



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



# Mémoire de Master

**Domaine** : Mathématiques et Informatique  
**Filière** : Mathématiques  
**Option** : Analyse Mathématiques et numérique

## Thème

---

*Opérateurs fermés et fermables*

---

**Présentée par :**  
*Haoud Mokhtar*

**Soutenu publiquement le :** xx/06/2021.

**Devant le jury composé de :**

|               |        |                      |                   |
|---------------|--------|----------------------|-------------------|
| GAGUI Bachir  | M.C.A, | Université de M'sila | <b>Président.</b> |
| NADIR Mostefa | Prof,  | Université de M'sila | <b>Encadreur.</b> |
| DJAIDJA Noui  | M.C.B, | Université de M'sila | <b>Examineur.</b> |

Année universitaire 2020/2021

# Remerciements

Avant tout, mes purs remerciements, je les exprime

à **Allah** tout puissant

Mes vifs remerciement vont également à mon

encadreur **NADIR Mostefa**

qui ma a guider durant ce travail et qui ses conseils

et remarques, pour réaliser ce mémoire

Mes profonds remerciements s'adressent à certains de nos  
enseignants pour leur générosité et leur grande patience

durant notre cursus, à mes chers parents et à toutes les

personnes qui m'ont aidés et soutenue de près ou

de loin à la réalisation de ce travail

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>                               | <b>3</b>  |
| <b>Notations</b>                                  | <b>4</b>  |
| <b>1 Rappel</b>                                   | <b>6</b>  |
| 1.1 Espaces vectoriels normés (evn)               | 6         |
| 1.2 Espace de Banach                              | 6         |
| 1.3 Espaces de Hilberts                           | 7         |
| 1.4 Orthogonalé                                   | 8         |
| 1.5 Projection orthogonale                        | 9         |
| 1.6 Opérateurs continus:                          | 10        |
| 1.7 Inverse d'un opérateur                        | 13        |
| 1.8 Opérateur adjoint                             | 14        |
| 1.9 Opérateurs auto-adjoints                      | 15        |
| 1.10 Opérateurs compacts                          | 15        |
| 1.11 Opérateur non borné                          | 18        |
| 1.12 Opérateur adjoints non borné                 | 19        |
| <b>2 Théorie spectrales des opérateurs</b>        | <b>22</b> |
| 2.1 Spectre d'un opérateur                        | 22        |
| 2.2 Propriétés spectrales des opérateurs continus | 24        |
| 2.3 Théorie spectrale des opérateurs compacts     | 24        |
| 2.4 Spectre d'un opérateur non borné              | 25        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>3 opérateurs fermés et fermables</b> | <b>27</b> |
| 3.1 opérateurs fermés . . . . .         | 27        |
| 3.2 opérateurs fermables . . . . .      | 29        |
| <b>Conclusion</b>                       | <b>31</b> |
| <b>Bibliographie</b>                    | <b>31</b> |

# Introduction

L'analyse fonctionnelle représente une branche importante de l'analyse mathématique, malgré sa sophistication, elle a attiré l'attention de nombreux militants dans le domaine des mathématiques, et de sa matière la plus importante: **opérateurs fermés et fermables**, c'est ce que nous avons abordé dans notre même, mais sur tout dans (**Espaces de Hilbert et Espace de Banach**), Nous éclairons le concept de **opérateur** et clarons de ses types et ses objectifs les plus importante Notre travail se compose de 3 chapitres :

**Dans le premier chapitre:** nous rappelons quelques définition les notions de l'analyse fonctionnelle, les espaces vectoriels normés (evn), l'espace de Banach, l'espace de Hilbert..., et orthogonale et Projection orthogonale sur espaces de Hilbert et défini (**suite Cauchy, Cauchy Schwarz,...**) et les notations sur les opérateurs et opérateurs bornés et non borné et opérateurs linéaires, nous donnée quelques classes des opérateurs (l'adjoint, auto-adjoint, unitaire, continue, symétrique, inverse, compact, opération algébrique). comme nous introduit la définition d'opérateur et défini (**Théorème du graphe fermé, théorème de Riesz,...**)

**Dans le deuxième chapitre:** nous présentons les notations sur spectrale des opérateur (borné, non borné, compact, ...)

**Le dernier chapitre:** nous présentons les notations sur des opérateur (**fermé, fermables**), et propriétés sur spectrale des opérateur (**fermé,...**)

---

# Notations générales

- $\|\cdot\|$  norme.
- $L(E,F)$  espace des opérateurs linéaires bornés de  $E$  dans  $F$ .
- $L_a(E,F)$  espace des opérateurs linéaires de  $E$  dans  $F$ .
- suite de Cauchy:  $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_\epsilon; \|x_n - x_m\| < \epsilon$
- $\mathcal{L}(E, F)$  espace des opérateurs linéaires continus de  $E$  dans  $F$ .
- $H$  espace de Hilbert.
- $A^{-1}$  inverse d'un opérateur  $A$ .
- $A^*$  opérateur adjoint de l'opérateur  $A$ .
- $|\cdot|$  module
- $B(H)$  l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur  $H$ .
- $D(A)$  Le domaine de l'opérateur  $A$ .
- $K(E), K(E, F)$  L'espace des opérateurs compacts de  $E$ , où de  $E$  dans  $F$ .
- $\text{Im}(A)$  L'image de l'opérateur  $A$ .
- $\ker(A)$  Le noyau de l'opérateur  $A$
- $B_O$  : boule ouverte de centre  $a \in E$  et de **rayon**  $r > 0$  l'ensemble

$$B_O(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$$

- $B_F$  : boule fermée de centre  $a \in E$  et de **rayon**  $r > 0$  l'ensembl

$$B_F(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$$

- $\oplus$  : signe de somme direct.
- $\oplus^\perp$  : signe de somme direct orthogonale.

- 
- $N(A)$  : Espace nul (**ou noyau**) d'un opérateur linéaire  $A$ .
  - $R(A)$  : son image de  $A$ .
  - $R_\lambda(A)$  : Résolvante de  $A$ .
  - $\rho(A)$  : Ensemble résolvant de  $A \in \mathcal{L}(E)$ .
  - $\sigma(A)$  : Spectre de  $A$ .
  - $\sigma_p(A)$  : Spectre ponctuel de  $A$ .
  - $\sigma_r(A)$  : Spectre résiduel de  $A$ .
  - $\sigma_c(A)$  : Spectre continu de  $A$ .
  - $\sigma_e(A)$  : Spectre essentiel de  $A$ .
  - $\sigma_d(A)$  : Spectre discret de  $A$ .
  - $r(A)$  : Rayon Spectral de  $A$ .

# Chapitre 1

## Rappel

### 1.1 Espaces vectoriels normés (evn)

**Définition 1.1.1:** Soit  $E$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel. On appelle norme sur  $E$  toute application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , vérifiant :

1.  $\forall x \in E : \|x\| \geq 0$  et  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
2.  $\forall x, y \in E : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3.  $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{k} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

#### Remarques 1.1.1

1. Toute norme définit une distance suivant la formule:

$$\forall x, y \in E : d(x, y) = \|x - y\|$$

On dit dans ce cas que la métrique  $d$  dérive de la norme  $\|\cdot\|$ .

