

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE M'SILA MOHAMED BOUDIAF
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES



Mémoire présenté en Mathématiques

Spécialité: Analyse mathématique et numérique

MASTER

Par

Choutri Nesrine

THÈME

Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire

Soutenu devant le jury composé de :

Mostefa Nadir	Prof	Président
Bachir Gagui	MCA	Encadreur
Noui Djaidja	MAA	Examineur

Année Universitaire: 2019–2020

Remerciements

Je tiens à remercier vivement mon encadreur **Dr. Gagui** pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je tiens également à exprimer ma gratitude aux enseignants du département mathématique, particulièrement, les enseignants de la spécialité AMN. Ses qualités en enseignement et ses habiletés ont fait une aide précieuse pour la réalisation de ce mémoire.

Pour finir, j'adresse mes sincères remerciements à mon mari, mes parents, mes frères et soeurs pour leur soutien tout au long de mes études.

Résumé

Dans ce memoire, on a essayé d'appliquer la méthode de décomposition d'adomian(ADM) et la méthode de perturbation d'homotopie(HPM) pour résoudre les problèmes des valeurs initiales des équations intégral-différentielles fractionnaires de type:

$$\begin{cases} D^\alpha u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt, & t \in [0,1] \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Nous utilisons la dérivée au sens de Caputo. Les solutions des problèmes sont trouvées par des séries infinies convergentes, et les résultats montrent que les deux méthodes sont les plus pratiques et les plus efficaces pour résoudre ce type d'equations. Des exemples numériques sont présentés pour l'illustration et la comparaison entre les deux méthodes.

Mots clés : Dérivée de Caputo, Equations integro-differentielles, Calcul fractionnaire, méthode d'Adomian, méthode de perturbation d'Homotopy.

Abstract

In this dissertation, we try to use the decomposition methode d'adomian(ADM) as well as the perturbation methode of homotopie(HPM) to resolve the initial values of the fractional integro-differential equations of the type:

$$\begin{cases} D^\alpha u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt, & t \in [0,1] \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (0.0.2)$$

We use the Caputo derivative. The solutions are formed by convergent infinite series, and the results show that the two methods are very practical and efficient to resolve this type of equations. Numerical examples are presented for illustration and making a comparison between the two methods.

Key words: Caputo derivative, Integro-differential equations, Fractional calculus, Adomian method, Perturbation methode of Homotopy.

ملخص

نهدف في هذه المذكرة الى استخدام طريقة أوميان وطريقة أوموتوبي لحل المعادلات التكاملية التفاضلية ذات الرتب الناطقة من النوع :

$$\begin{cases} D^\alpha u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt, & t \in [0, 1] \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

حيث تم استخدام المشتقات الكسرية بمعنى كابيتو. حلول هذه المعادلات تكون على شكل سلسلة غير منتهية تتقارب نحو الحل الدقيق. وتظهر النتائج أن كلتا الطريقتين فعالة وعملية لحل هذا النوع من المعادلات. تطرقنا أيضا لتقديم أمثلة عددية للتوضيح والمقارنة بين الطريقتين.

كلمات مفتاحية: مشتق كابيتو , المعادلات التكاملية التفاضلية, الحساب الكسري, طريقة أوميان, طريقة أوموتوبي.

Table des matières

Introduction	1
1 Calcul fractionnaire	2
1.1 Les fonctions de base	2
1.1.1 La fonction Gamma	2
1.1.2 La fonction Bêta	4
1.1.3 La fonction Mittag-Leffter	4
1.2 L'intégrale fractionnaire	5
1.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$	5
1.2.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	5
1.3 Dérivées fractionnaires	6
1.3.1 Dérivées fractionnaires de type Riemann-Liouville	6
1.3.2 Dérivées fractionnaires de type Caputo	6
1.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires	7
1.4.1 Linéarité	7
1.5 Equations différentielles fractionnaires	8
1.5.1 Equation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville	8
1.5.2 Equation différentielle fractionnaire de type Caputo	9
1.6 Equations Intégrales	11
1.6.1 Opérateurs intégrals linéaires	11
1.6.2 Opérateur compact	12
1.6.3 Equations intégrales linéaires(Volterra et Fredhom)	12

1.7	Equations intégro-différentielles linéaires d'ordre naturel	14
1.7.1	Équations intégro-différentielles de Fredholm	14
1.7.2	Équations intégro-différentielles de Volterra	15
1.8	Equations intégro-différentielles d'ordre fractionnaire	15
2	Méthodes de résolution des équations intégro-différentielles d'ordre frac-	
	tionnaire	16
2.1	La méthode Adomian(ADM)	16
2.1.1	Description de la méthode	16
2.1.2	Applications sur les équations différentielle d'ordre fractionnaire . . .	18
2.1.3	Applications sur les équations intégrales	19
2.1.4	Applications sur les équations intégro-différentielle d'ordre usuel . . .	20
2.1.5	Applications sur les équations intégro-différentielle d'ordre fractionnaire	23
2.2	La méthode Homotopy(HPM)	26
2.2.1	Description de la méthode	26
2.2.2	Applications sur les équations différentielle d'ordre fractionnaire . . .	28
2.2.3	Applications sur les équations inégro-différentielle d'ordre fractionnaire	30
	Conclusion	35

Liste des Figures

2.1.1 La solution approximative par la méthode ADM	27
2.2.1 Méthode de perturbation de Homotopie	31
2.2.2 Comparaison des solutions approximatives en utilisant HPM et ADM	33

Introduction

Les équations intégral-différentielles fractionnaires surviennent dans les processus de modélisation en sciences appliquées (physique, ingénierie, finance, biologie). De nombreux problèmes en acoustique, électromagnétique, viscoélasticité, hydrologie et autres domaines d'application peuvent être modélisés par des équations différentielles fractionnaires. Considérons l'équation intégral-différentielle d'ordre fractionnaire du type

$$\begin{cases} D^\alpha u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt, & t \in [0,1] \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (0.0.3)$$

où D^α est la dérivées fractionnaires de Caputo et α est un paramètre décrivant l'ordre des dérivée fractionnaire, et $F(u(t))$ est une fonction continue. Ce type d'équations se pose dans la modélisation mathématique de divers phénomènes physiques, comme la conduction thermique dans les matériaux à mémoire. De plus, ces équations se rencontrent dans les problèmes combinés de conduction, de convection et de rayonnement.

Dans ce mémoire, La méthode décomposition d'Adomian et la méthode de perturbation d'homotopie ont été utilisées pour résoudre les équations intégral-différentielles fractionnaires. La méthode de décomposition d'Adomian a été largement utilisée par de nombreux chercheurs pour résoudre les problèmes des sciences appliquées. La méthode de décomposition fournit une approximation analytique aux problèmes linéaires et non linéaires.

Dans cette méthode, la solution est considérée comme la somme d'un série infinie, convergeant rapidement vers une solution précise. La méthode de décomposition Adomian fournit des solutions sans nécessiter de linéarisation ou de discrétisation. Essentiellement, la méthode fournit une procédure de calcul systématique pour les équations d'importance physique.

L'autre méthode est HPM qui se définit comme un couplage de la méthode de perturbation traditionnelle et de l'homotopie dans topologie. De nombreux auteurs ont appliqué avec succès ces méthodes pour trouver les solutions de équations fonctionnelles qui se trouvent dans les problèmes scientifiques et techniques

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

1.1 Les fonctions de base

Le concept du calcul fractionnaire est une généralisation de la dérivation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire.

Fonctions Spéciales

Dans cette partie, nous présentons les définitions des fonctions : Gamma , Bêta et Mittag-Leffter, qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire. ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et des applications.

1.1.1 La fonction Gamma

En mathématiques, la fonction Gamma est une fonction complexe elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe.

