

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine: Mathématiques et Informatiques

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées et discrètes

Par

AFAF SEGHIRI

THÈME

SUR LES L-ENSEMBLES FLOUS

Soutenu le : .. / 0. / 2016

Devant le jury composé de :

- 1).....
- 2).....
- 3).....

Dirigé par:

*Mr.*ZIANE BARAHIM

Année: **2015/2016**

Remerciements

Avant tout je remercie **Allah**, le tout puissant d'avoir, éclairer notre vie, renforcer notre courage et notre volenté pour finir ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement mon directeur de mémoire Monsieur **Merzougui Abdelkrim**, pour toute l'aide qu'il m'a apporté et sa patience ces conseils d'avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intéret.

Je tiens à remercier aussi Monsieur **Benhamidouche Noureddine**, d'avoir accepté de présider ce jury.

Je tiens à remercier madame **Bounab Noura**, pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent à tout les enseignants du département de mathématique pour leurs dévouement et leurs générosités.

Je tiens ici à exprimer mes sentiments respectueux à mes chers parents à qui je dédie ce travail pour leur grand soutien.

Un grand merci à ma famille, à mes proches et à mes collègues en particulier Benhamida Khouloud, Berka Karima, Benadel Zaynabe pour leurs encouragements et pour leurs amitiés.

Dédicaces

Au nom de Allah chémeut et le miséricordieux.

-Je dédie ce modeste travail.

- A Mon père

Tes sacrifices et tes Prières m'ont permis de vivre ce jour. Rien ne saurait exprimer la fierté, la reconnaissance et l'amour que

je te porte. que Dieu le tout puissant te procure, santé et longue vie.

A Ma Mère

Avec tout mon amour pour ton soutien et tes encouragements. J'espère rester à la hauteur de tes espoirs que Dieu te protège et t'accorde santé et longue vie

A mes chères sœurs: Hanan, Maram

-A mes frères: Mohamad et Ahmad yasin

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

NOTATIONS

- \mathbb{k} : L'ensemble des nombres entiers normaux.
- H : Espace de Hilbert.
- $C([a, b])$: Espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$.
- $\|x\|$: La norme de vecteur x .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Un produit intérieur.
- \mathbb{R} : Ensemble des réels.
- \mathbb{C} : Ensemble des nombres réels.
- \simeq : Approximation.
- A : Opérateur intégrale compact.
- $B_{i,n}$: Polynôme de Bernstein.
- $\omega(x)$: Fonction de poids.
- P_n : Polynôme orthogonaux.
- $f(x)$: Fonction donnée.
- $K(x, t)$: Noyau de l'intégrale.
- λ : Un paramètre non nul, réel ou complexe.
- u : La fonction inconnue dans l'équation intégrale (Solution exacte).
- \tilde{u} : Solution approchée.
- $R_n[x]$: L'espace du polynôme.

Table des figures

Figure (1)	page32
Figure (2)	page33
Figure (3)	page35
Figure (4)	page37

Liste des tableaux

Tableau (1)	page31
Tableau (2)	page31
Tableau (3)	page32
Tableau (4)	page34
Tableau (5)	page34
Tableau (6)	page35
Tableau (7)	page36

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels d'analyse fonctionnelle	3
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle	3
1.1.1 Espace normé	3
1.1.2 Espace de Banach	4
1.1.3 Espace euclidien	4
1.1.4 Espace de Hilbert	5
1.1.5 Espace $L^2(a, b)$	5
1.2 Les operateurs	5
1.2.1 Opérateur compact	5
1.2.2 Opérateur intégral linéaire	8
1.2.3 Opérateur adjoint	9
2 Polynôme de Bernstein et équation intégral	10
2.1 Polynôme de Bernstein	10
2.1.1 Définition de polynôme de Bernstein	10
2.2 L'orthogonalité des polynômes de Bernstein	12
2.2.1 Polynômes orthogonaux et des fonctions de poids	12
2.2.2 polynômes orthogonaux de Bernstein	13
2.3 Propriétés et formule sur le polynôme de Bernstein	13
2.4 Développement d'une fonction en série de Bernstein	14
2.5 Les équations intégrales	15

2.5.1	Classifications des équations intégrales	16
2.6	Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale	18
2.7	Méthodes d'approximation pour les équations intégrales	22
2.7.1	Méthodes du noyau dégénéré	22
2.7.2	Méthodes de projection	24
2.7.3	Méthode de collocation	25
2.7.4	Méthode de Galerkin	26
2.7.5	Méthode de Petrov-Galerkin	26
3	Analyse numérique pour les équations intégrales	28
3.1	Résolution de l'équation de Fredholm par polynôme de Bernstein	28
3.1.1	Discretisation d'équation intégrale	28
3.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte	30
	Conclusion générale	38
	Bibliographie	40

Introduction

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnue, généralement est une fonction d'une ou plusieurs variables, qui apparaît sous le signe intégral (\int).

Les premières équations intégrales furent obtenues par **Daniel Bernoulli** vers **1730** dans l'étude des oscillations d'une corde tendue. Après l'introduction du noyau de Green, il fallut attendre les dernières années du **XIX^e siècle**, avec les travaux de **H. A. Schwarz**, de **H. Poincaré**, de **V. Volterra** et sur tout ceux de **I. Fredholm**, pour disposer de résultats généraux en liaison étroite avec les premiers développements de l'analyse fonctionnelle. Quelques années plus tard, l'étude des équations intégrales conduisit **D. Hilbert** à définir l'espace qui porte son nom et poser les premières bases de la "théorie spectrale".

Les équation intégrales sont le modèle mathématique de beaucoup des problèmes de biologie, de chimie, et elles ont aussi beaucoup d'importance dans plusieurs domaines physiques, par exemple les équations de Maxwell sont probablement les plus célèbres représentantes des EI. Elles apparaissent aussi dans des problèmes des transferts d'énergie radiative et des problèmes d'oscillations d'une corde, d'une membrane ou d'un axe. Ainsi, les équations intégrales ont joué un rôle historique important dans l'élaboration des principaux concepts de l'analyse contemporaine.

L'étude de ce sujet a été répartie sous forme de trois chapitres::

Le premier chapitre est consacré à une introduction sur l'analyse fonctionnelle dont on va définir les opérateurs (compacts, intégral linéaire ,adjoint).

Dans le deuxième chapitre on va définir les Polynômes de Bernstein, les polynômes orthogonaux, l'approximation par série de polynôme de Bernstein et équation intégrales. On présente aussi la

classification des EI puis on démontre l'existence et l'unicité de la solution, en fin de ce chapitre on présente quelques méthodes d'approximation pour ces équation intégrales.

Le troisième chapitre représente le but de mémoire, c'est-à-dire on va résoudre numériquement des équation intégrales de Fredholm de 2^{ème} d'espèce par polynôme de Bernstein et on va faire une comparaison entre les solutions exactes et les solution approchées.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, on donne des définitions de base sur l'analyse fonctionnelle, étudié sur l'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé. Ainsi on donne quelques notions sur opérateurs

L'étude de diverse classe des équations intégrales nécessite l'utilisation des espaces fonctionnels, tels que les espaces de Banach ou de Hilbert.