### 1.2 Espace de Banach

**Définition 1.2.1** Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

**Remarque 1.2.1** Dans un *evn*, la limite d'une suite convergente est **unique**.

**Exemple 1.2.1:**  $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach de

## 1.3 Espaces de Hilbert

**Définition 1.3.1 (Produit scalaire)** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , un produit scalaire sur  $E$  est application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{k}$ , notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  possédant les propriétés suivantes: pour tout  $x, y, z$  dans  $E$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{R}$

1.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ .
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0$
4.  $\langle x, x \rangle = 0$  implique  $x = 0$

**Définition 1.3.2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$  espace linéaire, s'il existe un nombre complexe  $Z = \langle x, y \rangle$  pour tout couple de vecteurs  $x$  et  $y$  dans  $E$  qui vérifie les conditions suivantes :

1.  $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle \geq 0$
2.  $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3.  $\forall x, y \in E \quad \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
4.  $\forall x, y, z \in E \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
5.  $\forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

Alors  $\langle x, y \rangle$  est dit produit scalaire de  $x$  et  $y$ , et on note par  $\langle x, y \rangle$ .

**Définition 1.3.3.** (Espace) Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

**Définition 1.3.4** Un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autres mots, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire

**Proposition 1.3.1.**[1] Tout espace Préhilbertien est un espace vectoriel normé, la norme est donné par:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle \iff \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**Proposition 1.3.2.** [2] Un espace vectoriel normé est un espace préhilbertien si et seulement si, sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.

**Définition 1.3.5** Un ensemble  $E = \{e_i; i \in I\}$  d'un espace de Hilbert  $H$  est un système orthonormale si :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Inégalité de Cauchy Schwarz :

Si  $x$  et  $y$  sont deux éléments d'un espace préhilbertien alors

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

**Preuve.**

Si  $y = \vec{0}$  on a alors,  $\langle x, y \rangle = \langle x, \vec{0} \rangle = 0 = \overline{\langle x, x \rangle}$  et la conclusion est claire, soit  $y \neq \vec{0}$  et  $x \neq \vec{0}$  alors pour tout scalaire  $\lambda$  nous avons :

$$\begin{aligned} \|\lambda x + y\|^2 &= \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle \geq 0 \\ &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle + \langle \lambda x, y \rangle + \langle y, \lambda x \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0 \\ &= \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0 \\ &= |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (i) \end{aligned}$$

On pose:  $\lambda = \frac{-\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$

alors l'inégalité (i) réduit à :

$$\begin{aligned} &= \langle y, y \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} \geq 0 \\ &= \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \geq |\langle x, y \rangle|^2 \end{aligned}$$

D'où

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

**Exemple 1.3.1**

L'espace  $\ell^2 = \{x = (x_k)_k \mid x_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$  muni du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_k \bar{y}_i$  est un espace de Hilbert.

## 1.4 Orthogonalité

**Définition 1.4.1** Soit  $H$  un espace de Hilbert .deux vecteurs  $x, y \in H$  sont orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$  on note  $x \perp y$ .

**Remarque 1.4.1** La relation d'Orthogonalité possède les propriétés suivantes :

1.  $0_H \perp x$  pour tout  $x \in H$ .
2.  $x \perp y \Rightarrow y \perp x$
3.  $x \perp x \Rightarrow x = 0_H$
4.  $x \perp x_n, n \in \mathbb{N}, \text{ et } \|x_n - x_0\| \Rightarrow x \perp x_0$

**Théorème 1.4.1** Si  $A$  est un ensemble **non vide** d'un espace de Hilbert  $H$ , alors

$$A^\perp = \{x, x \in H, \text{ et } x \perp A\}$$

est un sous-espace linéaire fermé de  $H$

$A^\perp$  s'appelle le complément orthogonal de  $A$ .

**Preuve.** Observons d'abord que  $A^\perp \neq \emptyset$  puis que au moins  $0_H \in H$

Soient  $x_1, x_2 \in A^\perp, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{k}$  et  $y \in A$  alors

$$\langle x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2, y \rangle = \lambda_1\langle x_1, y \rangle + \lambda_2\langle x_2, y \rangle = 0$$

Donc  $x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 \in A^\perp$  et  $A^\perp$  est un sous-espace linéaire de  $H$ .

Soit maintenant  $x_0 \in A^\perp$ , alors il existe une suite  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A^\perp$

telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$  Nous avons pour tout  $y \in A$

$$\langle x_0, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = 0$$

Donc  $x_0 \in A^\perp$  et  $A^\perp$  est un sous-espace linéaire fermé.

## 1.5 Projection orthogonale

Un opérateur  $A$  est dit projection orthogonale si et seulement si

$$A^2 = A = A^*$$

**Exemple 1.5.1** Soit l'opérateur  $A$  défini par :

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, 0, z) \end{aligned}$$

On a

$$A^2(x, y, z) = A(A(x, y, z)) = A((x, 0, z)) = (x, 0, z) = A(x, y, z) \text{ donc } A = A^2$$

On vérifie que :  $A^* = A$

On pose:  $U = (x, y, z)$  et  $V = (x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{aligned}\langle AU, V \rangle &= \langle A(x, y, z), (x_2, y_2, z_2) \rangle \\ &= \langle (x, 0, z), (x_2, y_2, z_2) \rangle \\ &= x.x_2 + z.z_2 \\ &= \langle (x, y, z), (x_2, 0, z_2) \rangle\end{aligned}$$

$$A^*(x, y, z) = (x, 0, z)$$

c'est a dire que  $A^* = A$  donc  $A^2 = A = A^*$

alors  $A$  est une projection orthogonale.

## 1.6 Opérateurs continus:

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur linéaire  $A$  de  $E$  dans  $F$  est dit continu au point  $x_0 \in E$ , si pour tout voisinage  $V$  du point  $y_0 = Ax_0$  il existe un voisinage  $U$  du point  $x_0$  tel que  $Ax \in V$ , dès que  $x \in U \cap E$ .  
L'opérateur  $A$  est dit continu, s'il est continu en tout point  $x \in E$ .

**Définition 1.6.1.**  $A \in L(E, F)$  est dit continu si :

$$\forall (x_n) \subset E, x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x \implies Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_F} Ax.$$

**Proposition 1.6.1** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés sur  $\mathbb{k}$  et  $A$  un opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$ . Il y a équivalence entre :

- l'opérateur linéaire  $A$  est continu.
- l'opérateur linéaire  $A$  est continu en 0.
- l'opérateur linéaire  $A$  est continu en un point.
- Il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\|Ax\| \leq c\|x\|$  pour tout  $x \in E$

**Définition 1.6.2** L'opérateur linéaire  $A$  est continu à  $x_0 \in E$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall x_0 \in E \quad \|x - x_0\|_E < \sigma \implies \|Ax - Ax_0\|_F < \epsilon$$

Puis que la continuité de  $A$  peut être caractérisée par les suites,  $A$  est continue à  $x_0$  si pour toute suite  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset E$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_E = 0$$

On a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax_0\|_F = 0$$

**Théorème 1.6.1** Soit  $x_0 \in E$  quelconque, si  $A \in L_a(E, F)$  alors **ON a** :

$A$  est continue en  $x_0 \Leftrightarrow A$  est continue sur  $E$  .