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0). \quad (1.1.1)$$

$$1. \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

$$2. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}.$$

(Posant le changement de variable $t = \tau^2$).

Lemme 1.1.1 *La fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* , (resp. holomorphe sur le demi plan $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$) et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{R}_+^* \text{ (resp. } z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0); \Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (1.1.2)$$

Lemme 1.1.2 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \Gamma(z+1) = z \Gamma(z). \\ 2. \Gamma(n) = (n-1)!. \\ 3. \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{array} \right. \quad (1.1.3)$$

1.1.2 La fonction Bêta

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est elle aussi définie par une intégrale.

Définition 1.1.2 La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dx, \quad (p, q \in \mathbb{C}, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0). \quad (1.1.4)$$

Remarque 1.1.1 La fonction Bêta est symétrique i.e.,

$$B(p, q) = B(q, p). \quad (1.1.5)$$

Proposition 1.1.1 La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivant :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p, q \in \mathbb{C} : \Re(p) > 0; \Re(q) > 0. \quad (1.1.6)$$

1.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler est une généralisation directe de la fonction exponentielle e^x , à deux paramètres pour différentes valeurs de α et β , et elle joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.

Définition 1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler est définie par

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, \quad (1.1.7)$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.1.8)$$

Exemple 1.1.1 La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simple

$$E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Théorème 1.1.1 Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} 1. \left(\frac{d}{dx}\right)^n E_n(\lambda x^n) = \lambda E_n(\lambda x^n), \\ 2. \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda x^n) = \lambda x^{\beta-n-1} E_n(\lambda x^n). \end{cases} \quad (1.1.9)$$

1.2 L'intégrale fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Définition 1.2.1 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(1)} f(x) &= \int_a^x f(t) dt. \\ \mathcal{I}^{(2)} f(x) &= \int_a^x \mathcal{I}^{(1)} f(u) du, \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t) dt \right) du, \\ &= \int_a^x \left(\int_t^x du \right) f(t) dt, \\ &= \int_a^x (x-t) f(t) dt.\end{aligned}$$

En générale la $n^{\text{ième}}$ itération de l'opération \mathcal{I} peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(n)} f(x) &= \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n, \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt.\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

Pour tout entier n .

1.2.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre ($\alpha \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0$) est définie par :

$$\mathcal{I}_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt.\tag{1.2.2}$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre ($\alpha \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0$) par :

$$\mathcal{I}_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt.\tag{1.2.3}$$

Proposition 1.2.1 Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $f \in L^2([a; b])$. Alors

$$\begin{cases} 1. \mathcal{I}_{a^+}^{(\alpha)} \left[\mathcal{I}_{a^+}^{(\beta)} f(x) \right] = \mathcal{I}_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x). \\ 2. \mathcal{I}_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}. \\ 3. \frac{d}{dx} (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f(x)) = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-1} f(x). \end{cases} \quad (1.2.4)$$

1.3 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions pour la dérivée fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont plus utilisées dans les applications Riemann-Liouville et Caputo.

1.3.1 Dérivées fractionnaires de type Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par :

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt, \quad (1.3.1)$$

Où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ la partie entière de α .

Définition 1.3.2 Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par :

$$\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_x^b (t-x)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt. \quad (1.3.2)$$

Remarque 1.3.1 Pour $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$ l'opérateur \mathcal{D}^α donne le même résultat que la dérivée usuelles pour les ordres entières, tel que :

$$\begin{cases} 1. \mathcal{D}_{a^+}^n f(x) = f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x). \\ 2. \mathcal{D}_{b^-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x). \end{cases} \quad (1.3.3)$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires de type Caputo

On se donne une définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de type Caputo.

Définition 1.3.3 Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par :

$${}^c \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt. \quad (1.3.4)$$

Définition 1.3.4 Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par :

$${}^c\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt. \quad (1.3.5)$$

Remarque 1.3.2 Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classiques $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_{a^+}^n f(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a). \\ {}^c\mathcal{D}_{b^-}^n f(x) = (-1)^n (f^{(n)}(x) - f^{(n)}(b)). \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Lemme 1.3.1 Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a, b])$, alors presque partout:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) &= f^{(n)}(x), \\ \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) &= (-1)^n f^{(n)}(x). \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

1.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1.4.1 Linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$\mathcal{D}^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda \mathcal{D}^\alpha f(t) + \mu \mathcal{D}^\alpha g(t). \quad (1.4.1)$$

pour n'importe quelle approche de la dérivation.

La linéarité de la dérivation fractionnaire découle de la définition correspondante. Par exemple,

pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre p ($k-1 \leq p < k$) on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(n-a)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{(n-a-1)} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt, \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-a)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{(n-a-1)} f(\tau) d\tau + \frac{\mu}{\Gamma(n-a)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{(n-a-1)} g(\tau) d\tau, \\ &= \lambda_a \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) + \mu_a \mathcal{D}_{a^+}^\alpha g(t). \end{aligned}$$

1.5 Equations différentielles fractionnaires

Dans cette section on va discuter sur les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On commence par donner une définition d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire (EDF) :

Définition 1.5.1 Soient $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, alors:

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad (1.5.1)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville. où les conditions initiales pour ce type d'EDF est de la forme

$$\mathcal{D}^{\alpha-k} y(0) = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{I}^{n-\alpha} y(t) = b_n. \quad (1.5.2)$$

De la même manière

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad (1.5.3)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas, les conditions est de cette forme

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (1.5.4)$$

L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les équations différentielles fractionnaires (1.5.1) et (1.5.3) nous assure l'unicité des solutions de l'EDF correspondante, qu'on va prouver dans les théorèmes suivants.

1.5.1 Equation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville

On commence par l'équation homogène de type Riemann-Liouville.

Lemme 1.5.1 Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $y \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville :

$$\mathcal{D}_{0+}^\alpha y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.5.5)$$

Admet une solution unique

$$y(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \dots + C_n t^{\alpha-n}. \quad (1.5.6)$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \dots, n$.

1.5.2 Equation différentielle fractionnaire de type Caputo

On commence par l'équation homogène de type Caputo.

Lemme 1.5.2 *Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $y \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo :*

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha y(t) = 0, \quad (1.5.7)$$

Admet une solution unique

$$y(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{n-1} t^{n-1}. \quad (1.5.8)$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$., on a:

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha t^m = 0, \quad \text{pour } m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (1.5.16), admet une solution particulière, comme

$$u(t) = C_m t^m, \quad \text{pour } m = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \quad (1.5.18)$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.

Donc la solution générale de (1.5.16), donné comme une somme des solutions particulières (1.5.18), C-à-d.

$$y(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{n-1} t^{n-1}.$$

■

Lemme 1.5.3 *Supposons que $y \in C^n([0, 1])$. Alors:*

$$\mathcal{I}_{0+}^\alpha {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha y(t) = y(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{n-1} t^{n-1}. \quad (1.5.9)$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $y \in C^n([0, 1])$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{0+}^\alpha \mathcal{D}_{0+}^\alpha y(t) &= y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} t^k, \\ &= y(t) - \left[y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2} t^2 + \dots + \frac{y^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

On pose $C_m = -\frac{y^{(m)}(0)}{m!} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$. ou trouve facilement l'égalité (1.5.19). ■

Lemme 1.5.4 Soit $1 < \alpha \leq 2$, et $z \in C([0, 1])$. Alors l'unique solution de problème aux limites

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0+}^\alpha y(t) = z(t) & 0 < t < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0. \end{cases} \quad (1.5.10)$$

est donné par :

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) z(s) ds, \quad (1.5.11)$$

tel que

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1} + (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (1.5.12)$$

Preuve.

