



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Thème

*Simulation numérique de transfert thermique en
utilisant les coordonnées curvilignes*

Présenté par :
DJAJDA RAWIYA

Devant le jury composé de :

<i>M_r</i> BOUNAB Noura	grade MCB	Université de M'sila	Président.
<i>M_r</i> MIHOUBI Hamza	grade MCB	Université de M'sila	Encadreur.
<i>M_r</i> BALIZAK Tahar	grade MAA	Université de M'sila	Examineur.



DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à tous ceux

et celles qui sont chères à mon cœur :

**A ma chère maman.*

**Mon très cher papa qui mon tant donnée tout au long de ma vie.*

**Mes sœurs et mes beaux frères.*

**Toute la famille Surtout les filles de ma sœur Jannat Al-Rahman et Assil et les
poussins Mohamed Adam et Amir.*

**Mes amis de ma section pour les années qu'on a passé ensemble.*

-Remerciement-

De prime abord, louange à Dieu de m'avoir donné la force, le courage et la patience de mener à bien ce modeste travail.

*Ma profonde gratitude et mes remerciements les plus chaleureux vont particulièrement à mon encadreur **Mr. Mihoubi Hamza**, Professeur à l'Université Mohamed Boudiaf de M'sila, de m'avoir suivi et dirigé tout au long de la réalisation de ce travail. Aussi, je le remercie pour sa disponibilité permanente, pour son orientation efficace et pour ses idées originales qui ont servi à enrichir cette Mémoire.*

*Je remercie vivement mon enseignant **Mr. Bounab N**, Professeur à l'Université de M'sila, pour l'honneur qu'il ma fait d'avoir accepté d'examiner mon travail et de présider le jury.*

Enfin, je remercie très sincèrement tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail et surtout ma chère sœur Razika.

-Merci-

Table des matières

Sommair

Liste des figures	i
Liste des tableaux	ii
Nomenclature.....	iii
INTRODUCTION GENERALE.....	1

CHAPITRE I: GÉNÉRALITÉS ET SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHYQUE

INTRODUCTION	4
I.1- NOTIONS DE BASE.....	4
I.1.1- Définir sur la simulation numérique	4
I.1.2- Les déférents modes de transfert de chaleur	4
I.1.3- La convection	5
I.1.3.1- Définition.....	5
I.1.3.2- Les différents types de convection	5
• Convection naturelle	6
I.2 - DYNAMIQUE DES FLUIDES ET LES NANOFUIDES	7
I.2.1- Définition sur les Nanofluides	7
I.2.2- Dynamique des fluides compitacionelle (CFD)	7
I.2.2.1- Grandes étapes de CFD	9
I.2.2.2- Outils de CFD et code calcul	9
I.2.2.3- Applications de la CFD	9
I.3 – SYSTEME DE COORDONNEES ARBITRAIRES.....	10
I.3.1- Coordonnées curvilignes générales non orthogonales	10
I.3.1.1- Tenseur métrique. Éléments de longueur et de volume d'arc en coordonnées curvilignes	10
I.3.2- Coordonnées curvilignes orthogonales générales	11
I.3.1.1- Coordonnées orthogonales. Éléments de longueur, de surface et de volume	11

I.3.3- Coordonnées cylindriques.....	12
I.3.3.1- Relation différentielle de base	13
I.3.4- Coordonnées sphériques	14
I.3.5- Coordonnées bipolaires.....	15
I.3.5.1- Coordonnées bipolaires (dans l'espace)	17
I.4 – SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE... ..	18

CHAPITRE II: FORMULATION MATHÉMATIQUE ET POSITON DU PROBLEME

INTRODUCTION	21
II.1- FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLEME	21
II.1.1- Description du problème.....	21
II.1.2- Hypothèses simplificatrices	23
II.1.3- Les Équations Générales.....	23
II.1.3.1- Coordonées Cartésiennes	23
II.1.3.2- Coordonées Curvilignes (bipolaires).....	26
II.1.3.2.1- Calcul des coefficients métriques.....	28
II.2.1- Mise sous forme adimensionnelle.....	28
II.2.1.1- Groupement adimensionnés	28
a) Nombre de Prandtl.....	28
b) Nombre de Reynolds.....	30
c) Nombre de Peclet	30
d)Nombre de Rayleigh	31
e) Nombre de Nusselt	31
II.2.1.2- Evaluation du nombre de Nusselt	32
II.2.2- Condition aux limites.....	32

CHAPITRE III : PROCEDURE DE SIMULATION NUMERIQUE

INTRODUCTION	34
III.1- CALCUL NUMERIQUE (MODELISATION ET SIMULATION)	34
III.2- LES METHODES PRINCIPALES DE DISCRETISATION	35

III.2.1- Méthode des différents finis (MDF).....	35
III.2.2- Méthode des éléments finis (MEF)	36
III.2.3- Méthode Spectrales (MS).....	37
III.2.4- Méthode Volumes finis (MDF).....	38
III.3- METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE	40
III.3.1- Maillage et volume élémentaire d'intégration	40
III.3.2- Discrétisation de l'équation de transfert.....	42
III.3.3.1- Intégration de l'équation de transfert	43
III.3.3.2- Linéarisation du terme source	44
III.3.3.3-Discrétisation de l'équation de continuité(II.22)	45
III.3.4- Choix du schéma	46
• Le schéma « power Law » (loi puissance)	47
III.4- DISCRETISATION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR.....	49
III.4.1- Discrétisation des conditions aux limites	53
III.5- DISCRETISATION DE L'EQUATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT	53
III.5.1- Discrétisation des conditions aux limites	55
III.6- DISCRETISATION DE L'EQUATION DE LA FONCTION DE COURANT.....	56
III.6.1- Discrétisation des conditions aux limites	56
III.7- DISCRETISATION DES COMPOSANTES DE LA VITESSE.....	57

CHAPITRE IV : RESULTATS ET DISSCUSSIONS

INTRODUCTION	59
IV.1- PRESENTATION DU CODE DE CALCULE.....	59
IV.1.1- Code de calcul FLUENT	59
IV.1.2- Préprocesseur GAMBIT	60
IV.2- TEST DE MAILLAGE	60
IV.3- VALIDATION DES RESULTATS	60
IV.4- DISCUSSION DES RESULTATS	61
IV.4.1- Effet de la concentration de Nanoparticules	61
CONCLUSION GENERALE	70
ANNEXES.....	72
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUE.....	76

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : les différents modes de transfert de la chaleur	5
Figure I.2 : les deux modes de transfert de chaleur par convection	6
Figure I.3 : Dynamique des fluides numérique CFD [4]	8
Figure I.4 : Application de CFD	10
Figure I.5 : Représentation des coordonnées cylindrique (r, φ, z)	13
Figure I.6 : Représentation schématique des coordonnées sphérique (r, φ, z)	14
Figure I.7 : Représentation schématique des coordonnées bipolaires (r, φ, z)	15
Figure II.1: Géométrie et condition aux limites.....	21
Figure II.2: Représentation schématique des coordonnées curvilignes (bipolaire)	26
Figure III.1: le principe du calcul numérique.....	34
Figure III.2: Domaine physique (a) et domaine calculé (b)	40
Figure III.3: Représentation schématique du volume de contrôle sur cette figure, le volume de contrôle entourant le nœud P est limité par les faces	41
Figure III.4: La fonction $A(P)$ pour les différents schémas [17]	47
Figure III.5: Représentation schématiques des nœuds P, E, W et S dans le maillage	50
Figure IV.1: Comparaisons de nos résultats et d'Abu-Nada et al. [20], mihoubi et al [21]. et Kuhen et al [22].	60
Figure IV.2: Nusselt moyen pour des différents fluides de concentration lorsque $Ra = 10^5$	62
Figure IV. 3: Nusselt moyen pour des différents fluides de base en fonction de Rayleigh à $\varphi = 6\%$	62
Figure IV.4: Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne (a) et externe (b) différents concentration et pour $Ra = 10^5$	53

Figure IV.5: L'évolution de la fonction de courant en fonction de concentration, pour différents fluides de base aux des différents nombres de Rayleigh	64
Figure IV.6: Profil de la température locale de la section médiane pour différents nanofluides, au $Ra=10^5$ et $\phi=6\%$	64
Figure IV.7: Isothermes et fonction de courant pour différents fluides de base, « Eau, Ethylène Glycol (EG), Huile de moteur, glycérine » et avec 6% , $Ra=10^4$	66
Figure IV.8: Les histogrammes de l'efficacité du transfert thermique pour différent fluides a base.....	69

LISTE DES TABLEAUX

Tableau. II.1. Les propriétés thermo physiques des différents fluides de base et Nanoparticule (Ag) [13].....	22
Tableau III.1. Les différentes expressions des termes: Γ_ϕ , S_ϕ , ϕ	42
Tableau III.2. La fonction $A(P)$ pour différents schémas [17]	46
Tableau. IV.1. Étude du maillage.....	56
Tableau. IV.2. Taux d'amélioration pour différents nanofluides a bas d'argent.....	67

Nomenclature

Lettres latines

k	[W/m ² K]	: Conductivité thermique.
H	[m]	: La longueur caractéristique.
\vec{g}	[m/s ²]	: Accélération de la pesanteur.
P	[N/m ²]	: Pression.
S_ϕ		: Terme source.
T	[K]	: Température.
T_1	[K]	: Température de référence.
T_2	[K]	: Température de la paroi froide.
T_3	[K]	: Température de la paroi chaude.
ΔT	[K]	: Ecart de température dimensionne($T_2 - T_1$)
u, v	[m/s]	: Composantes de vitesses en coordonnée cartésiennes.
x, y	[m]	: Coordonnées cartésiennes.

Lettres grecques

α	[m ² /s]	: Diffusivité thermique.
β	[1/K]	: Coefficient de dilatation du fluide à pression constante.
μ	[kg/m ² s]	: Viscosité dynamique.

ν	$[m^2/s]$: Viscosité cinématique.
ρ	$[kg/m^3]$: Masse volumique.
ρ_0	$[kg/m^3]$: Masse volumique à T_0 .
φ		: La concentration volumique.
ϕ		: Variable dépendante.
Γ_Φ	$[m^2/s]$: Coefficient de diffusion de Φ .
ω	$[1/s]$: Vorticité.
ψ	$[m^2/s]$: Fonction de courant.

Indics

nf		: Nanofluide.
p		: Nanoparticule.
f		: Fluide de base.
1		: Température froide.
2		: Température chaude

Exposant

*		: Paramètres adimensionnels.
---	--	------------------------------

INTRODUCTION GENERALE

Le transfert de chaleur est un processus qui a une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies. Bien qu'il se manifeste sous diverses formes (rayonnement, conduction et convection), cette dernière est la plus répandue dans certains domaines bien spécifiques tels que le refroidissement des processeurs et composants électroniques, les radiateurs et les échangeurs de chaleurs, etc. Par conséquent, un grand nombre de chercheurs ont mené de nombreux tests expérimentaux liés à la description du phénomène qui gère la convection. Les méthodes expérimentales sont coûteuses, longues et peuvent être dangereuses. En effet, il est devenu nécessaire de recourir aux méthodes numériques ou ce qui est connue sous le nom de modification mathématique, ainsi que la simulation numérique, qui est l'art de la représentation de la réalité physique dans des modèles abstraits auxquels on peut accéder par l'analyse et le calcul.

La simulation numérique des phénomènes de transferts thermiques occupe une place très importante dans la recherche et l'industrie. La modélisation mathématique du phénomène est fondée sur les équations de la mécanique des fluides. Elle est couplée avec l'équation de l'énergie ; leur résolution est rendue possible en utilisant une des nombreuses méthodes numériques. Parmi les méthodes les plus utilisées, on peut citer des différences finies, éléments finis et volumes finis. Cette dernière est à l'origine de plusieurs codes de calcul (CFD) comme le logiciel FLUENT, qu'on a utilisé pour la suite de ce travail.

L'amélioration du transfert de chaleur par convection est l'objet principal de plusieurs travaux, bien que les idées de ce dernier aient principalement touché surtout la géométrie des systèmes, et la nature physico-chimique des milieux convectifs, les travaux n'ont touché que l'ordre macroscopique du processus. Mais avec l'apparition et le développement rapide des nanotechnologies pendant la deuxième moitié du 20^{ème} siècle, la convection a bénéficié d'une grande part de cette nouvelle richesse. C'est au niveau nanométrique de la matière (fluide) du milieu convectif que les récents travaux ont été concentrés.

Les nanofluides sont les fruits de cette richesse dotés de propriétés physico-chimiques particulièrement intéressantes (conductivité thermique importante).

Cette amélioration du transfert de chaleur faite par des nanofluides fait donc une nouvelle technologie prometteuse dans le cadre des transferts thermiques, permettant d'améliorer les performances de divers échangeurs de chaleurs [1].

un grand nombre d'études dans des cylindres remplis de nanofluides avec différentes conditions aux limites ont été largement considérées par les chercheurs..

Problématique :

Quelle est l'influence de la concentration en nanoparticules d'Argent dispersé dans différents liquides de base ?

Le manuscrit de ce thème est composé de quatre chapitres :

Dans le **premier chapitre**, nous allons présenter des notions de base sur les modes de transfert thermique et la convection, un rappel sur la simulation numérique (CFD), le système des coordonnées curvilignes . Nous allons exposer une synthèse bibliographique sur les travaux effectués dans le domaine de la convection naturelle dans les cylindres soumis aux différentes conditions thermiques et géométriques. **Deuxième chapitre**, dans ce chapitre, on a étudié la géométrie de la configuration considérée, ainsi que les équations modélisant le problème traité dans cette mémoire. Ces équations mettent en évidence le comportement de nanofluide en convection naturelle. Elles sont fondées selon les lois de la physique: équation de conservation de masse, de quantité de mouvement (Navier-Stokes), et d'énergie, ainsi les conditions initiales et aux limites. **Troisième chapitre**, Les techniques de discrétisation des différentes équations. Les équations (équations aux dérivées partielles (EDP)) sont désagrégées à l'aide de la méthode des volumes finis, tandis que l'équation de la fonction de courant est désagrégée à l'aide d'un développement en série de Taylor, les équations obtenues sont résolues numériquement en utilisant un schéma en loi de puissance (Power-Low). **Quatrième chapitre**, on a été consacré à la discussion des résultats obtenus avec les simulations numériques. Nous présentons en courbes les évolutions du nombre de Nusselt local pour chaque nanofluide. Une courbe récapitulant toutes les simulations effectuées a été introduite à la fin de ce chapitre ce qui nous permet de comparer les performances des deux nanofluides utilisés.

En fin, nous terminons ce mémoire par une **conclusion générale**.

CHAPITRE I

GENERALITES ET SYNTHESE

BIBLIOGRAPHIQUE

I-GÉNÉRALITÉS ET SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION

L'amélioration du transfert de chaleur par convection est l'objectif principal de nombreux travaux dans le domaine des applications scientifiques et industrielles. Pour ce faire, un grand nombre de chercheurs ont réalisé de nombreuses simulations numériques et tests expérimentaux liés à la description des phénomènes qui gèrent la convection. Des travaux récents se sont concentrés sur le niveau nanométrique d'une substance (liquide) dans un milieu convectif, et les études menées dans cette nouvelle direction ont fourni une bibliographie riche et diversifiée.[2]

I.1- Notions de base

I.1.1- Définir sur la simulation numérique :

La simulation numérique est une représentation de phénomènes physiques complexes rendue possible grâce à une série de calculs et un modèle mathématique comportant des équations aux dérivés partiels. La méthode la plus répandue est la méthode des éléments finis. C'est le moyen de simuler de manière virtuelle un produit dans son environnement final et ainsi de répondre à de multiples enjeux industriels tels qu'anticiper les écueils de conception, réduire les prototypes ou encore favoriser l'innovation. La simulation numérique n'est entrée dans l'industrie qu'il y a 60 ans et a atteint des proportions encore plus importantes il y a 40 ans. Il y avait aussi un écart avant qu'elle n'atteigne l'éducation. Ainsi, la simulation numérique est « moderne » à l'échelle humaine.

I.1.2 - Les différents modes de transfert de la chaleur :

Comme il est connu dans l'étude du transfert de chaleur, trois types peuvent être distingués: la conduction, le rayonnement et la convection, chacun de ces modes étant lui-même lié à un processus physique bien déterminé. En effet, comme l'énergie thermique d'un milieu matériel correspond à l'énergie cinétique de ses constituants fondamentaux ayant une certaine liberté de mouvement (molécules, atomes électrons libres...), ceux-ci pourront échanger tout ou partie de leur énergie thermique, c'est-à-dire gagner ou perdre de l'énergie cinétique :

- ✓ soit par interaction directe avec les particules voisines via transfert de chaleur dans les particules solides, ce qui correspond à la conduction
- ✓ soit par absorption ou émission des radiations électromagnétiques, ce qui correspond au rayonnement.

Enfin dans le cas d'un gaz ou liquide, on considère également, mais cette fois à l'échelle macroscopique, comme un mode de transfert de chaleur appelé convection, les échanges résultant du mélange des diverses parties d'un fluide à des températures différentes.

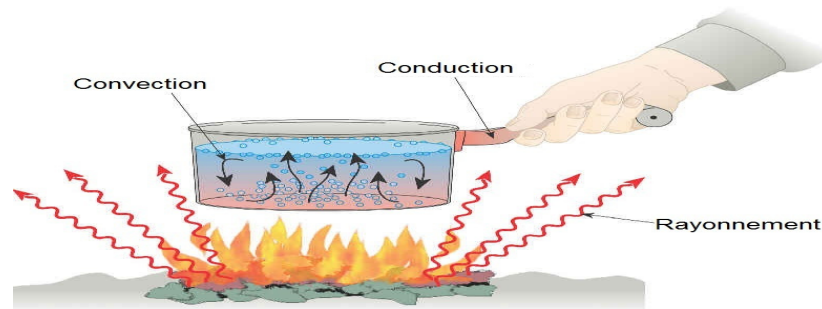


Figure.I.1: Les différents modes de transfert de la chaleur

I.1.3 - la convection :

I.1.3.1 - Définition :

La convection est un processus physique de transfert de chaleur (énergie) qui dépend d'un milieu physique au fur et à mesure qu'un matériau se déplace. Ainsi, nous pouvons avoir la convection dans les liquides et les gaz. Le transfert de chaleur par convection se produit entre deux phases, l'une au repos en général et l'autre en mouvement, en présence d'un gradient de température. Le mouvement d'un fluide peut être causé par la différence de densité (ρ) due aux différences de température.

I.1.3.2 -Les différents Types de convection :

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection

forcée. Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite mixte.

➤ **La convection naturelle :**

En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densité due à la non uniformité du champ de température. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut, suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions à température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants descendants se produit pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre. L'intervention du poids a pour effet de donner à la verticale un rôle privilégié.

Les effets de convection naturelle sont familiers. On peut les observer quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique, les vents, les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle. Pour formaliser la convection naturelle, il faut décrire le couplage des champs de température, de pression et de vitesse à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie..

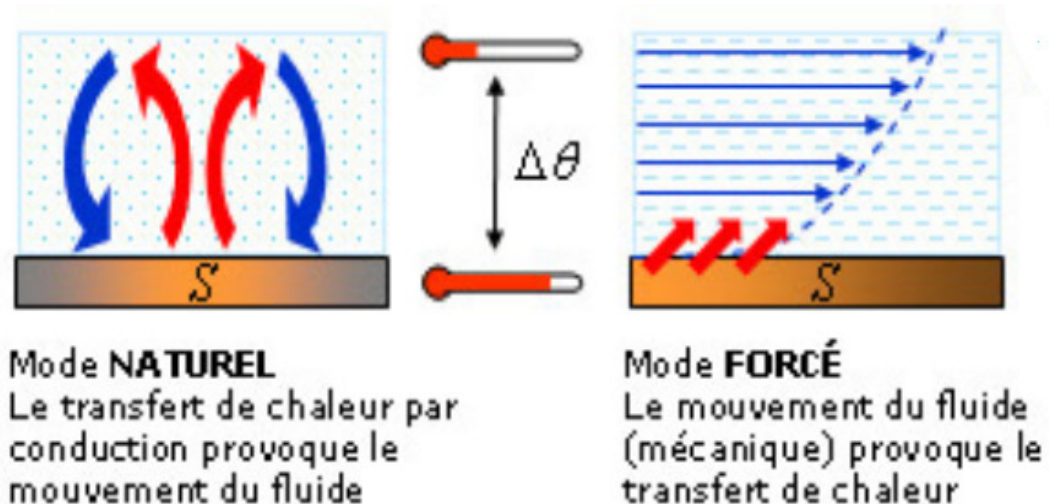


Figure.I.2: Les deux modes de transfert de chaleur par convection

I.2 – Dynamique des fluides et les Nano fluides

I.2.1 – Définition du Nano fluides :

Les nanofluides sont des solutions colloïdales composées des particules de taille nanométrique en suspension dans un fluide conventionnel.

- Un fluide conventionnel est tout corps qui n'est pas à l'état solide, donc constitué d'une seule phase: liquide ou gazeux. Le fluide de base est généralement de l'eau, de l'huile ou de l'éthylène glycol (EG).
- Les nanoparticules sont des fines particules nanométriques: leur diamètre est de quelques nanomètres (<50nm) et sont fabriqués à l'aide de métaux solides (Cuivre, Argent, Or...) ou d'oxyde métallique (d'oxyde d'Aluminium, d'oxyde de cuivre, d'oxyde de Titan...). Les oxydes métalliques sont faciles à produire, ils sont chimiquement stables et facile à disperser dans l'eau. Le terme "nanofluide" a été proposé par **Choi [3] en 1995**.