**Preuve:**

$A$  est continue en  $x_0 \Leftrightarrow \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_E = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax_0\|_F = 0 \}$ .

Soit  $x \in E$  quelconque il suffit de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x\|_E = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax'_n - Ax\|_F = 0$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x\|_E = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x'_n - x + x_0) - x_0\|_E = 0$$

On pose  $y_n = x'_n - x + x_0$

**On a:**

$A$  est continue en  $x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ay_n - Ax_0\|_F = 0$  **i.e**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A(x'_n - x + x_0) - Ax_0\|_F = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax'_n - Ax + Ax_0 - Ax_0\|_F = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax'_n - Ax\|_F = 0$$

Donc  $A$  est continue sur  $E$ .

**Lemme 1.6.1** [3] Soit  $x_n$  dans un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  contient une sous suite

$x_{n_k}$  convergente vers le même élément  $x$

**Démonstration**

Soit  $x_n$  une suite Cauchy alors il vient:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall p, q \geq N_\epsilon, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \epsilon,$$

d'où en particulier pour  $n_\epsilon \geq N_\epsilon$ , on a

$$\forall p, n_\epsilon \geq N_\epsilon, \|x_p - x_{n_\epsilon}\| < \epsilon$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_p - x_{n\epsilon}\| = \|x_p - x\| < \epsilon$$

D'où la convergence de la suite  $x_n$  vers l'élément  $x$ .

**Exemple 1.6.1.** Prenons  $E = \ell^2(\mathbb{N})$  et soit  $(\lambda_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une suite bornée de nombres complexes. Pour une suite  $x = (x_n)$  dans  $\ell^2(\mathbb{N})$ , on pose  $Ax = (\lambda_n x_n)$ . On vérifie immédiatement que:

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} |\lambda_n x_n|^2 \leq \sup |\lambda_n|^2 \|x\|^2$$

L'opérateur  $A$  est donc continu sur  $\ell^2(\mathbb{N})$

Les opérateurs linéaires bornés:

**Définition 1.6.3** L'opérateur linéaire  $A \in L_a(E, F)$  est borné s' il existe un nombre  $M > 0$ , tel que

$$\|Ax\|_F \leq M \|x\|_E \quad (1.6.3)$$

Pour tout  $x \in E$

**Proposition 1.6.2** La plus petite des constante  $M$  verifiant la relation (1.6.3) est appelée norme de  $A$  notée  $\|A\|$  et donnée par:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1, x \neq 0} \|Ax\|_F$$

**Exemple 1.6.2**

a.  $I: C([0,1]) \rightarrow C([0,1])$

est bien borné car :

$$\|Ix\| = \|x\| \leq M \|x\|; \forall M \geq 1$$

b. L'opérateur de multiplication  $A$  défini sur l'espace  $C([1,2])$ , alors :

$$\begin{aligned} \|Af\|_\infty &= \sup_{x \in [1,2]} |Af(x)| \\ &= \sup_{x \in [1,2]} |x \cdot f(x)| \\ &\leq 2 \|f\|_\infty \quad (M=2) \quad \forall f \in C([1,2]) \end{aligned}$$

**Proposition 1.6.3** Tout opérateur linéaire continu est borné.

**preuve.**

Soit  $M \subset E$  un ensemble borné. Supposons que l'ensemble  $AM \subset F$  ne soit pas borné. Alors dans  $F$  il existe un voisinage de zéro  $V$  tel qu'aucun des ensembles  $\frac{1}{n}AM$  n'est contenu dans  $V$ , mais alors il

existe une suite d'éléments  $x_n \in M$  telle qu'aucun des éléments  $\frac{1}{n}Ax_n$  n'appartient à  $V$ . Par suite d'une part, on a  $\frac{1}{n}x_n \rightarrow 0$  dans  $E$  et d'autre part, la suite  $\frac{1}{n}Ax_n$  ne converge pas vers 0 dans  $F$ , ceci contredit l'hypothèse de continuité de l'opérateur  $A$ .

**Exemple 1.6.3**

$$\begin{aligned} D: C^1([0, 1]) &\rightarrow C([0, 1]) \\ g(t) &\mapsto g'(t) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|Dg\|_\infty &= \|g'\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |g'(t)| \\ \|g\|_{C^1([0, 1])} &= \sup_{t \in [0, 1]} |g(t)| + \sup_{t \in [0, 1]} |g'(t)| \\ &= \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty \end{aligned}$$

d'où,

$$\|Dg\|_\infty \leq \|g\|_{C^1([0, 1])}$$

Donc  $D$  est borné

**Définition 1.6.4. (Théorème du graphe fermé)** Soient  $E, F$  deux espaces de Banach et  $A$  opérateur linéaire, Alors  $G(A)$  fermé dans

$$E \times F \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}(E, F)$$

**Théorème de Riesz**  $H$  espace de Hilbert, le dual  $H^*$  de  $H$  est isométriquement isomorphe à  $H$  par l'identification (**antilinéaire**)

$$\{x^* \rightarrow x, \forall y \in H, \langle y, x^* \rangle = (y|x^*)\}.$$

## 1.7 Inverse d'un opérateur

**Définition 1.7.1** Soient  $E, F$  deux espaces normés,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ .

L'opérateur  $A$  est dit Inversibilité, si pour tout  $y \in F$  l'équation

$$Ax=y$$

a une solution et une seule

**Définition 1.7.2** On dit que  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est inversible s'il est bijectif et si son inverse est continu.

**Exemple 1.7.1** Soit  $E = \ell^2$ , L'Opérateur  $A$  défini par :

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

A est borné, car

$$\|A(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i \geq 1} \frac{|x_i|^2}{i^2}} \leq \sqrt{\sum_{i \geq 1} |x_i|^2} = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|$$

A est inversible, et son inverse est donné par:

$$A^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n)$$

Cependant,  $A^{-1}$  est non borné. En effet, si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite défini par

$$e_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_n^n) \quad \text{avec} \quad e_i^n = \begin{cases} 1, & \text{si } i=n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On a

$$\|e_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \|A^{-1}e_n\| = n, \quad \text{Donc } A^{-1} \text{ n'est pas borné.}$$

## 1.8 Opérateur adjoint

**Définition 1.8.1** Soient E et F deux espace de Hilbert

et  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  l'opérateur  $A^* \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que pour

tout  $x \in E, y \in F$  on ait

$$\langle Ax, y \rangle_F = \langle x, A^*y \rangle_E$$

est appelé adjoint de A.