En appliquant \mathcal{I}_{0+}^α , sur l'équation (1.5.20) on obtient:

$$\mathcal{I}_{0+}^\alpha [\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) - y(t)] = 0 \iff \mathcal{I}_{0+}^\alpha \mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) - \mathcal{I}_{0+}^\alpha y(t) = 0.$$

D'après le lemme précédent ,pour $1 < \alpha \leq 2$ ($n = [\alpha] + 1 = 2$) ,on a:

$$\mathcal{I}_{0+}^\alpha \mathcal{D}_{0+}^\alpha y(t) = y(t) + C_0 + C_1 t, \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

Donc

$$y(t) = C_0 + C_1 t - \mathcal{I}_{0+}^\alpha z(t) = 0,$$

Ce qui implique

$$y(t) = \mathcal{I}_{0+}^{\alpha} z(t) - C_0 - C_1 t,$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (1.5.20) , donne par

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds - C_0 - C_1 t. \quad (1.5.21)$$

Les conditions aux limites implique que:

$$\begin{cases} y(0) + y'(0) = 0 \implies C_0 + C_1 = 0. \\ y(1) + y'(1) = 0 \implies C_0 + 2C_1 = (\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} z)(1) + (\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} z)'(1). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} C_0 = -(\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} z)(1) + (\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} z)'(1) \\ = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} z(s) ds \\ C_1 = (\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} z)(1) + (\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} z)'(1) \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} z(s) ds. \end{cases}$$

L'équation intégro-différentielle (1.5.20) , équivalente à

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} z(s) ds \\ &\quad - \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} z(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} z(s) ds \\ &= \int_0^t \left[\frac{(t-s)^{\alpha-1} + (1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] z(s) ds \\ &\quad + \int_t^1 \left[\frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] z(s) ds \\ &= \int_0^1 G(t,s) z(s) ds. \end{aligned}$$

■

1.6 Equations Intégrales

1.6.1 Opérateurs intégrals linéaires

Définition 1.6.1 Soit $K : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de l'opérateur intégral linéaire sur $C[a, b]$ définit par $\varphi \in C[a, b] \longrightarrow A\varphi \in C[a, b]$, tel que,

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.6.1)$$

ou la fonction $k(x, t)$ s'appelle le noyau de A .

1.6.2 Opérateur compact

Définition 1.6.2 Soit E et F deux espace normés, A un opérateur linéaire de E dans F , on dit que A est un opérateur compact, si l'image de la boule unité $B(0,1)$ de E (par A) est relativement compacte dans F , i.e. si $A(B(0,1))$ est compacte. Autrement dit, A est compacte si pour tout suite (ϕ_n) de $B(0,1)$ de E , on peut extraire une sous suite (ϕ'_{n_k}) que transforme A en une suite convergente $(A(\phi'_{n_k}))$ dans F .

1.6.3 Equations intégrales linéaires (Volterra et Fredholm)

Nous avons l'équation intégrale dans cette forme :

$$(u)(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \quad (1.6.2)$$

où $K(x,t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale (1.6.2), $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont les limites de l'intégration. On peut facilement observer que la fonction inconnue $u(x)$ apparaît sous le signe de l'intégrale. On note ici que le noyau $K(x,t)$ et la fonction $f(x)$ dans l'équation (1.6.2) sont des fonctions données, et λ est un constant paramétré. L'objectif principal de ce texte est de déterminer la fonction inconnue $u(x)$ qui va satisfaire l'équation (1.6.2) en utilisant un certain nombre de techniques de solutions. On doit consacrer ces efforts considérables pour explorer ces méthodes pour trouver des solutions de la fonction inconnue.

Équations intégrales de Volterra

La forme la plus classique de Volterra linéaires équations intégrales est de la forme

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \quad (1.6.3)$$

où les limites de l'intégration sont fonction de x et la fonction inconnue $u(x)$ apparaît linéairement sous le signe. Si la fonction $f(x) = 1$, alors l'équation (1.6.3) devient tout simplement:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \quad (1.6.4)$$

et cette équation est connue comme l'équation intégrale de Volterra du second type, considérant que si $\phi(x) = 0$, alors l'équation 1.6.3 devient:

$$f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, t)u(t)dt = 0 \quad (1.6.5)$$

qui est connu comme l'équation de Volterra du premier type.

Équations intégrales de Fredholm

La forme plus standard des équations lineaires intégrales de Fredholm est donnée par la formule:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (1.6.6)$$

où les limites de l'intégration a et b sont des constantes et la fonction inconnue u apparaît de façon linéaire sous le signe intégral. Si la fonction $\phi(x) = 1$; alors 1.6.6 devient simplement.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (1.6.7)$$

Cette équation est appelée équation intégrale de Fredholm du second type, si on considère que $\phi(x) = 0$, alors 1.6.6 devient:

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt = 0 \quad (1.6.8)$$

qui s'appelle l'équation intégrale de Fredholm de première espèce.

Remarque 1.6.1 $u^n(x), n \neq 1$, ou $\sin u(x)$ etc., puis de Volterra et équations intégrales de Fredholm sont classés comme des équations intégrales non-linéaires. Comme pour les exemples, les équations intégrales suivants sont des équations intégrales non-linéaires :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u^2(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\sin(u(t))dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\ln(u(t))dt$$

Ensuite, si on considère $f(x) = 0$, pour les équations de Volterra ou de Fredholm, donc la suite équation est appelée une équation intégrale homogène, sinon, est appelée une équation intégrale non homogène.

1.7 Equations intégró-différentielles linéaires d'ordre naturel

Soit l'équation intégró-différentielle linéaire suivante:

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1\varphi^{(n-1)}(x) \dots a_n\varphi(x) + \sum_{m=0}^s \int_0^x K_m(x, t)\varphi^m(t)dt = f(x) \quad (1.7.1)$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont des constantes, $f(x), k_m(x, t) (m = 0, 1 \dots s)$ sont des fonctions données, et $\varphi(x)$ est la fonction cherchée.

La fonction $\varphi(x)$ est assujettie à des conditions initiales de la forme

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi'_0, \dots, \varphi^{n-1}(0) = \varphi_0^{n-1} \quad (1.7.2)$$

1.7.1 Équations intégró-différentielles de Fredholm

L'équation intégró-différentielle de Fredholm est décrite sous la forme:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (1.7.3)$$

où $u^{(n)}$ indique la dérivée n -ième de $u(x)$. Autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec $u^{(n)}$ sur le côté gauche. Des exemples de Fredholm intégró-différentielles

$$\begin{cases} u'(x) = 1 - 1/3x + \int_0^1 xu(t)dt \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (1.7.4)$$

et

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = x - \sin(x) - \int_0^{\pi/2} xt u(t)dt \\ u(0) = 0, u'(0) = 1 \end{cases} \quad (1.7.5)$$

1.7.2 Équations intégr-différentielles de Volterra

L'équation intégr-différentielle de Volterra est decrite sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt \quad (1.7.6)$$

où $u^{(n)}$ indique la dérivée de $u(x)$. Autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec $u^{(n)}$ sur le côté gauche. Des exemples pour les équations integro-différentielle de Volterra sont donnés par

$$\begin{cases} u'(x) = -1 + 1/2x^2 - xe^x - \int_0^x tu(t)dt \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (1.7.7)$$

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = 1 - x - (\sin(x) + \cos(x)) - \int_0^\pi tu(t)dt \\ u(0) = -1, u'(0) = 1 \end{cases} \quad (1.7.8)$$

1.8 Equations intégr-différentielles d'ordre fractionnaire

Les équations intégr-différentielles fractionnaires apparaissent dans les processus de modélisation en sciences appliquées (physique, ingénierie, finance, biologie). De nombreux problèmes d'acoustique, d'électromagnétisme, de viscoélasticité, d'hydrologie et d'autres domaines d'application peuvent être modélisés par des équations différentielles fractionnaires.