1.1.1 Espace normé

Définition 1.1

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E est dit espace vectoriel normé s'il est muni d'une fonction $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}^+ , telle que $\forall x, y \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{k}$ la fonction $\|\cdot\|$ vérifie les relations suivantes :

- (1). $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- (2). $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (3). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Exemple 1.1

Soit $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$, espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, on pose

$\|f\|_1 = \int_a^b f(x)dx$ et $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

1.1.2 Espace de Banach**Définition 1.2**

Une suite $(x_k)_k$ d'éléments d'un espace normé E est dite suite de Cauchy si :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \geq 1), \forall p, q \geq N \implies \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$$

Définition 1.3 On dit qu'un espace normé est complet si pour tout suite de Cauchy est convergente.

Définition 1.4 Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

1.1.3 Espace euclidien**Définition 1.5 (Produit scalaire)**

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe), une fonction $\langle x, y \rangle$ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , possédant les propriétés suivant:

1. $\langle x, y \rangle \geq 0$
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
5. $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$

Remarque 1.1

La définition du produit scalaire nous donne les relations suivantes

- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

1.1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.6

Un espace de Hilbert $E = H$ est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire \langle, \rangle , tel que la norme $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. En d'autres termes un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.

1.1.5 Espace $L^2(a, b)$

Définition 1.7

On dit qu'une fonction f est de carré intégrable sur $[a, b]$ si l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x) dx$$

existe (est finie). L'ensemble de toutes les fonctions carré intégrable sur $[a, b]$ sera noté $L^2(a, b)$ ou L^2 . On muni L^2 du produit défini par :

$$\|f\| = \int_a^b f(x) f(x) dx \quad f \in L^2$$

On définit la norme d'une fonction $f \in L^2$ par :

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

1.2 Les operateurs

1.2.1 Opérateur compact

Définition 1.8

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné en un ensemble relativement compact dans Y .

Définition 1.9

On dit qu'une application linéaire T d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est compact, si $\overline{T(B_E)}$ est une partie compacte de F .

Une application linéaire compacte est aussi appelée opérateur compact.

On note $K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F .

Remarque 1.2

Toute application linéaire compacte est continue.

Exemple 1.2

Toute application linéaire continue de rang fini est compacte.

Exemple 1.3

Une application linéaire continue T d'un espace de Hilbert H est compact si et seulement si, s'il existe une suite d'applications linéaires continues de rang fini $(T_n)_n$ de H qui converge vers T .

Théorème 1.1

Un opérateur A de X dans Y est compact si et seulement si pour tout suite bornée (u_n) de X , la suite (Au_n) contient une sous suite convergente dans Y .

Théorème 1.2

Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fautive.

Preuve.

En effet, si on désigne par $B(0, 1) = \{x \text{ tels que } \|x\| \leq 1\}$ la boule fermée de rayon l'unité, alors l'ensemble $\overline{A(B(0, 1))}$ est compacte, donc borné, c'est-à-dire $\|A(x)\| < \infty$ et par conséquent $\sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| < \infty$ ce qui signifie que l'opérateur A est borné. ■

Théorème 1.3

Une combinaison linéaire $A = A_1 + A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Théorème 1.4

Le produit $A \times B$ de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Théorème 1.5

Soient X un espace normé et Y un espace de Banach et soit (A_n) une suite d'opérateurs compacts de X dans Y , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de X dans Y .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

Alors A est compact.

Théorème 1.6

Soit A un opérateur borné de X dans Y à l'image $A(X)$ de dimension fini, alors A est compact.

Preuve.

En effet, car l'opérateur A transforme tout ensemble borné E de X à un ensemble borné $A(E)$ dans un espace de dimension finie $A(X)$ ce qui implique que $A(E)$ est pré-compact.

■

Théorème 1.7

L'opérateur identique I de X dans X est compact si et seulement si X est de dimension finie.

Remarque 1.3

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact sa veut dire si pour tout suite (u_n) de G il existe un sous suite $(u_{n(k)})$ qui converge dans E .

Théorème 1.8 (de Arzela-Ascoli)

Soit D un ensemble fermé et borné dans \mathbb{R}^n , et $A \subset C(D)$ un ensemble, on dit que A est relativement compact si est seulement s'il est borné et équicontinu, c'est à dire, il existe une constante M telle que $|u(x)| \leq M$ pour tout $x \in D$ et pour tout $u \in A$ nous avons pour tout $\xi > 0$ il existe $\delta > 0$ telle que

$$|u(x) - u(y)| < \xi \text{ pour tout } x, y \in D \text{ avec } |x - y| < \delta$$

L'opérateur intégrale A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.

Preuve.

En effet, soit E un ensemble borné de $C(G)$ ($\|u\| \leq M$) pour tout $u \in E$ de plus, on a

$$\|Au(x)\| \leq M |G| \max_{x,y \in G} |K(x,y)| \quad \forall x \in E \text{ et } \forall u \in E$$

D'ou l'ensemble $A(E)$ est borné d'autre part le noyau K est uniformément continue sur le compacte $G \times G$ alors pour tout x, y et z on a

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$|x - y| < \delta \implies |K(x, y) - K(y, z)| < \frac{\varepsilon}{M|G|}$$

D'où $|Au(x) - Au(y)| < \varepsilon$ pour tout $u \in E$ et $x, y \in G$ avec $|x - y| < \delta$ ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinue, d'où $A(E)$ est relativement compact par le théorème d'Alzela-Ascoli, alors A est compact.

Théorème 1.9

L'opérateur intégrale A de $C(\partial G)$ dans $C(\partial G)$ à noyau continue ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $C(\partial G)$, si ∂G est de classe C^1 .

1.2.2 Opérateur intégral linéaire

Théorème 1.10

Soit G un ensemble compact de \mathbb{R}^n et soit K une fonction continue de $G \times G$ dans \mathbb{C} , alors l'opérateur linéaire définie de $C(G)$ dans $C(G)$ par:

$$(Au)(x) = \int_G |K(x, y)u(y)| dy, \forall x \in G$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu K , cet opérateur est borné, la norme $\|A\|$ donné par:

$$\|A\| = \max_{x \in G} \int_G |K(x, y)| dy$$

une classe particulièrement simple les opérateurs intégraux est contitue, les opérateurs à noyau dits dégénérés, de la forme:

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(y)$$

les opérateurs correspondants sont de rang fini.

Théorème 1.11

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique sur X . Alors $I - A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

de plus

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

1.2.3 Opérateur adjoint

Soit A un opérateur intégral de noyau K , alors l'opérateur adjoint A^* est un opérateur intégral de noyau K^* , avec $K^*(t, s) = K(s, t)$.

Preuve.

Il suffit a partir la définition, soit $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^2([a, b])$

$$\begin{aligned} (T\varphi, \psi) &= \int_a^b \left(\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \right) \psi(x) dx \\ &= \int_{[a,b]^* \times [a,b]} K(x, y) \varphi(y) \psi(x) dy dx \end{aligned}$$

par le théorème de Fubini en échangeant encore l'ordre d'intégration, il vient

$$(T\varphi, \psi) = \int_a^b \left(\int_a^b K(x, y) \psi(x) dx \right) \varphi(y) dy = (\varphi, T^*\psi)$$

d'après la définition de l'opérateur adjoint. En permetant le non des variables, on obtient le résultat voulu. ■

Chapitre 2

Polynôme de Bernstein et équation intégral

2.1 Polynôme de Bernstein

Dans ce chapitre on définit le polynôme de Bernstein. Ces polynômes sont incroyablement utiles mathématiquement, parce qu'ils sont simplement définis, peuvent être calculés rapidement sur les systèmes informatiques et représentent une grande variété de fonctions. Ils peuvent être différenciés et intégrés facilement.