I.2.2 - Dynamique des fluides computationnelle (CFD) :

La prédiction des phénomènes qui ont lieu à l'écoulement des fluides, peut-être obtenus par trois méthodes : l'expérience, le calcul théorique et le calcul numérique. Les méthodes expérimentales sont très chères, prennent beaucoup de temps et dans certains cas, elles sont hasardeuses et très dangereuses. Elles ne permettent pas souvent une grande flexibilité des paramètres de variation. La plupart des méthodes analytiques ne s'appliquent que dans des cas limités. Pour des problèmes relatifs à des systèmes de forme géométrique complexe ou à des milieux à caractéristiques non uniformes ou non isotropes, qui est le cas de la plupart des problèmes rencontrés en pratique, il est nécessaire de faire appel aux méthodes numériques.

Les problèmes rencontrés dans le domaine des sciences de l'ingénieur sont souvent représentés (ou modélisés) par des équations aux dérivées partielles (EDP) qui modélisent les phénomènes physiques présents (écoulement de fluides, transfert de chaleur, vibration de structures, propagation d'ondes, champ électromagnétique... [4].

Moyens de calcul et Méthodes numériques pour les problèmes liés aux écoulements fluides

Figure I.3.

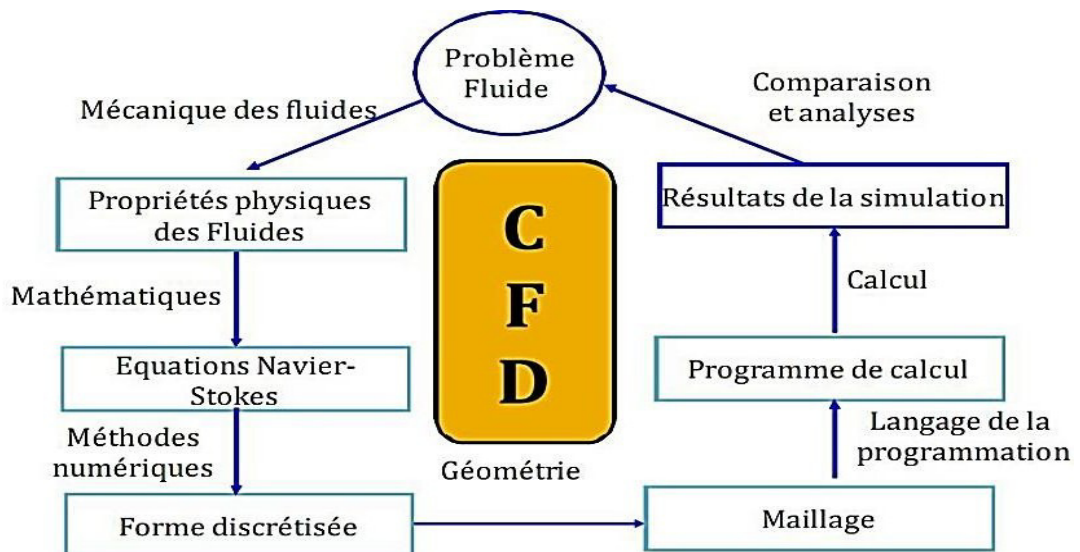


Figure. I .3. Dynamique des Fluides Numérique CFD [4].

✓ Avantages

1. Permet le calcul d'une solution numérique pour presque tous les problèmes pratiques ayant un modèle mathématique ;
2. Un coût très faible, ayant une tendance à la baisse ;
Présenté de la rapidité (permet de modifier la géométrie, les conditions aux limites,... etc.)
3. Présente une information complète sur tous les champs, tous les points et à tout instant ;
4. À la possibilité de simuler des conditions réelles exceptionnelles ;
5. À la possibilité de simuler des conditions idéales.

✓ Inconvénients

1. Tout dépend de modèle mathématique initiale ;
2. Difficulté pour sélectionner la « bonne » solution en cas de solutions multiples au problème mathématique ;
3. Parfois, plus coûteuse que l'expérience.

I.2.2.1 - Grandes étapes de CFD :

1. Problème physique continu est décrit par un modèle mathématique continu (mis en équations) ;
2. Modèle mathématique continu est discrétisé en s'appuyant sur une (des) méthode(s) numériques (s) ;
3. Équations discrétisées sont approximées à l'aide des schémas numériques appropriés, l'algorithme de résolution est établi ;
4. Algorithme est codé (C, Fortan, Matlab, Java,...) ;
5. Code est exécuté sur un ordinateur.

I.2.2.2 -Outils de CFD et code de calcul

- État permanent et transitoire ;
- Réactions chimiques ;
- Interactions fluide/structure ;
- Surface libre ;
- Humidité et condensation;
- Modélisation de pertes de charge ;
- Simulation par la méthode

I.2.2.3 -Applications de la CFD :

Elles sont très nombreuses. On peut citer celles de:

1. L'aérodynamique ;
2. L'hydrodynamique ;
3. Des turbomachines ;
4. Du génie électrique pour le refroidissement des machines et autres micro (circuits électroniques).
5. Du bâtiment : chauffage/ventilation ou action du vent sur les structures ;
6. De la médecine : circulation du sang, Etc.

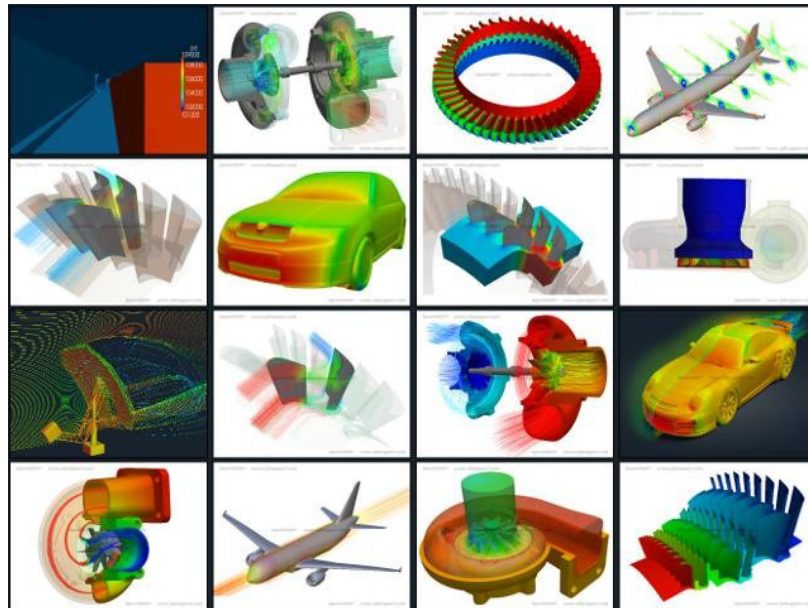


Figure. I.4. Applications de la CFD.

I.3 – Systèmes des coordonnées

I.3 .1- Coordonnées curvilignes générales non orthogonales :

I.3 .1.1-Tenseur métrique. Éléments de longueur et de volume d'arc en coordonnées curvilignes :

Les coordonnées curvilignes x^1, x^2, x^3 sont définies comme des fonctions du cartésien rectangulaire coordonnées x, y, z :

$$x^1 = x^1(x, y, z), x^2 = x^2(x, y, z), x^3 = x^3(x, y, z).$$

En utilisant ces formules, on peut exprimer x, y, z en termes de coordonnées curvilignes x^1, x^2, x^3 Comme suit: $x = x(x^1, x^2, x^3), y = y(x^1, x^2, x^3), z = z(x^1, x^2, x^3)$.

Les composantes métriques du tenseur g_{ij} sont déterminées par les formules

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x}{\partial x^j} + \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\partial y}{\partial x^j} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^j} ;$$

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = g_{ji}(x^1, x^2, x^3) ; i, j = 1, 2, 3.$$

La longueur d'arc dl entre les points proches $(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ et $(x + dx, y + dy, z + dz) \equiv (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ est exprimée comme :

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j.$$

La volume du parallélépipède élémentaire avec des sommets aux huit points

$(x^1, x^2, x^3), (x^1 + dx^1, dx^2, dx^3), (x^1, x^2 + dx^2, x^3), (x^1, x^2, x^3 + dx^3), (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3), (x^1 + dx^1, x^2, x^3 + dx^3), (x^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3), (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ est donné par :

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3 = \pm \sqrt{\det|g_{ij}|} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Ici, le signe plus correspond à la situation standard où les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées x^1, x^2, x^3 pointant vers la direction de croissance des coordonnées respectives, forment un triple droitier, tout comme les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires droitier.

I.3 .2- Coordonnées curvilignes orthogonales générales :

I.3 .2.1-Coordonnées orthogonales. Éléments de longueur, de surface et de volume :

Un système de coordonnées est orthogonal si $g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = 0$, et $i \neq j$. Dans ce cas, le troisième invariant du tenseur métrique est donné par: $g = \det|g_{ij}| = g_{11}g_{22}g_{33}$. Les coefficients de Lamé des coordonnées curvilignes orthogonales sont exprimés en termes de composantes du tenseur métrique comme :

$$L_i = \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x^i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Élément de longueur d'arc:

$$dl = \sqrt{(L_1 dx^1)^2 + (L_2 dx^2)^2 + (L_3 dx^3)^2} = \sqrt{g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2}.$$

Les éléments de surface ds_i des surfaces de coordonnées respectives $x^i = \text{const}$ sont donnés par :

$$ds_1 = dL_2 dL_3 = dL_2 dL_3 dx^2 dx^3 = \sqrt{g_{22}g_{33}} dx^2 dx^3,$$

$$ds_2 = dL_1 dL_3 = dL_1 dL_3 dx^1 dx^3 = \sqrt{g_{11}g_{33}} dx^1 dx^3,$$

$$ds_3 = dL_1 dL_2 = dL_1 dL_2 dx^1 dx^2 = \sqrt{g_{11}g_{22}} dx^1 dx^2,$$

Élément de volume:

$$dV = L_1 L_2 L_3 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} dx^1 dx^2 dx^3.$$

I.3.3- Coordonnées cylindriques :

Les coordonnées cartésiennes sont exprimées en termes de coordonnées cylindriques comme

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z, \text{ si } 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty.$$

Les coordonnées cylindriques sont exprimées en termes de coordonnées cylindriques comme

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \varphi = \frac{y}{x}, z = z, \left(\sin \varphi = \frac{y}{r} \right).$$

Surfaces coordonnées:

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ (cylindres circulaires droits dont l'axe coïncide avec l'axe } z)$$

$$y = x \tan \varphi, \text{ (demi-plans passant par l'axe } z),$$

$$z = \text{const}, \text{ (plans perpendiculaires à l'axe } z).$$

Transformations directes et inverses des composantes d'un vecteur

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = v_x \vec{i}_r + v_y \vec{i}_\varphi + v_z \vec{i}_z:$$

$$v_r = v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi,$$

$$v_x = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi,$$

$$v_\varphi = -v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi,$$

$$v_y = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi,$$

$$v_z = v_z;$$

$$v_z = v_z;$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{rr} = 1, g_{\varphi\varphi} = r^2, g_{zz} = 1, \sqrt{g} = r.$$

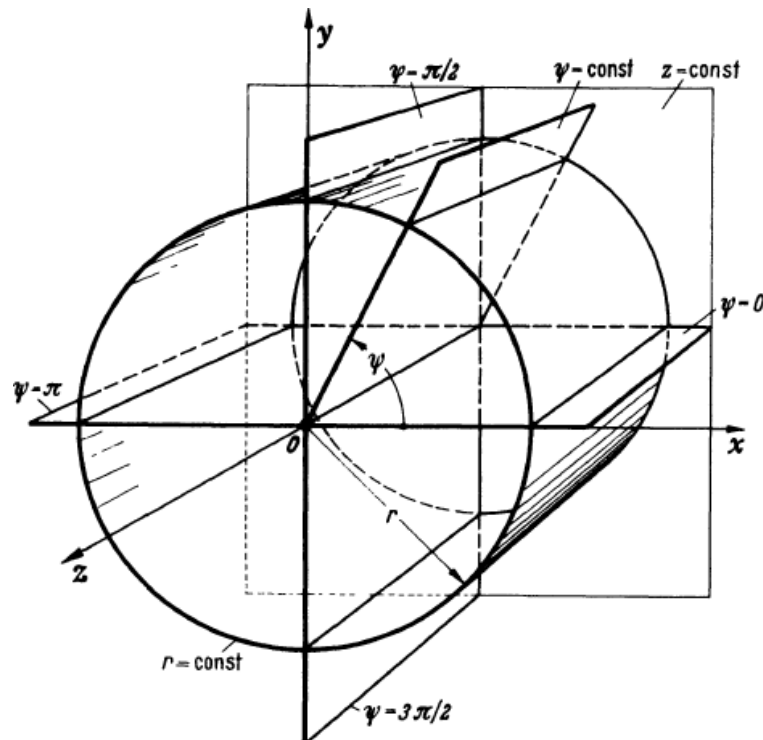


Figure I.5. Représentation schématique des coordonnées cylindriques (r, φ, z) .

I.3 3.1– Relations différentielles de base :

$$\text{gradient de } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{i}_z.$$

Divergence d'un vecteur \vec{v} : $\text{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial (v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$

Gradient d'un vecteur f le long d'un vecteur \vec{v} : $(\vec{v} \cdot \nabla) f = v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}.$

Gradient d'un vecteur \vec{w} le long d'un vecteur \vec{v} : $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} = w_r (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_r + w_\varphi (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_\varphi + w_z (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_z.$

Curl d'un vecteur \vec{v} :

$$\text{curl} \vec{v} \equiv \nabla \times \vec{v} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (v_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial (v_r)}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_r + \left[\frac{\partial (v_r)}{\partial z} - \frac{\partial (v_z)}{\partial r} \right] \vec{i}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} - \frac{\partial (v_r)}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_z.$$

Laplacien d'un scalaire f :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

I.3 .4- Coordonnées sphériques :

Coordonnées cartésiennes via sphériques:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta, \text{ si } 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tan \varphi = \frac{y}{x}, \theta = \arccos \frac{z}{r}, \left(\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Surfaces coordonnées:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, (\text{Sphères}),$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \tan^2 \theta = 0, (\text{Cônes circulaires}),$$

$$y = x \tan \varphi, (\text{Demi-plans passant par l'axe } z).$$

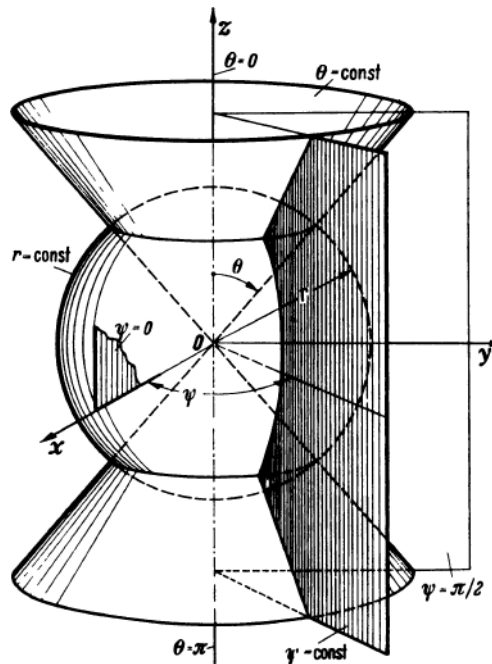


Figure I.6. Représentation schématique des coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

Transformations directes et inverses des composantes d'un vecteur

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = v_r \vec{i}_r + v_\theta \vec{i}_\theta + v_\varphi \vec{i}_\varphi.$$

$$v_r = v_x \sin\theta \cos\varphi + v_y \sin\theta \sin\varphi + v_z \cos\theta, \quad v_x = v_r \sin\theta \cos\varphi + v_\varphi \cos\theta \cos\varphi - v_\theta \sin\varphi,$$

$$v_\theta = v_x \cos\theta \cos\varphi + v_y \cos\theta \sin\varphi - v_z \sin\theta, \quad v_y = v_r \sin\theta \sin\varphi + v_\theta \cos\theta \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi,$$

$$v_\varphi = -v_z \sin\varphi + v_y \cos\varphi,$$

$$v_z = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta.$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{rr} = 1, g_{\varphi\varphi} = r^2, g_{zz} = r^2 \sin^2\theta, \sqrt{g} = r^2 \sin\theta.$$

I.3 .5- Coordonnées bipolaires :

Transformations de coordonnées:

$$x = \frac{\alpha \operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\theta}, y = \frac{\alpha \sin\theta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\theta}, z = z.$$

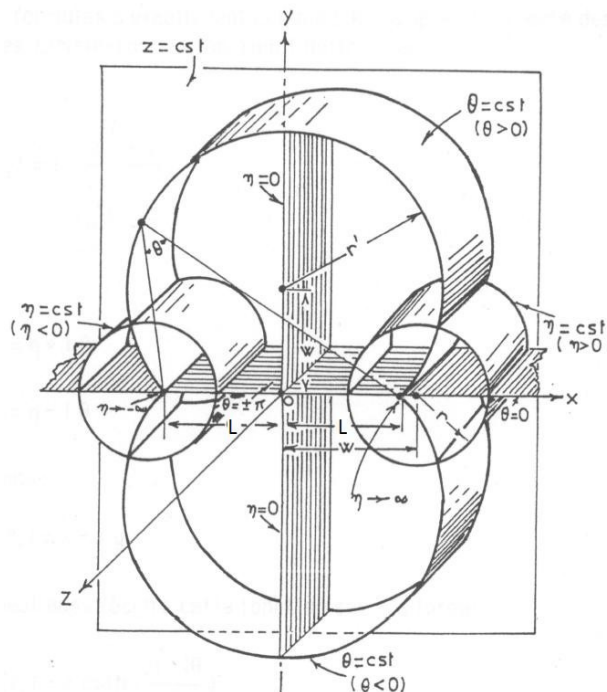


Figure I.7. Représentation schématique des coordonnées bipolaires.

Surfaces de coordonnées (l'axe z est l'axe de révolution):

$$x^2 + (y - \alpha \cot \theta)^2 = \alpha^2 (\cot^2 \theta + 1),$$

(cylindres circulaires droit avec élément parallèle à l'axe z),

$$y^2 + (xh - \alpha \coth \eta)^2 = \alpha^2 (\coth^2 \eta - 1),$$

(cylindres circulaires droit avec élément parallèle à l'axe z),

$y = z$, (plans parallèle au plan xy).

Composants tenseurs métriques:

$$g_{\theta\theta} = g_{\eta\eta} = \frac{\alpha^2}{(\cosh \eta - \cos \theta)^2}, g_{zz} = 1.$$

$$(ds)^2 = \frac{\alpha^2}{(\cosh \eta - \cos \theta)^2} [(d\theta)^2 + (d\eta)^2] + (dz)^2.$$

Gradient d'un scalaire f , d'après l'équation (I.7):

$$\text{grad} f = \frac{1}{\alpha} (\cosh \eta - \cos \theta) \left[\frac{\partial f}{\partial \tau} \vec{i}_\eta + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \vec{i}_\theta \right] + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{i}_z. \quad \text{I.1}$$

Divergence d'un vecteur \vec{v} d'après l'équation (I.8):

$$\text{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{(\cosh \eta - \cos \theta)^2}{\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v_\eta}{(\cosh \eta - \cos \theta)} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\theta}{(\cosh \eta - \cos \theta)} \right) \right] + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad \text{I.2}$$

Curl d'un vecteur \vec{v} d'après l'équation (I.4):

$$\begin{aligned} \text{curl} \vec{v} \equiv \nabla \times \vec{v} &= \left[\frac{1}{\alpha} (\cosh \eta - \cos \theta) \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \vec{i}_\eta + \left[\frac{\partial v_\eta}{\partial z} - \frac{1}{\alpha} (\cosh \eta - \cos \theta) \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \vec{i}_\theta \\ &+ \frac{1}{\alpha} (\cosh \eta - \cos \theta)^2 \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v_\theta}{(\cosh \eta - \cos \theta)} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\eta}{(\cosh \eta - \cos \theta)} \right) \right] \vec{i}_z \quad \text{I.3} \end{aligned}$$

Laplacien d'un scalaire f d'après l'équation (I.5):

$$\Delta f = \frac{1}{\alpha^2} (\cosh \eta - \cos \theta)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad \text{I.4}$$

I.3 .5.1- Coordonnées bipolaires (dans l'espace)

Transformations de coordonnées:

$$x = \frac{\alpha \sin\sigma \sin\varphi}{\cosh\tau - \cos\sigma}, y = \frac{\alpha \sin\sigma \sin\varphi}{\cosh\tau - \cos\sigma}, z = \frac{\alpha \sinh\tau}{\cosh\tau - \cos\sigma}.$$

$$-\infty < \tau < +\infty, 0 \leq \sigma < 2\pi.$$

Surfaces de coordonnées (l'axe z est l'axe de révolution):

$$x^2 + y^2 + (z - a \coth\tau)^2 = \frac{a^2}{\sinh^2\tau}, \text{ (sphères avec centres sur l'axe z),}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \cot\sigma\right)^2 + (z)^2$$

$$= \frac{a^2}{\sinh^2\tau}, \text{ (surfaces obtenues par révolution d'arcs de cercle autour de l'axe z),}$$

$y = x \tan \varphi$, (demi-plans sur l'axe z).