Considérons l'équation intégr-différentielle d'ordre fractionnaire du type:

$$\begin{cases} D^\alpha u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u(t))dt & t \in [0, 1] \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (1.8.1)$$

où D^α est la dérivée fractionnaire de Caputo et α est un paramètre décrivant l'ordre des dérivée fractionnaire, et $F(u(t))$ est une fonction continue non linéaire.

Chapitre 2

Méthodes de résolution des équations intégrales-différentielles d'ordre fractionnaire

2.1 La méthode Adomian(ADM)

La méthode décompositionnelle d'Adomian permet de résoudre des problèmes fonctionnels de différents types : équation algébriques, différentielles, intégrales, intégrales-différentielles, et aux dérivées partielles (EDP). La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non linéaires. Il suffit qu'on puisse écrire l'équation sous la forme : $AU = f$ qui est appelée forme canonique d'Adomian.

2.1.1 Description de la méthode

Considérons l'équation fonctionnelle

$$AU = f \tag{2.1.1}$$

où A est un opérateur différentiel contenant des termes linéaires et non linéaires, et f est une fonction connue. Le terme linéaire de l'opérateur A est décomposé en $L + R$ où L est inversible, et R est le reste de (2.1.1). On note N le terme non linéaire de A et donc

$A = L + R + N$, alors (2.1.1) s'écrit comme : $LU + RU + NU = f$, L étant inversible, si L^{-1} est son inverse on a :

$$U = \Phi + L^{-1}f - L^{-1}RU - L^{-1}NU \quad (2.1.2)$$

où Φ est la constante de l'intégration.

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad (2.1.3)$$

et à décomposer le terme non linéaire NU sous forme d'une série :

$$NU = F(U) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (2.1.4)$$

Les A_n sont appelés polynômes d'Adomian et sont obtenues grâce à la relation suivante :

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [N(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i)]_{\lambda=0} \quad (2.1.5)$$

où λ est un paramètre réel introduit.

En remplaçant les relations (2.1.3) et (2.1.4) dans (2.1.2), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \Phi + L^{-1}f - L^{-1}R \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (2.1.6)$$

Ce qui entraîne par identification :

$$\begin{cases} u_0 = \Phi + L^{-1}f \\ u_1 = L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_{n+1} = L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Tous les termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ un ne peuvent être calculés, en utilisant l'approximation

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i, \quad n \geq 1, \quad \text{avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = U \quad (2.1.8)$$

Le problème qui se pose est comment déterminer les $(A_n)_{n \geq 0}$.

Les polynômes d'Adomian

Définition 2.1.1 Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) = F(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \end{cases} \quad (2.1.9)$$

La formule proposée par G.Adomian pour calculer des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n \geq 0}$ est la suivante :

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0) = F(u_0) \\ A_1(u_0, u_1) &= u_1 \frac{d}{du} N(u_0) = u_1 F'(u_0) \\ A_1(u_0, u_1, u_2) &= u_2 \frac{d}{du} N(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{d^2}{du^2} N(u_0) = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0) \\ &\dots \\ A_n &= \sum_{v=0}^n c(v, n) N^v(u_0), n \geq 1 \end{aligned}$$

Où , $c(v, n)$ représente la somme de tous les produits (divisée par $m!$) des v termes u_i dont la somme des indices i est égale à n ; m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

2.1.2 Applications sur les équations différentielle d'ordre fractionnaire

Pour le cas des équations différentielles fractionnaires, pour obtenir une solution analytique exacte est très compliqué, ainsi, il est nécessaire de se tourner vers les méthodes numériques.

On considère l'équation différentielle au sens de Caputo avec $0 < \alpha \leq 1$, si f est une fonction continue alors notre problème à valeur initiale est équivalent à l'équation intégrale de Volterra. Dans ce sens, si $u(x) \in C[0; T]$ satisfait le problème, alors il satisfait l'équation

intégrale de Volterra également. L'équation non linéaire de Caputo peut s'écrire sous la forme:

$$D^\alpha u(x) = f(x, u(x)) = g(x) + h(x)u + N(x, u) \quad (2.1.10)$$

où g, h sont des fonctions continues et N est la partie non linéaire de f : En appliquant l'opérateur I sur les deux cotés de l'équation précédente, on trouve l'équation d'intégrale de Volterra:

$$u(x) = u(0) + I^\alpha[g](x) + I^\alpha[h(x)u + N(x, u)](x) \quad (2.1.11)$$

ADM propose la relation de récurrence suivante :

$$u_0(t) = u(0) + I^\alpha[g](x), u_{n+1} = I^\alpha[h(x)u + A_n](x)N \geq 0 \quad (2.1.12)$$

tel que les A_n sont des polynômes Adomian. Finalement, nous rapprochons la solution par la série

$$\Phi_N = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(t) \text{ et } \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N = u(t) \quad (2.1.13)$$

2.1.3 Applications sur les équations intégrales

ADM a acquis un grand intérêt pour les solutions analytiques de Équations intégrales de Fredholm linéaires ainsi que non linéaires, grâce a sa simplicité, la haute précision, et la solution quand elle existe se trouve rapidement dans un environnement convergent de la forme série. La solution ADM est obtenue sous forme série infinie qui converge vers la solution exacte, sous conditions légères. Considérez l'intégrale Fredholm non linéaire suivant:

$$\lambda u(x) - \int_a^b K(x, t)F(u(t))dt = f(x)\lambda \neq 0 \quad (2.1.14)$$

où $f(x)$ est une fonction continue connue sur $[a, b]$, $F[u(t)]$ est une fonction non linéaire connue et $k(x, t)$ est la fonction du noyau qui est connue, continue et bornée $|k(x, t)| \leq M$ sur le carré $D = \{(x, t) : t \in [a, b], x \in [a, b]\}$ où M est le borne supérieure sur le carré D . Bien sûr, le but est de trouver la fonction inconnue $u(x)$, qui est la solution de l'équation

(2.1.14). La solution $u(x)$ lorsque on applique d'ADM, est exprimée sous une forme série définie par:

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x), \quad (2.1.15)$$

où les composantes $u_m(t)$, $m \geq 0$ peuvent être calculées. Le terme non linéaire $F[u(t)]$ de l'équation devrait être représenté, en utilisant un schéma distinct, par le Polynômes adomians $A_m(t)$ comme:

$$F[u(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} A_m[x_0(s), x_1(s), \dots, x_m(s)] \quad (2.1.16)$$

L'orsque on remplace (2.1.15) et (2.1.16) dans (2.1.14), on obtient:

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) = \frac{1}{\lambda} [f(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \int_a^b K(x, t) A_m(t) dt], \quad (2.1.17)$$

Les composantes $u_m(t)$, $m \geq 0$ doivent être calculées en utilisant les relations récursives suivantes:

$$u_0(x) = \frac{1}{\lambda} [f(x)]$$

$$u_{m+1}(x) = \frac{1}{\lambda} \left[\int_a^b K(x, t) A_m(t) dt \right], m \geq 0$$

2.1.4 Applications sur les équations intégrales-différentielle d'ordre usuel

Volterra

La méthode de décomposition d' Adomian donne la solution dans un infini série de termes qui peuvent être déterminés de façon récurrente. La série obtenue peut donner la solution exacte, si une telle solution existe. Dans le cas contraire, la série donne une approximation de la solution qui donne le niveau de précision élevé. Sans perte de généralité,

On peut supposer une équation intégral-différentielle de Volterra du second type donnée par:

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt \\ u(0) = a_0, u'(0) = a_1 \end{cases} \quad (2.1.18)$$

On intègre des deux côtés (2.1.18) de 0 à x deux fois, on obtient:

$$u(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u(t)dt\right) \quad (2.1.19)$$

où les conditions initiales $u(0)$ et $u'(0)$ sont utilisés, et L^{-1} est deux opérateur intégral. Nous utilisons ensuite la série de décomposition:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (2.1.20)$$

dans les deux côtés de (2.1.19) pour obtenir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)dt\right) \quad (2.1.21)$$

ou d'une maniere équivalente:

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)), +L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt\right) + \\ L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_1(t)dt\right), \quad (2.1.22) \\ +L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_2(t)dt\right) + \dots, \end{aligned}$$

Pour déterminer les terms $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots$ de la solution $u(x)$, Nous avons mis la relation de récurrence:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0(x) + a_1(x) + L^{-1}(f(x)), \\ u_{k+1}(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_k(t)dt\right), k \geq 0 \end{aligned}$$

où l'élément $u_0(x)$ est défini par tous les termes non inclus à l'intérieur le signe intégral (2.1.22). Après avoir déterminé les termes $u_i(x)$, $i \geq 0$; la solution $u(x)$ de (2.1.18) est

alors obtenu sous forme de série. En utilisant (2.1.20), la série obtenue converge vers la solution exacte, si une telle solution existe. Cependant, pour des problèmes concrets, une série tronquée $\sum_{n=0}^n u_k(x)$ est généralement utilisée rapprochant la solution $u(x)$ qui peut être utilisée à des fins numériques.