2.1.1 Définition de polynôme de Bernstein

Les polynômes de base de Bernstein du degré n forment une base complète pendant l'intervalle $[0, 1]$ et sont définis par

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.1)$$

où $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, (n) est le degré de polynômes, (i) est l'indice de polynômes et (t) est la variable.

Cependant, les polynômes de base de Bernstein peuvent être généralisés pour couvrir un intervalle arbitraire $[a, b]$ en normalisant t pendant l'intervalle $[a, b]$, i.e.

$t = (x - a) / (b - a)$, qui mène au suivant

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.2)$$

Pour plus de commodité, nous set $B_{i,n}(x) = 0$, si $i < 0$ ou $i > n$.

Quelques polynômes

Les premiers polynômes de Bernstein l' intervalle $[a, b]$, sont :

$$\begin{aligned} B_{0,10}(x) &= (b-x)^{10} / (b-a)^{10} \\ B_{1,10}(x) &= 10 (b-x)^9 (x-a) / (b-a)^{10} \\ B_{2,10}(x) &= 45 (b-x)^8 (x-a)^2 / (b-a)^{10} \\ B_{3,10}(x) &= 120 (b-x)^7 (x-a)^3 / (b-a)^{10} \\ B_{4,10}(x) &= 210 (b-x)^6 (x-a)^4 / (b-a)^{10} \\ B_{5,10}(x) &= 252 (b-x)^5 (x-a)^5 / (b-a)^{10} \\ B_{6,10}(x) &= 210 (b-x)^4 (x-a)^6 / (b-a)^{10} \\ B_{7,10}(x) &= 120 (b-x)^3 (x-a)^7 / (b-a)^{10} \\ B_{8,10}(x) &= 45 (b-x)^2 (x-a)^8 / (b-a)^{10} \\ B_{9,10}(x) &= 10 (b-x) (x-a)^9 (b-a)^{10} \\ B_{10,10}(x) &= (x-a)^{10} / (b-a)^{10} \end{aligned}$$

Orthogonalité

Définition 2.1 (Vecteurs orthogonaux)

On dit que deux vecteurs x et y d'un espace de euclidien E sont orthogonaux si leur produit scalaire $\langle x, y \rangle$ est nuls, c'est à dire

$$\langle x, y \rangle = 0. \text{ On note } x \perp y$$

Propriétés 2.1

- Si un vecteur x de E est orthogonal à chaque vecteur d'un ensemble F , on dit que x est orthogonal à l'ensemble F , et on écrit

$$\langle x, z \rangle = 0 \quad \forall z \in F.$$

- Si les vecteurs de deux ensembles F_1 et F_2 sont orthogonaux deux à deux, on dit que ces ensembles orthogonaux et on écrit

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in F_1 \text{ et } w \in F_2$$

2.2 L'orthogonalité des polynômes de Bernstein

2.2.1 Polynômes orthogonaux et des fonctions de poids

Les polynômes

Les polynômes constituent une famille des fonctions tout à fait remarquable en mathématiques, ils sont aussi un outil essentiel du calcul dans l'analyse numérique, notamment dans l'évaluation au l'approximation des fonctions, dans les problèmes d'interpolation et d'extrapolation, dans la résolution des équations intégrales ou équation différentielle, ...etc.

Définition 2.2

Notons I un intervalle fermé ou non, borné ou non et soit $\omega : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement positive ($\omega(x) > 0$ pour tout $x \in I$) est dit fonction de poids telle que l'application

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(x) Q(x) \omega(x) dx \quad (2.3)$$

défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]^2$.

Définition 2.3

On appelle polynômes orthogonaux associés à la fonction poids ω sur l'intervalle I , la suite des polynômes $p_n = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$, obtenus par orthogonalisation de Gram-Schmidt de la suite des monômes x^n , $n \geq 0$.

Définition 2.4

On dit que la famille de polynômes $(p_i)_{i \geq 0}$ est une famille de polynômes orthogonaux si :

- (a) Le degré de p_i est i pour tout entier i .
- (b) $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad i \neq j \implies \langle p_i, p_j \rangle = 0$.

2.2.2 polynômes orthogonaux de Bernstein

La représentation explicite des polynômes orthogonaux de Bernstein, dénotée par $b_{j,n}(t)$ ici, a été découverte en analysant les polynômes orthogonaux résultants après application du processus de Gram-Schmidt sur des ensembles des polynômes de Bernstein de degré n . Par exemple, pour $n = 5$, en utilisant le processus de Gram-Schmidt sur $B_{j,5}(t)$, normalisant, et simplifiant les fonctions résultantes, nous obtenons l'ensemble suivant de polynômes orthogonaux

$$\begin{aligned} b_{0,5}(t) &= \sqrt{11}(1-t)^5 \\ b_{1,5}(t) &= 3(1-t)^4(11t-1) \\ b_{2,5}(t) &= \sqrt{7}(1-t)^3(55t^2-20t+1) \\ b_{3,5}(t) &= \sqrt{5}(1-t)^2(165t^3-135t^2+27t-1) \\ b_{4,5}(t) &= \sqrt{3}(1-t)(330t^4-480t^3+216t^2-32t+1) \\ b_{5,5}(t) &= 462t^5-1050t^4+840t^3-280t^2+35t-1. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\int_0^1 b_{i,n}(t)b_{j,n}(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

2.3 Propriétés et formule sur le polynôme de Bernstein

Nous donnons les propriétés des polynômes de Bernstein de base généralisées dans la liste suivante:

(1) La propriété positivité:

$$B_{i,n}(x) > 0 \text{ est de tenir pour tout } i = 0, 1, \dots, n \text{ et tout } x \in [a, b].$$

(2) La propriété de la partition de l'unité:

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(x) = \dots = \sum_{i=0}^1 B_{i,1}(x) = 1.$$

(3) La propriété de la relation de récursion:

$$B_{i,n}(x) = \frac{1}{b-a} [(b-x) B_{i,n-1}(x) + (x-a) B_{i-1,n-1}(x)].$$

(4) Ces polynômes satisfont la symétrie

$$B_{i,n}(x) = B_{n-i,n}(1-x).$$

(5) Sur l'intervalle $[a, b]$, tout base de polynômes Bernstein généralisées de degré n peut être écrit comme une combinaison linéaire des polynômes de base de Bernstein généralisées de degré $n+1$:

$$B_{i,n}(x) = \frac{n-i+1}{n+1} B_{i,n+1}(x) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(x)$$

(6) Les dérivés de n ème degré généralisées polynômes de base Bernstein sont donnés par :

$$\frac{d}{dx} B_{i,n}(x) = \frac{n}{b-a} [B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)] \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

(7) Les premiers dérivés de n ème degrés généralisés de polynômes de base Bernstein peuvent être écrites comme une combinaison linéaire des polynômes de base Bernstein généralisées de degré n :

$$B_{i,n}(x) = \frac{1}{b-a} [(n-i+1) B_{i-1,n}(x) + (2i-n) B_{i,n}(x) - (i+1) B_{i+1,n}(x)]$$

2.4 Développement d'une fonction en série de Bernstein

Une fonction $f \in L^2[0, 1]$ peut être écrite

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_{in} b_{in}(t) \tag{2.4}$$

où, $c_{in} = \langle f, b_{in} \rangle$ et \langle, \rangle est le produit intérieur standard sur $L^2 [0, 1]$.