Composants tenseurs métriques:

$$g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \frac{a^2}{(\cosh\tau - \cos\sigma)^2}, g_{\tau\tau} = \frac{a^2 \sin^2\sigma}{(\cosh\tau - \cos\sigma)^2}.$$

Laplacien d'un scalaire f :

$$\Delta f = \frac{(\cosh\tau - \cos\sigma)^2}{a^2 \sin\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{\sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma} \frac{\partial f}{\partial\tau} \right) + \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{\sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma} \frac{\partial f}{\partial\sigma} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin\sigma (\cosh\tau - \cos\sigma)} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \right).$$

I.4 – Synthèse bibliographique

Le travail suivant, ci-dessous, résume les investigations numériques et expérimentales publiées examinant les comportements de transfert de chaleur par convection naturelle dans les cylindres avec différentes géométries.

Kuehn et al. [5] en 1976. Il a effectué des mesures expérimentales pour trois gaz différents, de l'air, H_2 et CO_2 , pour une large gamme du rapport de forme et du nombre de Grashof. Une contribution supplémentaire de cet auteur est son analyse fondamentale de ce problème, qui a conduit à la définition du rapport de conductivité effective adimensionnelle utilisé dans de nombreuses œuvres ultérieures. Il a également proposé une corrélation simple pour ses résultats. **Bishop et al [6]** a étudié expérimentalement la convection naturelle entre deux sphères concentriques, chacune étant maintenue à une température constante. Les distributions de température, les données du transfert thermique ainsi que deux corrélations entre le nombre de Grashof et le nombre de Nusselt. **P. Teertstra et al. [7]** ont élaboré une étude expérimentale et numérique sur la convection naturelle dans l'espace annulaire compris entre deux cylindres concentriques et horizontaux dont le rapport des rayons a été pris égal à 2.6, ils ont calculé une conductivité thermique équivalente locale. Ils ont obtenu des résultats en accord avec ceux de l'analyse numérique qu'ils ont réalisée et qui est basée sur la méthode des différences finies et la technique de relaxations successives.

Tayebi et al. [8] dans la présente étude simulent numériquement les transferts de chaleur par convection naturelle laminaire bidimensionnelle (2D) et tridimensionnelle (3D) dans une cheminée solaire. Dans ce contexte, **dos Santos Bernardes et al [9]** ont conduit la première simulation numérique de la convection naturelle laminaire dans une tour solaire. Pour la prédiction du comportement thermo-hydrodynamique du système, le modèle mathématique (équations de bilan de la quantité de mouvement et de l'énergie) a été exploité en utilisant la méthode des volumes finis en coordonnées généralisées. La solution est obtenue pour un domaine de calcul fixe, indépendant de la forme géométrique du système physique. Cette méthodologie permet une visualisation détaillée des effets géométriques sur les champs de vitesse et de température qui sont très importants pour la définition de la géométrie et des caractéristiques opérationnelles optimales de tels systèmes. Ils ont proposé un système d'équations différentielles elliptiques pour la génération de maillage pour un système bidimensionnel, et une méthode pour la transformation du système de coordonnées.

Ali J. Chamkha et al [10] ce travail est axé sur l'étude du transfert de chaleur et de masse instationnaire par écoulement de convection mixte sur un cône perméable vertical tournant dans un fluide ambiant avec une vitesse angulaire dépendante du temps en présence d'un champ magnétique et d'effets de génération ou d'absorption de chaleur. La surface du cône est maintenue à une température et une concentration variables. On suppose que l'aspiration ou l'injection de fluide se produit à la surface du cône. Les équations différentielles partielles non linéaires couplées régissant le flux convectif mixte thermosolutal ont été résolues numériquement à l'aide d'un schéma implicite et itératif de différences finies. Des comparaisons avec des travaux publiés antérieurement ont été effectuées et les résultats se sont révélés être en excellent accord. **H. Beji et al [11]** ont réalisé une étude numérique sur la convection naturelle à double diffusion dans une couche poreuse annulaire verticale dont les parois sont maintenues à des températures et des concentrations constantes. Ils ont examiné plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh thermique, du nombre de Lewis, du rapport de flottabilités et du rapport des rayons de l'enceinte, **M. Benzeghiba et al [12]** ont présenté des solutions numériques pour la convection naturelle thermosolutale dans une cavité concentrique verticale partiellement remplie d'un milieu poreux. La cavité est soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration. Ils ont adopté le modèle général étendu de Darcy-Brinkman-Forchheimer pour formuler l'écoulement à travers la matrice poreuse dans la cavité. Les effets des paramètres de contrôle sur l'écoulement et le comportement des transferts de chaleur et de masse ont été examinés ainsi que les différentes structures d'écoulement en fonction des paramètres géométriques, de la nature du fluide, des paramètres dynamiques du fluide caloporteur et des caractéristiques de la matrice poreuses.

CHAPITRE II

FORMULATION

MATHEMATIQUE ET POSITION

II- FORMULATION MATHÉMATIQUE ET POSITION DU PROBLEME

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, la géométrie de la configuration considérée est présentée, ainsi que les équations modélisant le problème traité dans cette mémoire. Ces équations mettent en évidence le comportement de nanofluide en convection naturelle. Elles sont fondées selon les lois de la physique : équation de conservation de masse, de quantité de mouvement (Navier-Stokes), et d'énergie, ainsi les conditions initiales et aux limites.

II.1- Formulation mathématique du problème

II.1.1- Description du problème :

La géométrie retenue dans cette étude est un annulaire formé par deux cylindres concentriques avec un rapport de rayons $C = R_2 / R_1 = 2$, remplie des nanofluides à partir de différents fluides de base « Eau, Ethylène Glycol (EG), Huile de moteur, glycérine » et une concentration volumique des nanoparticules (Argent) : $\varphi = 0 - 12\%$. Nous représentons sur la **figure II.1**. Les parois cylindriques interne et externe sont maintenues isothermes aux températures T_c et T_F , respectivement avec $T_c > T_F$. les nanofluides sont en équilibre thermique.

L'objectif de ce travail consiste en la modélisation mathématique et la simulation numérique de la convection naturelle dans les nanofluides. On propose dans ce travail d'étudier l'influence de la concentration en nanoparticules d'Argent dispersé dans différents liquides de base "Eau, Ethylène Glycol (EG), Huile moteur, Glycérine" sur l'écoulement convectif et le transfert de chaleur pour une gamme du nombre de Rayleigh allant de 10^3 à 10^5 .

Les propriétés thermophysiques des fluides de base et nanoparticule utilisées sont données dans le **Tableau II.1**.

propriétés thermophysiques	$\rho(\text{kg.m}^{-3})$	$C_p(\text{J.kg}^{-1}.\text{k}^{-1})$	$k(\text{W.m}^{-1}.\text{k}^{-1})$	$\beta[10^{-5} (\text{k}^{-1})]$
Eau	997.1	4179	0.613	21
Glucérine	1259.9	2427	0.286	48
EG	1114.4	2415	0.252	65
Engine oil	888.4	1909	0.145	70
Argent (Ag)	10500	235	429	1.89

Tableau II.1: Propriétés thermophysiques des différents fluides de base et nanoparticule (Ag) utilisées.[13]

La géométrie ainsi que les conditions aux limites sont montrées sur la **Figure II.1.**

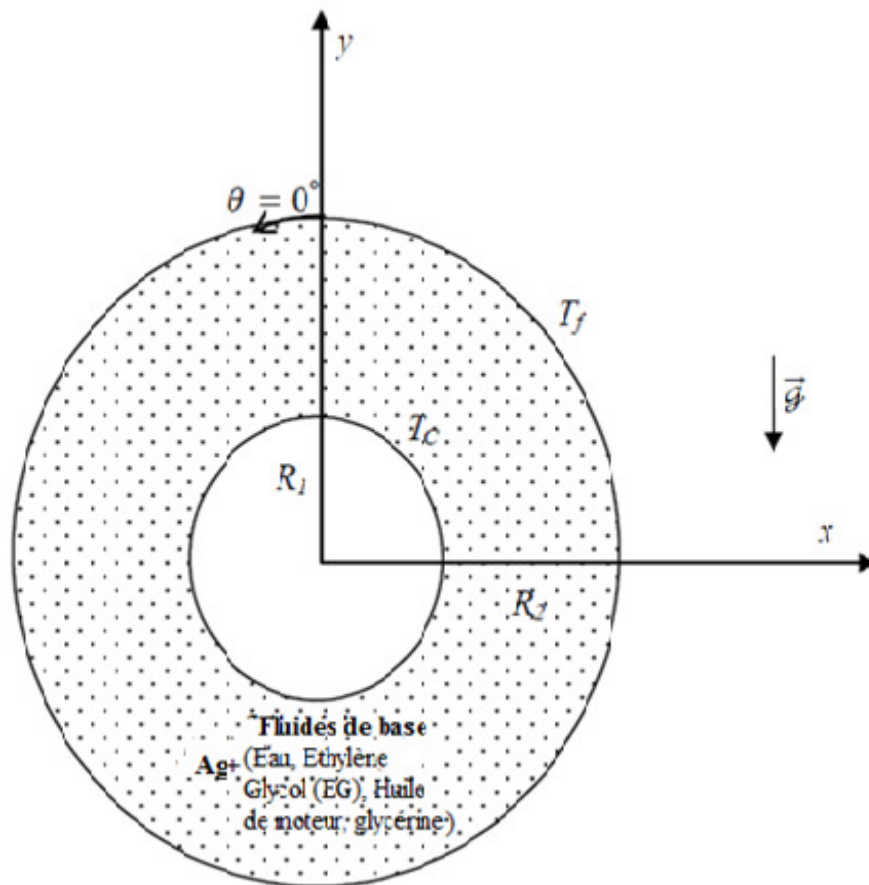


Figure II.1. Géométrie et conditions aux limites.

II.1.2 - Hypothèses simplificatrices :

Les hypothèses simplificatrices retenues afin de réduire les équations générales du problème étudié dans ce travail sont:

- ✓ L'écoulement est permanent et laminaire et bidimensionnel.
- ✓ L'absence des sources et puits de chaleur.
- ✓ L'approximation de Boussinesq et adoptée pour la densité de nanofluide c'est-à-dire que la masse volumique est considérée comme constante (égale à sa valeur de référence) dans tous les termes des équations de transfert sauf dans le terme gravitationnel, ou elle est traitée comme variable en fonction de la température et s'exprime comme suit :

$$(\rho_{nf} - \rho_{00}) = -\rho_0 g \beta_{nf} (T - T_0) \quad \text{II.1}$$

- ✓ Les propriétés physiques des nanofluides sont constantes.
- ✓ Les nanoparticules et le fluide de base sont en équilibre thermique
- ✓ Le flux de dissipation visqueuse de la chaleur est négligeable
- ✓ Pas d'échange par rayonnement au sein du fluide.
- ✓ Modèle monophasé: Bien que les nanofluides sont des mélanges solides liquides, l'approche classique utilisée dans la plupart des études de la convection naturelle gère le nanofluide comme une seule phase fluide (homogène).

II.1.3 – Les Équations Générales :

Après la considération des hypothèses de simplification suscitées, les équations générales régissant l'écoulement de convection naturelle laminaire dans le cylindre représenté dans la **Figure. II.1** peuvent être écrites sous la forme :

II.1.3 .1- Coordonées Cartésiennes :

- ✓ Équation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{II.2}$$

✓ Équation de quantité de mouvement suivant x

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial x} + g \cdot \sin(\alpha) \cdot \beta \cdot T_d + v_{nf} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad \text{II.3.a}$$

✓ Équation de quantité de mouvement suivant y

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial y} + g \cdot \cos(\alpha) \cdot \beta \cdot T_d + v_{nf} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad \text{II.3.b}$$

✓ Équation de la chaleur

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = (\alpha)_{nf} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad \text{II.4}$$

✓ Équation de vorticité

L'introduction des variables vorticité et fonction de courant a pour objectif de simplifier l'équation du mouvement en éliminant le gradient de pression. En dérivant les équations du mouvement (II.3.a) et (II.3.b) respectivement par rapport à y et à x, il vient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (g \cdot \sin(\alpha) \cdot T_d) + v_{nf} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad \text{II.5.a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (g \cdot \cos(\alpha) \cdot \beta \cdot T_d) + v_{nf} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad \text{II.5.b}$$

En soustrayant l'équation (II.5.a) de (II.5.b) et en utilisant l'équation de continuité ainsi que la définition de la fonction de vorticité ω , nous obtenons :

$$U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = g\beta \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right] + v_{nf} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{II.6}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial \omega}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right); \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right); \frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right); \\ &\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

En introduisant la fonction de courant ψ , de façon à vérifier identiquement l'équation de continuité, il vient:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, V = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Nous en déduisons:

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad \text{II.7}$$

➤ Pour le nanofluide :

✓ La masse volumique du nanofluide est donnée par l'expression :

$$\rho_{nf} = (1 - \varphi)\rho_f + \varphi\rho_p \quad \text{II.8}$$

Où ρ_{nf} : La masse volumique du nanofluide

ρ_f : La masse volumique du fluide de base

ρ_p : La masse volumique du nanoparticules solides

✓ La capacité calorifique du nanofluide est donnée par l'expression :

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho C_p)_f + \varphi(\rho C_p)_p \quad \text{II.9}$$

✓ Le coefficient de dilatation thermique de la nanofluide déterminé par :

$$(\rho\beta)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho\beta)_f + \varphi(\rho\beta)_p \quad \text{II.10}$$

✓ La conductivité thermique du nanofluide à base des nanoparticules sphériques est approximée par le modèle de **J.C .Maxwell [14]** :

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{k_p + 2k_f + 2(k_p - k_f)\varphi}{k_p + 2k_f + (k_p - k_f)\varphi} \quad \text{II.11}$$

✓ La viscosité du nanofluide est donnée par **Brinkman[15]**:

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi)^{2.5}} \quad \text{II.12}$$

✓ La diffusivité thermique s'écrit :

$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \quad \text{II.13}$$

- ✓ La conductivité thermique du nanofluide à base de (Ag) est approximée par le modèle de **Xue [16]** :

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{1-\varphi+2\varphi\left(\frac{k_p}{k_p-k_f}\right)\ln\left(\frac{k_p+k_f}{2k_f}\right)}{1-\varphi+2\varphi\left(\frac{k_f}{k_p-k_f}\right)\ln\left(\frac{k_p+k_f}{2k_f}\right)} \quad \text{II.14}$$

Où :

k_{nf}, k_f et k_p : désignent respectivement les conductivités thermiques du nanofluide, du fluide porteur et des nanoparticules solides.

φ : La concentration volumique des nanoparticules dans le fluide.

$$\varphi = \frac{V_s}{V_T}$$

II.1.3.2- Coordonnées curvilignes (bipolaires) :

Le principal avantage de l'utilisation des coordonnées curvilignes est de transformer un domaine physique de géométrie complexe en un domaine de calcul de géométrie simple, elles permettent de transformer des courbes en droites et facilitent, de ce fait, le calcul des aires.

Soit: η, θ coordonnées curvilignes (bipolaires).

Dans le référentiel bipolaire représenté sur la **figure (II.2)**, nous observons dans le plan (r, z) deux groupes de cercles:

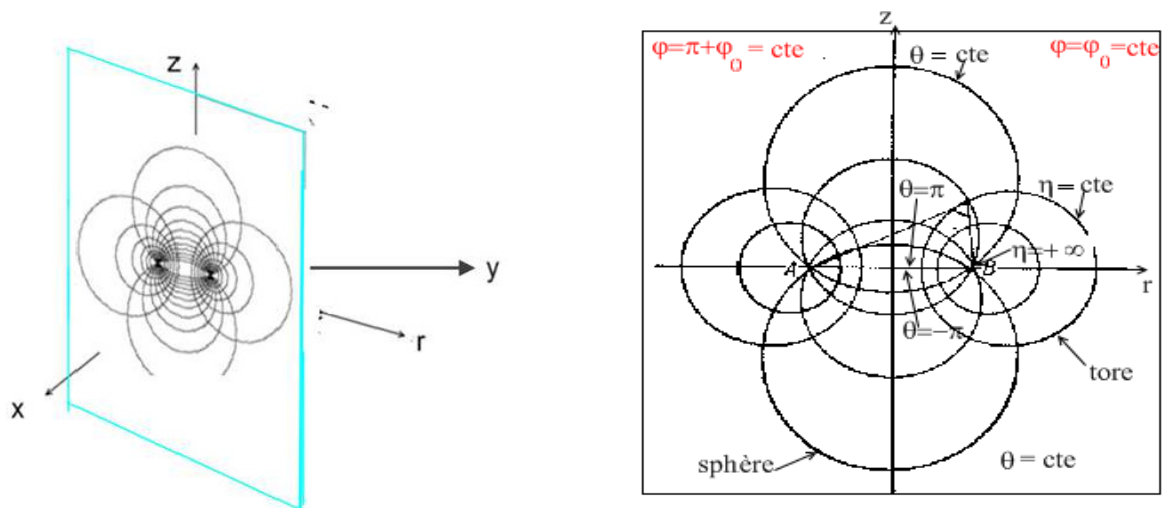


Figure II.2. Représentation schématique des coordonnées curvilignes (bipolaires).

Le passage des coordonnées cartésiennes aux s'effect curvilignes (bipolaires)ue à l'aide des relations suivantes:

$$x = \frac{a.\sinh(\eta)}{\cosh(\eta)-\cos(\theta)}, y = \frac{a.\sin(\theta)}{\cosh(\eta)-\cos(\theta)}, z = z \quad \text{II.15}$$

avec: $\eta \neq 0, \theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{N}$.

Alors Nous trouvons:

✓ **Équation de continuité**

La divergence du vecteur \vec{V} est donnée par:

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial(h.V_\eta)}{\partial\eta} + \frac{\partial(h.V_\theta)}{\partial\theta} \right] \quad \text{II.16}$$

D'autre part, l'équation de continuité $\text{div } \vec{V} = 0$ s'écrit:

$$\frac{\partial(h.V_\eta)}{\partial\eta} + \frac{\partial(h.V_\theta)}{\partial\theta} = 0 \quad \text{II.17}$$

✓ **Équation du mouvement**

$$\vec{V}(\overrightarrow{\text{grad}})\omega = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial(\omega)}{\partial\eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial(\omega)}{\partial\theta}, V_{\eta f} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\omega) = \frac{V_{\eta f}}{h^2} \left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} \right] \quad \text{II.18}$$

On optien: l'équation du mouvement s'écrit:

$$\begin{aligned} & \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial(\omega)}{\partial\eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial(\omega)}{\partial\theta} \\ &= g \frac{\beta_{nf}}{h} \left[(f(\eta, \theta). \cos(\alpha) + G(\eta, \theta)\sin(\alpha)). \left(\frac{\partial T}{\partial\eta} \right) \right. \\ & \left. + (f(\eta, \theta)\sin(\alpha) - G(\eta, \theta). \cos(\alpha)). \left(\frac{\partial T}{\partial\theta} \right) \right] + \frac{V_{\eta f}}{h^2} \left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} \right] \quad \text{II.19} \end{aligned}$$

✓ **Équation de la chaleur**

Si: $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}T) = \Delta T$, L'équation (II.10) de vient :

$$(\vec{V}.\overrightarrow{\text{grad}}T) = \alpha_{nf} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}T) = \alpha_{nf} \Delta T = \frac{\lambda}{\rho.C_p} \Delta T.$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors:

$$V_\eta \frac{\partial T}{\partial\eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial\theta} = \alpha_{nf} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} \right) \quad \text{II.20}$$

II.1.3 .2 .1- Calcul des coefficients métriques :

$$g_{\eta}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$g_{\eta}^2 = \frac{a^2}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^4} [[1 - ch(\eta)\cos(\theta)]^2 + [sh(\eta)\sin^2(\theta)]^2];$$

$$g_{\eta}^2 = \frac{a^2}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^4} [1 - ch^2(\eta)\cos^2(\theta) - 2ch(\eta)\cos(\theta) + sh^2(\eta)\sin^2(\theta)];$$

$$\text{Donc: } g_{\eta}^2 = \frac{a^2}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^4} (ch(\eta) - \cos(\theta))^2.$$

Alors que :

$$g_{\eta} = g_{\theta} = \frac{a}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \text{ et } \eta \neq 0, \theta \neq 2k\pi, k: \text{ nombre entier, } g_z^2 = 1 \quad \text{II.21}$$

II.2.1- Mise sous forme Adimensionnelle:

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier à priori la viabilité d'une équation ou du résultat d'un calcul. Elle est utile également pour formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses. L'adimensionalisation a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser les résultats. En posant les quantités adimensionnelles suivantes :

$$D_h = (R_2 - R_1); V_{\eta}^* = \frac{V_{\eta}(R_2 - R_1)}{\alpha_f}; V_{\theta}^* = \frac{V_{\theta}(R_2 - R_1)}{\alpha_f}; H = \frac{h}{R_2 - R_1};$$

$$T^* = \frac{(T - T_f)}{(T_c - T_f)}; \psi^* = \frac{\psi}{\alpha_f}; \omega^* = \omega \frac{(R_2 - R_1)^2}{\alpha_f}$$

En portant les quantités adimensionnelles définies précédemment dans les équations (II.17), (II.19), (II.20) on obtient:

$$\frac{\partial(HV_{\eta}^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(HV_{\theta}^*)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{II.22}$$

$$\begin{aligned}
HV_{\eta}^* \frac{\partial \omega^*}{\partial \eta} + HV_{\theta}^* \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta} \\
= Pr. Ra. H. C_1 \left[(f(\eta, \theta) \cdot \cos(\alpha) + g(\eta, \theta) \sin(\alpha)) \cdot \left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) + \right. \\
\left. (f(\eta, \theta) \cdot \sin(\alpha) - g(\eta, \theta) \cos(\alpha)) \right] + Pr. C_2 \left[\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \theta^2} \right]
\end{aligned} \quad \text{II.23}$$

$$HV_{\eta}^* \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + HV_{\theta}^* \frac{\partial T^*}{\partial \theta} = C_3 \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} \right] \quad \text{II.24}$$

Avec Les paramètres du contrôle de ce problème sont:

$$Gr = \frac{g\beta_f(T_H - T_c)(R_2 - R_1)^3}{v_f^2} \text{ et } Ra = Gr.Pr, Pr = \frac{v_f}{\alpha_f};$$

$$C_1 = \frac{1}{\frac{(1-\varphi)\rho_f}{\varphi\rho_f} + 1} \cdot \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\varphi\rho_f}{(1-\varphi)\rho_f} + 1}; C_2 = \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5} \left[(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]};$$

$$C_3 = \frac{\frac{k_{nf}}{k_f}}{\left[(1-\varphi) + \varphi \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f} \right]}. \quad \text{II.25}$$

Les composantes de la vitesse adimensionnelle V_{η}^*, V_{θ}^* sont définies par :

$$V_{\eta}^* = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}; V_{\theta}^* = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \quad \text{II.26}$$

La vorticité ω^* adimensionnelle est définie par :

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{II.27}$$

I.2.1.1 - Groupements adimensionnels :

L'écriture adimensionnelle des équations, fait apparaître plusieurs groupements adimensionnels. Chacun de ces groupements a une signification physique particulière.

a) Nombre de Prandtl :

C'est un nombre qui est purement lié aux caractéristiques du fluide, c'est le rapport entre la Viscosité cinématique (ϑ) et la diffusivité thermique (α).

$$Pr = \frac{\vartheta}{\alpha}.$$

Dans les écoulements thermiques, le rapport entre les transferts de quantité de mouvement par les forces visqueuses sur le transfert de chaleur par conductivité thermique:

$$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}. \quad \text{II.28}$$

b) Nombre de Reynolds :

L'expérience réalisée par Reynolds (1883) lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de deux régimes d'écoulement: laminaire et turbulent. Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est le nombre de Reynolds donné par l'équation :

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu}. \quad \text{II.29}$$

V: est une vitesse caractéristique de l'écoulement [m/s]

D: est une des dimensions géométriques [m]

ν : est le coefficient de viscosité cinématique du fluide [m²/s].

est appelée nombre de **Reynolds**. Ce nombre joue un rôle fondamental dans la caractérisation de l'écoulement.

