



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et Applications

Thème

Problème parabolique fortement non linéaire pour les équations p -Laplaciennes

Présenté par :
M^r MESLEM Safa

Membres du jury :

SAADI Abderachid	MCA,	Université de M'sila	Président.
BENABDERRAHMANE Benyattou	Prof,	Université de M'sila	Encadreur.
AMROUNE Nasreddine	MCB,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

TOUT D'ABORD, je remercie **Dieu** le tout puissant, qui nous a donné la force, le courage et la patience d'accomplir ce présent travail.

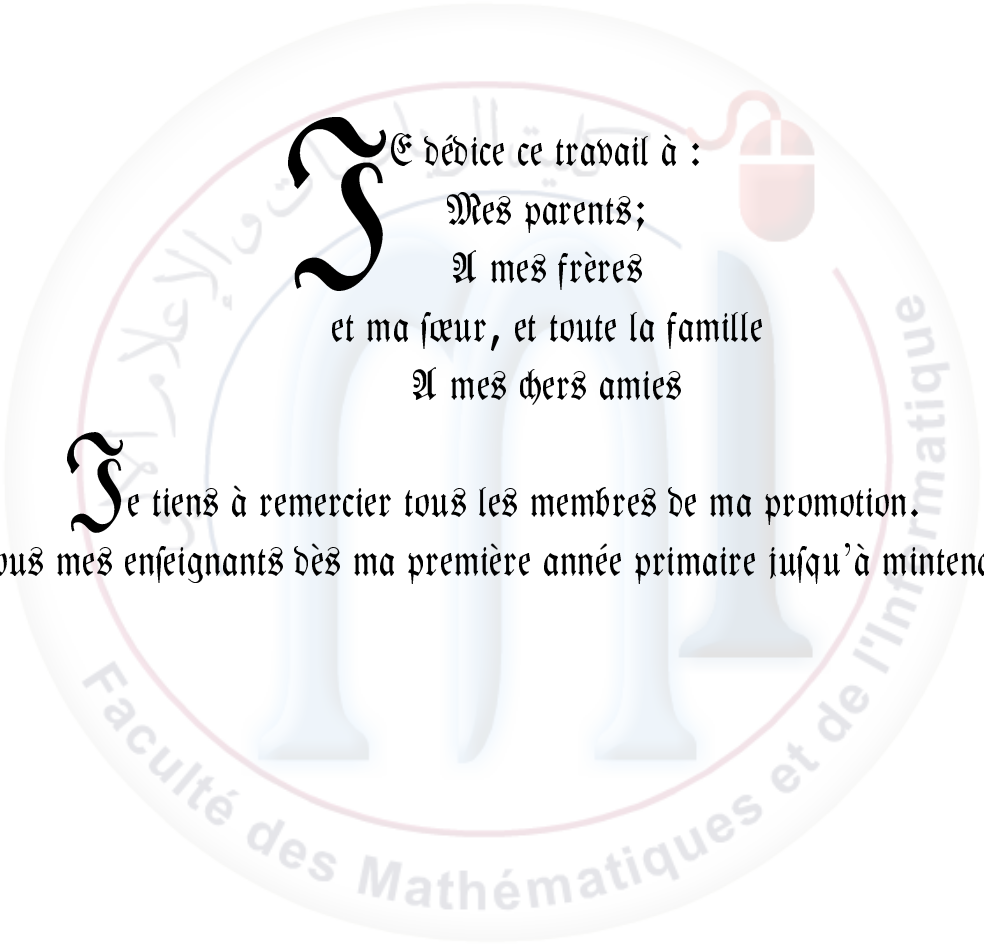
JE tiens tout à remercier Monsieur **Benabderrahmane Benyattou** d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beaucoup de patience, le sérieux et la compétence. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes. Je le remercie vivement pour ses conseils, ses corrections et ses orientations.

NOUS tenons aussi à exprimer mes remerciements les plus respectueux à **messieurs les membres de jury**.

MES sincères remerciements à **mes parents** qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements qu'ils trouvent dans la réalisation de ce travail.

ENFIN, mes remerciements vont aussi à tous les **membres du département de Mathématiques** de l'université Mohammed Boudiaf de M'sila, **les enseignants**, ainsi que tous **mes collègues, amis**.

Dédicaces



Je dédie ce travail à :
Mes parents;
À mes frères
et ma sœur, et toute la famille
À mes chers amis

Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.
Et à tous mes enseignants dès ma première année primaire jusqu'à maintenant...

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites mixtes de type parabolique fortement non linéaire pour un opérateur p-Laplacien. Sous certaines conditions sur les données, en se basant sur les approximations de *Faedo-Galerkin* combinées à la méthode de monotonie et quelques résultats d'analyse fonctionnelle appliquée, nous démontrons l'existence locale et l'unicité d'une solution faible.

Mots-Clés :

Existence et unicité, *Faedo-Galerkin*, Méthode de Monotonie, Opérateur p-Laplacien, Problème parabolique.

Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes.