Si la série (2.4) est tronquée au $n = m$, alors nous avons

$$f \cong \sum_{i=0}^m c_{im} b_{im} = C^T B(t)$$

où, C et $B(t)$ sont les matrices $(m+1) \times 1$ données par

$$C = [c_{0m}, c_{1m}, \dots, c_{mm}]^T$$

et

$$B(t) = [b_{0m}(t), b_{1m}(t), \dots, b_{mm}(t)]^T$$

2.5 Les équations intégrales

Définition 2.5

les équations intégrales ont un caractère fort différent des équations différentielles que l'on rencontre dans la plus part des phénomènes physiques (par exemple de diffusion), la principale source d'équations de ce type est l'étude du transfert d'énergie par radiation, A la différence du transfert radiatif, les phénomènes de radiation ne peuvent pas être décrit à l'aide d'équation mettant en jeu un simple champ scalaire. Les lois de conservation deviennent alors plus complexe et ne peuvent s'exprimer que sous formes d'inégales étendues à toute la surface considérée.

Equations intégrales linéaires

Définition 2.6 On appelle équation intégrale une équation ou la fonction inconnue u , tel que

$$u(x) - \lambda \int_G k(x, t) u(t) dt = f(x) \quad (2.5)$$

avec $f(x)$ et $k(x, t)$ sont deux fonctions connues, λ un paramètre numérique.

G est un ensemble borné et fermé d'un espace euclidien, et k est le noyau de l'équation intégrale.

- Si $f(t) \neq 0$ l'équation (2.5) est dite équation intégrale non homogène.
- Si $f(t) = 0$ l'équation (2.5) est dite équation intégrale homogène.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction u qui satisfait l'équation (2.5)

On peut être écrite cette équation sous forme d'opérateur

$$u - Au = f \quad (2.6)$$

2.5.1 Classifications des équations intégrales

Équations intégrales de Fredholm

Définition 2.7

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce non homogène une équation de la forme

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = f(x) \quad (2.7)$$

Si $f(x) = 0$ l'équation intégrale (1.1) s'écrit

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = 0 \quad (2.8)$$

et on dit équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de première espèce.

Une équation de la forme

$$\lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = f(x). \quad (2.9)$$

où la fonction inconnue $u(t)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm non homogène de première espèce.

Si $f(x) = 0$ cette équation est dite équation intégrale homogène de Fredholm de première espèce.

Équation intégrale de volterra**Définition 2.8**

Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné et fermé de \mathbb{R} .

L'équation intégrale de volterra est un cas particulier de l'équation de Fredholm, il suffit de prendre le noyau $k(x, t) = 0$ pour $x < t$.

On appelle équation intégrale linéaire de volterra de deuxième espèce, l'équation de la forme

$$u(x) - \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt = f(x) \quad (2.10)$$

Si $f(x) = 0$ l'équation intégrale (2.10) s'écrit

$$u(x) - \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt = 0 \quad (2.11)$$

et s'appelle équation intégral homogène de volterra de seconde espèce.

Une équation, à inconnue $u(x)$ de la forme

$$\lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt = f(x) \quad (2.12)$$

est appelée équation intégrale de volterra première espèce.

Si $f(x) = 0$ cette équation est dit équation intégral homogène de volterra de première espèce.

Équation intégrale de Volterra-Fredholm**Définition 2.9**

On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm de première espèce

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) u(\xi, t) d\xi + \int_0^t F(T)u(x, t)dT \\ = \pi\theta(\gamma(t) + \beta(t)x - g(x)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

ou $\theta = G(1 - v)^{-1}$, $f \in \mathcal{L}^2((-1, 1))$, $|x| \leq 1$ et $\lambda \in (0, \infty)$.

Et appelle équation intégrale de Volterra- Fredholm de deuxième espèce

$$\begin{aligned} \gamma u(x, t) &+ \int_{-1}^1 k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) u(\xi, t) d\xi + \int_0^t F(T) u(x, t) dT \\ &= g(x, t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

ou $g(x, t) = \frac{\pi}{\theta_1 + \theta_2} [\gamma(t) + \beta(t)x - h_1(x) - h_2(x)]$, $|x| \leq 1$
 $\lambda \in [0, \infty]$ et $\gamma \in [0, \infty[$

Équation intégrale d'Abel

On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme

$$\int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt = f(x) \quad (2.15)$$

ou $u(x)$ est la fonction inconnue et $f(x)$ une fonction donnée, c'est une équation intégrale de Volterra de première espèce.

On appelle également équation d'Abel une équation plus générale :

$$\int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^a} dt = f(x) \quad (2.16)$$

où a est une constant, $0 < a < 1$ (équation d'Abel généralisée). La fonction $f(x)$ sera supposée possédant une dérivée continue sur un segment $[0, a]$.

2.6 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale

On considère l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt, \quad (2.17)$$

avec $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonction continu et, $k(x, t)$ est une matrice $n \times n$ des fonctions continues telles que $0 \leq x \leq \alpha$ et $\alpha \leq \infty$.

Lemme 2.1(Granwal) Soit $f, g : [0, \alpha] \rightarrow [0, \infty]$ deux fonctions continues et soit c un nombre positif

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \alpha. \quad (2.18)$$

Alors

$$f(t) \leq c + \exp \int_0^t g(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \alpha$$

Preuve.

On suppose $c > 0$ divisant la relation (2.18) par

$$\left[c + \int_0^t g(s) f(s) ds \right]$$

Et multipliant par $g(t)$ donc

$$g(t) f(t) / \left[c + \int_0^t g(s) f(s) ds \right] \leq g(t)$$

En intégrant la relation précédente entre $[0, t]$

$$\ln \left(\left[c + \int_0^t g(s) f(s) ds / c \right] \right) \leq \int_0^t g(s) ds$$

Alors

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s) f(s) ds \leq \exp \int_0^t g(s) ds \quad (2.19)$$

si $c = 0$ on applique la limite $c \rightarrow 0$ avec les valeurs de fonction f sont positives.

Théorème 2.1

Soit $0 < \alpha \leq \infty$, on suppose que $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue et que $k(x, t)$ et un matrice $n \times n$ des fonctionnes telle que $0 \leq t \leq x \leq \alpha$ si $0 < t < \alpha$, alors il existe une unique solution $u(x)$ pour l'équation intégrale de Volterra suivante

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t) u(t) dt, \quad x \in [0, T] \quad (2.20)$$

Preuve.