- ✓ SI $Re \leq 2400$ on est en régime laminaire.
- ✓ Pour des vitesses plus élevées, $Re \geq 5000$, le régime turbulent apparaît.
- ✓ Le régime est dit intermédiaire quand le nombre de Reynolds est compris entre 2400 et 5000.

c) Nombre de Peclet :

Ce nombre est souvent utilisé pour créer un état de stabilité localisé lors de l'estimation de l'équation énergétique des méthodes de taille finie, d'éléments finis ou de différences finies. Les nombres de Reynolds et de Brandtel sont préférés à eux, et ils sont rarement utilisés pour décrire les flux.

$$p = pr. Re = \frac{u.l}{\Gamma}. \quad \text{II.30}$$

Similaire au nombre de Reynolds, le nombre de Peclet mesure le rapport entre le transfert d'énergie thermique par convection et le transfert d'énergie par diffusion.

d) Nombre de Rayleigh:

Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq où les variations de température sont prises comme suffisamment faibles pour que les propriétés physiques du fluide (tels que sa dilatabilité thermique α , sa diffusivité thermique λ et sa viscosité cinématique ν puissent être considérées comme constantes et que la densité puisse s'exprimer comme une fonction linéaire de la température, on introduit généralement un paramètre, le nombre de Rayleigh "**Ra**", qui dépend des caractéristiques du fluide et est proportionnel à ΔT :

$$Ra = \frac{\alpha.g.\Delta T.h^3}{\vartheta.\lambda}. \quad \text{II.31}$$

e) Nombre de Nusselt :

Les échanges thermiques sont caractérisés par un nombre adimensionnel dit nombre de Nusselt qui est le rapport entre le flux échangé par convection à celui échangé par conduction à la paroi :

$$Nu = \frac{hl}{\lambda}. \quad \text{II.32}$$

h: Le coefficient de transfert de chaleur est donné par la relation suivante :

$$h = \frac{\Phi}{(T_p - T_f)s}$$

Le nombre de Nusselt moyen est défini par :

$$Nu_m = \int_0^B Nu(x) dx \quad \text{II.33}$$

II.2.1.2- Évaluation du nombre de Nusselt :

Le nombre de Nusselt local le long des cylindres thermiques intérieur et extérieur basé sur le diamètre hydraulique de l'anneau et en utilisant la définition des températures sans dimension est évalué à partir de la relation suivante :

$$Nu_{loc} = -\frac{k_{nf}}{k_f} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \quad \text{II.34}$$

Le nombre de Nusselt moyen s'exprime à partir de la relation suivante :

$$Nu_{moy} = \frac{\sum_{noeuds} Nu_{loc}}{\text{nombre des noeuds}} \quad \text{II.35}$$

II. 2 .2- Conditions aux limites :

✓ Conditions sur la paroi du cylindre intérieur ($\eta=\eta_i = \text{const}$)

$$V_{\eta}^* = V_{\theta}^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = 0 \quad \text{II.36}$$

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{II.37}$$

$$T^* = 1$$

✓ Conditions sur la paroi du cercle extérieur ($\eta=\eta_i = \text{const}$)

$$V_{\eta}^* = V_{\theta}^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = 0 \quad \text{II.38}$$

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{II.39}$$

$$T^* = 1 \quad \text{II.40}$$

CHAPITRE III

Procédure De Simulation
Numérique

III- PROCEDURE DE SIMULATION NUMERIQUE

INTRODUCTION

La complexité de la résolution numérique des problèmes de transfert de chaleur, et d'écoulement fluide est reflétée par la complexité des équations qui gouvernent les phénomènes physiques. C'est pourquoi, ces équations doivent être discrétisées, selon un schéma adéquat.

Il existe plusieurs méthodes de discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles telles que : la méthode des volumes finis, la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, etc.

III.1- Le calcul numérique (modélisation et simulation)

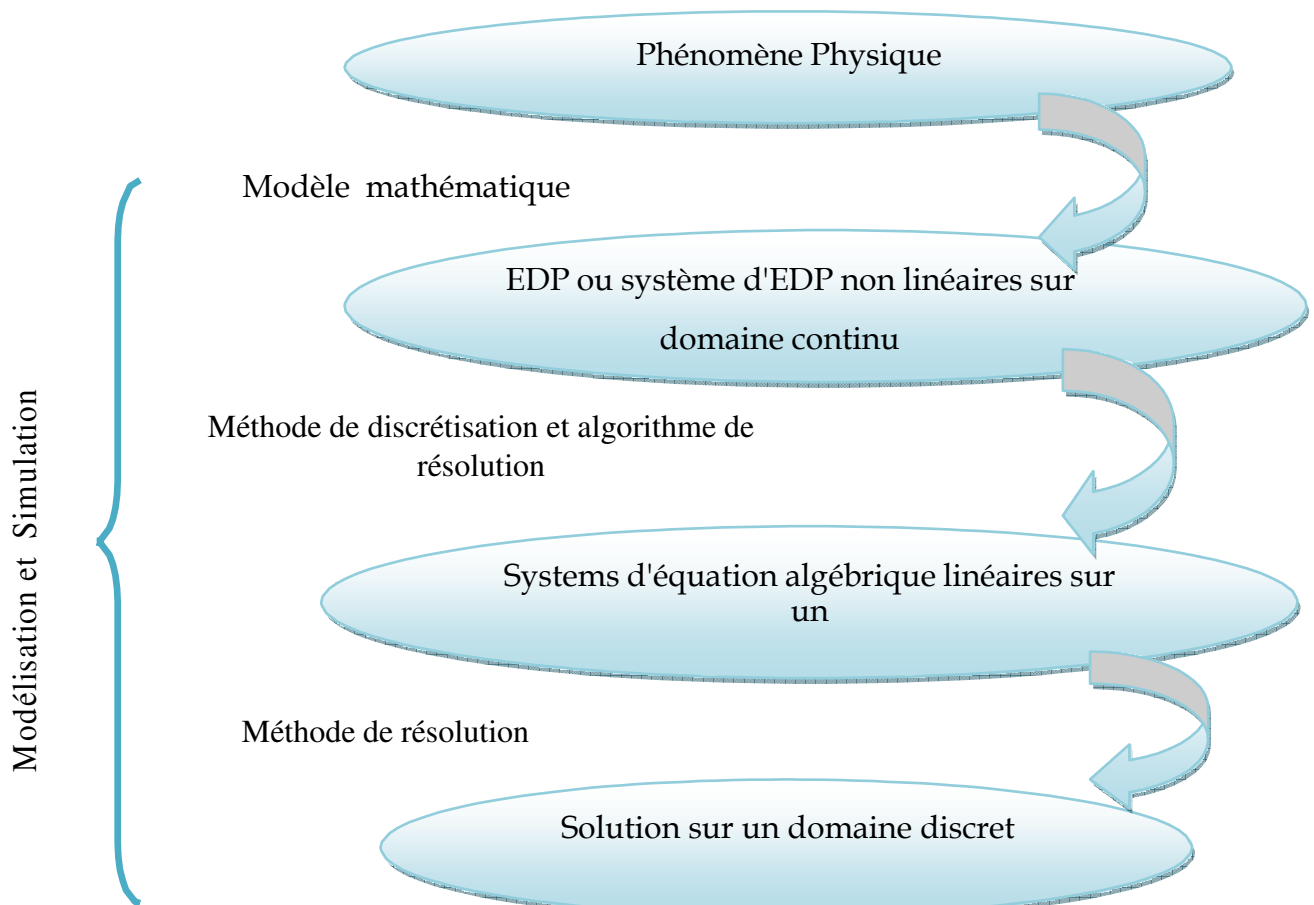


Figure. III.1. Le principe du calcul numérique.

Le modèle mathématique constitué par des équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) ou par un système d'EDP est transformé, à l'aide d'une méthode de discrétisation à un système d'équations algébriques. Le principe du calcul numérique est illustré à la **figure II.1**

III.2- Les méthodes principales de discrétisation

Il ya deux grandes familles de méthodes de discrétisation :

1. Les méthodes d'approximations des équations. Selon ces méthodes, on cherche une solution exacte des équations approchées, car les opérateurs différentiels sont discrétisés sur un maillage (la méthode de la différence finie et la méthode des volumes finis).
2. Les méthodes d'approximations des solutions. Selon ces méthodes on cherche une solution approchée à partir des équations exactes .Les solutions sont écrites comme des séries de fonctions tronquées aux ordres de précisions désirées (les méthodes spectrales et la méthode des éléments finis).

III.2.1.- Méthode des différences finies (MDF) :

La variable inconnue ϕ est décrite par plusieurs valeurs dans les points d'un maillage. Le développement de l'inconnue en séries Taylor tronquées est utilisé pour approximer les dérivées de l'inconnue, dans chaque point du maillage, par différences finies en utilisant les inconnues voisines. En remplaçant les dérivées dans les équations algébriques pour les valeurs de l'inconnu dans chaque point du maillage.

✓ Principe

Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points sur lesquels on approche les opérateurs de dérivation des équations par des développements en séries de Taylor tronquées à l'ordre de précision choisie.

✓ Avantages de la méthode

1. Simplicité de mise en œuvre ;
2. encombrement mémoire raisonnable (matrice de type bande) et temps de calcul raisonnable.

✓ Inconvénients de la méthode

1. Le principe de conservation n'est pas assuré après la discrétisation ;
2. l'apparition d'instabilités numériques ;
3. Difficulté pour traiter les géométries plus complexes.

III.2.2- Méthode des éléments finis (MEF)

Dans la méthode des éléments finis, on utilise des fonctions linéaires ou quadratiques, sur chaque élément, pour décrire la variation locale de la connue. Les équations différentielles sont exactement vérifiées par la solution exacte. En remplaçant l'approximation dans les équations différentielles, on constate que celles-ci ne vérifient pas exactement, et un résidu est défini dans ce cas pour mesurer l'erreur. Le résidu est minimisé en le multipliant par une fonction de pondération et en l'intégrant.

✓ Principe mathématique

Le principe mathématique est basé sur les méthodes suivantes :

1. Méthodes variationnelles (minimisation d'une fonctionnelle) ;
2. Méthodes des résidus pondérés.

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis réside dans le découpage du domaine d'étude en domaine élémentaire de dimension finie.

Sur chacun de ces domaines, appelés éléments finis, la fonction inconnue est approchée par un polynôme dont le degré peut varier d'une application à l'autre, mais reste en général faible. Ces éléments, triangles ou quadrilatères, rectilignes ou curvilignes, doivent réaliser une partition du domaine d'étude (ils sont disjoints et leur union recouvre le domaine tout entier). Cette partition qui est généralement appelée découpage ou discrétisation du domaine doit respecter un certain nombre de règles qui permettent d'assurer un bon déroulement du calcul.

Étapes de la mise en œuvre

1. Discrétisation du domaine en un nombre fini d'éléments ;
2. Choix d'un modèle d'interpolation (variation de la variable Φ sur l'élément) ;

3. Écriture des équations modèle sous forme algébrique au niveau local (dans un élément):
détermination des vecteurs et matrices caractéristiques ;
4. Assemblage des vecteurs et matrices locales en un vecteur global B et une matrice globale A ;
5. Résolution du système $AX = B$.

III.2.3-Méthodes spectrales (MS) :

L'inconnue est approchée par des séries Fourier tronquées, ou par des séries de polynômes de Chebichev. Par rapport aux méthodes des différences finies et des éléments finis, l'approximation n'est pas locale, mais elle est valide sur tout le domaine de calcul. On utilise également le concept du résidu pondéré comme dans la méthode des éléments finis ou en imposant que l'approximation doive correspondre à la solution exacte pour les points du maillage.

✓ Principe

On remplace, dans l'équation modèle l'inconnue par des développements tronqués sur des bases de fonctions orthogonales et en utilisant leur propriété d'orthogonalité on se ramène à des systèmes d'équations différentielles ordinaires plus simples à résoudre.

✓ Avantages

1. Permet d'obtenir des solutions d'une très grande précision.

✓ Inconvénients

1. Formalisme mathématique plus complexe et mise en œuvre délicate ;
2. Difficultés pour traiter les géométries complexes et des conditions aux limites non académiques.

III.2.4 - Méthode des volumes finis (MVF) :

La méthode a été décrite la première fois en **1971 par Patankar et al et publiée en 1980 par Patankar [17]**.

Au début, la méthode a été développée comme une formulation spéciale de la méthode des différences finies. L'algorithme numérique a les pas suivants:

1. Le domaine d'analyse (de calcul) est divisé en volumes finis (génération du maillage);
2. L'intégration formelle des équations sur tout le volume de contrôle ;
3. La discrétisation, qui implique la substitution des différentes approximations de type différences finies pour les termes intégrés en représentant différents processus d'écoulement comme la convection, la diffusion et le terme source ;
4. Le résultat est la conversion des intégrales dans un système d'équation algébriques ;
5. La résolution du système d'équations algébriques par l'utilisation d'une méthode itérative.

Le premier pas qui est l'intégration sur le volume de contrôle fait la distinction entre la méthode des volumes finis et tous les autres techniques numériques. Le résultat de l'intégration exprime la conservation exacte de la grandeur physique sur chaque volume de contrôle. Cette relation claire entre l'algorithme numérique et le principe de conservation physique détermine la principale attraction de la méthode des volumes finis et son concept devient plus facile à comprendre que le concept de la méthode des éléments finis ou de la méthode spectrale. La conservation de la variable générale d'écoulement, par exemple une composante de la vitesse ou de la température, sur le volume de contrôle peut être exprimée comme un bilan entre les différents processus qui tendent de l'augmenter ou bien de la baisser.

✓ Principe

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équation algébrique qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC).

Le principe de discrétisation peut être illustré en considérant l'équation de transport pour une grandeur scalaire, valable pour toutes les équations d'écoulement, en régime stationnaire.

Les différentes étapes de la mise en œuvre sont :

1. Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points (les nœuds du maillage), autour desquels on définit des volumes élémentaires (appelés volume de contrôle) contigus, non juxtaposés et sans discontinuités aux interfaces ;
2. Les équations modèles, sous forme conservative, sont intégrées sur chaque volume de contrôle (VC) ;
3. Les intégrales sur un volume de contrôle en un nœud donné sont évaluées en approchant la variation de par des profils ou des lois d'interpolation entre les nœuds voisins du point considéré ;
4. Écriture des équations algébriques en fonction des valeurs de aux nœuds du maillage;
5. Résolution du système algébrique linéaire obtenu.

✓ **Avantages**

1. Préservation du caractère conservatif des équations sur chaque volume de contrôle (continuité des flux aux interfaces), valable pour n'importe quelle finesse du maillage;
2. Mise en œuvre relativement facile et applicable aux géométries complexes ;
3. Temps de calcul et stockage mémoire raisonnable (matrice de type bande) ;
4. Notre choix est porté sur la méthode des volumes finis grâce aux avantages qu'elle nous offre pour notre étude tels que la stabilité, la convergence, et principalement elle assure la conservation de masse et de quantité de mouvement sur chaque volume de contrôle.

✓ **Inconvénients**

1. Moins précis que les méthodes spectrales.

Dans la présente étude, on utilisera la méthode des volumes finis.

III .3 -Méthode de résolution numérique

Pour résoudre le système d'équations (II.23) (II.24) avec les conditions aux limites associées, nous considérons une solution numérique par la méthode des volumes finis. Alors que pour l'équation (II.27) nous utilisons un développement en série de Taylor.

Les deux méthodes très utilisées dans la solution numérique d'un phénomène physique, elles sont bien exposées par Patankar [17], Nogotov [18].

La figure (III.2) représente le domaine physique et le domaine de calcul.

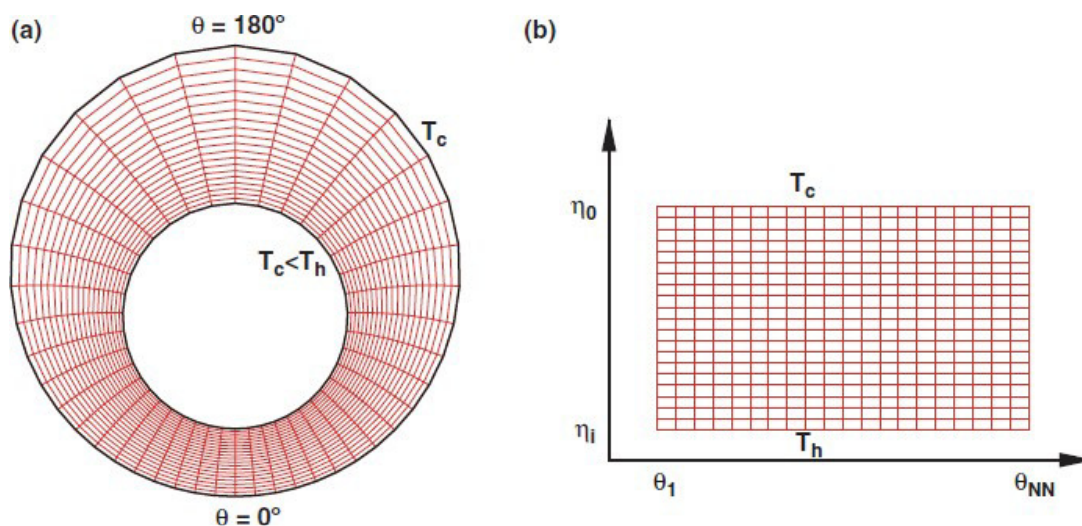


Figure III.2. Domaine physique(a) et domaine de calcul(b).

III .3.1 – Maillage et Volume élémentaire d'intégration :

On découpe l'espace annulaire selon les directions et en un ensemble de volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" égaux à « $H^2 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1$ ». (Le problème étant bidimensionnel, on prend l'unité comme épaisseur dans la direction z).

Le centre d'un volume fini typique est un point P et ses faces latérales « est », « ouest », « nord » et « sud », sont désignées respectivement, par les lettres e, w, n et s. chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes

sont les points E, W, N et S. Les variables scalaires (vorticité, température) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis. Donc les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées dans le volume fini typique.

Les nœuds E et ne sont pris dans les directions des coordonnées positives de θ et η respectivement et les nœuds W et se dans les sens contraires.

La **figure (III.3)** représente un volume-fini typique et son voisinage dans un domaine de calcul. Nous avons utilisés des pas $\Delta\eta$ et $\Delta\theta$ constants. Plus précisément, nous posons:

$$\Delta\eta = \frac{\eta_1 - \eta_{NI}}{NI - 1}, \Delta\theta = \frac{\theta_{NN} - \theta_1}{NN - 1}$$

Avec: NI : le nombre de points suivant η . NN : le nombre de points suivant θ .

i : indice des noeuds suivant η . j : indice des noeuds suivant θ .