- ▶ Ω Un ouvert de \mathbb{R}^n
- ▶ $\overline{\Omega}$ L'adhérence de Ω
- ▶ Γ La frontière régulière de Ω
- ▶ Γ_i ($i = \overline{1, 2}$) Une partie de la frontière Γ .
- ▶ $mes \Gamma_i$ La mesure de Lebesgue ($n - 1$) dimensionnelle de Γ_i .
- ▶ $d\Gamma$ La mesure superficielle sur Γ induite par dx .
- ▶ $Q = \Omega \times]0, T[$ Le cylindre de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$
- ▶ Σ La frontière latérale de Q .
- ▶ $d\Sigma = d\Gamma dt$. La mesure superficielle sur Σ
- ▶ $d\Sigma = d\Gamma_i dt$,
($i = \overline{1, 2}$) La mesure superficielle sur une partie de la frontière de Σ
- ▶ q L'exposant conjugué de p : $q = \frac{p}{p-1}$
- ▶ $p^* = \frac{Np}{N-p}$ L'exposant conjugué de Sobolev.
- ▶ $p.p$ Presque partout.
- ▶ $\frac{\partial}{\partial x_i}$ La dérivée partielle par rapport à la variable x_i .
- ▶ $\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ Gradient de u .
- ▶ $div u = Du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}$ Divergence de u .
- ▶ $\Delta_p u = div (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ p -Laplacien de u .
- ▶ Lim sup La limite supérieure.
- ▶ Lim inf La limite inférieure.
- ▶ $C^k(\Omega)$ Espace des fonctions de classe k dans Ω .
- ▶ $supp u$ Support de la fonction u .
- ▶ $f_n \rightharpoonup f$, ($f_n \rightarrow f$) La convergence faible (fort) de la suite f_n vers f
- ▶ $|\cdot|$ La norme sur l'espace $L^2(\Omega)$.
- ▶ $|\cdot|$ La norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .
- ▶ $W^{m-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$ L'espace de sobolev d'ordre $m - \frac{1}{p}$ sur Γ .
- ▶ η_A La normale unitaire sortante à Γ .
- ▶ $\frac{\partial u}{\partial \eta_A}$ Le vecteur normale de u .
- ▶ V Désigne l'espace de Banach.
- ▶ V' L'espace topologique de V .
- ▶ $\|\cdot\|_V$ La norme sur l'espace V .
- ▶ $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ Le produit scalaire de V .
- ▶ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Le crochet de dualité entre l'espace V dans son dual topologique V' .

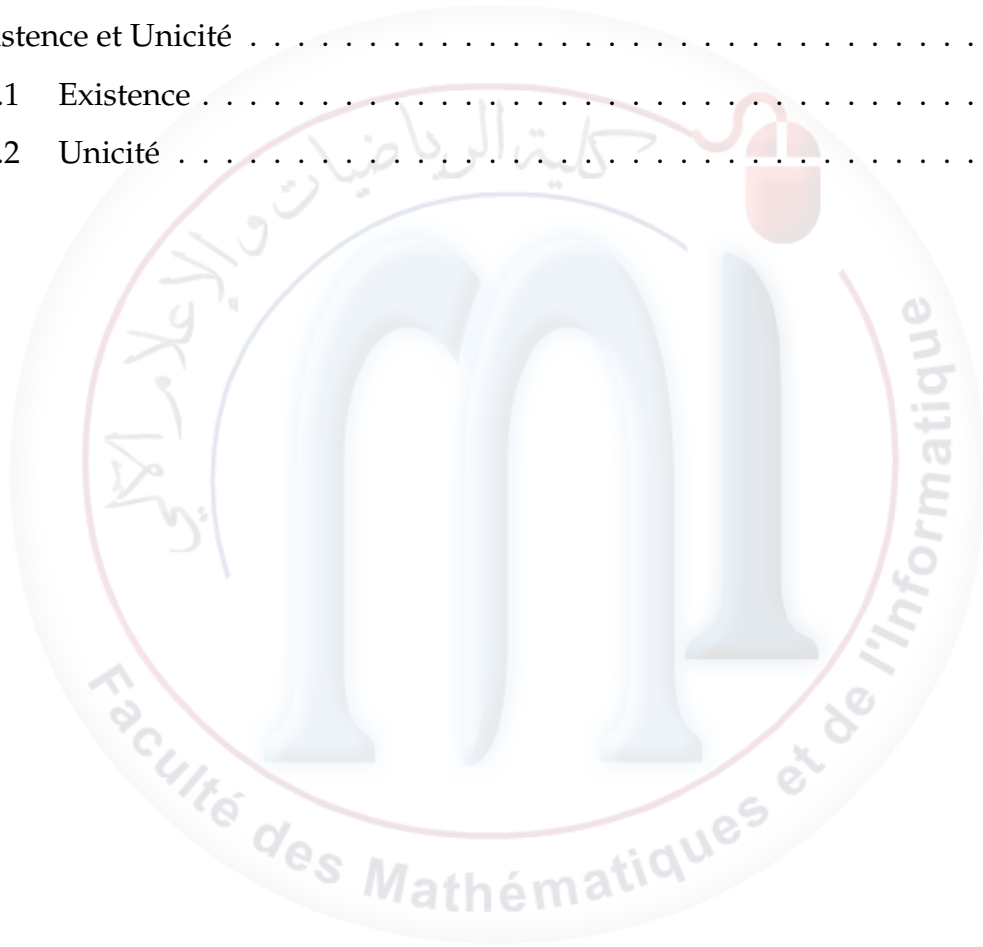
- ▶ (\cdot, \cdot) Le produit scalaire d'un espace de Hilbert $L^2(\Omega)$
- ▶ $\sigma(V', V)$ La topologie faible-* définie sur V' .
- ▶ $\sigma(V, V')$ La topologie faible définie sur V .
- ▶ $\mathcal{D}(\Omega)$ Espace des fonctions dérivables à support compact dans Ω .
- ▶ $\mathcal{D}'(\Omega)$ L'espace des distributions sur Ω .
- ▶ $W_o^{1,p}(\Omega)$ L'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$
- ▶ $W^{-1,q}(\Omega)$ Dual de $W_o^{1,p}(\Omega)$
- ▶ $A \hookrightarrow B$ L'injection continue de A dans B .
- ▶ $A \hookrightarrow_c B$ L'injection compacte de A dans B .
- ▶ $\gamma_o u$ L'application de trace dans $L^p(\Gamma)$.