Soit l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t) u(t) dt$$

On définit la suite $(\psi_n(x))$ sur l'intervalle $[0, T]$ par le système d'approximation successive, on obtient

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= f(x) \\ \psi_1(x) &= \int_0^x k(x,t) \psi_0(t) dt \\ &\quad \vdots \\ \psi_{i+1}(x) &= \int_0^x k(x,t) \psi_i(t) dt\end{aligned}$$

$$k = \max_{0 \leq t \leq T} k(x,t)$$

$$F = \max_{0 \leq t \leq T} |f(x)|$$

$$\begin{aligned}|\psi_1(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t) \psi_0(t)| dt \leq kFx \\ |\psi_2(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t) \psi_1(t)| dt \leq \frac{1}{2}k^2Fx^2 \\ &\quad \dots \\ |\psi_n(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t) \psi_{n-1}(t)| dt \leq \frac{F(kx)^n}{n!}\end{aligned}$$

par récurrence la relation précédent est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F(kx)^i}{i!} = Fe^{kx}$$

qui est une série de Taylor qui converge uniformément et absolument sur $[0, T]$ donc la suit

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x),$$

converge vers

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x).$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^x k(x, t) u(t) dt &= \int_0^x k(x, t) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(t) dt \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_0^x k(x, y) \psi_i(t) dt \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{i+1}(x) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x) - \psi_0(x) \\
 &= u(x) - f(x).
 \end{aligned}$$

Donc il existe la solution $u(x)$ telle que

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)u(t)dt. \quad (2.21)$$

Nous pouvons montrer l'unicité, on suppose qu'il existe deux solutions $X(x)$ et $Y(x)$ de l'équation (2.21), donc

$$X(x) - Y(x) = \int_0^x k(x, t) (X(t) - Y(t)) dt,$$

Donc on obtient la suit suivante:

$$|X(x) - Y(x)| \leq k \int_0^x |X(t) - Y(t)| dt$$

cette relation est de la forme suivante

$$Z(x) \leq k \int_0^x |Z(t)| dt$$

telle que $Z(x) = X(x) - Y(x)$, on a quelque soit $c > 0$ la relation

$$Z(x) \leq c + k \int_0^x |Z(t)| dt$$

la relation précédent est vrais pour $c = 0$ telle c est une constante, d'après le lemme de Gronwall

$$|Z(x)| \leq ce^{kx} = 0,$$

puisque $c = 0$, donc

$$\begin{aligned} Z(x) &= X(x) - Y(x) = 0 \\ X(x) &= Y(x) \end{aligned}$$

Alors la solution de l'équation intégrale (2.21) est unique.

2.7 Méthodes d'approximation pour les équations intégrales

Un grand nombre de méthodes fondées sur des principes différents ont été proposées et sont pratiquement utilisées pour la résolution approchée des équations intégrales. Dans ce partie je défini quelques méthodes d'approximation.

2.7.1 Méthodes du noyau dégénéré

Soit A l'opérateur intégral défini sur l'espace $C[a, b]$ muni du même produit scalaire. La méthode du noyau dégénéré correspond à approximer le noyau K par une suite de noyau dégénérés K_n de la forme :

$$K_n(x, t) = \sum_{j=1}^n p_j(x) q_j(t) \quad \forall x, y \in [a, b] \quad (2.22)$$

Où $(p_j)_{1 < j < n}$ et $(q_j)_{1 < j < n}$ sont des familles d'éléments de $C[a, b]$, avec de plus la famille $(p_j)_{1 < j < n}$ est linéairement indépendante. Dans ce cas l'opérateur intégral A est approximer par une suite d'opérateurs $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme :

$$A_n u = \sum_{j=1}^n \langle u, q_j \rangle p_j \quad (2.23)$$

Et par conséquence, l'équation (2.5) avec $\lambda = 1$ sera elle aussi approximer par

$$u_n(x) - \sum_{j=1}^n z_j p_j(x) = f(x) \quad (2.24)$$

Où

$$z_j = \int_a^b q_j(t) u(t) dt \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.25)$$

Aussi, on peut écrire :

$$z_i = \int_a^b q_i(x) u(x) dx = \int_a^b q_i(x) f(x) dx + \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b q_i(x) p_j(x) dx \right) z_j. \quad (2.26)$$

Posons

$$c_i = \int_a^b q_i(x) f(x) dx, \quad a_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx \quad (2.27)$$

On obtient

$$z_i = c_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

Finalement, on a le théorème suivant :

Théorème 2.2 Les solutions de l'équation :

$$u_n(x) - \sum_{j=1}^n \langle u, q_j \rangle p_j = f \quad (2.29)$$

ont la forme :

$$u_n = f + \sum_{j=1}^n z_j p_j \quad (2.30)$$

Où les coefficients z_1, z_2, \dots, z_n sont solution du système (2.28) i.e

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad z_i - \sum_{j=1}^n \langle p_j, q_i \rangle z_j = \langle f, q_i \rangle \quad (2.31)$$

2.7.2 Méthodes de projection

Définition 2.10

Soit X un espace vectoriel normé, $U \subset X$ un sous espace non trivial. Un opérateur borné $P : X \rightarrow Y$ est appelé projecteur s'il vérifie :

$$\forall u \in U, Pu = u \quad (2.32)$$

Définition 2.11 (Méthodes de projection)

On se donne X et Y deux espaces de Banach, ainsi que $A : X \rightarrow Y$ un opérateur borné injectif. Pour $f \in A(X) \subset Y$, on cherche à approximer la solution du problème:

$$\text{trouver } u \in X \text{ tel que } Au = f \quad (2.33)$$

Pour se faire, on se donne une suite de sous espaces vectoriels $X_n \subset X$ et $Y_n \subset Y$ de dimension finie n , ainsi que des projecteurs $P_n : Y \rightarrow Y_n$.

On considère le problème approché :

$$\text{trouver } u_n \in X_n \text{ tel que } P_n A u_n = P_n f \quad (2.34)$$

Cette méthode de projection est dite convergente s'il existe un rang n_0 à partir du quel pour tout $f \in A(X)$, l'équation approché(2.34) admet une unique solution $u_n \in X_n$ et que cette solution converge vers la solution u de (2.33), i.e $u_n \rightarrow u$ si $n \rightarrow +\infty$.

Cette condition de convergence peut s'exprimer simplement en fonction de l'opérateur $A_n = P_n A : X_n \rightarrow Y_n$.

Elle signifie simplement qu'à partir d'un certain rang, cet opérateur est inversible, et que de plus, on a une convergence ponctuelle

$$A^{-1}(P_n f) = A^{-1}(P_n(Au)) = (P_n A)^{-1} P_n A u \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad (2.35)$$

Théorème 2.3 (de Banach-Steinhaus)

Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés $A_n : X \rightarrow Y$ entre deux espaces de Banach X et Y . On suppose que la suite est bornée ponctuellement, i.e. que pour tout $u \in X$, il

existe une constante C_u telle que $\|A_n u\|_Y \leq C_u$. Alors, la suite est bornée uniformément en norme, i.e. il existe une constante C telle que $\|A_n u\|_Y \leq C_u$.

2.7.3 Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée d'opérateur équation

$$u - Au = f \tag{2.36}$$

Consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation(2.36)

soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C(G)$ ou de $L^2(G)$. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base de X_n .