**Exemple 1.8.1** On a  $\langle Ix, y \rangle_F = \langle x, I^*y \rangle_E$  or  $\langle Ix, y \rangle_F = \langle x, y \rangle_E$

pour tout  $x, y \in H$ . Donc

$$I^* = I$$

**Propriétés 1.8.1**

1.  $(aA + bB)^* = \bar{a}A^* + \bar{b}B^*$ , pour tout  $a, b \in \mathbb{k}$ .
2.  $(AB)^* = B^*A^*$
3. Si A est inversible,  $A^*$  est aussi et on a  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .
4.  $(A^*)^* = A$

$$5. \|A^*\| = \|A\|$$

## 1.9 Opérateurs auto-adjoints

**Définition 1.9.1** Un opérateur  $A$  est dit auto-adjoint (ou hermitien)

si  $A^* = A$  i.e.

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in H$$

### Exemple 1.9.1

Considérons l'opérateur  $A$  défini sur  $L^2(\mathbb{R})$  par:

$$(Ax)(t) = e^{-|t|}x(t)$$

$A$  est un opérateur borné auto-adjoint. En effet,

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}x(t)\overline{y(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\overline{e^{-|t|}y(t)}\right] dt \\ &= \langle x, Ay \rangle \end{aligned}$$

**Proposition 1.9.1** Si  $A$  est un opérateur auto-adjoint, alors

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$$

**Exemple 1.9.2** Pour tout  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  l'opérateur  $A^*A \in \mathcal{L}(E)$

est auto-adjoint, car

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$$

## 1.10 Opérateurs compacts

[5] Soient  $E, F$  des espaces de Banach et  $H$  un espace de Hilbert.

**Définition 1.10.1** : On appelle **opérateur compact** de  $E$  dans  $F$

tout élément  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , pour lequel l'image de toute partie bornée de  $E$  est relativement compacte dans  $F$ . On note  $K(E, F)$  l'ensemble des opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$ , ou simplement si  $E = F$ .

**Proposition 1.10.1**:  $K(E, F)$  est un idéal **bilatéral** pour le produit de

composition et également un sous espace **fermé** de  $\mathcal{L}(E, F)$  contenant tous les opérateurs de rang fini. Dans le cas particulier où  $F$  est un espace de Hilbert, on a précisément

$$K(E, F) = \overline{\{u : E \rightarrow F : \dim(u(E)) < \infty\}}$$

**Proposition 1.10.2:** Soit  $A \in K(E)$ , alors

1. le sous-espace  $\text{Ker}(A - Id_E)$  est de dimension finie,
2. le sous-espace  $\text{Im}(A - Id_E)$  est fermé,
3. l'opérateur  $(A - Id_E)$  est inversible si et seulement si il est injectif

**Exemple 1.10.2** On définit l'opérateur  $A$  comme suit  $A: C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  tq

$$Ag(x) = \int_0^1 k(x, t)g(t)dt$$

où  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  est continu.

On montre :

1.  $A$  est un opérateur linéaire compact.
2. Dans le cas  $k(x, t) = e^{x+t}$  détermine la norme de  $A$ .

**Solution :**

- 1) La boule unité dans  $C([0, 1])$  est  $B_F(0, 1) = \{g \in C([0, 1]), \|g\|_\infty \leq 1\}$

Pour montrer que  $A B_F(0, 1)$  est relativement compact dans  $C([0, 1])$  on, utilise le théorème **d'Arzela-Ascoli**

- a)  $A B_F(0, 1)$  est **uniformément** borné : En effet  $\forall g \in B_F(0, 1)$  on a

$$\begin{aligned} |Ag(x)| &= \left| \int_0^1 k(x, t)g(t)dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |k(x, t)||g(t)|dt \\ &\leq \|g\|_\infty \int_0^1 |k(x, t)|dt \\ &\leq \int_0^1 |k(x, t)|dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{g \in B_F(0, 1)} |Ag(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |k(x, t)|dt.$$

On pose:  $M = \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |k(x,t)| dt$ . on trouve  $\|Ag(x)\| \leq M$ . D'où  $B_F(0,1)$  est uniformément borné.

$$\begin{aligned} |Ag(y) - Ag(x)| &= \left| \int_0^1 [k(y,t) - k(x,t)]g(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |k(y,t) - k(x,t)| |g(t)| dt \\ &\leq \|g\|_\infty \int_0^1 |k(y,t) - k(x,t)| dt \\ &< \int_0^1 \epsilon dt = [\epsilon t]_0^1 = \epsilon(1) - \epsilon(0) = \epsilon \end{aligned}$$

Donc  $\exists \delta = \epsilon$  tel que  $|y - x| < \delta$ , d'où  $A$   $B_F(0,1)$  est **équivocinuu**

2) Déterminons la norme de  $A$  on a

$$\begin{aligned} |Ag(x)| &= \left| \int_0^1 e^{x+t} g(x) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 e^x e^t g(x) dt \right| \\ &= e^x \int_0^1 |e^t| |g(x)| dt \\ &\leq e^x \|g(x)\|_\infty \int_0^1 |e^t| dt \\ &\leq e(e-1) \|g(x)\|_\infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Ag(x)\|_\infty \leq e(e-1) \|g(x)\|_\infty \text{ Donc } \|A\| \leq e(e-1)$$

Maintenant, on montre  $\|A\| \geq e(e-1)$  on prend  $(h(x) = 1, \forall x \in [0,1])$

$$\begin{aligned} Ah(x) &= \int_0^1 e^{x+t} dt \\ &= e^x \int_0^1 e^t dt \end{aligned}$$

Donc  $\|A\| \geq \|Ah(x)\|_\infty = e(e-1)$ , alors

$$\|A\| = e(e-1)$$

**Opération algébrique:**

- la somme

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x) \text{ évade } D(A+B) = D(A) \cap D(B)$$

- la produit

$$(AB)(x) = A(B(x)) \text{ avec } D(AB) = \{x \in D(A) \text{ tel que } A(x) \in D(B)\}$$

- les lois usuelles d'associativité:

$$(A+B) + C = A + (B+C); (AB)C = A(BC)$$

- les lois des distributivité

$$(A + B)C = AC + BC, C(A + B) \supset CA + CB$$

car il se peut que  $(A + B)x \in D(C)$  même si  $Ax$  ou  $Bx$  n'est pas dans  $D(C)$

- Multiplication par scalaire : si  $\lambda = 0$

Si  $\lambda = 0$  alors

$$D(\lambda A) = H \text{ et } \lambda A = 0$$

Si  $\lambda \neq 0$  alors

$$D(\lambda A) = D(A) \text{ et } D(\lambda A)x = \lambda(Ax)$$

pour  $x \in D(A)$

**Opérateurs symétriques:** Les opérateurs symétriques sont des **opérateurs bornés** qui ont un comportement particulier par rapport au produit scalaire.