Remarque

- La méthode de décomposition d’Adomian a été présentée avant de gérer une deuxième équations intégral-différentielles d’ordre Volterra. Pour les autres commandes, nous pouvons suivre la même approche, telle que présentée. Cela sera expliqué plus loin dans les détails en examinant les exemples illustratifs, où le premier ordre, deuxième ordre, troisième ordre, et les équations intégral-différentielles de quatrième ordre Volterra seront étudiées.

Fredholm

On considère l’équation intégral-différentielle de second ordre de Fredholm:

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \\ u(0) = a_0, u'(0) = a_1 \end{cases} \quad (2.1.23)$$

Intégration des deux côtés de 2.1.23 de 0 à x deux fois donne:

$$u(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t)u(t)dt\right) \quad (2.1.24)$$

Lorsque les conditions initiales $u(0) = a_0, u'(0) = a_1$ sont utilisées, et L^{-1} un opérateur intégral double. La méthode de décomposition d’ Adomian est utilisée par la décomposition par une série:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (2.1.25)$$

on substitue (2.1.25) dans 2.1.24, on obtien

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)dt\right) \quad (2.1.26)$$

ou d'une maniere équivalente:

$$\begin{aligned}
 u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)), +L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t)u_0(t)dt\right) + \\
 L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t)u_1(t)dt\right), \quad (2.1.27) \\
 +L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t)u_2(t)dt\right) + \dots,
 \end{aligned}$$

Pour déterminer les termes $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots$:: de la solution $u(x)$, Nous avons mis la relation de récurrence:

$$\begin{aligned}
 u_0(x) &= a_0 + a_1x + L^{-1}(f(x)), \\
 u_{k+1}(x) &= L^{-1}\left(\int_a^b K(x,t)u_k(t)dt\right), k \geq 0
 \end{aligned}$$

où l'élément $u_0(x)$ est défini par tous les termes non inclus à l'intérieur le signe intégral (2.1.27). Après avoir déterminé les termes $u_i(x)$, $i \geq 0$; la solution $u(x)$ de (2.1.27) est alors obtenu sous forme de série. En utilisant (2.1.25), la série obtenue converge vers la solution exacte, si une telle solution existe. Cependant, pour des problèmes concrets, une série tronquée $\sum_{n=0}^n u_k(x)$.

2.1.5 Applications sur les équations intégral-différentielle d'ordre fractionnaire

Cas non-linéaire

Considérons l'équation (1.8.1). On compose l'opérateur I^α sur les deux côtés de l'équation, nous obtenons (1.8.1):

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + (I^\alpha(f(x) + \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt)) \quad (2.1.28)$$

La méthode d'Adomian définit la solution $u(x)$ par la série:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_n \quad (2.1.29)$$

et la fonction non linéaire F est décomposée comme:

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} A_n \quad (2.1.30)$$

où A_n sont les polynômes d'adomian donnés par:

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\Phi^n} F \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Phi^k u_k \right) \right]_{\Phi=0}, \quad n = 0, 1, 2 \quad (2.1.31)$$

Les termes u_0, u_1, u_2, \dots sont déterminés récursivement par:

$$u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} u^k(0) \frac{x^k}{k!} + \mathcal{I}^\alpha f(x) \quad (2.1.32)$$

$$u_{k+1} = (\mathcal{I}^\alpha \left(\int_0^x (K(x,t) A_k) dt \right)) \quad (2.1.33)$$

Après avoir défini les composantes u_0, u_0, u_0, \dots , la solution u sous la forme d'une série définie par (2.1.29) suit immédiatement. Il est important de noter que la méthode de décomposition suggère que le terme u_0 soit défini par les conditions initiales et la fonction $f(x)$ comme décrit ci-dessus. les autres termes u_0, u_0, u_0, \dots etc. sont dérivés d'une manière récurrente.

Exemple 2.1.1 On considere l'equation fracionnaire integro-differenitelle d'ordre fracionnaire suivante:

$$\begin{cases} D^{0.75} y(t) = \left(-\frac{t^2 e^t}{5}\right) y(t) + \frac{6t^{2.25}}{\Gamma(3.25)} + \int_0^t e^t x y(x) dx \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.1.34)$$

La slotion exact est: $y(t) = t^3$.

Selon la decomposotion d'Adomian:

$$y_0(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y^k(0) \frac{t^k}{k} + \frac{6}{\Gamma(3.25)} I^\alpha t^{2.25} = 0 + \frac{6}{\Gamma(3.25)} \frac{\Gamma(2.25 + 1)}{\Gamma(2.25 + 0.75 + 1)} t^{2.25+0.75} \quad (2.1.35)$$

$$y_0(t) = t^3 \quad (2.1.36)$$

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= -1/5 I^\alpha(t^2 e^t y_0(t)) + I^\alpha \int_0^t e^t x y_0(x) dx \\
 y_1(t) &= -1/5 I^\alpha(t e^t y_0(t)) + I^\alpha \int_0^t e^t x y_0(x) dx \\
 y_1(t) &= -1/5 I^\alpha(t^2 e^t y_0(t)) + 1/5 I^\alpha(t^5 e^t) \\
 y_1(t) &= -1/5 I^\alpha(t^2 e^t y_0(t)) + 1/5 I^\alpha(t^2 e^t y_0(t)) \\
 y_1(t) &= 0 \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Donc, la solution approximative par la methode d'Adomian est egal a la solution exacte.

Exemple 2.1.2 On considère l'equation non-lineaire suivante:

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = 1 + \int_0^t e^{-x} y^2(x) dx & 0 < \alpha \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.1.37)$$

La slotion exact est: $y(t) = e^t$.

Selon la decomposotion d'Adomian:

$$\begin{aligned}
 y_0(t) &= y(0) + I^\alpha(1) \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 y_{n+1}(t) &= I^\alpha \left(\int_0^t e^{-x} A_n(x) dx \right)
 \end{aligned}$$

ou $A_0 = y_0^2$, $A_1 = y_0 y_1$, $A_2 = 2y_0 y_2 + y_1^2 + \dots$ sont les polynomes d'Adomian pour le terme non-linéaire $F(y) = y^2$

En suivant la même procédure que l'exemple précédent, nous prenons les extensions de Taylor tronquées pour le terme exponentiel $e^{-x} \sim 1 - x + x^2/2 - x^3/6$

$$y_0(t) = 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (2.1.38)$$

$$y_1(t) = I^\alpha \left(\int_0^t e^{-x} A_0(x) dx \right) \quad (2.1.39)$$

$$\begin{aligned} y_1(t) = & \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \right] t^{\alpha+1} + \left[\frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 2)} \right] t^{3\alpha+1} + \left[\frac{2}{\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(2\alpha + 2)} \right] t^{2\alpha+2} \\ & - \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \right] t^{\alpha+2} - \left[\frac{\Gamma(2\alpha + 2)}{\Gamma^2(1 + \alpha)\Gamma(3\alpha + 3)} \right] t^{3\alpha+2} - \left[\frac{2\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(2\alpha + 3)} \right] t^{2\alpha+2} + \dots \\ & \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

En Matlab, on a calculé la solution numérique. Les résultats obtenus se trouvent dans la figure 2.1.1 . La figure 2.1.1 montre la solution approximative de 2.1.37 pour certaines valeurs de α obtenues après 3 itérations. La valeur de $\alpha = 1$ est le seul cas pour lequel nous connaissons la solution exacte et notre solution approchée est en bon accord avec les valeurs exactes.