On cherche une fonction $u_n \in X_n$, de la forme

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x), \quad x \in G \tag{2.37}$$

Pour déterminer les coefficients (c_j) , on substituant, cette fonction dans l'équation (2.36), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} R_n(x) &= u_n(x) - \int_G K(x,t) u(t) dt - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \left\{ \psi_j(x) - \int_G K(x,t) \psi_j(t) dt \right\} - f(x), \quad x \in G \end{aligned} \tag{2.38}$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, (i.e, aux points de collocation)

Ce qui conduit systématiquement à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \psi_j(x_i) - \int_G K(x_i,t) \psi_j(t) dt \right\} c_j = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.39}$$

de la forme $\Psi_n X = f_n$. Évidemment, ce système admet une solution unique si le det Ψ_n est non nul, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

2.7.4 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est semblable à la précédente, sauf qu'elle demande des conditions optimales pour les fonctions $u_n \in X_n$. Plutôt que rechercher l'orthogonalité avec l'espace transformé \widehat{X}_n , on demande simplement l'orthogonalité avec l'espace X_n . Si on note P_n l'opérateur de projection sur X_n , ces conditions se traduisent simplement par la projection de l'équation (2.36):

$$u_n - P_n A u_n = P_n f \quad (2.40)$$

On peut expliciter les équations obtenues sur notre base v_i de X_n :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle \widehat{u}_n - f, u_i \rangle &= 0 \\ \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle u_n - A u_n - f, v_i \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

En recherchant u_n par l'intermédiaire d'une combinaison linéaire comme en (2.40), ces équations se traduisent par le système :

$$\begin{bmatrix} \langle \widehat{u}_1, u_1 \rangle & \dots & \langle \widehat{u}_n, u_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \widehat{u}_1, u_n \rangle & \dots & \langle \widehat{u}_n, u_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, u_n \rangle \end{bmatrix}$$

2.7.5 Méthode de Petrov-Galerkin

Il s'agit d'une méthode essentiellement Hilbertienne, c'est à dire qu'elle met en jeu la projection de notre équation dans un sous espace de dimension finie. Pour ce faire, soit X un espace d'Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on se donne une suite de sous espace $X_n \subset X$ de dimension finie. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base orthonormale de X_n , on cherche une fonction $u_n \in X_n$ de la forme (2.37)

proche de la solution exacte du problème original.

Donc pour le problème (2.36), l'idée est de minimiser l'erreur

$$r_n = \sum_{i=1}^n c_i (I - A) \psi_i - f \quad (2.42)$$

d'où on impose la condition d'orthogonalité suivante

$$\langle r_n, \psi_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i (I - A) \psi_i - f, \psi_j \right\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.43)$$

ce qui implique

$$\left\langle \sum_{i=1}^n c_i (I - A) \psi_i, \psi_j \right\rangle - \langle f, \psi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.44)$$

ou

$$\sum_{i=1}^n c_i \{ \langle \psi_i, \psi_j \rangle - \langle A\psi_i, \psi_j \rangle \} = \langle f, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.45)$$

Ainsi, on obtient le système linéaire

$$c_j - \sum_{i=1}^n c_i \langle A\psi_i, \psi_j \rangle = \langle f, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.46)$$

Chapitre 3

Analyse numérique pour les équations intégrales

La résolution explicite des équation intégrales est très difficile, donc on doit recourir à l'analyse numérique.

L'objectif est de trouver une solution approchée à la solution exacte. Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équation intégrales de Fredholm de 2^{ème} espèce par polynôme de Bernstein et on va faire une comparaison entre les solutions exactes et les solutions approchés.

3.1 Résolution de l'équation de Fredholm par polynôme de Bernstein

3.1.1 Discrétisation d'équation intégrale

Dans cette partie, nous voulons résoudre l'équation de Fredholm de 2^{ème} espèce défini par :

$$u(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) u(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.1)$$

Où $f(x)$ est une fonction continue dans $[a, b]$, $k(x, t)$ fonction continue pour tout $(x, t) \in [a, b]^2$.

Maintenant nous employons la technique de la méthode de Galerkin

Pour ceci, nous estimons la fonction inconnue $u(x)$ donné comme suit

$$u(x) = \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n} \quad (3.2)$$

Où $B_{i,n}$ sont des polynômes de Bernstein et, $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ sont des paramètres inconnus, être déterminé. on remplace (3.2) dans l'équation(3.1), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b \left[k(x,t) \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(t) \right] dt = f(x) \quad (3.3)$$

ou

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) B_{i,n}(t) dt \right] = f(x) \quad (3.4)$$

Alors les équations de Galerkin sont obtenues en multipliant les deux côtés de (3.4) par $B_{j,n}$ et puis en intégrant en ce qui concerne x de a à b , nous ont

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[\int_a^b \left[B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) B_{i,n}(t) dt \right] B_{j,n}(x) dx \right] = \int_a^b B_{j,n}(x) f(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (3.5)$$

Puisque dans chaque équation, il ya trois intégrales. La fonction à intégrer intérieure du côté gauche est une fonction de x et de t , et est intégrée en ce qui concerne t de a à b . En conséquence la fonction à intégrer externe devient une fonction de x seulement et l'intégration avec le respect à x rapporte une constante. Ainsi pour le chaque ($j = 0, 1, \dots, n$) nous prenons une équation linéaire avec les inconnus $(n + 1)$ ($a_i, i = 0, 1, \dots, n$).

Enfin (3.6) représente le système $(n + 1)$ des équation linéaires dans les inconnue $(n + 1)$, sont donné

$$A_{i,j} X_i = b_j, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (3.6)$$

où

$$\begin{aligned}
 A_{i,j} &= \int_a^b \left[B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) B_{i,n}(t) dt \right] B_{j,n}(x) dx, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \\
 b_j &= \int_a^b B_{j,n}(x) f(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots, n \\
 X_i^t &= (a_i), \quad i = 0, 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

3.2 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

Pour chaque exemple nous trouvons les solutions approximatives en utilisant le nombre différent des polynômes de Bernstein.

Exemple 3.1

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u(x) - \int_0^1 2e^x e^t u(t) dt = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

La solution exacte de cette équation est donné par $u(x) = \frac{e^x}{2-e^2}$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenue en utilisant la méthode précédente pour $n = 4$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

Points de x	Solution exacte	Solution approchée	erreur
0.000000	-0.18556125259086	-0.18557102084165	9.7682507824437e-006
0.100000	-0.20507689988511	-0.20507299634334	3.9035417736810e-006
0.200000	-0.22664502572214	-0.22664339238783	1.6333343008934e-006
0.300000	-0.25048149115461	-0.25048411988553	2.6287309216055e-006
0.400000	-0.27682485954030	-0.27682803296955	3.1734192469379e-006
0.500000	-0.30593878416431	-0.30593892894571	1.4478139115370e-007
0.600000	-0.33811464696982	-0.33811154839256	3.0985772597747e-006
0.700000	-0.37367447480646	-0.37367157506139	2.8997450754464e-006
0.800000	-0.41297416238329	-0.41297563592617	1.4735428722212e-006
0.900000	-0.45640703418267	-0.45641130117361	4.2669909390836e-006
1.000000	-0.50440778098384	-0.50439708420313	1.0696780710640e-005

Tableau (1)