**Définition 1.10.2** Soit  $A$  un opérateur borné sur un espace de Hilbert  $H$ . **L'adjoint** de  $A$  est l'opérateur noté  $A^*$  défini par la relation :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \forall x, y \in H \quad (1.10.1)$$

Si  $A = A^*$  nous disons que  $A$  est symétrique

**Théorème 1.10.1**

Soit  $A$  un opérateur symétrique sur un espace de Hilbert  $H$ . Alors,

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x \rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$$

## 1.11 Opérateur non borné

**Définition 1.11.1.**[9] Soient  $E, F$  deux espaces de Banach. Soit  $D \subset E$  un s.e.v de  $E$ . Un opérateur linéaire  $A : D \rightarrow F$  est appelé opérateur non borné.  $D$  est le domaine de définition de  $A$  noté  $D(A)$  ( $D(A)$  est un s.e.v de  $E$ ). Un tel opérateur est entièrement décrit par son **graphe**

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\}$$

De manière analogue un opérateur linéaire peut être considéré comme

un s.e.v  $\Gamma$  de  $E \times F$  (muni de la topologie induite de  $E \times F$ )

**Définition 1.11.2**

- $A$  est à domaine dense si  $D(A)$  est dense  $E$  ( $\overline{D(A)} = E$ ).
- Si  $B$  est un autre opérateur de  $D(B) \rightarrow F$ ,  $S$  est une extension de  $T$  si  $G(A) \subset G(B)$  et on écrit  $A \subset B$ . i.e

$$D(A) \subset D(B) \quad Bx = Ax, \forall x \in D(A)$$

- On définit l'opérateur  $A + B : D(B + A) \rightarrow F$  avec

$$(B + A)(x) = B(x) + A(x) \text{ de domaine } D(A) \cap D(B)$$

- On définit l'opérateur  $BA : D(BA) \rightarrow F$  avec

$$(BA)(x) = B(A(x)) \text{ et } D(BA) = \{x \in D(A) : A(x) \in D(B)\}$$

**Exemple 1.11.1** L'opérateur  $B : D(B) \rightarrow H$  défini par  $B(g) = ig'$

où  $D(B) = \{g \in H; g' \in H\}$  et  $H = L_2([0, 1], \mathbb{C})$  où

$D(B) = \{g \in H, g' \in H\}$  est un opérateur non borné

## 1.12 Opérateur adjoints non borné

**Définition 1.12.1**[16] L'adjoint d'un opérateur  $(A, D(A))$  à

domaine dense est l'unique opérateur  $A^*$  ayant pour domaine.

$$D(A^*) = \{x \in H : y \in D(A) \mapsto \langle x, Ay \rangle \text{ est continue}\}.$$

et vérifiant :

$$\forall x \in D(A^*), \forall y \in D(A), \langle Ax, y \rangle = \langle A^*x, y \rangle$$

Grâce à la densité de  $D(A)$  dans  $H$ , pour chaque  $x \in D(A^*)$  la

forme linéaire  $y \mapsto \langle x, Ay \rangle$  s'étend à un unique élément de  $H$

qu'on écrit par le **théorème de Riesz** comme  $\langle A^*x, \cdot \rangle_H$  on

considère l'isométrie  $g : H \oplus H \rightarrow H \oplus H; G(x, y) = (-y, x)$

pour tout  $x, y \in H$  En particulier on a  $G^2(x, y) = -(x, y)$  et si  $E$  est

un sous-espace de  $H \oplus H$  alors  $G(E^\perp) = G(E)^\perp$

**Proposition 1.12.1** Soit  $(A, D(A))$  un opérateur à domaine dense alors :

- 1)  $K(A^*) = [GK(A)]^\perp$
- 2)  $\overline{K(A)} = [GK(A^*)]^\perp$

**Preuve**

1) On a:

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Gamma(A^*) &\Leftrightarrow (x, Az) = (y, z) \quad \forall z \in D(A) \\ &\Leftrightarrow \langle (x, y); (-Az, z) \rangle = 0 \quad \forall z \in D(A) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in G\Gamma(A)^\perp \end{aligned}$$

$$2) \overline{K(A)} = (K(A)^\perp)^\perp = (G^2(K(A))^\perp)^\perp = (G[GK(A)]^\perp)^\perp = GK(A^*)^\perp$$

Opérateurs auto-adjoints non bornés

**Définition 1.12.1** [17] Un opérateur à  $A$  domaine dense est dit

**symétrique** si  $A \subset A^*$  c'est à dire  $D(A) \subset D(A^*)$  et

$Ax = A^*x \quad \forall x \in D(A)$  Autrement dit ;

$$\forall x \in D(A) \quad \forall y \in D(A) \quad (Ax, y) = (x, Ay)$$

**Définition 1.12.3** On dit qu'un opérateur  $A$  à domaine dense

est **auto-adjoint** si  $A = A^*$ ; c'est à dire:

$$D(A) = D(A^*) \quad \text{et} \quad Ax = A^*x \quad \forall x \in D(A)$$

**Remarque 1.12.1**

1. Si  $A$  est un opérateur auto-adjoint alors  $A = A^* = A^{**}$

**Théorème 1.12.1**

Soit  $A$  un **opérateur symétrique**. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est **auto-adjoint**
2.  $A$  est fermé et  $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$
3.  $\text{Im}(A^* \pm i) = H$

**Preuve** (1)  $\Rightarrow$  (2); Soit  $A$  est **auto-adjoint** et  $\varphi \in D(A^*) = D(A)$  tels que

$\varphi \in \ker(A^* \pm i)$  suit alors que

$$\pm i \langle \varphi, \varphi \rangle = \langle \pm i \varphi, \varphi \rangle = \langle A^* \varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, A \varphi \rangle$$

$$= \langle \varphi, A^* \varphi \rangle = \mp \langle \varphi, \varphi \rangle$$

D'où  $\varphi = 0$

# Chapitre 2

## Théorie spectrales des opérateurs

### 2.1 Spectre d'un opérateur

**Définition 2.1.1**(valeurs propres et vecteurs propres)[6] Soit  $A \in L(H)$ , le nombre complexe  $\lambda$ , est dit valeur propre de  $A$  s'il existe un vecteur  $x$  dans  $H - \{0_H\}$  (s'appelle vecteur propre associé à  $\lambda$ ) *tel que*

$$(A - \lambda I_H)x = 0, Ax = \lambda x.$$

**Définition 2.1.2**[6] Soit  $A \in L(H)$ , on dit que  $\lambda \in \mathbb{C}$  appartient à l'ensemble résolvant de  $A$  si  $A - \lambda I_H$  est une bijection de  $H$  dans  $H$  et que  $(A - \lambda I_H)^{-1} \in L(H)$  L'ensemble résolvant de  $A$  est noté  $\rho(A)$ , i.e.