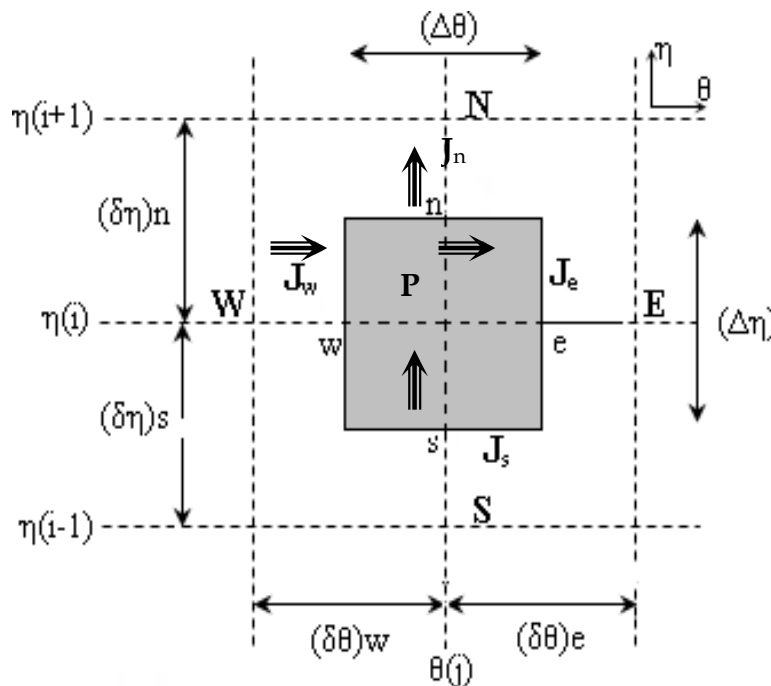


Figure III.3. Représentation schématique du volume de contrôle sur cette figure, le volume de contrôle entourant le nœud P est limité par les faces notées w, n, e et s.

III 3.2 -Discrétisation de l'équation générale de transfert :

Pour illustrer la discrétisation des équations de transfert par la méthode des volumes finis, nous considérons l'équation de transfert sous sa forme générale.

Pour bien comprendre cette méthode nous considérons d'abord l'équation de la chaleur (II.24) et l'équation du mouvement (II.23).

Additionnons l'équation de la chaleur (II.24) à l'équation de continuité (II.22) multipliée par T^* :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[HV_{\eta}^* T^* - C_3 \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[HV_{\theta}^* T^* - C_3 \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right] = 0 \tag{III.1}$$

En Additionnant l'équation du mouvement (II.24) à l'équation de continuité (II.23) multipliée par ω^* on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[HV_{\eta}^* \omega^* - Pr. C_2 \frac{\partial \omega^*}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[HV_{\theta}^* \omega^* - Pr. C_2 \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta} \right] \\ & = Pr. Ra. H. C_1 \left[(f(\eta, \theta). \cos(\alpha) + g(\eta, \theta). \sin(\alpha)). \left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. + (f(\eta, \theta). \sin(\alpha) - g(\eta, \theta). \cos(\alpha)). \left(\frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \tag{III.2}$$

Ces deux équations (III.1) et (III.2) sont de la forme générale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[HV_{\eta}^* \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[HV_{\theta}^* \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] = S_{\phi} \tag{III.3}$$

Le tableau suivant illustre les différentes expressions des termes : Γ_{ϕ} , S_{ϕ} , ϕ .

Équation	ϕ	Γ_{ϕ}	S_{ϕ}
III.1	T^*	C_3	0
III.2	ω^*	$Pr. C_2$	$Pr. Ra. H. C_1 \left[(f(\eta, \theta). \cos(\alpha) + g(\eta, \theta). \sin(\alpha)). \left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right. + (f(\eta, \theta). \sin(\alpha) - g(\eta, \theta). \cos(\alpha)). \left(\frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \left. \right]$

Tableau III.1. Les différentes expressions des termes : Γ_{ϕ} , S_{ϕ} , ϕ .

ϕ : Fonction générale (soit T^* ou soit ω^*).

Γ_ϕ : Coefficient adimensionnel.

S_ϕ : Terme de source.

III .3.3.1 -Intégration de l'équation de transfert :

L'équation de discrétisation d'une variable ϕ est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume de contrôle fini typique. Ci-après, nous présentons un cas de discrétisation d'une équation de transfert de ϕ .

$$\int_0^1 \left[\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} \left[HV_\eta^* \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \theta} \left[HV_\theta^* \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] d\eta d\theta \right] dz$$

$$= \int_0^1 \left[\int_s^n \int_w^e S_\phi d\eta d\theta \right] dz \quad \text{III. 4}$$

Ou bien :

$$\underbrace{\int_0^1 \left[\int_s^n \int_w^e \left[\frac{\partial (HV_\eta^* \phi)}{\partial \eta} + \frac{\partial (HV_\theta^* \phi)}{\partial \theta} \right] d\eta d\theta \right] dz}_1 = \underbrace{\int_0^1 \left[\int_s^n \int_w^e \left[\frac{\partial \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)}{\partial \eta} + \frac{\partial \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right] d\eta d\theta \right] dz}_2$$

$$+ \underbrace{\int_0^1 \left[\int_s^n \int_w^e S_\phi d\eta d\theta \right] dz}_3 \quad \text{III. 5}$$

Les termes 1, 2 et 3 représentent les intégrales doubles dans le volume fini (entre les faces w-e et s-n), des termes de la convection, de la diffusion et de la source de ϕ . Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons le schéma de la loi de puissance (**Power Law**) pour approcher les variations de ϕ entre les points du maillage. Ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable.

L'équation (III.4) peut s'écrire sous la forme :

$$\int_0^1 \left[\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} [J_\eta] d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \theta} [J_\theta] d\eta d\theta \right] dz = \int_0^1 \left[\int_s^n \int_w^e S_\phi d\eta d\theta \right] dz$$

Avec :

$$J_\eta = HV_\eta^* \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$

$$J_\theta = HV_\theta^* \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

J_η, J_θ sont les flux totaux (convection plus diffusion). De l'équation (III.5) on trouve :

$$(J_n - J_s) + (J_e - J_w) = \overline{S_\phi} \cdot \Delta v \quad \text{III.6}$$

$\overline{S_\phi}$: est la valeur moyenne du terme source S_ϕ dans le volume de contrôle élémentaire.

J_e, J_w, J_n, J_s sont les valeurs des flux totaux aux interfaces du volume de contrôle.

$$J_e = \int_s^n \left[(HV_\theta^* \phi)_e - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_e \right] d\eta \cdot 1 = (J_\theta)_e \Delta \eta \cdot 1$$

$$J_w = \int_s^n \left[(HV_\theta^* \phi)_w - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_w \right] d\eta \cdot 1 = (J_\theta)_w \Delta \eta \cdot 1$$

$$J_n = \int_w^e \left[(HV_\eta^* \phi)_n - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_n \right] d\theta \cdot 1 = (J_\theta)_n \Delta \theta \cdot 1$$

$$J_s = \int_w^e \left[(HV_\eta^* \phi)_s - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_s \right] d\theta \cdot 1 = (J_\theta)_s \Delta \theta \cdot 1$$

III .3.3.2- Linéarisation du terme source :

$\overline{S_\phi}$ est la valeur moyenne de S_ϕ dans ce volume élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de ϕ_p (au nœud P) et se mettre sous la forme:

$$\overline{S_\phi} = S_0 + S_p \cdot \phi_p \text{ .Avec: } S_p < 0 \text{ et } S_0: \text{ la partie constante de } \overline{S_\phi} \text{ qui ne dépend pas de } \phi_p.$$

Par suite l'équation (III.6) devienne :

$$(J_n - J_s) + (J_e - J_w) = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta v \quad \text{III.7}$$

III .3.3.3- Discrétisons de l'équation de continuité (II .22) :

Si on intègre l'équation de continuité (II.22) dans le volume de contrôle, on obtient:

$$\int_0^1 \left[\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} [HV_\eta^*] d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \theta} [HV_\theta^*] d\eta d\theta \right] dz = 0$$

On trouve :

$$(F_n - F_s) + (F_e - F_w) = 0 \tag{III.8}$$

F_n, F_s, F_e et F_w sont les débits massiques à travers les surfaces de ce volume:

$$\begin{cases} F_n = (HV_\eta^*)_n \cdot \Delta\theta \cdot 1 \\ F_s = (HV_\eta^*)_s \cdot \Delta\theta \cdot 1 \\ F_e = (HV_\theta^*)_e \cdot \Delta\eta \cdot 1 \\ F_w = (HV_\theta^*)_w \cdot \Delta\eta \cdot 1 \end{cases} \tag{III.9}$$

En multipliant l'équation (III.8) par la fonction ϕ_p et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (III.7), il vient :

$$(J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_p) + (J_n - F_n \phi_p) - (J_s - F_s \phi_p) = (S_0 - S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta v \tag{III.10}$$

Les termes $(J_i - F_i \phi_p)$, $i = e, w, n, s$ peuvent se mettre, d'après Patankar [17], sous la forme suivante :

$$(J_e - F_e \phi_p) = a_E (\phi_p - \phi_E)$$

$$(J_w - F_w \phi_p) = a_W (\phi_p - \phi_W)$$

$$(J_n - F_n \phi_p) = a_N (\phi_p - \phi_N)$$

$$(J_s - F_s \phi_p) = a_S (\phi_p - \phi_S)$$

En introduisant ces expressions dans l'équation (III.10) on obtient :

$$a_E (\phi_p - \phi_E) - a_W (\phi_p - \phi_W) - a_N (\phi_p - \phi_N) - a_S (\phi_p - \phi_S) = (S_0 - S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta v \tag{III.11}$$

D'où l'équation discrétisée :

$$a_p (\phi_p) = a_E (\phi_E) + a_W (\phi_W) + a_N (\phi_N) + a_S (\phi_S) + b \tag{III.12}$$

Avec:

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S - S_p \cdot \Delta v \tag{III.13}$$

$$b = S_0 \cdot \Delta v \tag{III.14}$$

D'après PATANKAR [17], la fonction $A(|P|)$, est donnée par:

$$A(|P|) = \|0, (1 - 0.1|P|)^5\| , \text{ par le schéma « power law ».}$$

Le symbole $\|A, B\|$ signifie que le maximum entre A et B est choisi.

$$\begin{cases} a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\ a_W = D_w A(|P_w|) + \|-F_w, 0\| \\ a_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \\ a_S = D_s A(|P_s|) + \|-F_s, 0\| \end{cases} \tag{III.15}$$

III .3.4- Choix du schéma :

L'évaluation des flux de diffusion et de convection aux interfaces des volumes de contrôle après intégration se fera à l'aide des schémas de discrétisation. Pour choisir le schéma de discrétisation approprié, il faut prendre en considération un certain nombre de critères tels que : stabilité, précision, cout de calcul numérique... souvent les modèles les moins précis sont très robustes, tandis que les modèles les plus précis sont moins robustes et plus lents et coutent cher. Les différents schémas proposés par PATANKAR [17] permettant d'exprimer la fonction $A(|P|)$.

qui est représenté dans Schéma aux différences centrées (CDS) , Schéma Upwind (UPS), Schéma Hybride (HDS), Schéma exponentiel (exacte), le Schéma " Power Law " (loi Puissance).

La fonction $A(|P|)$, qui peut être choisie dans le **tableau (III.2)** définit un schéma de discrétisation pour le terme convectif.

Schéma	Formule pour A (P)
Centre	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybride	$\ 0, (1 - 0.1 P)\ $
Power Law	$\ 0, (1 - 0.1 P)^5\ $
Exponentiel (exacte)	$\frac{ P }{exp P - 1}$

Tableau III.2 . La fonction $A(|P|)$ pour différents schémas [17].

Où e et P est le nombre de Peclet qui représente le rapport local de la convection à la diffusion $P = \frac{\rho U(\delta x)}{\Gamma}$. les graphes suivants présentent la variation de fonction $A(|P|)$ en fonction de $|P|$ « **Peclet** » pour les schémas numériques :

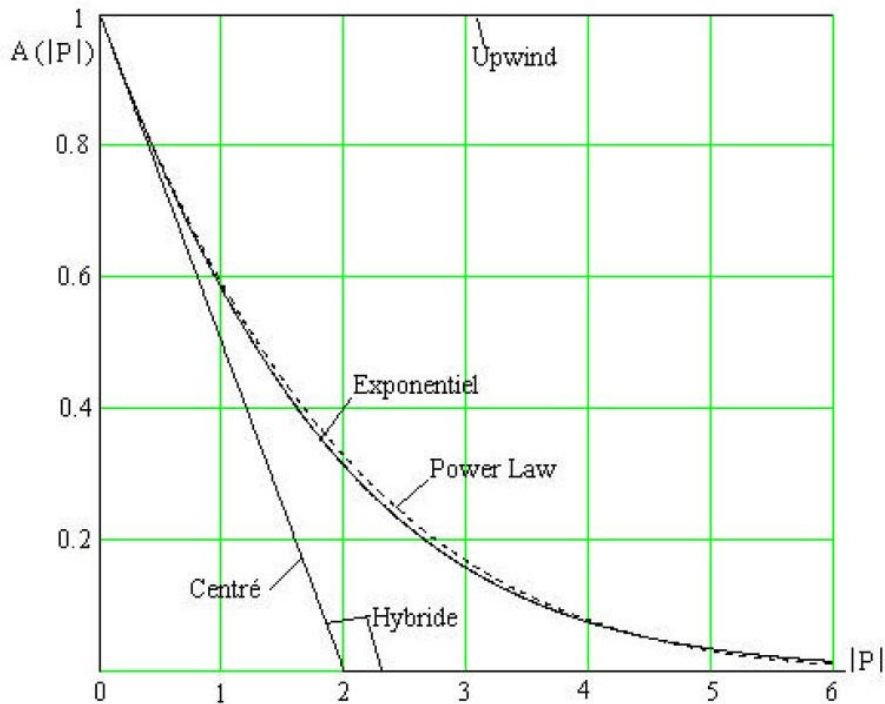


Figure. III.4. La fonction $A(|P|)$ pour les différents schémas [17].

Dans la présente étude, on utilisera le Schéma " Power Law " (loi Puissance).

● le Schéma " Power Law " (loi Puissance)

La fonction $A(|P|)$ est donnée par l'équation :

$$A(|P|) = \max(0, (1 - 0.1|P|)^5)$$

Une bonne approximation de la solution exacte est donnée par le schéma Power Law (Power law Differencing Scheme) développé par **Patankar (1980)** [17], c'est pour quoi notre choix s'est posé sur ce schéma, qui s'écrit pour les coefficients (III.15) comme suit :

$$\begin{cases} a_E = D_e \max(0, (1 - 0.1|P_e|)^5) + \max(-F_e, 0) \\ a_W = D_w \max(0, (1 - 0.1|P_w|)^5) + \max(F_w, 0) \\ a_N = D_n \max(0, (1 - 0.1|P_n|)^5) + \max(-F_n, 0) \\ a_S = D_s \max(0, (1 - 0.1|P_s|)^5) + \max(F_s, 0) \end{cases}$$

On peut distinguer que le nombre de Peclet est l'élément essentiel pour caractériser le Comportement d'un schéma numérique. La limitation des schémas précédents se situe comme suit :

- ✓ Schéma centré : par les valeurs $|P_e| \leq 2$;
- ✓ Schéma Upwind : surestime la diffusion pour les grands nombres de Peclet ;
- ✓ Schéma Hybride : son inconvénient est l'erreur maximale lorsque $P_e = 2$;
- ✓ Schéma Power Law : stable et donne une bonne approximation de la solution exacte.

Nous avons adopté le schéma en loi de puissance Power Law qui donne une bonne approximation polynomiale de la solution exacte, ainsi une bonne caractéristique de stabilité et de précision des autres schémas, en plus il a été largement utilisé.

Donc d'après le **Schéma Power law** Les coefficients de l'équation (III.15) est donnée par l'expression :

$$\begin{cases} a_E = D_e \|0, (1 - 0.1|P_e|)^5\| + \|-F_e, 0\| \\ a_W = D_w \|0, (1 - 0.1|P_w|)^5\| + \|F_w, 0\| \\ a_N = D_n \|0, (1 - 0.1|P_n|)^5\| + \|-F_n, 0\| \\ a_S = D_s \|0, (1 - 0.1|P_s|)^5\| + \|F_s, 0\| \end{cases} \quad \text{III.16}$$

Les grandeurs D_e, D_w, D_n et D_s , (coefficients de diffusion) sont définies par:

$$\begin{cases} D_e = (\Gamma_\phi)_e \frac{\Delta\eta}{(\delta\theta)_e} \\ D_w = (\Gamma_\phi)_w \frac{\Delta\eta}{(\delta\theta)_w} \\ D_n = (\Gamma_\phi)_n \frac{\Delta\theta}{(\delta\eta)_n} \\ D_s = (\Gamma_\phi)_s \frac{\Delta\theta}{(\delta\eta)_s} \end{cases} \quad \text{III.17}$$

P_e, P_w, P_n et P_s sont les nombres de Peclet définis par:

$$\begin{cases} P_e = \frac{F_e}{D_e} \\ P_w = \frac{F_w}{D_w} \\ P_n = \frac{F_n}{D_n} \\ P_s = \frac{F_s}{D_s} \end{cases} \quad \text{III.18}$$

Les pas d'intégration $(\delta\theta)_n, (\delta\theta)_s, (\delta\eta)_e, (\delta\eta)_w$ peuvent être égaux ou non aux pas de calcul $\Delta\theta$ et $\Delta\eta$ respectivement. Ils sont choisis constants et égaux aux $\Delta\theta$ et $\Delta\eta$. Considérons que les interfaces e, w, s'est ne sont les milieux des nœuds (P, E) (P, W) (P, N) et (P, S).

Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent:

$$\begin{cases} D_n = (\Gamma_\phi)_n \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_s = (\Gamma_\phi)_s \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = (\Gamma_\phi)_e \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_w = (\Gamma_\phi)_w \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{cases} \quad \text{III.19}$$

III .4-Discretisation de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial\eta} \left[HV_\eta^* T^* - C_3 \cdot \frac{\partial T^*}{\partial\eta} \right] + \frac{\partial}{\partial\theta} \left[HV_\theta^* T^* - C_3 \cdot \frac{\partial T^*}{\partial\theta} \right] = 0$$

En remplaçant dans l'équation (III.3) la fonction ϕ par la température adimensionnelle T^*

et le terme source $S_\phi = 0$, l'équation de la chaleur discrétisée sera :

$$a_p T_p^* = a_E T_E^* + a_W T_W^* + a_N T_N^* + a_S T_S^* + b \quad \text{III.20}$$

Avec :

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \text{III.21}$$

Ou a_E, a_W, a_N et a_S sont respectivement les mêmes expressions que dans le système (II.2.16).

Le calcul des coefficients a_E, a_W, a_N et a_S nécessite la détermination des coefficients F_i, D_i, P_i ($i = n, s, e, w$). Remplaçant les vitesses adimensionnelles:

$$\begin{cases} V_\eta^* = \frac{1}{H} \frac{\partial\psi^*}{\partial\theta} \\ V_\theta^* = -\frac{1}{H} \frac{\partial\psi^*}{\partial\eta} \end{cases} \quad \text{III.22}$$

Dans le système (III.9) on obtient :

$$\begin{cases} F_n = \Delta\theta \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta} \right)_n \\ F_s = \Delta\theta \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta} \right)_s \\ F_e = \Delta\eta \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta} \right)_e \\ F_w = \Delta\eta \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta} \right)_w \end{cases} \quad \text{III. 23}$$

En appliquant une interpolation linéaire (différence centrée), et en tenant compte que les interfaces sont à mi-distance des nœuds on trouve :

$$\begin{cases} \psi_n^* = \frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i, j)}{2} \\ \psi_s^* = \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i-1, j)}{2} \\ \psi_e^* = \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i, j)}{2} \\ \psi_w^* = \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j-1)}{2} \end{cases} \quad \text{III. 24}$$

Le développement du gradient de la fonction de courant est établi d'après la démarche de Nogotov [16], comme suit (voir Figure III.5) :

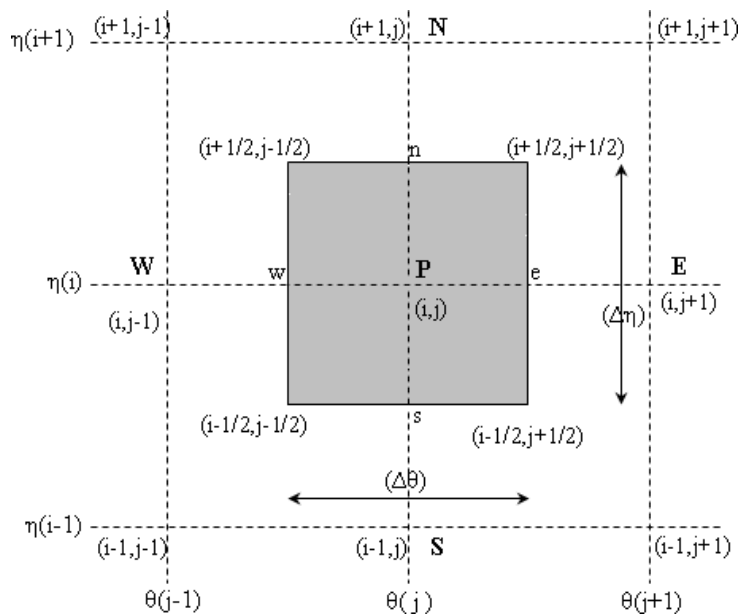


Figure III.5. Représentation schématique des nœuds P, E, W et S dans le maillage.