- Pour $n = 5$

Points de x	Solution exacte	Solution approchée	erreur
0.000000	-0.18556125259086	-0.18556126107546	8.4846005499184e-009
0.100000	-0.20507689988511	-0.20507688642497	1.3460138836852e-008
0.200000	-0.22664502572214	-0.22664502433237	1.3897611395031e-009
0.300000	-0.25048149115461	-0.25048148680172	4.3528950999239e-009
0.400000	-0.27682485954030	-0.27682485217385	7.3664518929206e-009
0.500000	-0.30593878416431	-0.30593878263199	1.5323229352049e-009
0.600000	-0.33811464696982	-0.33811465041262	3.4427928286007e-009
0.700000	-0.37367447480646	-0.37367447272159	2.0848766602022e-009
0.800000	-0.41297416238329	-0.41297415535562	7.0276692798465e-009
0.900000	-0.45640703418267	-0.45640704502906	1.0846389342234e-008
1.000000	-0.50440778098384	-0.50440779040585	9.4220083957097e-009

Tableau (2)

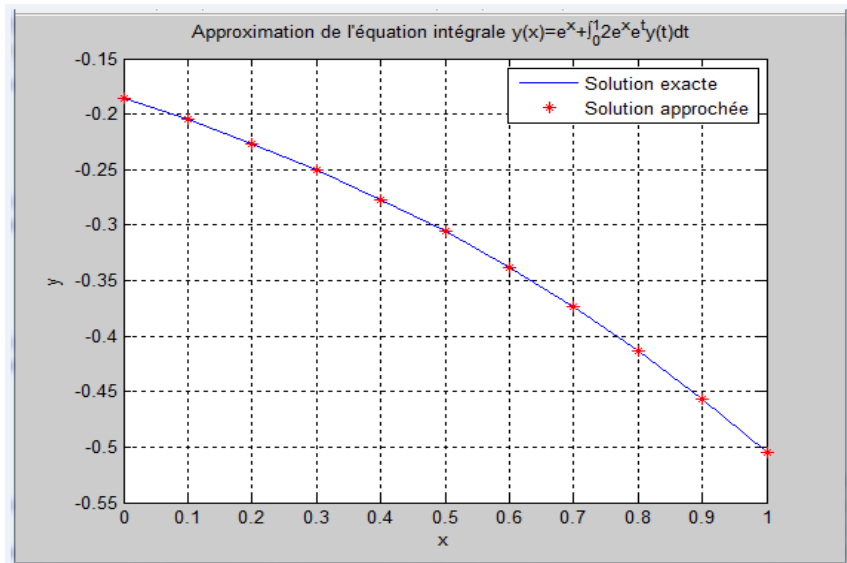


Figure (1)

Exemple 3.2

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u(x) - \int_{-1}^1 (x^4 - t^4) u(t) dt = x, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

La solution exacte de cette équation est $u(x) = x$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est ullistrée dans le tableau suivant pour $n = 3$

Points de x	Solution exacte	Solution approchée	erreur
-1.0000000	-1.0000000000000000	-1.0000000000000000	0
-0.3333333	-0.3333333333333333	-0.3333333333333333	1.1102230246252e-016
0.3333333	-0.3333333333333333	0.3333333333333333	1.1102230246252e-016
1.0000000	-1.0000000000000000	1.0000000000000000	0

Tableau (3)

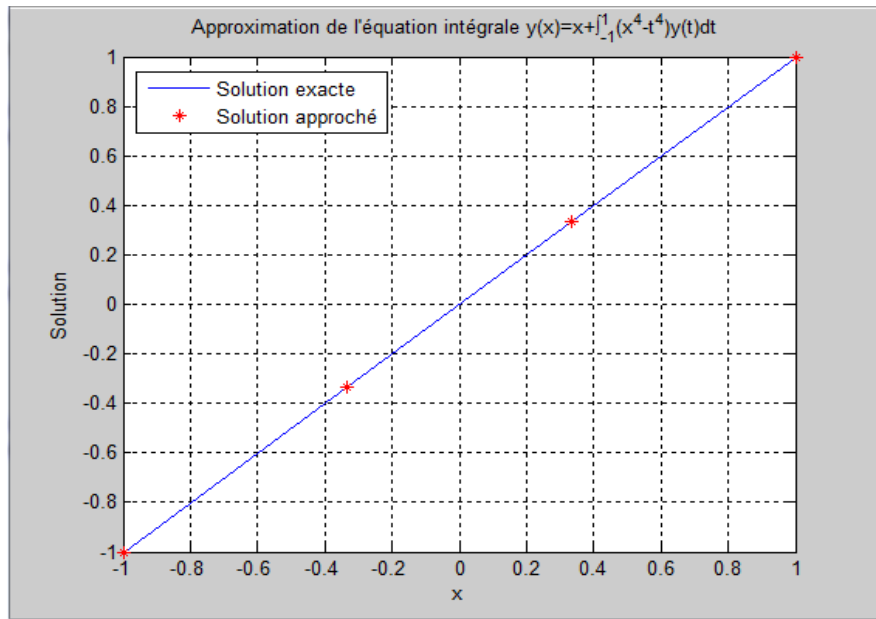


Figure (2)

Exemple 3.3

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u(x) - \int_0^1 x e^t u(t) dt = e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

La solution exacte de cette équation est $u(x) = e^{-x} - \frac{x}{2}$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 3$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

Points de x	Solution exacte	Solution approchée	erreur
0.0000000	1.000000000000000	0.99961364070310	3.8635929689690e-004
0.1000000	0.85483741803596	0.85493095988892	9.3541852958734e-005
0.2000000	0.71873075307798	0.71888266057722	1.5190749923677e-004
0.3000000	0.59081822068172	0.59085374005377	3.5519372054149e-005
0.4000000	0.47032004603564	0.47022919560435	9.0850431293144e-005
0.5000000	0.35653065971263	0.35639402451471	1.3663519792478e-004
0.6000000	0.24881163609403	0.24873322407063	7.8412023399643e-005
0.7000000	0.14658530379141	0.14663179155787	4.6487766458991e-005
0.8000000	0.04932896411722	0.04947472426220	1.4576014497946e-004
0.9000000	-0.04343034025940	-0.04335298053061	7.7359728793018e-005
1.0000000	-0.13212055882856	-0.13246632553479	3.4576670623299e-004

Tableau (4)

•Pour $n = 5$

Points de x	Solution exacte	Solution approché	erreur
0.0000000	1.000000000000000	0.99999904414290	9.5585710369051e-007
0.1000000	0.85483741803596	0.85483778669821	3.6866225505694e-007
0.2000000	0.71873075307798	0.71873058322994	1.6984803785647e-007
0.3000000	0.59081822068172	0.59081795250402	2.6817769438470e-007
0.4000000	0.47032004603564	0.47032013053001	8.4494373553401e-008
0.5000000	0.35653065971263	0.35653094668936	2.8697672888045e-007
0.6000000	0.24881163609403	0.24881169986368	6.3769655556101e-008
0.7000000	0.14658530379141	0.14658503456301	2.6922839690968e-007
0.8000000	0.04932896411722	0.04932821705409	1.4706312707891e-007
0.9000000	-0.04343034025940	-0.04342998851136	3.5174803898058e-007
1.0000000	-0.13212055882856	-0.13212144396841	8.8513984897176e-007

Tableau (5)