2.2 La méthode Homotopy(HPM)

La méthode de perturbation de l'homotopie (HPM) a été établie par Ji-Haun-He en 1999. La méthode a été utilisé par beaucoup de chercheurs et appliquée pour résoudre plusieurs équations linéaires et non linéaires.

2.2.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non linéaire suivante:

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \quad (2.2.1)$$

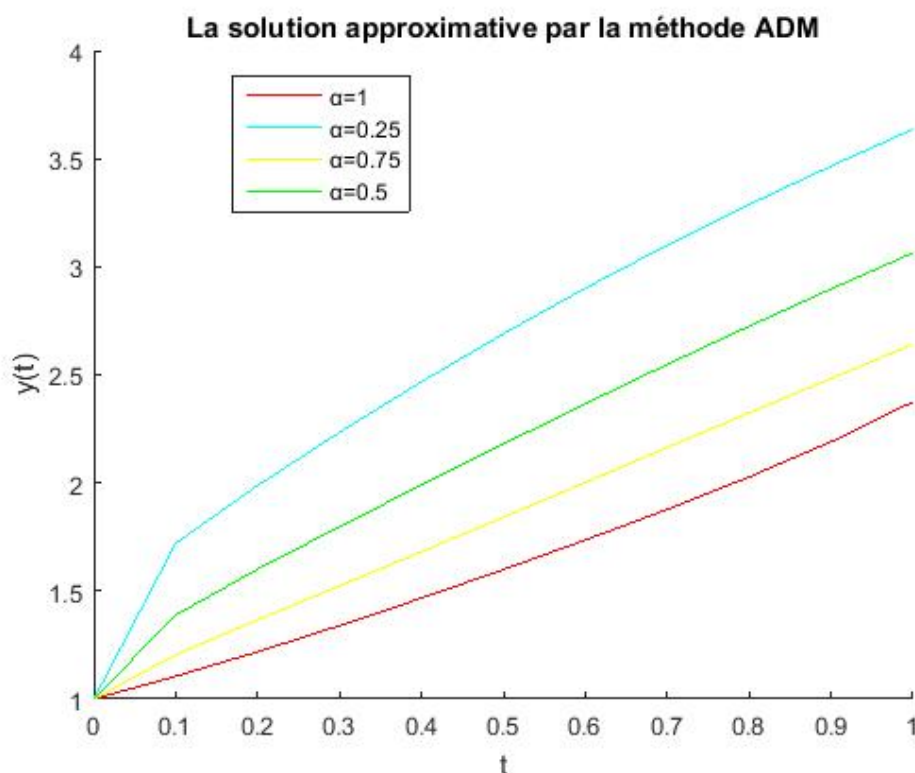


Figure 2.1.1 : La solution approximative par la méthode ADM

avec les conditions aux limite:

$$\beta(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (2.2.2)$$

où A est un opérateur différentiel général, B est un opérateur de la limite, $f(r)$ est une fonction analytique connue, et Γ est la limite du domaine Ω .

L'opérateur A peut être divisé en deux parties qui sont L et N où L est un opérateur linéaire et N est un opérateur non-linéaire, alors :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (2.2.3)$$

Avec la technique de l'homotopie nous contruissons une homotopie :

$$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2.4)$$

quit satisfaite :

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad p \in [0, 1]; \quad r \in \Gamma \quad (2.2.5)$$

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + PL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (2.2.6)$$

où $p \in [0, 1]$ est un paramètre, u_0 est une approximation initiale de (2.2.1) qui satisfait les conditions aux limites.

Evidement, d'après les deux équations précédentes nous aurons :

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (2.2.7)$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (2.2.8)$$

En faisant varier p de 0 à 1, on change $v(r, p)$ de $u_0(r)$ à $u(r)$. D'après le (HPM), nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petit paramètre, et supposons que les solutions d'équations peut être écrit comme une série suivante :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.2.9)$$

Mettant $p = 1$, la solution approximative de l'équation (2.2.1) est :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_2 + \dots \quad (2.2.10)$$

2.2.2 Applications sur les équations différentielle d'ordre fractionnaire

La méthode HPM qui fournit une solution approximative ou analytique est appliquée à plusieurs problèmes des équations non-linéaires. Pour illustrer cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non-linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha u(t) = N(u) + g(t), t > 0 \quad (2.2.11)$$

ou $m - 1 < \alpha < m$, N est un opérateur non-linéaire, $g(t)$ est une fonction analytique connue et ${}^c\mathcal{D}^\alpha u$ est la dérivé fractionnaire au sens du Caputo d'ordre α .

Par la technique de l'homotopie, nous construisons un homotopie suivant :

$$(1 - p)L[\phi(t, p) - \phi_0(t)] = -p({}^c\mathcal{D}^\alpha \phi(t, p) - N(\phi(t, p) - g(t))) \quad (2.2.12)$$

Où $p \in [0, 1]$ est un paramètre enfonçant, ϕ_0 est une estimation initiale de $u(t)$ et L est un opérateur linéaire qui peut être définie comme $L = \frac{d^m}{dt^m}$ ou $L = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$. Lorsque $p = 0$, l'équation précédente devient:

$$L[\phi(t, 0) - \phi_0(t)] = 0 \quad (2.2.13)$$

Et lorsque $p = 1$, l'équation (2.2.12) devient l'équation (2.2.11). D'après HPM, nous pouvons utiliser en premier paramètre enfonçant p comme un petit paramètre, et suppose que la solution de l'équation (2.2.11) peut être écrite comme une série suivante :

$$\phi = \phi_0 + p\phi_1 + p^2\phi_2 + \dots \quad (2.2.14)$$

On remplace (2.2.14) dans (2.2.12), et par identification des termes avec les puissances identiques de p , nous obtenons les équations :

$$\begin{aligned} L[\phi_1] &= -({}^C\mathcal{D}^\alpha \phi_0 - N_0(\phi_0) - g(t)), \\ L[\phi_2] &= L[\phi_1] - ({}^C\mathcal{D}^\alpha \phi_1 - N_1(\phi_0, \phi_1)), \\ L[\phi_3] &= L[\phi_2] - ({}^C\mathcal{D}^\alpha \phi_2 - N_2(\phi_0, \phi_1, \phi_2)), \\ L[\phi_4] &= L[\phi_3] - ({}^C\mathcal{D}^\alpha \phi_3 - N_3(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)) \end{aligned}$$

Où, $N(\phi_0 + p\phi_1 + p^2\phi_2 + \dots) = N_0(\phi_0) + pN_1(\phi_0, \phi_1) + p^2N_2(\phi_0, \phi_1, \phi_2) + \dots$ La solution approximative d'équation (2.2.11), par conséquent, peut être obtenue comme suit:

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} \phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots \quad (2.2.15)$$

En appliquant l'opérateur I^α aux les deux côtés de l'équation (2.2.11), on trouve

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} u^k(0_+) \frac{t^k}{k!} + I^\alpha N(u) + I_\alpha g(t), t > 0 \quad (2.2.16)$$