- A l'interface " e":

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^*(i + 1/2, j + 1/2) - \psi^*(i - 1/2, j + 1/2)}{\Delta \eta}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_e &= \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^*(i + 1, j + 1) + \psi^*(i + 1, j)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j + 1)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^*(i - 1, j + 1) + \psi^*(i - 1, j)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j + 1)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^*(i + 1, j + 1) + \psi^*(i + 1, j) - \psi^*(i - 1, j + 1) - \psi^*(i - 1, j)}{4\Delta \eta}$$

Par suite la fonction F_e s'écrit :

$$F_e = \frac{1}{4} [\psi^*(i - 1, j + 1) + \psi^*(i - 1, j) - \psi^*(i + 1, j + 1) - \psi^*(i + 1, j)] \quad \text{III. 25}$$

- A l'interface " w":

De la même façon, on écrit le gradient à l'interface « w ».

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_w &= \frac{\psi^*(i + 1/2, j - 1/2) - \psi^*(i - 1/2, j - 1/2)}{\Delta \eta} \\ &= \frac{\psi^*(i + 1, j) + \psi^*(i + 1, j - 1) - \psi^*(i - 1, j) - \psi^*(i - 1, j - 1)}{4\Delta \eta} \end{aligned}$$

Et la fonction F_w est donnée par :

$$F_w = \frac{1}{4} [\psi^*(i - 1, j - 1) + \psi^*(i - 1, j) - \psi^*(i + 1, j - 1) - \psi^*(i + 1, j)] \quad \text{III. 26}$$

- A l'interface " n":

De la même façon, le gradient à l'interface « n » est défini par :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}\right)_n &= \frac{\psi^*(i + 1/2, j + 1/2) - \psi^*(i + 1/2, j - 1/2)}{\Delta \theta} \\ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}\right)_n &= \frac{1}{2\Delta \theta} \left[\frac{\psi^*(i + 1, j + 1) + \psi^*(i, j + 1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i + 1, j)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta \theta} \left[\frac{\psi^*(i + 1, j - 1) + \psi^*(i, j - 1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i + 1, j)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}\right)_n = \frac{\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i, j+1) - \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i, j-1)}{4\Delta\theta}$$

On en déduit:

$$F_w = \frac{1}{4}[\psi^*(i-1, j-1) + \psi^*(i-1, j) - \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i+1, j)] \quad \text{III. 27}$$

● A l'interface " n ":

Le gradient à l'interface « s » s'exprime par la relation :

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}\right)_s = \frac{\psi^*(i-1, j+1) + \psi^*(i, j+1) - \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i, j-1)}{4\Delta\theta}$$

Et l'expression F_s devient :

$$F_s = \frac{1}{4}[\psi^*(i-1, j+1) + \psi^*(i, j+1) - \psi^*(i-1, j-1) - \psi^*(i, j-1)] \quad \text{III. 28}$$

Pour l'équation de la chaleur, le coefficient $\Gamma_\phi = C_3$, (voir **tableau III.1**)

En portant cette valeur dans le système (II.2.19), les coefficients D_e, D_w, D_n et D_s s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s = C_3 \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w = C_3 \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad \text{III. 29}$$

Par suite, les nombres de Péclet dans le système (**III. 18**) deviennent

$$\left\{ \begin{aligned} P_n &= F_n \cdot \frac{1}{C_3} \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= F_s \cdot \frac{1}{C_3} \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= F_e \cdot \frac{1}{C_3} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= F_w \cdot \frac{1}{C_3} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right. \quad \text{III. 30}$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (III.20), on écrit W, P, E, N et S respectivement $(i, j-1); (i, j); (i, j+1); (i+1, j); (i-1, j)$. Les coefficients a_E, a_W, a_N et a_S sont pris au nœud (i, j) . Ainsi l'équation (III.20) peut s'écrire sous la forme:

$$a_p T^*(i, j) = a_E T^*(i, j+1) + a_W T^*(i, j-1) + a_N T^*(i+1, j) + a_S T^*(i-1, j) + b \quad \text{III. 31}$$

III .4 .1-Discretisation des Conditions aux limites :

Pour satisfaire les conditions imposées à la température des parois, on doit avoir:

✓ Sur la paroi du cylindre circulaire extérieur (I=NI)

$$a_p = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0$$

✓ Sur la paroi du cylindre circulaire intérieur (I=1)

$$a_p = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 1$$

III .5-Discretisation de l'équation de quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[HV_{\eta}^* \omega^* - Pr. C_2 \frac{\partial \omega^*}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[HV_{\theta}^* \omega^* - Pr. C_2 \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta} \right] \\ = Pr. Ra. H. C_1 \left[(f(\eta, \theta). \cos(\alpha) + g(\eta, \theta). \sin(\alpha)). \left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right. \\ \left. + (f(\eta, \theta). \sin(\alpha) - g(\eta, \theta). \cos(\alpha)). \left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right] \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation discrétisée (III.12), la fonction $\phi = \omega^*$, (ω^* a vorticité adimensionnelle) et le terme $S_p = 0$. Nous obtenons l'équation discrétisée de quantité de mouvement:

$$\begin{aligned} a_p \omega_p^* \\ = a_E \omega_E^* + a_W \omega_W^* + a_N \omega_N^* + a_S \omega_S^* \\ + b. \end{aligned} \tag{III. 32}$$

Avec:

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \tag{III. 33}$$

$$b = S_0. \Delta V$$

$$\Delta V = H^2. \Delta \eta. \Delta \theta. 1$$

Les coefficients a_E, a_W, a_N et a_S ont pour expressions celles données par le système (III.16). Lorsque le coefficient $\Gamma_{\phi} = Pr. C_2$ est égal à l'unité, comme nous l'avons montré

dans le tableau III.1, aux interfaces e, w, n et s; les coefficients **De, Dw, Dn et Ds** se déduisent des expressions suivantes:

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s = Pr \cdot C_2 \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w = Pr \cdot C_2 \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad \text{III. 34}$$

les nombres de Péclet dans le système (III. 18) deviennent

$$\left\{ \begin{aligned} P_n &= \frac{1}{Pr \cdot C_2} \cdot F_n \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= \frac{1}{Pr \cdot C_2} \cdot F_s \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= \frac{1}{Pr \cdot C_2} \cdot F_e \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= \frac{1}{Pr \cdot C_3} \cdot F_w \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right. \quad \text{III. 35}$$

Les coefficients **F_n, F_s, F_e et F_w** ont respectivement les mêmes expressions que dans lesystème (III.25), (III.26), (III.27) et (III.28).

Dans le tableau III.1, nous pouvons constater que le terme constant **S₀** du terme de source est donnée par:

$$\begin{aligned} S_0 = Pr \cdot Ra \cdot H \cdot C_1 \left[(f(\eta, \theta) \cdot \cos(\alpha) + g(\eta, \theta) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right. \\ \left. + (f(\eta, \theta) \cdot \sin(\alpha) - g(\eta, \theta) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{III. 36}$$

Par conséquent, le coefficient b devient:

$$b = S_0 \cdot \Delta v \quad \text{Avec : } \Delta v = H^2 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1, b \text{ s'écrit donc:}$$

$$\begin{aligned} b = Pr \cdot Ra \cdot C_1 \left[(f(\eta, \theta) \cdot \cos(\alpha) + g(\eta, \theta) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right. \\ \left. + (f(\eta, \theta) \cdot \sin(\alpha) - g(\eta, \theta) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right] \cdot H^3 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1 \end{aligned} \quad \text{III. 37}$$

Avec :

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^*(i+1, j) - T^*(i-1, j)}{2\Delta\eta} \quad \text{III. 38}$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^*(i, j+1) - T^*(i, j-1)}{2\Delta\theta} \quad \text{III. 39}$$

Pour homogénéiser on utilise les notations citées au paragraphe précédent, les nœuds W, P, E, N et S deviennent respectivement $(i, j - 1)$; (i, j) ; $(i, j + 1)$; $(i + 1, j)$; $(i - 1, j)$.

L'équation du mouvement discrétisée (III.32) s'écrit finalement:

$$\mathbf{a}_P \omega_P^*(i, j) = \mathbf{a}_E \omega_E^*(i, j + 1) + \mathbf{a}_W \omega_W^*(i, j - 1) + \mathbf{a}_N \omega_N^*(i + 1, j) + \mathbf{a}_S \omega_S^*(i - 1, j) + b \quad \text{III. 40}$$

Les coefficients $\mathbf{a}_E, \mathbf{a}_W, \mathbf{a}_N$ et \mathbf{a}_S et b sont pris au nœud (i, j) .

III .5.1-Discretisation des Conditions aux limites :

En déterminant la vorticité ω^* sur les parois, nous utilisons la méthode élaborée par ROACHE [18], qui a exprimé ω^* en fonction de ψ^* et utilisée un développement de Taylor:

✓ condition sur la paroi du cylindre circulaire intérieur (I=1)

$$\omega_1^* = -\frac{1}{H^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \right] \Big|_{\eta=\eta_1} \quad \text{III. 41}$$

Développons en série de Taylor la fonction de courant au voisinage de la paroi interne $(i = 1, j)$:

$$\psi^*(2, j) = \psi^*(1, j) + \frac{\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^*(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^*(1, j)}{\eta^2} + \dots \quad \text{III. 42}$$

La vorticité sur cette paroi s'écrit :

$$\omega^*(1, j) = -\frac{1}{H^2(1)} \left[\frac{\psi^*(i, j + 1) - 2\psi^*(1, j) + \psi^*(1, j - 1)}{(\Delta \theta)^2} + \frac{2}{(\Delta \eta)^2} (\psi^*(2, j) - \psi^*(1, j)) \right] \quad \text{III. 43}$$

✓ Sur la paroi du cylindre extérieur (I=NI)

$$\omega_1^* = -\frac{1}{H^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \right] \Big|_{\eta=\eta_2} \quad \text{III. 44}$$

La vorticité sur cette paroi s'écrit :

$$\omega^*(NI, j) = -\frac{1}{H^2(NI)} \left[\frac{\psi^*(NI, j + 1) - 2\psi^*(NI, j) + \psi^*(NI, j - 1)}{(\Delta \theta)^2} + \frac{2}{(\Delta \eta)^2} (\psi^*(NI - 1, j) - \psi^*(NI, j)) \right] \quad \text{III. 45}$$

III .6-Discretisation de l'équation de la fonction de courant

Réécrivons l'équation adimensionnelle (II.27) sous la forme suivante:

$$-H^2 \omega^* = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right).$$

L'équation (II.28) donne:

$$\begin{aligned} -H^2(i, j) \omega^*(i, j) \\ = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} \Big|_{i, j} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \Big|_{i, j} \end{aligned} \quad \text{III. 46}$$

Pour discrétiser cette équation nous utiliserons le développement en série de Taylor, ce qui donne:

$$\begin{aligned} -H^2(i, j) \omega^*(i, j) = \left[\frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i-1, j) - 2\psi^*(i, j)}{(\Delta \eta)^2} \right. \\ \left. \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i, j-1) - 2\psi^*(i, j)}{(\Delta \theta)^2} \right] \end{aligned} \quad \text{III. 47}$$

Et qui conduit à écrire :

$$\begin{aligned} -H^2(i, j) \omega^*(i, j) = \left[\frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i-1, j) - 2\psi^*(i, j)}{(\Delta \eta)^2} \right. \\ \left. + \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i, j-1) - 2\psi^*(i, j)}{(\Delta \theta)^2} \right] \\ - 2\psi^*(i, j) \left[\frac{1}{(\Delta \eta)^2} + \frac{1}{(\Delta \theta)^2} \right] \end{aligned} \quad \text{III. 48}$$

La fonction de courant au nœud P sera donc exprimée en fonction de celle aux nœuds W, N, E et S et s'écrit:

$$\begin{aligned} \psi^*(i, j) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\Delta \eta)^2} + \frac{1}{(\Delta \theta)^2} \right]^{-1} \left[\frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i-1, j)}{(\Delta \eta)^2} + \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i, j-1)}{(\Delta \theta)^2} \right. \\ \left. + H^2(i, j) \omega^*(i, j) \right] \end{aligned} \quad \text{III. 49}$$

III .6.1-Discretisation des Conditions aux limites :

Les conditions aux limites associées aux parois, que nous avons déterminées dans les équations (II.36) et (II.38), deviennent:

✓ Condition sur la paroi du cylindre circulaire intérieur (I=1)

$$\left. \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right|_{1,j} = \frac{-3\psi^*(1,j) + 4\psi^*(2,j) - \psi^*(3,j)}{2\Delta\eta} = 0$$

$$\psi^*(1,j) = \frac{4\psi^*(2,j) - \psi^*(3,j)}{3}$$

✓ Condition sur la paroi du cylindre circulaire extérieur (I=NI)

$$\psi^*(NI,j) = \frac{4\psi^*(NI-1,j) - \psi^*(NI-2,j)}{3} \quad \text{III. 50}$$

Nous obtenons donc un système d'équations linéaires que nous résolvons par la méthode itérative de "relaxations successives".

III .7-Discretisation des composantes de la vitesse

Les équations (II.26), nous donnent respectivement les composantes adimensionnelles v_η^* et v_θ^* de la vitesse; ROACHE [19], utilise les différences centrées pour obtenir une expression discrétisée de ces composantes, ce qui ne donne:

$$v_\eta^*(i,j) = \frac{1}{H(i,j)} \left. \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right|_{i,j}$$

$$= \frac{1}{H(i,j)} \left[\frac{\psi^*(i,j+1) - \psi^*(i,j-1)}{2\Delta\theta} \right] \quad \text{III. 51. a}$$

$$v_\theta^*(i,j) = \frac{-1}{H(i,j)} \left. \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right|_{i,j}$$

$$= \frac{-1}{H(i,j)} \left[\frac{\psi^*(i+1,j) - \psi^*(i-1,j)}{2\Delta\eta} \right] \quad \text{III. 51. b}$$

$$\forall (i,j) \text{ si } i \neq 1; i \neq NI; j \neq 1; j \neq NN$$

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISSCUSSIONS

IV- RÉSULTATS ET DISSCUSSION

INTRODUCTION

Une simulation numérique de l'écoulement laminaire stationnaire par convection naturelle dans un espace annulaire délimité par deux cylindres concentriques horizontaux par un rapport des rayons $RR=2$ et $\alpha = 0$, remplie par différents fluides de base « Eau, Ethylène Glycol (EG), Huile de moteur, glycérine » et contenant des nanoparticules de type du Ag avec différentes concentrations. La paroi cylindrique externe est maintenue isotherme à la température froide T_F et T_c la paroi cylindrique interne est maintenue isotherme à la température $T_c > T_F$. La simulation numérique est effectuée pour une marge de nombre de Rayleigh variant de 10^3 à 10^5 et une concentration volumique des nanoparticules (Argent) : $\phi = 0 - 12\%$. Les équations qui régissent (équations aux dérivées partielles (EDP)) ont été résolues numériquement via la méthode des volumes finis en utilisant un schéma en loi de puissance (Power-Low) pour approcher les variations de ϕ entre les points du maillage ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable [20]. Et leur résolution est effectuée à l'aide du code de calcul « **FLUENT** ». La construction de géométrie et leur maillage sont faits à l'aide du logiciel « **GAMBIT** ». Nous nous allons étudier l'effet de fraction en volume des nanoparticules sur les caractéristiques thermiques et dynamiques a l'intérieure de cavité.

IV.1- Présentation du code de calcul

IV.1.1- Code de calcul Fluent ;

Ansys-Fluent est un code de calcul CFD (Computational Fluid Dynamics) qui modélise tous les écoulements fluides, compressibles ou incompressibles, impliquant des phénomènes physiques complexes tels que la turbulence, le transfert thermique, les réactions chimiques et les écoulements multiphasiques, dans des configurations plus ou moins complexes.

Ansys-Fluent emploie la méthode des volumes finis comme procédé de discrétisation des équations qui gouvernent l'écoulement, tel que l'équation de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie.

IV.1.2- Préprocesseur Gambit :

Le logiciel Gambit permet à l'utilisateur de construire la géométrie du domaine de calcul (2D/3D) et de subdiviser ce dernier en petits volumes de contrôle ou cellules de calcul. L'ensemble de ces volumes élémentaires constitue le maillage. Le paramétrage se fait par une interface graphique puissante ce qui lui offre la flexibilité à réaliser et à mailler tout type de géométries complexes. La définition des conditions aux limites appropriées, au niveau des

cellules qui coïncident ou touchent la frontière du domaine de calcul.

IV.2- Test de maillage

Pour vérifier l'effet du maillage sur les résultats numériques, plusieurs maillages uniformes ont été utilisés arbitrairement. Dans le **Tableau. IV.1** nous, présentons les valeurs de nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} et les valeurs de fonction de courant ψ^*_{max} en fonction du nombre de nœuds pour deux cas de nombre de Rayleigh 10^4 et 10^5 utilisant l'eau pure, et nous a permis de choisir le maillage avec 13200 nœuds.

Nombre des nœuds		900	3400	13200	32000
$Ra = 10^3$	Nu_{moy}	2.869	2.836	2.803	2.798
	ψ^*_{max}	0.537	0.495	0.484	0.481
$Ra = 10^4$	Nu_{moy}	5.56	5.20	5.09	5.08
	ψ^*_{max}	3.086	2.89	2.48	2.477

Tableau. IV.1. Étude du maillage.

IV.3- Validation des résultats

De manière à vérifier l'exactitude des résultats numériques obtenus dans le présent travail, une validation de notre simulation numérique a été faite en comparant nos résultats avec d'autres travaux numériques d'Abu-Nad et al. [20], mihoubi et al. [21] et ceux expérimentaux de Kuhen et al. [22]. Ces travaux ont effectué pour un nombre de $Ra=47000$ et un rapport des rayons $RR=2.6$.

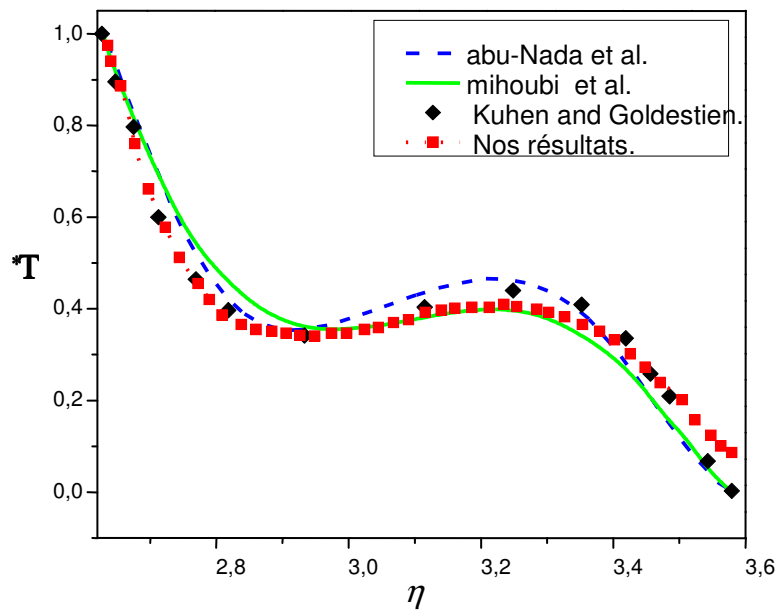


Figure. IV.1. Comparaison de nos résultats et ceux d'Abu-Nada et al. [20], mihoubi et al [21].et Kuhlen et al [22].

IV.4- Discussion des résultats

IV.4.1- Effet de la concentration de Nanoparticules :

L'effet de la concentration de Nanoparticules sur les échanges thermiques par convection naturelle au sien de l'enceinte sera étudié dans cette partie de notre travail. Nous considérons un espace annulaire bidimensionnelle délimité par deux cylindres concentriques remplie par différents fluides de base « Eau, Ethylène Glycol (EG), Huile de moteur, glycérine » et contenant des nanoparticules de type du Ag avec différentes concentrations.

La **Figure. IV.2.** montre que le nombre de Nusselt moyen sur le cylindre interne augmente avec l'augmentation de la concentration volumique des nanoparticules d'Argent pour différents types de fluide de base. Cette augmentation est plus considérable pour l'huile comme fluide de base. Les valeurs minimales de nombre de Nusselt moyen sont obtenues pour le nanofluide à base d'Ethylène Glycol et pour toute la gamme de nombres de Rayleigh (**Fig. IV.3**).

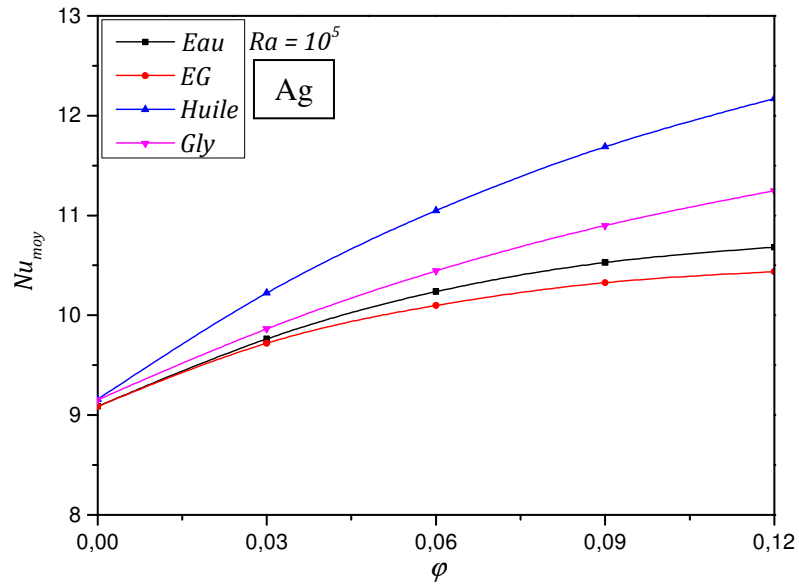


Figure. IV.2 : Nusselt moyen pour des différents fluides de base en fonction de la concentration lorsque $Ra = 10^5$.