Table des matières

1	RAPPELS d'analyse fonctionnelle	8
1.1	Espace de Banach	9
1.1.1	Espace séparable et Espace réflexif	9
1.2	Espaces Fonctionels	10
1.2.1	Espace de Lebesgue	10
1.2.2	Espace de fonctions différentiables	12
1.2.3	Rappels sur les Distributions	12
1.2.4	Espace de Sobolev	14
1.3	Fonctions à valeurs vectorielles	20
1.3.1	Espace de Lebesgue à Valeurs Vectorielles	20
1.4	Théorie d'opérateur monotone	23
1.4.1	Monotonie	23
1.4.2	Bornitude	25
1.4.3	Hémi-continuité	25
1.4.4	Coercivité	25
1.5	Topologie faible	27
1.5.1	Convergence faible	27
1.6	Topologie *-faible sur un dual	28
1.6.1	Convergence *-faible	28
2	Problème non-linéaire pour les équations p-Laplaciennes	29
2.1	Problème non linéaire associé au p-Laplacien	30
2.2	La Formulation Variationnelle du problème	31
2.3	Propriétés de l'opérateur $-\Delta_p$	32
2.3.1	Bornitude	33

2.3.2	Hémicontinuité	33
2.3.3	Monotonie	35
2.3.4	Coercivité	35
2.4	Existence de la solution de $u' - \Delta_p u = f$	36
3	Problème parabolique fortement non linéaire pour les équations p-Laplaciennes	40
3.1	Notation et Position du problème	41
3.2	Formulation Variationnelle	42
3.3	Existence et Unicité	45
3.3.1	Existence	45
3.3.2	Unicité	53



Introduction générale

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles (E.D.P). C'est en effet, grâce à la modélisation de ces phénomènes à travers des équations aux dérivées partielles, qui nous permettent de comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. En particulier les équations d'ondes modélisent plusieurs phénomènes naturels en : Physique, Chimie, Biologie.

Il a été question dans ce travail sur la méthode de monotonie, elle est l'une des méthodes de résolution des problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires. Ce concept a été intensément étudié dans le cadre de la solvabilité des équations différentielles partielles non linéaires. D'ailleurs essentiellement lorsque l'opérateur traité a des propriétés de type monotonie sur un espace de Banach, est d'utilisation plus facile que la méthode de compacité, en plus elle est applicable sur l'opérateur p -Laplacien, qui est un modèle d'opérateurs elliptiques quasi-linéaires de type monotonie qui permet de modéliser des phénomènes physiques tels que les systèmes de réaction-diffusion, l'élasticité non-linéaire, extraction de pétrole, l'astronomie, la propagation à travers des milieux poreux, pélicier modélise l'écoulement des glaciers de montagne par des équations aux dérivées partielles faisant intervenir le p -Laplacien.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'existence locale et l'unicité des solutions d'un problème aux limites non linéaire pour les équations p -laplaciennes. Plus précisément, sous certaines conditions sur les données en se basant sur la méthode de Monotonie on démontre un résultat d'existence et d'unicité d'une solution du problème considéré.

Ce travail est constitué de trois chapitres : Dans le premier, on présente quelques notions fondamentales ainsi que des résultats principaux qui nous permettent de l'étude des équations aux dérivées partielles nonlinéaires. Ces outils sont utilisés pour obtenir des résultats d'existence

et (souvent d'unicité) pour quelques exemples de problèmes d'EDPs de natures paraboliques non linéaires.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'opérateur p-laplacien, suivant :

$$-\Delta_p u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Nous en présentons un problème de Dirichlet associé au p-Laplacien dans un ouvert borné de \mathbb{R}^n , lorsque $p > 2$.

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f, & \text{dans } \Omega, \quad u \in V \text{ et } f \in V'. \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Afin d'introduire les propriétés générales de l'opérateur p-Laplacien défini sur un espace de Banach V dans son dual topologique V' .

Il est dégénéré lorsque $p = 2$ à l'opérateur de Laplace usuel.

Le dernier chapitre est consacré à démontrer un théorème d'existence et d'unicité pour un problème aux limites mixtes parabolique fortement non linéaire, pour un opérateur p-Laplacien défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \text{ telle que } u : Q \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant,} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in]0, T[, \\ u = 0, \quad \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_A} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \eta_A = h, \quad \text{sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[, \\ u(x, 0) = u_o(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Où A est l'opérateur p-Laplacien défini sur un espace de Banach V dans V' et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ assez régulière ; $Q = \Omega \times]0, T[$, $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de Γ . On suppose que $mes \Gamma_1 > 0$ et on pose $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$ et $\Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[$, où T est un réel fini, p est un entier > 2 . avec f , h et u_o sont des fonctions données.

RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Dans ce chapitre, Nous allons consister à rappeler de quelques *notions* et *compléments mathématiques* en relation avec le travail, présentons en particulier certains espaces fonctionnels et premières propriétés.

Contenu :

1. Espace de Banach;
 - 1.1 . Espace réflexif et espace séparable.
2. Espaces fonctionnels;
 - 2.1. Espace de Lebesgue;
 - 2.2. Espace de fonctions différentiables;
 - 2.3. Rappels sur les distributions;
 - 2.4. Espace de Sobolev;
 - 2.5. Espace de Lebesgue à valeurs vectorielles.
3. Théorie d'opérateur monotone.
4. Convergence faible et convergence *-faible.

1.1 Espace de Banach

1.1.1 Espace séparable et Espace réflexif

Espace séparable

Cette notion repose sur la notion d'ensemble dénombrable.

Définition 1.1. Soit X un ensemble, on dit que X est dénombrable si et seulement s'il existe une application injective de X dans \mathbb{N} .

Remarque 1.1. Tout ensemble fini est dénombrable .

Proposition 1.1. Soit X un ensemble dénombrable infini. Alors, il existe une bijection de \mathbb{N} sur X .

Corollaire 1.1. La réunion d'une famille finie d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un des ensembles de la famille finie est dénombrable, la réunion est dénombrable.

Définition 1.2. Soient A, B deux parties de X .