- Pour $n = 8$

Points de x	Solution exacte	Solution approchée	erreur
0.000000	1.00000000000000	1.00000000000000	0
0.100000	0.85483741803596	0.85483717409226	2.4394370046199e-007
0.200000	0.71873075307798	0.71873018087119	5.7220679028358e-007
0.300000	0.59081822068172	0.59081738714512	8.3353660051966e-007
0.400000	0.47032004603564	0.47031903894810	1.0070875384738e-006
0.500000	0.35653065971263	0.35031903894810	1.0389457282267e-006
0.600000	0.24881163609403	0.24881071000955	9.2608447874176e-007
0.700000	0.14658530379141	0.14658453863538	7.6515602573379e-007
0.800000	0.04932896411722	0.04932825466986	7.0944736169781e-007
0.900000	-0.04343034025940	-0.04343134286971	1.0026103114125e-006
1.000000	-0.13212055882856	-0.13212304130780	2.4824792457245e-006

Tableau (6)

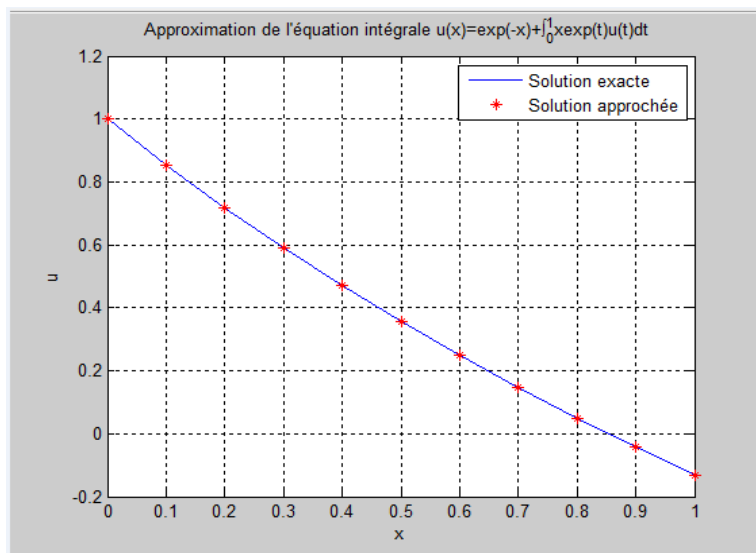


Figure (3)

Exemple 3.4

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u(x) - \int_0^1 (xt + x^2t^2) u(t) dt = 1, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

La solution exacte de cette équation est $u(x) = 1 + \frac{10}{9}x^2$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 3$

Points de x	Solution exacte	Solution approchée	erreur
0.000000	2.11111111111111	2.11111111111111	0
0.100000	1.67215363511660	1.67215363511660	4.4408920985006e-016
0.200000	1.34293552812071	1.34293552812071	2.2204460492503e-016
0.300000	1.12345679012346	1.12345679012346	2.2204460492503e-016
0.400000	1.01371742112483	1.01371742112483	0
0.500000	1.01371742112483	1.01371742112483	0
0.600000	1.12345679012346	1.12345679012346	2.2204460492503e-016
0.700000	1.34293552812071	1.34293552812071	2.2204460492503e-016
0.800000	1.67215363511660	1.67215363511660	4.4408920985006e-016
0.900000	2.11111111111111	2.11111111111111	0

Tableau (7)

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

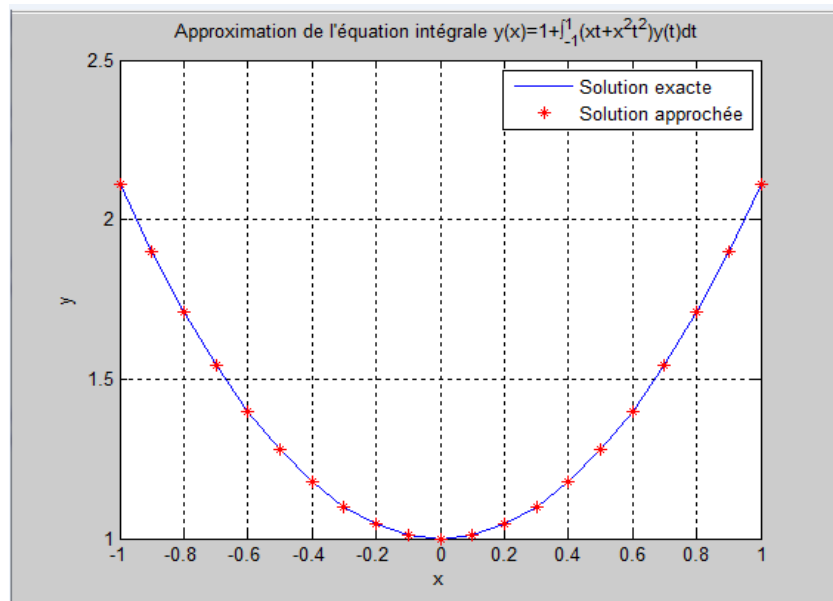


Figure (4)

Conclusion générale

La résolution numérique des équations intégrales est très souvent nécessaire, faute de l'existence de solutions analytiques.

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux dans les assimilations des phénomènes scientifiques qui sont difficiles à réaliser, voire impossibles à résoudre.

Dans ce travail, nous avons étudié la résolution numérique des équations intégrales de type "Fredholm de 2^{ème} espèce" par les polynômes de Bernstein". Cette étude est une méthode de collocation sur la base des polynômes de Bernstein généralisés a été développée pour la solution des équations intégrales.

Bibliographie

- [1] M. Alipour, D. Rostamy, Bernstein polynomials for solving Abel's integral equations, *journal of Mathematics and computer science TJMCS vol. 3, No. 4* (2011), 403 – 412.
- [2] D.Andrei, Polyanin Alexander, V. Manzhirov, Hand book of Integral Equation, *CRC Press, Boca Roca Ration* 1998.
- [3] K. E. Atkinson, The Numerical Solution of Integrations of the Second Kind, *Cambridage University Press*.
- [4] M.I. Bhatti, P. Bracken, Solution of differential equation in a Bernstein polynomial basis, *journal of Computational Applied Mathematics*, 205 : 272 – 280, (2007).
- [5] A. Chakrabarti and S. C. Martha, Approximate solutions of Fredholm integral equation of the second kind, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 211, No. 2, pp. 459 – 466, 2009.
- [6] P. J Davis, Interpolation and approximation, *Dover, New York*, 1975.
- [7] S. Dixit and V.K Singh, Bernstein Direct method for Solving Varitionl Problems, *International Mathematical Forum*, No. 48, pp. 2351 – 2370, 2010.
- [8] C. W.A. Fletcher, Computational Galerkin Methods, *Springer, New york*, 1984.
- [9] E. Isaacson and H. B. Keller, Analysis of numerical methods, *Dover, New York*, 1994.
- [10] A. J. Jerri, 1985, Introduction to Integral Equation With applications, *Marcel Dekker, Inc, New York*.

- [11] I.Joy. Kenneth, 2000. Bernstein polynomials, *University of California, Davis*.
- [12] R. Kress, Linear Integral Eqations, *Springer-Verlag, New York, 1998*.
- [13] G. G. Lorentz, Bernstein polynomials, Chelsea publishing, *New York, N.Y.,(1986)*.
- [14] B. N. Mandal and S. Bhattacharya, Numerical Solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials, *Applied Mathematics and Computation, vol. 190, No. 2, pp. 459 – 459 – 466, 2009*.
- [15] M. Nadir, Cours d'analyse fonctionnelles, *Université de M'sila 2004*.
- [16] M. Nadir, Cours sur les équations intégrales, *Université de M'sila*.