Négligeant le terme non linéaire $I^\alpha N(u)$, nous pouvons utiliser la partie restante comme l'estimation initiale de la solution, c'est-à-dire

$$\phi_0(t) = \sum_{k=0}^{m-1} u^k(0_+) \frac{t^k}{k!} + I^\alpha g(t) t > 0 \quad (2.2.17)$$

2.2.3 Applications sur les équations inégro-différentielle d'ordre fractionnaire

Exemple 2.2.1 *On considère le premier ordre non linéaire suivant, avec conditions aux limites initiales*

$$\begin{cases} D^\alpha y(x) = x(1 + e^x) + 3e^x + y(x) \int_0^x y(t)dt & 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.2.18)$$

Selon HPM, on construit l'homotopie suivante:

$$D^\alpha y(x) = P[x(1 + e^x) + 3e^x + y(x) \int_0^x y(t)dt] \quad (2.2.19)$$

On remplace la relation (2.2.9) dans l'équation (2.2.19). Par assimilation des termes qui ont les mêmes puissances de P , qui forment une série des équations suivante:

$$\begin{aligned} P^0 : D^\alpha y_0(x) &= 0 \\ P^1 : D^\alpha y_1(x) &= x(1 + e^x) + 3e^x + y_0(x) \int_0^x y_0(t)dt \\ P^2 : D^\alpha y_2(x) &= y_0(x) \int_0^x y_1(t)dt + y_1(x) \int_0^x y_0(t)dt \\ &\dots \end{aligned}$$

On appliquant l'opérateur I^α aux équations précédentes, et en utilisant la condition initiale ($y(0) = 1$), on obtient les équations suivantes:

$$y_0(x) = 1 \quad (2.2.20)$$

$$y_1(x) = I^\alpha[x(1 + e^x) + 3e^x + y_0(x) \int_0^x y_0(t)dt] \quad (2.2.21)$$

$$y_2(x) = I^\alpha[y_0(x) \int_0^x y_1(t)dt + y_1(x) \int_0^x y_0(t)dt] \quad (2.2.22)$$

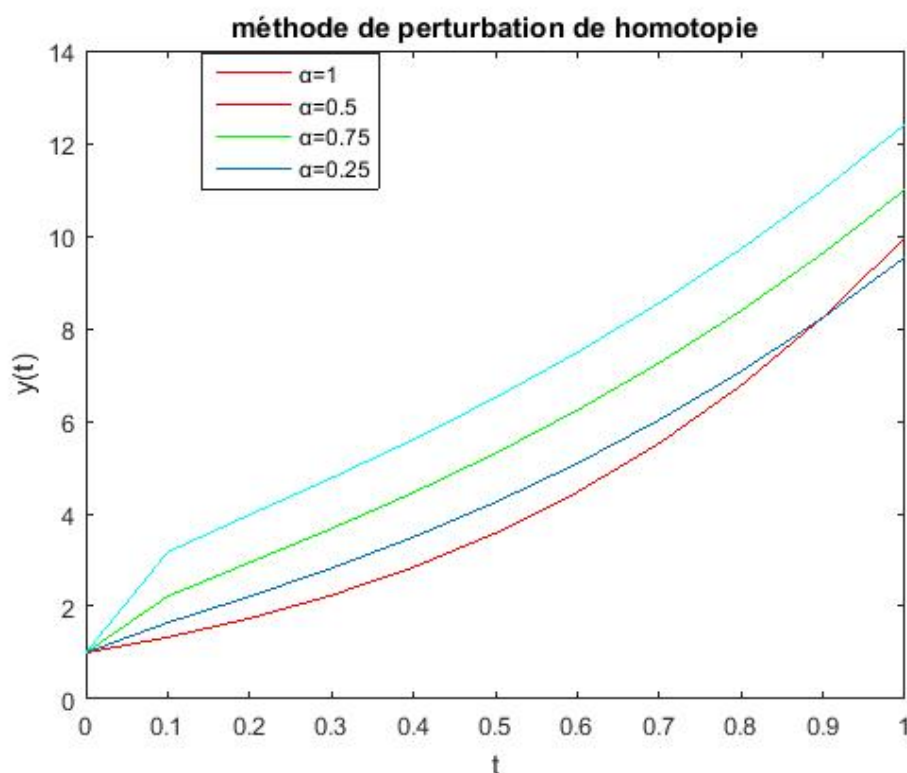


Figure 2.2.1 : Méthode de perturbation de Homotopie

et ainsi de suite, en prenant les extensions Tylor tronquées pour le terme exponentiel dans (2.2.21) et (2.2.22): $e^x \approx 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, donc par resolutant les equations ((2.2.19)), ((2.2.21)) et (2.2.22) on obtient y_1, y_2, \dots

$$y_1(x) = \frac{3}{\Gamma(\alpha + 1)}x^\alpha + \frac{6}{\Gamma(\alpha + 2)}x^{\alpha+1} + \frac{5}{\Gamma(\alpha + 3)}x^{\alpha+2} + \frac{6}{\Gamma(\alpha + 4)}x^{\alpha+3} + \frac{4}{\Gamma(\alpha + 5)}x^{\alpha+4} \quad (2.2.23)$$

$$y_2(x) = 3\left[\frac{\Gamma(\alpha + 1) + \Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 2)}\right]x^{2\alpha+1} + 6\left[\frac{\Gamma(\alpha + 2) + \Gamma(\alpha + 3)}{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(2\alpha + 3)}\right]x^{2\alpha+2} + 5\left[\frac{\Gamma(\alpha + 3) + \Gamma(\alpha + 4)}{\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(2\alpha + 4)}\right]x^{2\alpha+3} \\ + 6\left[\frac{\Gamma(\alpha + 4) + \Gamma(\alpha + 5)}{\Gamma(\alpha + 4)\Gamma(2\alpha + 5)}\right]x^{2\alpha+4} + 4\left[\frac{\Gamma(\alpha + 3) + \Gamma(\alpha + 6)}{\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(2\alpha + 6)}\right]x^{2\alpha+5}$$

L'approximation des deux termes est fomée par l'equation suivante:

$$\Phi_2(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) \quad (2.2.24)$$

En Matlab, on a calculé la solution numérique. Les résultats obtenus se trouvent dans la figure 2.2.1 . La figure 2.2.1 montre les solutions approximatives de (2.2.18) pour $0 \leq x \leq 1$ et pour certaines valeurs de $\alpha \in]0, 1]$.

Exemple 2.2.2 On considere l'equation fracionnaire integro-differenitelle suivante:

$$\begin{cases} D^{0.75}y(t) = (-\frac{t^2e^t}{5})y(t) + \frac{Tt^{2.25}}{\Gamma(3.25)} + \int_0^t e^t sy(x)dx \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.2.25)$$

La slotion exact est: $y(t) = t^3$ Selon HPM, on construit l'hmotopie suivante:

$$D^{0.75}y(t) = p[(-\frac{t^2e^t}{5})y(t) + \frac{Tt^{2.25}}{\Gamma(3.25)} + \int_0^t e^t xy(x)dx] \quad (2.2.26)$$

On remplace la relation (2.2.9) dans l'equation (2.2.26). Par assimilant les termes qui ont les mêmes puissances de P , qui forment une serie des equations suivante:

$$\begin{aligned} P^0 : D^{0.75}y_0(t) &= 0 \\ P^1 : D^{0.75}y_1(t) &= (-\frac{t^2e^t}{5})y_0(t) + \frac{Tt^{2.25}}{\Gamma(3.25)} + \int_0^t e^t xy_0(x)dx \\ P^2 : D^{0.75}y_2(t) &= (-\frac{t^2e^t}{5})y_1(t) + \frac{Tt^{2.25}}{\Gamma(3.25)} + \int_0^t e^t xy_1(x)dx \\ &\dots \\ P^n : D^{0.75}y_n(t) &= (-\frac{t^2e^t}{5})y_{n-1}(t) + \frac{Tt^{2.25}}{\Gamma(3.25)} + \int_0^t e^t xy_{n-1}(x)dx \end{aligned}$$