1. On dit que A est dense dans B si $B \subset \bar{A}$;
2. On dit que A est partout dense dans X si $\bar{A} = X$.

Définition 1.3. (Espace Séparable) On dit qu'un espace métrique est **séparable**, s'il existe un sous-ensemble de $D \subset E$ **dénombrable et dense**.

Théorème 1.1. Soit E un espace métrique séparable et soit F un sous-ensemble de E , alors F est séparable.

Proposition 1.2. Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable, alors E est séparable.

Espace réflexif

Définition 1.4. Soit E un espace vectoriel normé réel. On note E' son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires et continues de E dans \mathbb{R} muni de sa norme naturelle (E' est un espace de Banach. Pour tout $x \in E$, on définit l'application J_x de E' dans \mathbb{R} par $J_x(T) = T(x)$ pour tout $T \in E'$, on a

$$|J_x(T)| = |T(x)| \leq \|T\|_{E'} \|x\|_E .$$

Et donc J_x est une forme linéaire et continue sur E' , ce qu'on note $J_x \in E''$ où E'' est le bidual de E , c'est-à-dire le dual topologique de E' . On peut montrer par le théorème de Hahn-Banach

qu'on rappelle dans le paragraphe suivant, que $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$.

L'application J , définie de E dans E'' par $J(x) = J_x$ pour tout $x \in E$, et donc une isométrie linéaire de E sur son image, notée $Im(J)$, et on a évidemment $Im(J) \subset E''$.

Définition 1.5. (Espace réflexif) On dit que E est un espace **réflexif** si $Im(J) = E''$, ce qui revient à dire que J est **surjective**.

Proposition 1.3. [13] Soit E un espace de de **Banach réflexif**, et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé, alors M muni de la norme induite par E est **réflexif**.

Théorème 1.2. [13] Soit E un espace de **Banach**, alors E est **réflexif** si et seulement si E' est **réflexif**.

Définition 1.6. Soient E un espace de Banach. On appelle le dual topologique noté E' l'espace vectoriel constitué de ces formes linéaires et continues, c'est-à-dire

$$E' = \{f : E \rightarrow \mathbb{K} \text{ linéaire et continue}\},$$

cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \frac{|\langle f(x), x \rangle|}{\|x\|_E}.$$

1.2 Espaces Fonctionnels

1.2.1 Espace de Lebesgue

Définition 1.7. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n à frontière régulière et p un nombre réel supérieur ou égal à 1. On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \left(\int_{\Omega} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

On le munit de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Quand $p = 2$, cette norme provient d'un produit scalaire.

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u.v dx.$$

De plus si $p = +\infty$, on a :

$$\| f \|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C : |f(x)| \leq C, \forall x \in \Omega \}.$$

Définition 1.8. Si on note $d\sigma$ la mesure superficielle sur Γ induite par la mesure de Lebesgue dx , on définit $L^p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$ comme l'ensemble des fonctions $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $|f|^p$ soit intégrable sur Γ . C'est un espace de **Banach** muni de la norme

$$\| v \|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |v(\sigma)|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}},$$

qui est réflexif si $1 < p < \infty$. Aussi l'espace $L^2(\Gamma)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} uv(\sigma) d\sigma,$$

est un espace de Hilbert.

Lemme 1.1. [2](Inégalité de Hölder généralisée)

Soient p, q et $r \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, on a :

$$\| f.g \|_{L^r(\Omega)} \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_q \quad (*)$$

Si $r = 1$, (*) s'appelle inégalité de **Hölder**.

Si $r = 1$, $p = q = 2$, (*) s'appelle inégalité de **Cauchy Schwartz**.

Lemme 1.2. [2](Inégalité de Yaung)

Soient a, b deux réels positifs et $p, q > 1$, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

De plus, pour $\varepsilon > 0$,

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q.$$

Théorème 1.3. (La convergence dominée de Lebesgue)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f . On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait $\|f_n\| \leq g$ p.p sur Ω , alors $f \in L^1(\Omega)$ et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx, \quad \forall x \in \Omega.$$

1.2.2 Espace de fonctions différentiables**Définition 1.9. (Les espaces $C^k(\Omega)$)**

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On désignera $C^0(\Omega)$ (resp. $C^1(\Omega)$) l'espace des fonctions continues (resp. continûment différentiables) sur Ω à valeurs complexes puis, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on pose

$$C^k(\Omega) = \left\{ u \in C^{k-1}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}.$$

C'est l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω à valeurs dans \mathbb{C} . On notera enfin

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega),$$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω . Pour désigner les dérivées partielles d'ordre supérieur à 1.

1.2.3 Rappels sur les Distributions**Définition 1.10. (Espace des fonctions tests)**

L'espace des fonctions tests est un espace des fonctions C^∞ à support compact inclus dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n est noté $\mathcal{D}(\Omega)$.

Notation 1.1. Un multi-indice α est un uple d'entiers, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

Définition 1.11. On dit qu'une suite des fonctions $(u_n)_n$ converge vers u dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

a) Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ contenant les supports de toutes les fonctions u_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} [D^\alpha u_n(x) - D^\alpha u(x)] = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout α multi-indice, tel que :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T, \text{ et } D^\alpha u_n(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u_n(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_N} x_N},$$

pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on note $\langle T, \varphi \rangle$ et $T(\varphi)$.

Définition 1.12. Le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions, noté $\mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K} \text{ linéaire et continue}\},$$

où \mathbb{K} l'un de corps $\mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.

Notation 1.2. Notons $L^1_{loc}(\Omega)$ l'espace des (classe de) fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont localement intégrables sur Ω , c'est-à-dire telles que $f \in L^1(\Omega)$ pour tout compact $K \subseteq \Omega$. On a pour $1 \leq p \leq \infty$:

$$L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega).$$

Proposition 1.4. (Distribution régulière)

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on lui associe à une distribution T_f définie par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 1.13. (Distribution de Dirac)

La distribution de Dirac à l'origine est une fonctionnelle notée δ , définie par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.5. (Dérivation)

Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la formule :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad j \in \mathbb{N}^*.$$

définit une distribution $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, appelée la **dérivée de T**.