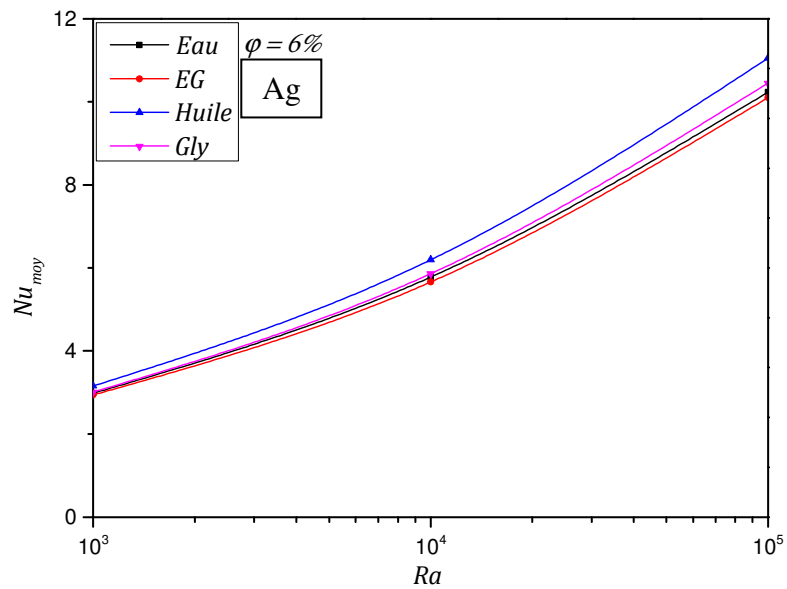


Figure. IV.3 : Nusselt moyen pour des différents fluides de base en fonction de Rayleigh à $\phi = 6\%$.

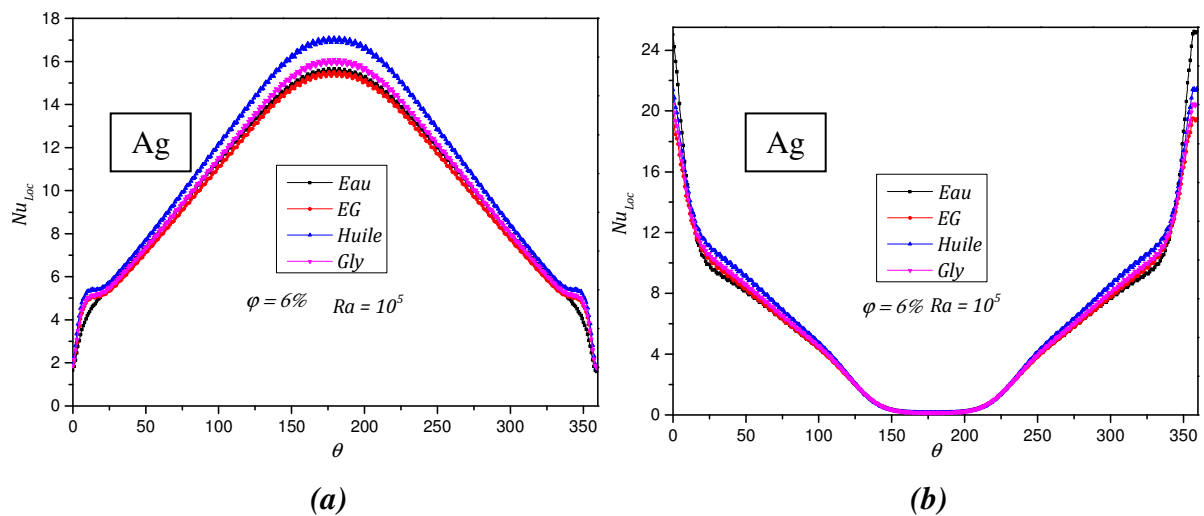


Figure. IV.4 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne (a) et externe (b) pour différentes concentrations et pour $Ra=10^5$.

Figure. IV.4. illustre la variation des nombres de Nusselt locaux sur les parois interne (a) et externe (b) pour différents fluides de base contenant 6% des nanoparticules d'Argent lorsque $Ra=10^5$. Des distributions symétriques sont obtenues pour les fluides de base avec les faibles valeurs de nombre de Nusselt sur la paroi chaude sont enregistrés dans la position angulaire $\theta=0^\circ$, alors que, les valeurs maximales sont observées à la position $\theta=180^\circ$. On obtient les valeurs les plus élevées de nombre de Nusselt locaux avec le nanofluides huile-Ag, et les valeurs les plus faibles pour le nanofluides Ethylène Glycol-Ag. Il convient de noter aussi que les valeurs maximales de Nusselt sont infectées par l'addition des nanoparticules solides, tandis que les valeurs minimales ne sont pas infectées.

Figure. IV.5 présente la variation de fonction de courant en fonction la fraction volumique des nanoparticules d'Argent et pour différent fluide de base, la figure montre que, pour une valeur donnée de φ , le nanofluides Huile-Ag donne les valeurs les plus élevées de ψ_{max}^* pour toute la gamme de nombre de Rayleigh en comparant avec les autres nanofluides et donc présente une meilleure performance dynamique.

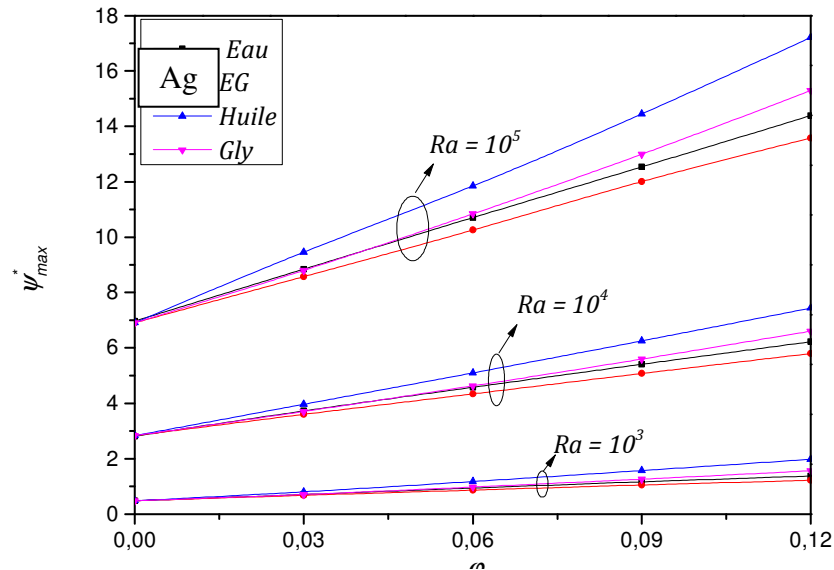


Figure. IV.5 : L'évolution de la fonction de courant en fonction de concentration, pour différents fluides de base aux des différents nombres de Rayleigh.

Figure. IV.6. illustre l'évolution de la température adimensionnelle à la position $\theta=90^\circ$ pour différents nanofluides à base d'Argent lorsque $\phi=6\%$ et $Ra=10^5$. On peut observer que les profils ont une allure similaire. Les résultats montrent que, les faibles valeurs de la température sont enregistrées pour le nanofluides eau-Ag.

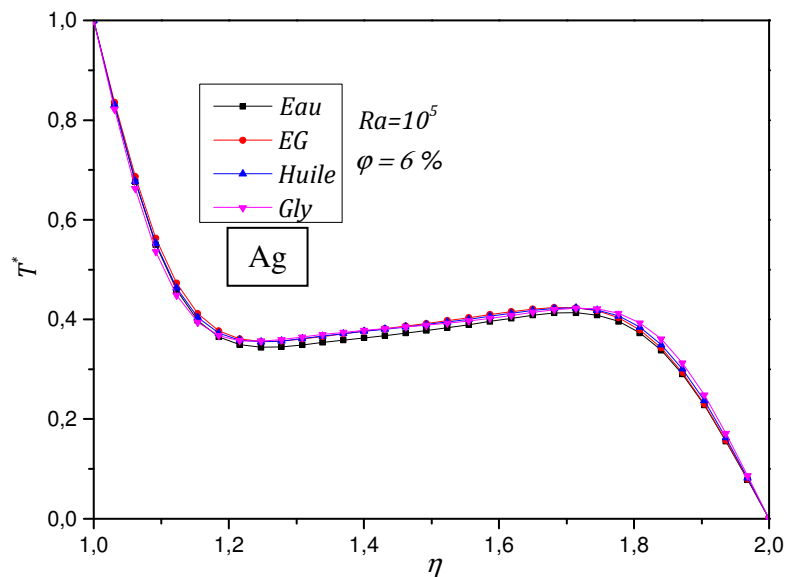
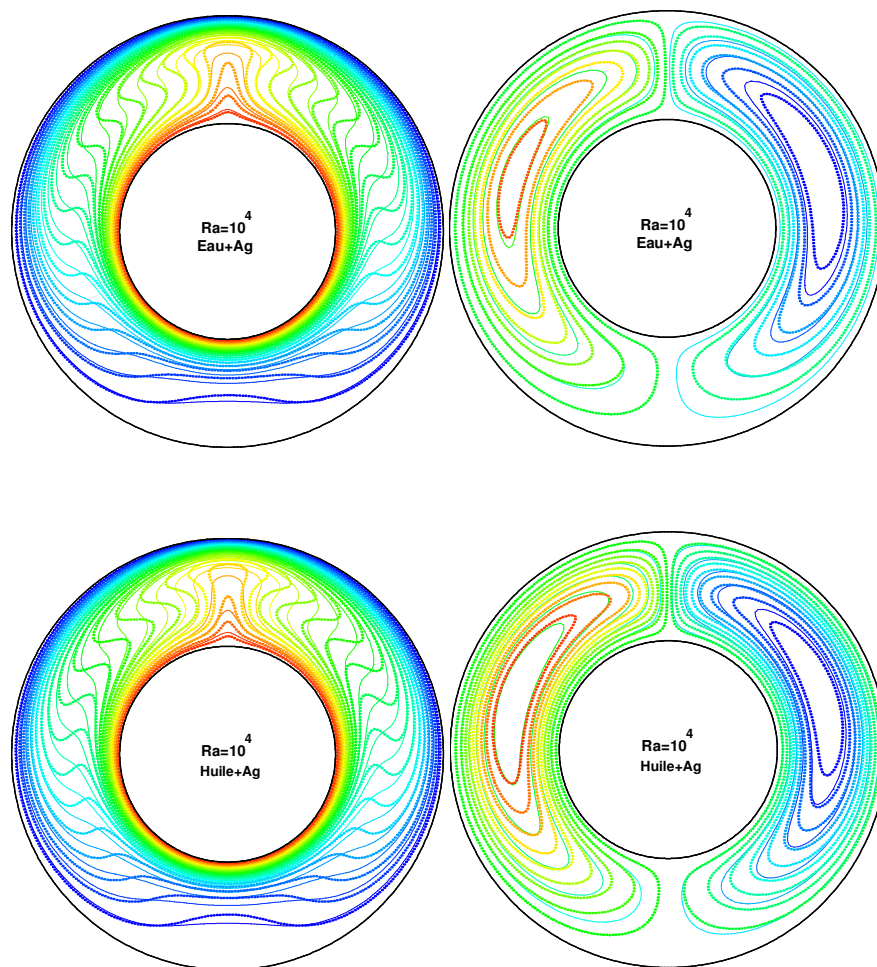


FIGURE. IV.6: Profil de la température locale de la section médiane pour différents nanofluides, au $Ra=10^5$ et $\phi=6\%$.

Les isothermes et les lignes de courant sont présentées dans la **Figure. IV.7**, pour les différents fluides de base pures « Eau, Ethylène Glycol (EG), Huile de moteur, glycérine » et avec 6% de concentration en nanoparticules d'Argent lorsque $Ra=10^4$. Les figures montrent qu'avec l'addition de nanoparticules de cuivre pour chaque fluide de base, l'amplitude de la fonction de courant augmente et les isothermes se diffusent et deviennent serrés près de la paroi chaude qui provoque une augmentation de la couche limite thermique et par conséquent une augmentation du Nusselt. Cette augmentation est plus prononcée pour l'Huile-Ag suivi par l'eau Ag nanofluide.



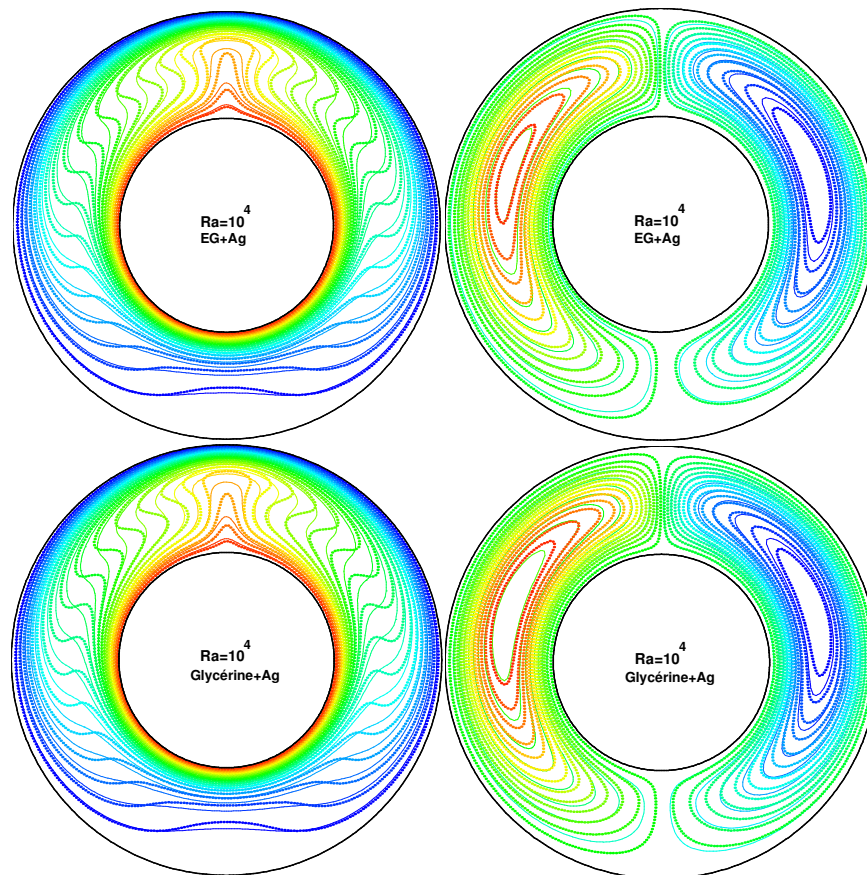


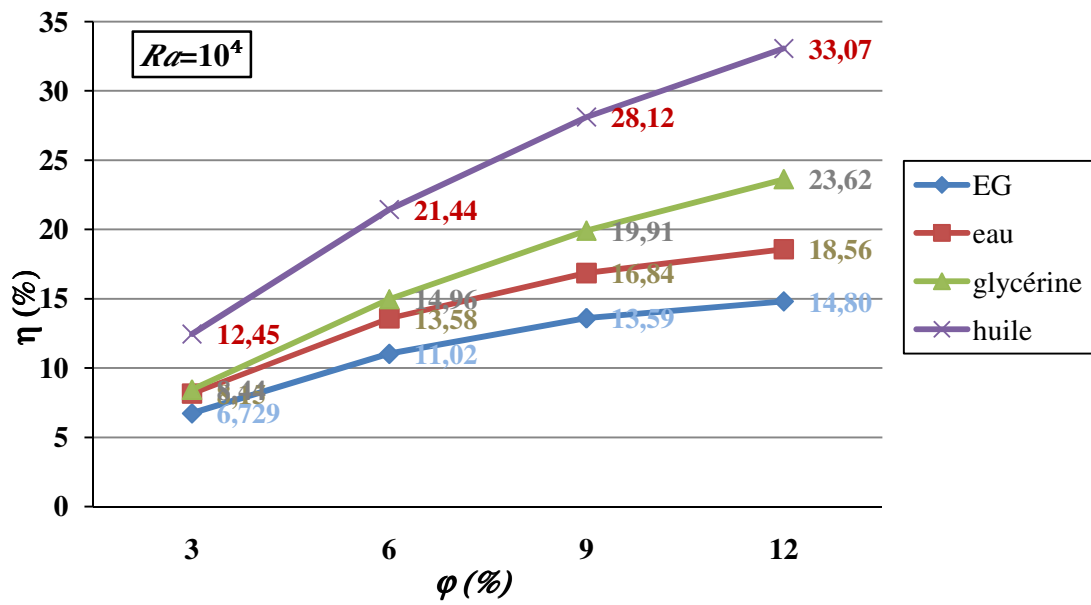
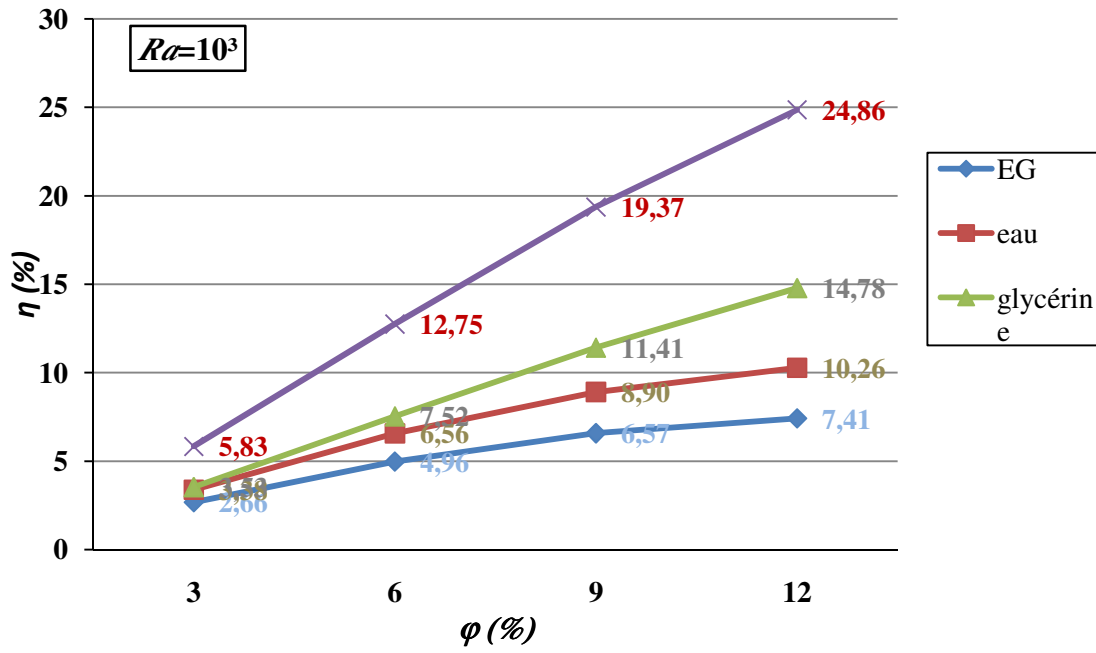
Figure. IV.7 : Isothermes et fonction de courant pour différents fluides de base, « Eau, Ethylène Glycol (EG), Huile de moteur, glycérine » et avec 6% , $Ra=10^4$.

L'effet de type de fluide de base sur le taux d'amélioration de transfert de chaleur et pour toute la gamme de nombre de Rayleigh est illustrée dans le **tableau IV.4** et sur la **fig. IV.8.** ci-dessous. Quelle que soit le fluide de base utilisé, il y a une amélioration de transfert de chaleur par l'addition des nanoparticules d'Argent et pour différentes concentrations volumiques. Les valeurs minimales de l'efficacité sont obtenues aux faibles nombre de Rayleigh ($Ra=10^3$). Tandis que, les valeurs maximales sont observées pour des valeurs modérées de Rayleigh.

modérées de Rayleigh ($Ra=10^4$). On observe aussi, les taux les plus élevés se trouvent pour le nanofluide Huile-Ag, et les valeurs les plus bas trouvent pour le nanofluide Ethylène Glycol-Ag.

		$\varphi = 3\%$	$\varphi = 6\%$	$\varphi = 9\%$	$\varphi = 12\%$
$Ra = 10^3$	Eau	3.385	6.569	8.905	10.269
	Huile	5.834	12.756	19.373	24.866
	EG	2.667	4.968	6.573	7.411
	Gly	3.530	7.529	11.419	14.784
$Ra = 10^4$	Eau	8.156	13.582	16.847	18.566
	Huile	<u>12.450</u>	<u>21.440</u>	<u>28.121</u>	<u>33.071</u>
	EG	6.729	11.026	13.593	14.807
	Gly	8.441	14.968	19.912	23.623
$Ra = 10^5$	Eau	7.439	12.653	15.859	17.574
	Huile	11.624	20.642	27.631	32.903
	EG	6.969	11.119	13.635	14.842
	Gly	7.757	14.094	19.064	22.885

Tableau. IV.2 : Taux d'amélioration pour différents nanofluides à base d'Argent.