On appliquant l'opérateur I^α aux équations précédentes, et on utilisant la condition initiale ($y(0) = 0$), on obtient les equations suivantes:

$$y_0(t) = 0 \quad (2.2.27)$$

$$y_1(t) = I^{0.75}[(-\frac{t^2e^t}{5})y_0(t) + \frac{Tt^{2.25}}{\Gamma(3.25)} + \int_0^t e^t xy_0(x)dx] \quad (2.2.28)$$

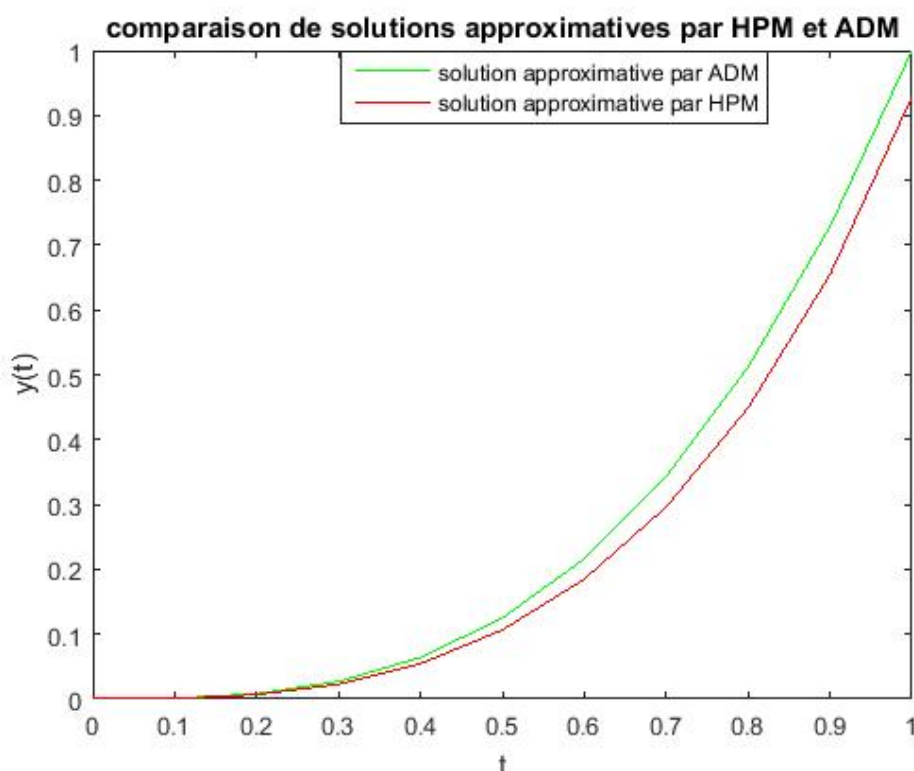


Figure 2.2.2 : Comparaison des solutions approximatives en utilisant HPM et ADM

$$y_1(t) = I^{0.75} \left[\left(-\frac{t^2 e^t}{5} \right) y_1(t) + \frac{T t^{2.25}}{\Gamma(3.25)} + \int_0^t e^t x y_1(x) dx \right] \quad (2.2.29)$$

$$y_n(t) = I^{0.75} \left[\left(-\frac{t^2 e^t}{5} \right) y_{n-1}(t) + \frac{T t^{2.25}}{\Gamma(3.25)} + \int_0^t e^t x y_{n-1}(x) dx \right] \quad (2.2.30)$$

par resolant les equations ((2.1.35)), ((2.2.28)) et (2.2.29) on obtient y_1, y_2, \dots

$$y_1(t) = t^3 \quad (2.2.31)$$

$$y_2(t) = -\frac{1}{5} \left[\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3.75)} \right] t^{2.75} - \frac{1}{5} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4.75)} t^{3.75} - \frac{1}{10} \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5.75)} t^{4.75} + \frac{1}{6} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6.75)} t^{5.75} \\ + \frac{1}{5} \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(7.75)} t^{6.75} + \frac{1}{10} \frac{\Gamma(8)}{\Gamma(8.75)} t^{7.75} + \frac{1}{20} \frac{\Gamma(9)}{\Gamma(9.75)} t^{8.75}$$

L'aproximation des deux termes est fomée par l'equation suivante:

$$\Phi_2(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) \quad (2.2.32)$$

Pour faire une comparaison des deux méthodes ADM et HPM, en Matlab, on a calculé les solutions numériques aproximatives pour $\alpha = 0.75$. Les résultats obtenus se trouvent dans la figure 2.2.2 .

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode ADM et la méthode HPM pour trouver la solution de problème de valeur initiale des équations intégral-différentiel fractionnaire. Nous avons observé que les deux méthodes sont très efficaces, ce qui justifie leur facilité dans la résolution des équations concernées. On a constaté que HPM peut avoir moins de complexité dans le calcul, néanmoins, en ce qui concerne la solution numérique, on a trouvé que les deux méthodes sont équivalentes, et sont rapprochées à la solution exacte.

Bibliographie

- [1] S. Abbasbandy. *Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomians decomposition method*. Applied Mathematics and Computation 173 (2006), 493–500.
- [2] A. Ahmed, P. Kirtiwant, M. Shakir. *The Approximate Solutions of Fractional Integro-Differential Equations using Modified Adomian Decomposition Method*. journal of mathematics vol. 5, no.1, (2019), 21–39.
- [3] A. Asma, A. Elbeleze, A. Kilic, M. Bachok. *Approximate solution of integro-differential equation of fractional (arbitrary) order*. Taib aJournal of King Saud University(2015), 61–68.
- [4] H. O. Bakodah, M. Al-Mazmumy, S. O. Almuhalbedi. *Solving system of integro differential equations using discrete adomian decomposition method*. Journal of Taibah University for Science (2019), 805–812.
- [5] S.H. Behiry, R.A. Abd-Elmonem, A.M. Gomaa . *Discrete Adomian Decomposition solution of Nonlinear Fredholm Integral Equation*. Shams Engineering Journal (2010), 97–101.
- [6] S. Benyoucef. *Résolution numérique des équations intégro-différentielles de Fredholm*. Mémoire Magistère (2014), Université de M'sila.
- [7] J. Biazar. *Solution of systems of integral–differential equations by Adomian decomposition method*. Applied Mathematics and Computation. vol. 168 (2005), 1232–1238.

-
- [8] I. Hashim. *Adomian decomposition method for solving BVPs for fourth-order integro-differential equations*. journal computational and applied mathematics (2005), 658–664.
- [9] M. Kostic. *Abstract Volterra Integro-Differential Equations*. CRC Press.
- [10] D. Madjda. *Approximation des équations différentielles d'ordre fractionnaire*. Mémoire Master (2019), Université de M'sila.
- [11] J. Manafianheris. *Solving the integro-differential equations using the modified Laplace Adomian decomposition method*. Journal of Mathematical Extension. Vol. 6, No. 1, (2012), 1-15.
- [12] C. Milici, G. Draganescu, M. Tenreiro, A. José. *Introduction to fractional differential equations*. Springer.
- [13] D. Rani AND V. Mishra. *Solutions of Volterra integral and integro-differential equations using modified Laplace Adomian decomposition method*. JAMSI, vol. 15, No. 1, (2019), 5–18.
- [14] B. Tellab. *Résolution des équations différentielles fractionnaires*. Thèse Doctorat (2018), Université de Constantine.
- [15] Y. Zhou. *Basic Theory of Fractional Differential Equations*. World Scientific.
- [16] F. Zidour. *La résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire*. Mémoire Master (2015), Université de Khemis Miliana.