Remarque 1.2. Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, associée à une distribution T_f , on définit la dérivée

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_{f'}, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposition 1.6. [4](Dérivée d'une fonction discontinue)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application de classe C^1 , mais présentant une discontinuité en $x = a_k$, $k = 1, \dots, n$ c'est-à-dire les limites :

$$f(a_k^+) = \lim_{x \rightarrow a_k^+} f(x), \quad f(a_k^-) = \lim_{x \rightarrow a_k^-} f(x),$$

existent et sont distinctes. On introduit le saut de f au point a_1, \dots, a_n

$$\sigma_k = f(a_k^+) - f(a_k^-); \quad K \geq 1.$$

Alors si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a la formule de saut :

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_k^n \sigma_k \delta_{a_k}.$$

1.2.4 Espace de Sobolev

Définition 1.14. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace fonctionnel défini pour $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$ par

$$W^{m,p} = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}.$$

muni d'une norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Proposition 1.7. [10] L'espace $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ est un espace de **Banach** pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Proposition 1.8. [10](Séparabilité) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est **séparable**.

Proposition 1.9. [10](Réflexivité) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), $m \in \mathbb{N}$ et $1 < p < +\infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un **espace réflexif**.

Proposition 1.10. [2] Soient $m > 0$ et $1 \leq p < +\infty$, on définit le sous-espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, on écrit :

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

En d'autres termes :

$$\forall u \in W_0^{m,p}(\Omega); \exists (\varphi_k) \subset \mathcal{D}(\Omega) : \|\varphi_k - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty).$$

Remarque 1.3. 1. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

2. Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

3. On définit alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{u|_{\Omega} : u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ où $u|_{\Omega}$ désigne la restriction de u à Ω . On a $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Proposition 1.11. [2] Pour $m = 1$, on définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \in L^p(\Omega), \nabla u \in (L^p(\Omega))^n\},$$

et muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p. \quad (\text{N})$$

Lemme 1.3. [3] L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme (N) est un espace de Banach pour $1 < p < +\infty$.

Démonstration. Soit $\{u_n\}, n \in \mathbb{N}$ une suite de Cauchy dans l'espace $W^{1,p}(\Omega)$. Alors, la suite ∇u_n est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Rappelons alors que l'espace $L^p(\Omega)$ est complet et de ce fait, il existe des fonctions u et ξ telles que u_n et ∇u_n convergent respectivement vers u et ξ dans $L^p(\Omega)$. De plus, vu que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, on voit que

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^1_{loc}(\Omega) \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

ou encore

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Donc, on a d'une part

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty,$$

et d'autre part

$$\nabla u_n \longrightarrow \xi \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Maintenant, grâce à la séparabilité de $\mathcal{D}(\Omega)$, on voit que $\nabla u = \xi$. Alors, le lemme en découle. \square

Trace des fonctions sur $W^{m,p}(\Omega)$

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Gamma = \partial\Omega$ le bord de Ω et $1 \leq p < +\infty$, $1 \leq q < +\infty$.

Théorème 1.4. [14] Soit l'application

$$\gamma_o : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}(\Gamma),$$

$$u \longmapsto \gamma_o(u) = u|_{\Gamma}.$$

est linéaire et continue de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ muni de la norme de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ muni de la norme de $W^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Elle se prolonge alors en une application linéaire et continue notée encore γ_o .

$$\gamma_o : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma).$$

$$u \longmapsto \gamma_o(u).$$

De plus elle est surjective.

► Dans la suite, on prend $m = 1$, c'est suffisant pour notre travail.

Théorème 1.5. [14] Soit Ω un ouvert de frontière régulière dans \mathbb{R}^n . Alors il existe une application linéaire continue γ_o , dite application trace de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Gamma)$ telle que si $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, l'image $\gamma_o : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$, $u \mapsto u(x)$ bien définie sur Γ ,

$$\gamma_o u = u \text{ p.p. sur } \Gamma \text{ si } u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 1.6. [14] Soit l'application

$$\gamma_o : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Gamma)$$

$$u \longmapsto \gamma_o(u),$$

est linéaire et continue, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\exists C > 0$, alors :

$$\| \gamma_o u \|_{L^p(\Gamma)} \leq C \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

Définition 1.15. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné de frontière Γ régulière, on définit l'espace

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ avec } \gamma_0 u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Cette équation muni d'une norme équivalente à la norme (N) donnée par :

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Définition 1.16. Le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est noté par $W^{-1,q}(\Omega)$ où q est le conjugué de p , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 1.17. (Caractérisation de $W^{-1,q}(\Omega)$)

$$f \in W^{-1,q}(\Omega) \Leftrightarrow f = f_0 + \sum_{i=1}^n D_i f_i, \quad f_0, f_1, \dots, f_n \in L^q(\Omega).$$

Définition 1.18. $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté E' , est appelé le dual de E . C'est toujours un espace de Banach.

Définition 1.19. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné de frontière Γ régulière tel que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, on définit l'espace V par :

$$V = \{v \in W^{1,p}(\Omega), \gamma_0 v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

En désignant par V' son dual

Proposition 1.12. [4] Soit V un sous-espace de $W^{1,p}(\Omega)$, alors :

1. V est un espace **Banach**, pour $1 \leq p \leq +\infty$.
2. V est un espace **Séparable**, pour $1 \leq p < +\infty$, (i. e admet un ensemble **dénombrable dense**).
3. V est un espace **réflexif**, pour $1 < p < +\infty$.
4. V' est un espace de **Banach**.