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I_H \text{ inversible}\}$$

**Définition 2.1.3** Soit  $A \in L(H)$ , on appelle spectre de  $A$ , et on note  $\sigma(A)$  le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de  $\rho(A)$ . Le spectre de  $A$  est donc l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $A - \lambda I_H$  non inversible, ceci équivalant à définir  $\sigma(A)$  comme l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $A - \lambda I_H$  n'est pas bijective, i.e.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I_H \text{ non inversible}\},$$

**Remarque 2.1.1**

1.  $\sigma(A) = \mathbb{C} / \rho(A)$
2.  $\sigma(A) \cap \rho(A) = \emptyset$

3.  $\sigma(A) \cup \rho(A) = \mathbb{C}$

**Définition 2.1.4:** On appelle **spectre ponctuel** de  $A$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$ , noté  $\sigma_p(A)$

*tel que*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \sigma(A), A - \lambda I_H \text{ non injectif}\}$$

**Remarque 2.1.2:** Lorsque  $H$  est dimension finie, alors  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ .

Mais si  $H$  est dimension infinie, on a  $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$ .

**Définition 3.1.5**[20] Soit  $A \in B(H)$ . On appelle résolvante de  $A$  l'application

$$R_A : \rho(A) \rightarrow B(H); \lambda \rightarrow R_A(\lambda) = (A - \lambda I_H)^{-1}$$

avec

$$R_A(\lambda) : H \rightarrow H; y \rightarrow R_A(\lambda) = (A - \lambda I_H)^{-1}(y)$$

**Remarque 2.1.3** L'application  $R_A$  est bien définie

**Proposition 2.1.1** Pour tous  $\lambda, \mu \in \rho(A)$

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu)R_A(\lambda)R_A(\mu) = (\lambda - \mu)R_A(\mu)R_A(\lambda)$$

**Preuve**

i)  $R_A(\lambda) = (A - \lambda I_H)^{-1}$

ii)  $R_A(\mu) = (A - \mu I_H)^{-1}$

(i)-(ii)  $R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (A - \lambda I_H)^{-1} - (A - \mu I_H)^{-1}$

$$= (A - \lambda I_H)^{-1}[(A - \mu I_H) - (A - \lambda I_H)](A - \mu I_H)^{-1}$$

$$= \underbrace{(A - \lambda I_H)^{-1}}_{R_A(\lambda)} (A - (\mu + \lambda)I_H - A) \underbrace{(A - \mu I_H)^{-1}}_{R_A(\mu)}$$

$$= (\lambda - \mu) R_A(\lambda) R_A(\mu)$$

(ii)-(i)  $R_A(\mu) - R_A(\lambda) = (A - \mu I_H)^{-1} - (A - \lambda I_H)^{-1}$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{(A - \mu I_H)^{-1}}_{R_A(\mu)} [(A - \mu I_H) - (A - \lambda I_H)] \underbrace{(A - \lambda I_H)^{-1}}_{R_A(\lambda)} \\
 &= (\lambda - \mu) R_A(\mu) R_A(\lambda)
 \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.2** Pour tout  $A \in B(H)$

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|R_A(\lambda)\| = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|(A - \lambda I_H)^{-1}\| = 0$$

**Preuve**[voir [20]]

**Exemple 3.1.1**

Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$  défini par :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a

$$\det(A - \lambda I_{M_2}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 9 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda)^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

$$\det(A - \lambda I_{M_2}) = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \quad \text{ou} \quad \lambda = -3$$

Alors,

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{-3, 3\}$$

## 2.2 Propriétés spectrales des opérateurs continus

[8] Soit  $E$  un espace de Hilbert,  $\mathcal{L}(E)$  est alors une **algèbre de Banach**. On aimerait définir  $g(A)$  lorsque  $g$  est une fonction d'une variable complexe et  $A$  un élément de  $\mathcal{L}(E)$ . Prenons d'abord  $g$  un polynôme à coefficients complexes,  $g(x) = \sum_0^n a_k x^k$ , Il n'y a aucune difficulté à définir  $g(A)$  par :  $g(A) = \sum_0^n a_k A^k$  en convenant que  $A^0 = I$  (**l'opérateur identité**) et  $g(A)$  appartient à  $\mathcal{L}(E)$ . On vérifie également que si  $p_1$  et  $p_2$  sont deux polynômes à coefficients complexes:

$$(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(A) = \lambda_1 p_1(A) + \lambda_2 p_2(A), \quad p_1 p_2(A) = p_1(A) p_2(A)$$

## 2.3 Théorie spectrale des opérateurs compacts

Cette théorie est pour l'essentiel la création du mathématicien hongrois  $F.$

Riesz, aux alentours de 1910. Le **théorème de Riesz** (qui affirme que si  $E$  est un espace vectoriel normé, alors  $\overline{B_E}$  est compacte si et seulement si  $E$  est de dimension finie) est l'un des points clés de cette théorie.

**Lemme 2.3.1** Soit  $K \in \mathcal{L}(E)$  un opérateur compact et  $A = Id_E - K$

Supposons qu'il existe un sous-espace fermé  $F$  de  $E$  tel que  $A$  soit

**injectif** de  $F$  dans  $E$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que:

$$\|A(x)\| \geq C\|x\|, \quad \forall x \in F;$$

En particulier, l'image  $A(F)$  est fermée.

**Preuve:**

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de constante  $C > 0$  telle que:  $\|A(x)\| \geq C\|x\|$  pour tout  $x \in F$ . On peut alors trouver une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  de vecteurs de  $F$ , de norme 1 telle que  $\|Ax_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Puisque  $K$  est compact, il existe une sous-suite  $(x_{n_k})_{k \geq 1}$  telle que  $K(x_{n_k})$  converge; mais  $A(x_{n_k}) = x_{n_k} - K(x_{n_k})$  tend vers 0, donc  $x_{n_k}$  converge vers un vecteur  $x \in E$ . Comme  $F$  est fermé, nécessairement,  $x \in F$  et de plus  $\|x\| = 1$ . Donc en particulier  $x \neq 0$ . Il reste alors à remarquer que par continuité de  $A$ , on a  $Ax = \lim_{k \rightarrow \infty} Ax_{n_k} = 0$ , ce qui contredit l'injectivité de  $A$  sur  $F$ . Ainsi il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\|A(x)\| \geq C\|x\|$  pour tout  $x \in F$ . Le fait que l'image  $A(F)$  soit fermée résulte d'arguments standards laissés en exercice au lecteur.

**Proposition 2.3.1** Soit  $E$  un espace de Banach,  $K \in \mathcal{L}(E)$  un opérateur compact et  $A = Id_E - K$ . Alors le noyau de  $A$  est de dimension finie et l'image  $A(E)$  est fermée.

**Preuve**

Notons  $E_1 = \ker(A) = \ker(Id_E - K)$ . On vérifie facilement que  $\overline{B_{E_1}} \subset K(\overline{B_E})$  et comme  $K$  est compact on obtient que  $\overline{B_{E_1}}$  est compact. Le **théorème de Riesz** implique alors que  $E_1$  est de dimension finie. implique alors qu'il existe un sous-espace fermé  $F$  de  $E$  tel que  $E = \ker(A) \oplus F$ . Alors  $A$  est injectif sur  $F$  et le **lemme 3.2.1** entraîne que  $A(E) = A(F)$  est fermée.