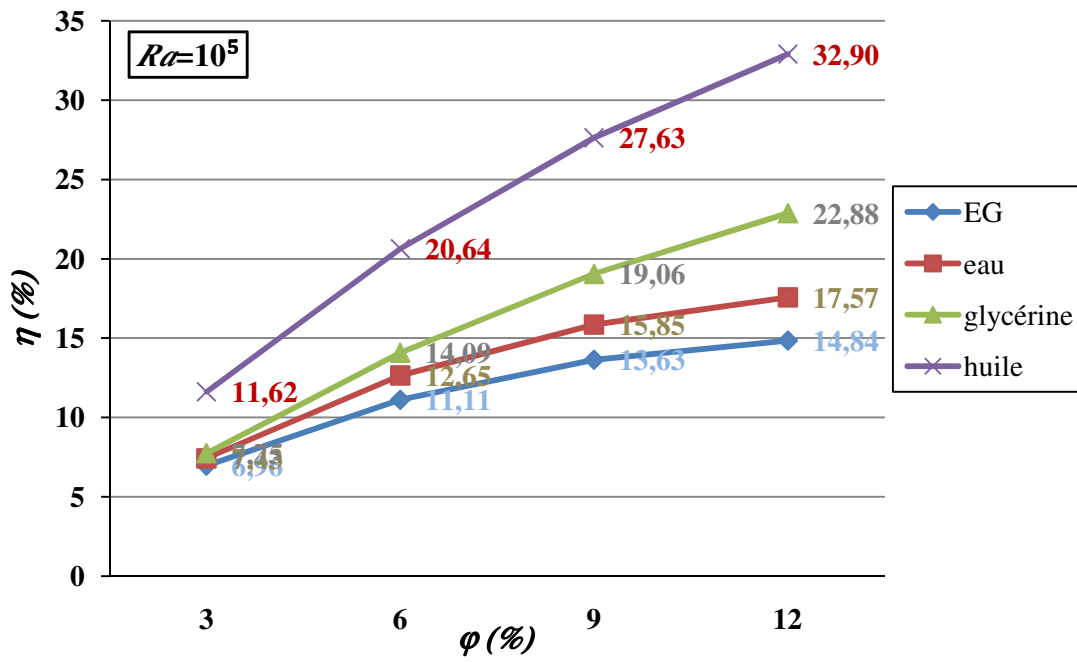


Figure. IV.8 : Les histogrammes de l'efficacité du transfert thermique pour différents fluides de basse.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif de ce travail consiste à la modélisation mathématique et la simulation numérique de la convection naturelle dans un échangeur thermique à tube cylindrique concentrique horizontal est rempli de nanofluide. La configuration géométrique du modèle physique est un espace annulaire bidimensionnel entre deux cylindres concentriques. Les deux parois de l'espace annulaire sont maintenues isothermes, T_c pour la paroi interne et T_F pour la paroi externe, avec $T_c > T_F$. Le modèle mathématique est représenté par les équations de continuité, de quantité de mouvement et de la chaleur. La méthode des volumes finis a été utilisée pour la discrétisation de l'équation (chaleur) est exprimée dans le système de coordonnées dites "bipolaires". Les nanofluides sont assimilés à des fluides monophasiques, newtoniens et incompressibles dont les équations de Navier-Stokes et de l'énergie est établie avec la prise en compte de l'approximation de Boussinesq. Et leur résolution est effectuée à l'aide du code de calcul « FLUENT ». Basé sur la méthode des volumes finis pour la résolution numérique des équations gouvernantes. La construction de géométrie et leur maillage sont faits à l'aide du logiciel « GAMBIT ». Nous avons validé notre procédure de simulation numérique en comparant nos résultats avec ceux d'autres chercheurs.

Dans cette mémoire nous proposons l'étude de l'effet de la concentration de nanoparticules d'argent dispersées dans différents fluides de base « Eau, Ethylène Glycol (EG), Huile moteur, Glycérol » sur le flux de chaleur et le transfert de chaleur pour une gamme de nombre de Rayleigh de 10^3 à 10^5 .

Les résultats obtenus sont présentés sous forme de lignes profilées et isothermes, pour mieux comprendre l'évolution des profils d'écoulement, de vitesse et de température sont également présentés. En outre, l'évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction des différents paramètres de contrôle est présentée, et ceci pour quantifier les échanges thermiques dans la configuration étudiée.

Les résultats ont révélé sont :

- l'ajout des nanoparticules aux fluides de base (Eau- Ethylène Glycol, Huile moteur, Glycérol), avec des proportions adéquates (ne dépassant pas 12%) pour éviter l'agrégation, améliore significativement le transfert de chaleur.

- l'augmentation du transfert de chaleur en convection naturelle est proportionnelle à l'augmentation du nombre de Reynolds et la fraction volumique des nanoparticules présentes dans les nanofluides.
- Les valeurs du taux d'amélioration maximal sont obtenues avec des nombres de Rayleigh modérés ($Ra = 10^4$), tandis que les valeurs minimales sont enregistrées pour des valeurs de Rayleigh faibles.
- Le nanofluide à base de Huile et d'Argent présente une meilleure performance en comparaison avec les autres.

Il serait intéressant aussi d'étudier ce problème sur d'autres formes de cavité.

ANNEXE

Types d'écoulement :

Pour étudier le transfert de chaleur par convection, cela nécessite la connaissance du mécanisme d'écoulement avant d'examiner le flux thermique, car ce dernier est l'un des aspects les plus importants de l'étude hydrodynamique pour savoir si le mouvement du fluide est laminaire ou turbulent.

Écoulement laminaire :

L'écoulement laminaire est un écoulement régulier dans lequel les particules fluides se déplacent selon des lignes de courant s'ordonnant en couches parallèles. Ce mode d'écoulement se fait habituellement à débit faible

Écoulement turbulent :

C'est un écoulement dans lequel les particules fluides se déplacent dans le sens du guide d'écoulement, mais avec des trajectoires non rectilignes. Il y a un croisement de trajectoire pour l'ensemble des couches de volume de fluide en mouvement ce qui occasionne des interactions entre les volumes de fluide et des collisions sur les parois du guide d'écoulement.

Caractérisation des écoulements de convection thermique :

❖ Approximation de Boussinesq :

Pour des configurations d'écoulements dans une conduite, la résultante des forces externes est limitée aux forces gravitationnelles de sorte que l'influence de la convection naturelle provoquée par des gradients de la température soit évidente. Quand les forces de flottabilité se produisent dans l'écoulement, la conception des propriétés physiques fixes n'assortit plus le comportement de l'écoulement du fluide. L'effet de la convection naturelle est pris en l'équation d'état pour la masse volumique ρ_0 devient en utilisant le développement de Taylor :

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{T-T_0}{T_0} + \dots \right) \quad (1.1)$$

En se limitant à un développement du premier ordre :

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]. \quad (1.2)$$

Le terme β de l'équation (1-2) est le coefficient de dilatation isobare du fluide , soit

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{\rho=cts}$$

En effet, c'est la variation de la masse volumique du fluide qui est à l'origine du phénomène de convection naturelle, créant une force motrice volumique à laquelle s'oppose notamment une force de frottement visqueux .L'approximation de Boussinesq consiste à négliger les variations de la masse volumique dans les équations de conservation, sauf son implication comme force motrice dans le terme de la force volumique de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Domaines d'applications des nanofluides

Les nanofluides peuvent être employés pour améliorer le transfert de chaleur et l'efficacité énergétique dans plusieurs systèmes thermiques, quelques exemples d'applications seront présentés.

✓ Les systèmes thermiques

Le mélange d'éthylène-glycol et l'eau, sont utilisés comme liquide de refroidissement dans les moteurs des véhicules. L'addition des nanoparticules dans ces liquides ce dernier améliore le taux de refroidissement. Ce point est étudié par plusieurs groupes de chercheurs, **Tzeng et al. [23]** ont dispersé les nanoparticules de CuO et Al₂O₃ dans l'huile de refroidissement du moteur de transmission. Dans une autre application, **Zhang et al [24]** ont rapporté une étude pour réduire l'usure (lubrification) à l'aide des nanoparticules, et améliorer les propriétés tribologiques, et la résistance à l'usure avec la réduction du frottement entre les éléments mécaniques mobiles.

✓ Les systèmes électroniques

Dans les circuits intégrés, les nanofluides ont été considérés comme fluides de refroidissement. Pour cela plusieurs études ont été effectuées. **Tsai et al. [25]** ont employé un

nanofluide à base d'eau pour refroidir une unité centrale de traitement dans un microordinateur. De leur côté, **Ma et al. [26]** ont étudié l'effet du nanofluide sur les possibilités de transport de la chaleur d'un caloduc d'oscillation, ils ont prouvé qu'à la puissance d'entrée de 80 W, et seulement pour une concentration volumique de , la différence de température entre le vaporisateur et le condensateur est de 16.6°C.

✓ **Les systèmes militaires**

Les exemples des applications militaires incluent le refroidissement de l'électronique de puissance et les armes d'énergie dirigée. Ces derniers impliquent des flux thermiques très élevés, où les nanofluides ont montrés leur efficacité pour refroidir ces systèmes, et aussi les autres systèmes militaires, y compris les véhicules militaires, les sous-marins, et les diodes lasers à haute puissance.

✓ **Les systèmes spatiaux**

Pour les applications dans l'espace, **You et al. [27]** et **Vassallo et al. [28]** ont effectué des études pour montrer que la présence des nanoparticules dans le fluide de refroidissement en électronique générale joue un rôle très important dans les applications de l'espace où la densité de puissance est très élevée.

✓ **Les systèmes nucléaires**

L'institut de technologie de Massachusetts a réservé un centre interdisciplinaire uniquement pour la nouvelle nanotechnologie (nanofluide) dans l'industrie de l'énergie nucléaire. Actuellement, ils évaluent l'impact potentiel de l'utilisation des nanofluides sur la sûreté neutronique, et de la performance économique des systèmes nucléaires.

✓ **La biomédecine**

Les nanofluides et les nanoparticules ont beaucoup d'applications en biomédicale. Par exemple, pour éviter quelques effets secondaires des méthodes traditionnelles de traitement du cancer, les nanoparticules à base de fer ont été employées comme transporteur des drogues. Aussi pour une chirurgie plus sûre en produisant le refroidissement efficace autour de la région chirurgicale, **Jordan et al. [29]** ont effectué une étude où les nanofluides pourraient être employés pour produire une température plus élevée autour des tumeurs pour tuer les cellules cancéreuses sans affecter les cellules saines voisines.

Présentation des logiciel Ggambit et Fluent

L'étude numérique d'écoulement des fluides et le développement de ces conceptions dans l'industrie, consiste a programmer des programmes ou utilisé les codes (FLUENT, FLOW3D, ANSYS, CFD...) maintenant sur le marché peut être extrêmement puissant, mais leur opération exige toujours a niveau élevé de compétence et de la compréhension de l'opérateur d'obtenir des résultats significatifs dans des situations complexes des systèmes impliquant l'écoulement des fluides,transfert thermique et phénomènes associés tels que des réactions chimiques.

Il existe des méthodes numérique : la méthode différence finis, méthodes spectrales la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis; chaque une de ces méthodes a des applications selon les conditions et la géométrie du système. Pour formuler un phénomène physique, on utilise souvent des équations mathématiques quireprésentent une modélisation ou une formulation exprime le comportement d'un phénomène dans l'espace et dans le temps.

Une classification finale d'analyse statique est basée sur la méthode de discrétisation par laquelle le modèle mathématique est discrétisé dans l'espace et dans le temps

Méthode spatiale de discrétisation

1. méthodes des différences finies (MDF);
2. méthodes des éléments finis (MEF) ;
3. méthodes spectrales (MS) ;
4. méthodes des volumes finis (MVF).

Le code « FLUENT » basé sur la méthode des volumes finis.

Références bibliographique

- [1]. **Halefadi, S. (2014)**. Caractérisation des propriétés thermo-physiques et d'échanges de chaleur des nanofluides à base de nanotubes de carbone (Doctoral dissertation).
- [2]. **Benkezim, L. (2013)**. Simulation numérique de la convection naturelle d'un Nanofluide dans une cavité rectangulaire.
- [3]. **Choi, S S.U.S. (1995)**. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticules, developments and applications of Non –Newtonian flows, FED. Vol.66, 99-105.
- [4]. **T. Taybi, (2017)**: introduction à la CFD (Dynamique des Fluides Numérique).
- [5]. **Kuehn, T. H., & Goldstein, R. J. (1976)**. An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders. *Journal of Fluid mechanics*, 74(4), 695-719.
- [6]. **Bishop, E. H., Kolflat, R. S., Mack, L. R., & Scanlan, J. A. (1964)**. Photographic studies of convection patterns between concentric spheres. *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers Journal*, 3(2), 47.
- [7]. **Teertstra, P., Yovanovich, M. M., & Culham, J.R. (2005 ,January)**. Analytical Modeling of Natural Convection in Horizontal Annuli, 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit .
- [8]. **Tayebi, T. (2014)**. Contribution a l'étude numérique de la convection naturelle laminaire d'un système radial de chauffage solaire.
- [9]. **dos Santos Bernardes, M. A., Valle, R. M., & Cortez, M. F. B. (1999)**. Numerical analysis of natural laminar convection in a radial solar heater. *International journal of thermal sciences*, 38(1), 42-50.
- [10]. **Chamkha, A. J., & Al-Mudhaf, A. (2005)**. Unsteady heat and mass transfer from a rotating vertical cone with a magnetic field and heat generation or absorption effects. *International journal of thermal sciences*, 44(3), 267-276.
- [11]. **Beji, H., Bennacer, R., Duval, R., & Vasseur, P. (1999)**. Double-diffusive natural convection in a vertical porous annulus. *Numerical Heat Transfer: Part A: Applications*, 36(2), 153-170.

- [12]. **Benzeghiba, M., Chikh, S., & Campo, A. (2003)**. Thermosolutal convection in a partly porous vertical annular cavity. *J. Heat Transfer*, 125(4), 703-715.
- [13]. **Dawood, H. K., Mohammed, H. A., Sidik, N. A. C., Munisamy, K. M., & Alawi, O. A. (2017)**. Heat transfer augmentation in concentric elliptic annular by ethylene glycol based nanofluids. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 82, 29-39. ISO 690.
- [14]. **Maxwell, J. C. (1954)**. Electricity and magnetism (Vol. 2). New York: Dover
- [15]. **Brinkman, H. (1952)**: The viscosity of concentrated suspensions and solutions. *The Journal of Chemical Physics*, 20(4): p. 571-571.
- [16]. **Xue, Q. Z. (2005)**. Model for thermal conductivity of carbon nanotube-based composites. *Physica B: Condensed Matter*, 368(1-4), 302-307
- [17]. **Patankar, S. (2018)**. Numerical heat transfer and fluid flow. Taylor & Francis.
- [18]. **Nogotov, E. F. (1978)**. Applications of numerical heat transfer. *STIA*, 79, 14672.
- [19]. **Roache, P. J. Computational Fluid Dynamics, Hermosa (1982)**. Sites Web.
- [20]. **Abu-Nada, E., Masoud, Z. & Hijazi, A. (2008)**. Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35(5), 657-665.
- [21]. **Mihoubi, H., Bouderah, B., & Tayebi, T.** Improvement of Free Convection Heat Transfer in a Concentric Cylindrical Annulus Heat Exchanger Using Nanofluid
Improvement of Free Convection Heat Transfer in a Concentric Cylindrical Annulus Heat Exchanger Using Nanofluid. *Governing*, 429(1.89), 10-5.
- [22]. **Kuehn, T. H., & Goldstein, R. J. (1978)**. An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli *J. Heat Transfer*. Nov 1978, 100(4): 635-640 (6 pages) <https://doi.org/10.1115/1.3450869>.
- [23]. **Tzeng, S. C., Lin, C.W. & Huang, K.D. (2005)**. Heat transfer enhancement of nanofluids in rotary blade coupling of four-wheel-drive vehicles. *Acta Mechanica*, 179(1-2), 11-23.
- [24]. **Zhang, Z., Xue, Q., & Zhang, J. (1997)**. Synthesis, structure and lubricating properties of dialkyldithiophosphate-modified Mo S compound nanoclusters *Wear*, 209(1-2), 8-12.

- [25]. Tsai, C. Y., Chien, H. T., Ding, P. P., Chan, B., Luh, T. Y., & Chen, P. H. (2004). Effect of structural character of gold nanoparticles in nanofluid on heat pipe thermal performance. *Materials Letters*, 58(9), 1461-1465.
- [26]. Ma, H. B., Wilson, C., Borgmeyer, B., Park, K., Yu, Q., Choi, S. U. S., & Tirumala, M. (2006). Effect of nanofluid on the heat transport capability in an oscillating heatpipe. *Applied Physics Letters*, 88(14), 143116.
- [27]. You, S. M., Kim, J. H., & Kim, K. H. (2003). Effect of nanoparticles on critical heat flux of water in pool boiling heat transfer. *Applied physics letters*, 83(16), 3374-3376.
- [28]. Vassallo, P., Kumar, R., & D'Amico, S. (2004). Pool boiling heat transfer experiments in silica-water nano-fluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(2), 407- 411.
- [29]. Jordan, A., Scholz, R., Wust, P., Föhling, H., Felix, R. (1999). Magnetic fluid hyperthermia (MFH): Cancer treatment with AC magnetic field induced excitation of biocompatible superparamagnetic nanoparticles. *Journal of Magnetism and Magnetic materials*, 201 (1- 3), 413-419.

في هذا العمل نقدم دراسة عددية مبنية على تحليل الحمل الطبيعي في مبادل حراري أسطواني متحد المركز يحتوي على سائل نانوي (سوائل قاعدية (ماء ، إيثيلين جلايكول ، زيت محرك ، الجلسرين) مضافة له الفضة). ينحصر السائل النانوي بين أسطوانتين متراكبتين أفقياً يتم الحفاظ عليها عند درجات حرارة منتظمة ومختلفة. المعادلات التفاضلية الجزئية التي تتحكم في التدفق (معادلة الإستمرارية ، الحركة ، الطاقة) يتم حلهم عددياً من خلال طريقة الحجم المحدودة. تتركز الدراسة على أرقام مختلفة لرايلي : 10^3 ، 10^4 ، 10^5 ، والتركيز الحجمي للجسيمات النانوية في نطاق 0 - 12% . تم حساب الموصلية الحرارية الفعالة، لزوجة موائع النانو باستخدام نموذج ماكسويل وبرينكمان على التوالي. عرضت النتائج الرقمية المتحصل عليها على نحو خطوط من التيارات وعدد نيسالت بدلالة توزيع رقم رايلي. وتم مناقشة النتائج أيضاً بالتفصيل. وجدنا الموصلية الحرارية في المائع النانوي (الزيت والفضة بتركيز 0.12) عالية مقارنة بالموائع النانوية الأخرى كما يوجد إتفاق جيد جداً بين النتائج الحالية وتلك الواردة في المؤلفات.

كلمات مفتاحية : موائع النانو ، الحمل الحراري الطبيعي ، أسطوانات أفقية متحدة المركز ، الحجم المتناهية.

Abstrac

In this work, we present a numerical study based on the analysis of natural convection in a concentric cylindrical heat exchanger containing a nanofluid (base fluids (water, ethylene glycol, motor oil, glycerol) added to it with silver). The nanofluid is confined between two horizontally overlapping cylinders that are maintained At different and regular temperatures. The partial differential equations that control the flow (the continuum equation 'movement' energy) are solved numerically by the finite volume method. The study focuses on different Rayleigh numbers: 10^3 , 10^5 , 10^4 and the volumetric concentration of nanoparticles in the range 0 - 0.12 The effective thermal conductivity and viscosity of nanofluids were calculated using Maxwell and Brinkmann model, respectively. The obtained numerical results are presented as lines of current and nessel number in terms of Rayleigh number distribution. The results were also discussed in detail. We found that the thermal conductivity in the nanofluid (oil and silver at 0.12 concentration) was high compared to other nanofluids and there is a very good agreement between the present results and those reported in the literature.

Keywords: Nanofluids, Laminar natural convection, concentric cylinders, Finite volume method.

Résumé

Dans ce travail, nous présentons une étude numérique basée sur l'analyse de la convection naturelle dans un échangeur de chaleur cylindrique concentrique contenant un nanofluide (fluides de base (eau, éthylène glycol, huile moteur, glycérol) additionné d'argent). entre deux cylindres se chevauchant horizontalement et maintenus à des températures différentes et régulières. Les équations aux dérivées partielles qui contrôlent l'écoulement (l'équation continue d'énergie de mouvement) sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. L'étude se concentre sur différents nombres de Rayleigh : 10^3 , 10^5 , 10^4 et la concentration volumétrique de nanoparticules dans la plage 0 - 0,12. La conductivité thermique et la viscosité effectives des nanofluides ont été calculées à l'aide des modèles de Maxwell et Brinkmann, respectivement. Les résultats numériques obtenus sont présentés sous forme de lignes de nombre courant et de nombre de Nessel en termes de distribution des nombres de Rayleigh. Les résultats ont également été discutés en détail. Nous avons constaté que la conductivité thermique dans le nanofluide (huile et argent à une concentration de 0,12) était élevée par rapport à d'autres nanofluides et il existe un très bon accord entre les résultats actuels et ceux rapportés dans la littérature.

Mots clés : Nanofluides, convection naturelle laminaire, cylindres concentriques, méthode des volumes finis.