Lemme 1.4. [3](Inégalité de Poincaré)

Soit Ω un domaine borné de frontière régulière, alors il existe $C > 0$.

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{(L^p(\Omega))^n}, \quad \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Conséquence, la quantité $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|\nabla f\|_{(L^p(\Omega))^n}$ définit une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Injections de Sobolev

Définition 1.20. Soient E et F deux espaces de Banach.

On dit que E s'injecte continûment dans F et on note $E \hookrightarrow F$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) E est un sous-espace de F .
- (ii) Toute suite convergente dans E est convergente dans F .

Autrement dit, l'identité $I : E \longrightarrow F$ est continue. Autrement dit, il existe $C > 0$ telle que

$$\|u\|_F \leq C \|u\|_E, \text{ pour tout } u \in E.$$

Définition 1.21. Soient A et B deux espaces vectoriels normés. On dit que A s'injecte continûment dans B s'il existe une injection continue i de A dans B , c'est-à-dire une injection i et une constante $c > 0$, telle que

$$\forall a \in A, \quad \|i(a)\|_B \leq c \|a\|_A.$$

On note alors

$$A \hookrightarrow B.$$

On désigne l'injection compacte de A dans B par $A \hookrightarrow_c B$.

Théorème 1.7. [1] Soit $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ où p^* est donné par $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, et il existe une constante $C = C(p, N)$, telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

On note alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.

Corollaire 1.2. [2] Le cas limite $p = N$,

on a $W^{1,N}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall q \in [N, +\infty[$ avec injection continue.

Théorème 1.8. [2] Soit $p > N$, alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ avec injection continue.}$$

Corollaire 1.3. [2] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de classe C^1 , avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné, soit $1 \leq p \leq \infty$, on a

* Si $1 \leq p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

* Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ où $\forall q \in [N, +\infty[$.

* Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Proposition 1.13. [2] Soient $p \geq 1$, $q \geq 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega)$ de manière continue

pour $p > \frac{2N}{N+2}$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

On a si $p > N$, alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Si $p < N$, alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. car $p^* = \frac{pN}{N-p} \geq 2 \Leftrightarrow p \geq \frac{2N}{N+2}$. D'où :

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega).$$

□

Formule de Green

Cette formule est un outil fondamental pour la résolution des EDPs. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Notation 1.3. Dans cette formule, η est le vecteur unitaire normal à Γ au point x , dirigé vers l'extérieur de Ω .

Théorème 1.9. [13][Formule de Green]

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et Γ son bord. $\forall u \in C^2(\bar{\Omega}), v \in C^1(\bar{\Omega})$, on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ (la dérivée normale de u).

Théorème 1.10. [8]

Soient p et q deux réels vérifiant $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de bord Γ , variété lipschizienne de dimension $n - 1$, $n = (n_1, \dots, n_n)$ la normale extérieur à Ω en un point de Γ , alors on a la formule suivante dite formule de Green :

$$\forall (u, v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{-1,q}(\Omega) : \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\Gamma} u v n_i ds + \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

où la normale est notée $n = (n_1, \dots, n_n)$.

1.3 Fonctions à valeurs vectorielles

1.3.1 Espace de Lebesgue à Valeurs Vectorielles

Définition 1.22. Soit V un espace de Banach et $p \in [1, +\infty[$, a et b finis.

On appelle espace de Lebesgue à valeurs vectorielles dans V , et on note $L^p(a, b; V)$ l'espace des fonctions $f :]a, b[\rightarrow V$ mesurable $t \rightarrow f(t)$ avec :

$$\|f\|_{L^p(a,b;V)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_V^p dt \right)^{1/p} < \infty,$$

pour $1 < p < \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;V)} = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_V < \infty,$$

Pour $p = +\infty$.

Où

$$\sup_{t \in [a,b]} \|v(t)\|_V = \inf \{ C > 0, \|v(t)\|_V \leq C, \forall t \in [a, b] \}.$$

Propriétés 1.1. [1]

1. Pour tout p élément de $[1, \infty]$, $\|f\|_p$ est une norme sur $L^p(a, b; V)$.
2. L'espace $L^p(a, b; V)$ est un espace de **Banach** pour cette norme.
3. Pour $1 \leq p < \infty$ et si V est **séparable**, alors $L^p(a, b; V)$ est aussi **séparable**.
4. Pour $1 < p < \infty$ et si V est **réflexif**, alors $L^p(a, b; V)$ est aussi **réflexif**.
5. Si l'espace V est de plus **réflexif**, $1 \leq p < \infty$ Si q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors le dual de $L^p(a, b; V)$ s'identifie à $L^q(a, b; V')$.
6. Si V et W désignent deux espaces de **Banach**, V inclus dans W avec injection continue, alors il existe une injection continue $L^p(a, b; V)$ dans $L^p(a, b; W)$.
7. $L^r(a, b; V) \hookrightarrow L^q(a, b; V)$ avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.
8. Si l'injection de V dans W est continue, alors $L^r(a, b; V) \hookrightarrow L^q(a, b; W)$, pour $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

Remarque 1.4. Soit X un espace de **Banach réflexif** contenu dans un espace de **Hilbert** H , $X \subset H$, avec injection continue X étant dense dans H , désignant X' le dual de X , on peut alors identifier H à un sous-espace de X' , de sorte que $X \subset H \subset X'$.

Remarque 1.5. Comme $W_0^{1,p}(\Omega) \subset V$ où $V = \{u \in W^{1,p}(\Omega); \gamma_0 u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset V \subset L^2(\Omega).$$

En prenant le dual

$$(L^2(\Omega))' \subset V' \subset (W_0^{1,p}(\Omega))' \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Ce qui implique

$$V \subset L^2(\Omega) \subset V' \subset W^{-1,q}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow V' \subset W^{-1,q}(\Omega).$$

D'où $V \subset V'$.