## 2.4 Spectre d'un opérateur non borné

[19] Soit  $(D(A), A)$  un opérateur non borné de domaine  $D(A)$  dense dans un espace de Hilbert  $H$ . On appelle l'ensemble résolvant de  $A$ , l'ensemble  $\rho(A)$  des nombres complexes  $\lambda$  tels que

1.  $\text{Im}(\lambda I - A)$  est dense dans  $H$
2.  $(\lambda I - A)$  est inversible de  $D(A)$  dans  $\text{Im}(\lambda I - A)$  d'inverse borné

On note  $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$  si  $\lambda \in \rho(A)$

$R_\lambda(A)$  est appelé opérateur résolvant ou bien résolvante de l'opérateur  $A$ .

**Définition 2.4.1**

Soit  $(D(A), A)$  un opérateur non borné sur un espace de Hilbert  $H$  ;  
 $(D(A)$  dense dans  $H$ ) On dit 'signe par  $\sigma(A)$  le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de l'ensemble  $\rho(A)$ ;  $\sigma(A)$  est appelé le spectre de l'opérateur  $A$ .

**Remarquons** que  $\lambda \in \rho(A)$  si et seulement si les deux conditions (1) et (2) de l'ensemble résolvant sont satisfaites donc  $\lambda \in \sigma(A)$  si et seulement si (1) est satisfaite et pas(2) ou bien (2) est satisfaite et pas (1)ou bien (1) et (2) ne sont pas satisfaites  
Ainsi  $\sigma(A)$  est la **réunion** de trois ensembles **disjoints** notés respectivement  $\sigma_p(A), \sigma_c(A), \sigma_r(A)$

$$\sigma(A) = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r$$

où

$$\sigma_p(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} / (\lambda I - A) \text{ n'est pas inversible de } D(A) \text{ dans } \text{Im}(\lambda I - A) \}$$

$$\sigma_c(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} / (\lambda I - A) \text{ inversible de } D(A) \text{ dans } \text{Im}(\lambda I - A); \text{Im}(\lambda I - A) \text{ dense dans } H \text{ mais } (\lambda I - A)^{-1} \text{ n'est pas borné} \}$$

$$\sigma_r(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} / (\lambda I - A) \text{ inversible de } D(A) \text{ dans } \text{Im}(\lambda I - A); \text{et } \text{Im}(\lambda I - A) \text{ n'est pas dense dans } H \}$$

# Chapitre 3

## opérateurs fermés et fermables

### 3.1 opérateurs fermés

**Définition 3.1.1**[10]

- $A$  est dit fermé si son graphe  $\Gamma(A)$  est fermé
- $A$  est dit fermable s'il admet une extension  $B$  fermé ( $A \subset B$ )

**Proposition 3.1.1** Un opérateur  $(A, D(A))$  est fermé si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_n$ , de  $D(A)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  on a alors  $x \in D(A)$  et  $y = Ax$

**Preuve 4.1.1**

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $A$  est fermé alors  $\Gamma(A) = \overline{\Gamma(A)}$ ; soit  $(x_n)_n \subset D(A)$  qui converge vers  $x$ ,  $(A(x_n))_n$  converge vers  $y$ ,  $(x_n, A(x_n))_n \in \Gamma(A)$  fermé alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, A(x_n))_n \in \Gamma(A) \Rightarrow (x, y) \in D(A)$  (car  $\Gamma(A)$  est fermé) alors  $x \in D(A)$  et  $y = Ax$

( $\Leftarrow$ ) Soit  $(x, y) \in \overline{\Gamma(A)} \Rightarrow \exists (x_n, A(x_n))_n \in \Gamma(A)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = y$  alors  $x \in D(A)$  et  $y = Ax$  alors  $\Gamma(A)$  est fermé.

**Corollaire 3.1.1**[11] Soit  $A$  un opérateur fermé. Alors  $A$  est borné si et seulement si  $D(A) = E$

**Proposition 3.1.2**  $A$  est fermable si et seulement si  $\Gamma(A)$  est le graphe

d'un opérateur. On a alors  $\Gamma(A) = \Gamma(\widehat{A})$ , où  $\widehat{A}$  est la plus petite extension fermée de  $A$ , appelée la fermeture de  $A$ .

**Proposition 3.1.3** Un opérateur  $A$  est **fermable** si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_n$  de  $D(A)$  qui converge vers  $0 \in E$  et telle que  $(Ax_n)_n$  converge vers  $y$  dans  $F$  alors  $y = 0$

**Lemme 1.4.1** [12] Si  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  est un opérateur fermé, alors  $\ker(A)$  est fermé.

**Démonstration** Soit  $x_n \in \ker(A)$  une suite convergeant vers  $x$  dans  $E$ . Alors la suite  $Ax_n$  est convergente puisqu'elle est identiquement nulle. Comme  $A$  est fermé on en déduit que  $x \in D(A)$  et  $Ax = 0$ .

**Lemme 3.1.2** Si  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  est un opérateur fermé et **bijectif** de  $D(A)$  sur  $F$ , alors  $A^{-1}$  est également fermé.

**Démonstration** Soit  $x_n \in E$  telle que  $x_n \rightarrow x$  dans  $F$  et  $A^{-1}x_n \rightarrow y$  dans  $E$ . Posons  $z_n = A^{-1}x_n$ . Alors  $z_n \rightarrow y$  dans  $E$  et  $Az_n \rightarrow x$  dans  $F$ . Comme  $A$  est fermé, il en résulte que  $y \in D(A)$  et  $Ay = x$ , soit  $y = A^{-1}x$ .

**Théorème du graphe fermé** Soit  $A$  un opérateur de  $E$  dans  $F$  dont le domaine est égal à  $E$  et qui est un opérateur fermé, alors  $A$  est borné de  $E$  dans  $F$ .

**Autrement dit** : si  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  est un opérateur non borné et fermé, alors on a nécessairement  $D(A) \neq E$ .

**Théorème 3.1.2** Soit  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  un opérateur fermé et bijectif de  $D(A)$  sur  $F$ , alors  $A^{-1}$  est borné de  $F$  dans  $E$ .

**Théorème 3.1.2** [14] Soit  $(A, D(A))$  un **opérateur fermé** et **symétrique** sur un espace de Hilbert  $H$ . Alors,  $A$  est **autoadjoint** si l'un des critères équivalents suivants est vérifié

- $\ker(A^* \pm i) = 0$
- $\text{Im}(A^* \pm i) = H$

**Théorème 3.1.3** Soit  $(A, D(A))$  un opérateur symétrique sur un espace de Hilbert  $H$ . Alors,  $A$  est **essentiellement autoadjoint** si l'un des critères

équivalents suivants est vérifiée

- $\ker(A^* + i) = 0$
- $\text{Im}(A^* \pm i)$  est dense dans  $H$

Pour des opérateurs **semi-bornés**, on a les critères suivants

**Proposition 3.1.4** Soit  $A$  un opérateur non borné tel que  $D(A^*)$  est dense, alors  $A^*$  est un **opérateur fermé**

