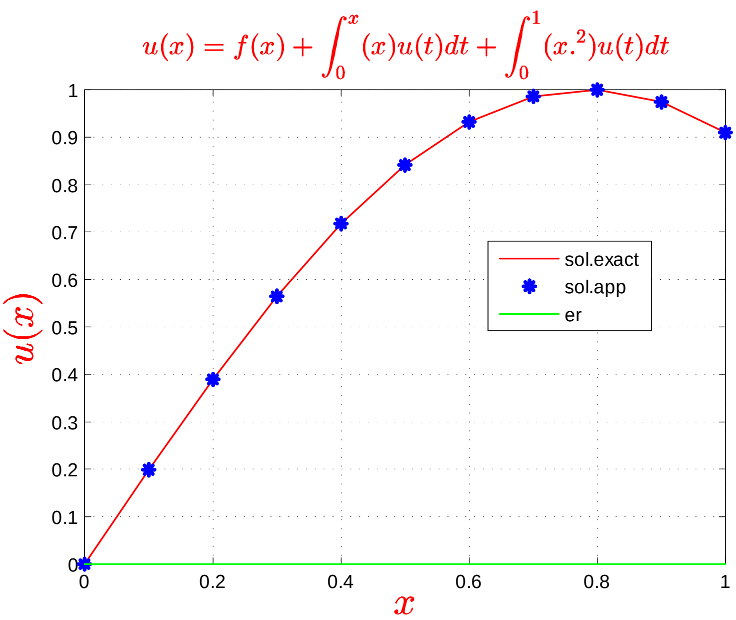
Nous présentons la solution approchée$\varphi_{app}\left(x\right)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}\left(x\right)$

obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev, en certains points de Chebychev, l'erreur

est calculée pour $n=10$

Point x	Solution$\varphi_{ex}\,(x)$	Solution $\varphi_{app}\,(x)$	Erreur
$0.000000e+000$	$0.0000e-000$	$7.3039e-011$	$.7.3039e-011$
$1.000000e-001$	$1.9867e-001$	$1.9867e-001$	$5.3053e-011$
$2.000000e-001$	$3.8942e-001$	$3.8942e-001$	$1.2903e-011$
$3.000000e-001$	$5.6464e-001$	$5.6464e-001$	$3.8062e-011$
$4.000000e-001$	$7.1736e-001$	$7.1736e-001$	$8.5262e-011$
$5.000000e-001$	$8.4147e-001$	$8.4147e-001$	$1.1190e-010$
$6.000000e-001$	$9.3204e-001$	$9.3204e-001$	$1.0602e-010$
$7.000000e-001$	$9.8545e-001$	$9.8545e-001$	$6.6359e-011$
$8.000000e-001$	$9.9957e-001$	$9.9957e-001$	$8.0268e-012$
$9.000000e-001$	$9.7385e-001$	$9.7385e-001$	$4.0853e-011$
$1.000000e+000$	$9.0930e-001$	$9.0930e-001$	$4.0939e-011$

exp3



$_4.pdf$

Conclusion

Dans cette thése,quelques méthodes analytique ont été présentées pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredhom de seconde espèce .Numériquement,la méthode de collocation tchebyshev a été utilisée pour approximer ces équations.où l'on cherche à approcher la solution exact par une combinaison linéaire des élément de base orthonormale de tchebyshev. Quelques exemples ont égalment été donnés pour montrer l'applicabilité de cette méthode.

Les résultats numériques obtenus à partir de ces exemples démontrent l'efficacité et la précision de cette méthode .Lorsque n (le nombre de noeuds) augment.le terme d'erreur diminue.

Bibliographie

[1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004

[2] B.GAGUI . Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz

[3] A.LAKHAL , M.NADIR , M.N.NADIR. Application of Chebyshev ploynomials to Volterra-Fredholm integral equations

[4] M.N.NADIR.Sur la solution numérique des equations intégrales de Volterra-Fredholm en utilisant les polynômes de Chebyshev, Mémoire de master 2022

الملخص :

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتيرا – فريدولم التكاملية من النوع الثاني وذلك باستخدام كثير حدود الثالث تشبيتشيف على ذلك تم تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة

الكلمات المفتاحية :

كثير حدود تشبيتشيف - المعادلات التكاملية لفولترا- المعادلات التكاملية لفردهولم- الطرق التربيعية

Résumé :

Le but de ce mémoire, est la résolution numérique de l'équation intégrale de Volterra-
Fredholm du second type, en utilisant le troisiéme polynôme de Tchebychev. De plus de nombreux exemples sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la méthode
proposée

Mots clés :

Polynôme de Tchebychev, Equation intégrale de Fredholm, équation intégrale de Volterra -équation intégrale de Volterra-Fredholm, les méthodes de quadratures.

Abstract :

The goal of this memory is consecrated to the numerical method to find approximate solutions to the volterra-Fredholm integral equation of the second kind using the third kind of Tchebychev polynomial Moreover, many examples are presented to illustrate the accuracy and efficiency of the method

Keywords:

Tchebychev polynomial, Fredholm integral equation, Volterra integral equation mixed Volterra-Fredholm integral equation, numerical quadrature.