Comme $W_0^{1,p}(\Omega) \subset V$, $V' \subset W^{-1,q}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega) \Rightarrow V \hookrightarrow V'$.

Remarque 1.6. On peut en fait préciser de la remarque 1.4 que $V = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \gamma_0 u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ est un espace de Banach réflexif, et V' son dual, on peut alors identifier $H = L^2(\Omega)$ un espace de Hilbert de sorte que

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'.$$

Propriétés 1.2. [12] Soient V un espace de **Banach réflexif**, V' son dual et $V \hookrightarrow V'$, on a $1 \leq p < \infty$, et q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si $L^q(0, T; V')$ désigne le dual de $L^p(0, T; V)$ alors :

$$L^p(0, T; V) \hookrightarrow L^q(0, T; V'),$$

de manière continue pour $1 \leq q \leq p < \infty$.

Démonstration. Le cas $p = q$:

d'après les propriétés (1.1), comme V et V' désignent deux espaces de Banach et $V \hookrightarrow V'$, alors il existe une injection continue telle que $L^p(0, T; V) \hookrightarrow L^p(0, T; V')$.

D'autre part le cas $q = \frac{p}{p-1} \leq p$, comme $V \hookrightarrow V'$ alors il existe une injection continue telle que :

$$L^p(0, T; V) \hookrightarrow L^q(0, T; V'), \quad \text{pour } 1 \leq q \leq p < \infty.$$

□

Proposition 1.14. Soit V un espace de Banach séparable réflexif et soit $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, on a pour chaque $f \in L^q(a, b; V')$ et $g \in L^p(a, b; V)$, on a

$$\langle f, g \rangle_{L^q(a,b;V').L^p(a,b;V)} = \int_a^b \langle f(t), g(t) \rangle dt. \quad \forall g \in L^p(a, b; V).$$

Remarque 1.7. a) Soient $u \in L^p(0, T; V)$ et $L^q(0, T; V')$, la formule d'intégration par parties suivante est vérifiée

$$\int_s^t \{ \langle u'(r), v(r) \rangle + \langle u(r), v'(r) \rangle \} dr = (u(t), v(t)) - (u(s), v(s)), \quad (\text{EQ})$$

pour tout $s, t \in [0, T]$.

b) De (EQ) on peut déduire que :

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t)) = \langle u'(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'(t) \rangle.$$

c) Pour tout $s, t \in [0, T]$, et (en prenant $u = v$)

$$\int_s^t \frac{d}{dt} |u(r)|^2 dt = |u(t)|^2 - |u(s)|^2.$$

Remarque 1.8. Pour $u \in L^p(0, T; V)$ et $u' \in L^q(0, T; V')$ $\forall v \in V$, on a :

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot), v) = (u'(\cdot), v) \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T]). \quad (1.1)$$

Lemme 1.5. [8] Soit V un espace de Banach. Soit $f :]0, T[\rightarrow V$, donc s'il existe $p \in [1, +\infty[$ tel que $f, f' = \frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0, T; V)$, alors f après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0, T)$, continue de $[0, T] \mapsto V$.

1.4 Théorie d'opérateur monotone

V désigne un espace de Banach, V' son dual topologique. $A : V \rightarrow V'$, $u \mapsto Au$ est un opérateur.

1.4.1 Monotonie

Définition 1.23. Un opérateur $A : V \rightarrow V'$ est dit monotone si :

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V.$$

A est strictement monotone si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \quad \forall u, v \in V \quad u \neq v.$$

Remarque 1.9. Si A est strictement monotone alors A est monotone.

Proposition 1.15. (Inégalité de convexité)

$\forall a, b \in \mathbb{R}^n, a \neq b, p > 1$

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a - b) \geq 0.$$

Démonstration. Posons $f(t) = |a + t(b - a)|^p$,

f est dérivable donc, $f'(t) = p |a + t(b - a)|^{p-2} (a + t(b - a))(b - a)$, $\forall p > 1$.

On considère la fonction $x \mapsto |x|^p$ est convexe, alors $\forall a, b \in \mathbb{R}^n, \exists t \in [0, 1]$, on a :

$$|a + t(b - a)|^p = |(1 - t)a + tb|^p \leq |a|^p + t(|b|^p - |a|^p), \quad \forall p > 1.$$

D'autre part, on a

$$f(t) = f(0) + f'(0)(t - 0) + t\varepsilon(t),$$

il en résulte

$$|a + t(b - a)|^p = |a|^p + p t |a|^{p-2} a(b - a) + t\varepsilon(t),$$

$$|a|^p + t(|b|^p - |a|^p) \geq |a|^p + p t |a|^{p-2} a(b - a) + t\varepsilon(t),$$

en divisant sur t , lorsque $t \rightarrow 0$, on obtient :

$$(|b|^p - |a|^p) \geq p |a|^{p-2} a(b - a).$$

Donc, on obtient

$$|a|^{p-2} a(b-a) \geq \frac{1}{p} (|b|^p - |a|^p), \quad \forall p > 1. \quad (1)$$

D'après (1), on a

$$|b|^{p-2} b(b-a) \geq \frac{1}{p} (|b|^p - |a|^p), \quad \forall p > 1. \quad (2)$$

On additionne (1) à (2), on obtient :

$$(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b)(b-a) \geq 0.$$

□

Lemme 1.6. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n . Alors

$$\langle |x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y, x - y \rangle \geq c_p |x - y|^p \quad \text{si } p \geq 2.$$

Démonstration. Par homogénéité, on peut supposer que $|x| = 1$ et $|y| \leq 1$. Par ailleurs en choisissant une base dans \mathbb{R}^n , nous posons

$$x = (1, 0, \dots, 0), y = (y_1, y_2, 0, \dots, 0) \text{ et } \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1.$$