**Démonstration**

Soit  $\langle f_n, g_n \rangle \in \Gamma(A^*)$  une suite qui converge vers  $\langle f, g \rangle \in H \times H$ . Par définition,  $g_n = A^* f_n$ , c'est-à-dire que  $\langle x, g_n \rangle = \langle Ax, f_n \rangle$  pour tout  $x \in D(A)$ . Or, à  $x$  **fixé**,  $\langle Ax, f_n \rangle$  converge vers  $\langle Ax, f \rangle$  et  $\langle x, g_n \rangle$  vers  $\langle x, g \rangle$  de sorte que pour tout  $x \in D(A)$ ,  $\langle Ax, f \rangle = \langle x, g \rangle$ . Ainsi, par **Cauchy-Schwarz**, pour tout  $x \in D(A)$ ,  $|\langle Ax, f \rangle| \leq \|g\| \|x\|$  et donc  $f \in D(A^*)$  et  $g = A^* f$

On laisse en exercice le fait que si  $A_1$  et  $A_2$  sont deux opérateurs, avec  $A_1 \subset A_2$ , alors  $A_1^* \subset A_2^*$ . En utilisant ce fait, on montre la proposition suivante

## 3.2 opérateurs fermables

[14] Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $(A, D(A))$  un opérateur non borné à domaine dense sur  $H$ . Les résultats suivants sont classiques. On renvoie à [13] pour les preuves.

1. Un opérateur  $(A, D(A))$  est **fermable** si la fermeture de  $\Gamma(A)$  est un **graphe**
2. Soit  $(P, D(P))$  un opérateur différentiel sur  $L^2$  **fermable** et tel que  $C_c^\infty \subset D(P)$ .  
Alors

$$D(\overline{P}) \subset \{x \in L^2, Px \in L^2\}$$

où  $Px$  est à prendre au sens des distributions. En effet, si  $x \in D(\overline{P})$  et  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  et  $\overline{P}x = \lim_{n \rightarrow \infty} Px_n$  dans  $L^2$ . Alors  $x_n \rightarrow x$  et  $Px_n \rightarrow Px$  dans  $D'$ . Par suite  $Px = \overline{P}x$  ■  $L^2$

3. Un opérateur  $A$  est **fermable** s'il possède une extension fermée. On

appelle fermeture de  $A$  la plus petite de ces extensions que l'on note  $\overline{A}$ .

4. Tout **opérateur symétrique** est **fermable** et dans ce cas, **on a**  $\overline{A} = (A^*)^*$

5. Un opérateur  $(A, D(A))$  est **autoadjoint** si  $(A, D(A)) = (A^*, D(A^*))$ .

**Définition 3.2.1** [18] On dit qu'un opérateur non borné  $(D, A)$  est **fermable** s'il existe une extension  $(D(B), B)$  de  $A$  de graphe  $\overline{\Gamma(A)}$ . On notera une telle extension  $\overline{A}$ .

En fait,  $\overline{A}$  est **unique**, c'est la plus petite extension **fermé** de  $A$ . D'autre part, si on définit sur  $D(A)$  la norme de **graphe**  $\|x\|_{gr} = \sqrt{\|x\|^2 + \|Ax\|^2}$ , alors  $D(\overline{A})$  est le complété de  $D(A)$  pour cette norme. On laisse ces deux affirmations en exercice. Par exemple,  $T_0$  est **fermable** et  $\overline{T_0} = T_1$ . En effet, le complété de  $C_0^\infty$  pour la norme du **graphe** est exactement  $H^2(\mathbb{R}^2)$

On remarque que si  $A$  est **fermé**, alors  $D(A)$  est **fermé** pour la norme du **graphe**. Un **opérateur fermé** est en fait assimilable à un opérateur dans  $\mathcal{L}(G, H)$  où  $G = D(A)$  est un **espace de Hilbert** pour la norme du **graphe**. On a une notion d'adjoint en passant par le dual pour de tels opérateurs, comme pour tout opérateur d'un Banach vers un Banach (voir par exemple le deuxième paragraphe du chapitre 4 de [15]). Pour un **opérateur borné** de  $\mathcal{L}(H)$  **d'adjoint** coïncide avec celle que l'on a défini plus haut. Cependant, pour un opérateur de  $\mathcal{L}(G, H)$ , la définition de **l'adjoint** ne nous convient pas car elle ne calque pas bien les propriétés qui nous intéressent dans le cadre des espaces de Hilbert. On va donc s'empresse de définir une nouvelle forme **d'adjoint**, qui n'est pas la même en général

# Bibliographie

- [1] M. Guesba. Sur quelques équation intégrales non linéaires, Mémoire de magister université Kasdi Merbah d'Ouargla 2012.
- [2] J. Bass. de mathématique "TOME III", Masson et CIE, Éditeurs 120, Boulevard Saint-Germain, Paris, 1971.
- [3] M.NDIR. Cours d'analyse fonctionnelle, université M'sila Algérie 2004
- [4] A. Kolmogorov, Fomine S. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir. 1977.
- [5] Ayman Moussa, Rappels de Cours, Université Pierre et Marie Curie Master de Mathématiques, Année 2013. 2014
- [6] W. Hengartner, M. Lambert, C. Reischer. Introduction à L'analyse Fonctionnelle, 1981
- [7] H. Chebli. Analyse Hilbertienne, Centre publication universitaire, Tunis, 2001.
- [8] E. Fricain, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs (cours et exercices), Master (mathématiques pures), 2009/2010
- [9][10][11] Hiber Djahida, Cours de Théorie spectrale Année universitaire: 2019/2020
- [12] Anne-Sophie BONNET-BENDHIA et Patrick JOLY, Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints et application à l'étude des ondes guidées
- [13] Spectral theory and its applications, vol. 139, Cambridge University Press, 2013
- [14] Laurent Michel, Master Analyse-EDP-Probabilités Université de Bordeaux, Automne 2020
- [15] Walter Rudin. Functional analysis. McGraw-Hill, 1991
- [16][17][18][19] **Chaban Aicha**, Thèse de doctorat en sciences ( Les critères de commutativité d'opérateurs bornés et non bornés)

[20] Berrabah BENDOUKHA, Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem, CHAPITRE 1: SPECTRE D'UN OPERATEUR(2020/2021).

## Résumé

*Dans cette note, nous avons discuté de la brève définition des espaces norm et de Hilbert, et nous avons défini toutes sortes d'influences, et nous avons parlé de la chose la plus importante, qui est les opérateurs fermés et définitinon opérateurs fermables.*

**Mots clés:** Espace , Opérateur fermés, Opérateurs fermables

## الملخص

في هذه المذكرة تطرقنا الى التعريف المختصر للفراغات الناظمية وهلبيرت وقمنا بالتعريف جميع أنواع المؤثرات وتكلمنا أيضا على اهم شيء وهو المؤثرات المغلقة وأيضا المؤثرات قابلة للغلق

الكلمات المفتاحية: الفراغ, المؤثر المغلق, المؤثر القابل للغلق

## Abstract

In this note we discussed the brief definition of norm and Hilbert spaces, and we defined all kinds of influences, and we talked about the most important thing, which closed operators and closable operators.

**Keywords** : space, operator, closabde operators. closed operators