Il suffit de montrer que

$$\frac{\left[1 - y_1(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{p-2}{2}}\right] (1 - y_1) + y_2^2 (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{p-2}{2}}}{((1 - y_1)^2 + y_2^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

Posons $t = \frac{|y|}{|x|}$ et $s = \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}$ puis, il faut montrer que la fonction

$$f(t, s) = \frac{1 - (t^{p-1} + t)s + t^p}{(1 - 2ts + t^2)^{\frac{p}{2}}},$$

est borné inférieurement. On a pour un t fixé, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ si

$$1 - (t^{p-1} + t)s + t^p = \frac{t^{p-2} + 1}{p} (1 - 2ts + t^2).$$

Alors pour un point critique s de f , on a

$$f(t, s) = \frac{t^{p-2} + 1}{p} \frac{1}{(1 - 2ts + t^2)^{\frac{p-2}{p}}} \geq \frac{1}{p} \frac{t^{p-2} + 1}{p(t+1)^{p-2}} \geq \frac{1}{p} \min_{0 \leq t \leq 1} \frac{t^{p-2} + 1}{(t+1)^{p-2}} \geq \frac{1}{2p}.$$

D'où f est bornée inférieurement. □

1.4.2 Bornitude

Définition 1.24. Soient $(V, \|\cdot\|), (V', \|\cdot\|_*)$ deux espaces de Banach et $A : V \rightarrow V'$ un opérateur, on dit que A est un opérateur borné, si l'image d'un borné dans V est borné dans V' . Autrement dit, pour tout $\rho > 0$, il existe $R > 0$, tel que

$$\forall u \in V : \|u\| \leq \rho \Rightarrow \|Au\|_* \leq R.$$

1.4.3 Hémicontinuité

Définition 1.25. Soient $A : V \rightarrow V'$ un opérateur, (u_n) une suite de V et $u \in V$. On dit que A est continu si $u_n \rightarrow u$ dans V implique $Au_n \rightarrow Au$ dans V' lorsque $n \rightarrow \infty$, Autrement dit

$$\text{si } \|u_n - u\| \rightarrow 0 \text{ alors } \|Au_n - Au\| \rightarrow 0.$$

Définition 1.26. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur, on dit que $A : V \rightarrow V'$ est hémicontinu si

$$\forall u, v, w \in V, \text{ la fonction } \lambda \rightarrow (A(u + \lambda v), w),$$

est continue de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 1.10. Si A est continu alors A est hémicontinu.

1.4.4 Coercivité

Définition 1.27. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur, on dit que A est coercif si et seulement si $\exists \zeta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = +\infty$ et $\langle A(u), u \rangle \geq \zeta(\|u\|) \|u\|$. Autrement dit, A coercif signifie

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

Définition 1.28. (Dérivée directionnelle)

Soient w une partie de V et $J : w \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in w$ et $v \in V$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on a $u + tv \in w$, on dit que J admet (au point u) une dérivée dans la direction v si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t},$$

existe. On notera cette limite par $J'_v u$.

Définition 1.29. (Différentiabilité au sens de Gateaux)

Soit $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que J est différentiable au sens de Gateaux ou (G-différentiable), s'il existe une application linéaire et continue : $v \rightarrow J'(u).v$ de $V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J(u + tv) + J(u)}{t} = \langle J'(u), v \rangle.$$

L'application J' est appelée la différentielle de J au sens de Gateaux

Définition 1.30. Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si $\forall (x, y) \in V^2, x \neq y, \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Proposition 1.16. Soit la fonctionnelle :

$$J : V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto J(v) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |D_i v|^p dx.$$

Si $v \mapsto J(v)$ est une fonctionnelle différentiable au sens de Gateaux sur V et convexe, alors l'application

$$J' : V \rightarrow V'$$

$$u \mapsto J'(u),$$

est monotone et hémicontinue.

Démonstration. D'après la convexité de J .

$$J((1 - \Theta)u + \Theta v) \leq (1 - \Theta)J(u) + \Theta J(v), \quad \forall \Theta \in]0, 1[.$$

Donc

$$\frac{1}{\Theta} (J(u + \Theta(v - u)) - J(u)) \leq J(v) - J(u).$$

$$\lim_{\Theta \rightarrow 0} \frac{J(u + \Theta(v - u)) - J(u)}{\Theta} \leq J(v) - J(u),$$

donc

$$J'(u)(v - u) \leq J(v) - J(u).$$

Echangeant le rôle de u et v , et ajoutant on trouve

$$J'(u)(u - v) \geq J(u) - J(v).$$

$$-J'(u)(u - v) \geq -J(u) - J(v).$$

Alors

$$(J'(u) - J'(v))(u - v) \geq 0.$$

□

Remarque 1.11. On a une propriété réciproque, si J est différentiable au sens de Gateaux et si $u \rightarrow J'(u)$ est monotone, hémicontinue de $V \rightarrow V'$, alors J est convexe.

1.5 Topologie faible

Définition 1.31. Soit E un espace de Banach réel. Il est muni de la topologie engendrée par les boules ouvertes, que l'on appellera topologie forte. La topologie faible de E est la topologie la moins fine (c'est-à-dire comportant le moins d'ouverts possibles) pour laquelle toutes les formes linéaires continues $\varphi \in E'$ restent continues. On la note $\sigma(E, E')$, ou plus rapidement w .

1.5.1 Convergence faible

Proposition 1.17. [13] Soit V un espace de Banach de dual V' .

La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers x pour la topologie faible si et seulement si

$$\varphi(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x), \quad \forall \varphi \in E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

On notera

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ ou } x_n \xrightarrow{\sigma(V, V')} x \text{ ou encore } x_n \rightharpoonup x.$$

Remarque 1.12. La limite faible d'une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ existe, elle est unique.

Proposition 1.18. [2] Toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ faiblement convergente dans un espace de Banach est bornée. De plus, si la limite est x , on a $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.

Proposition 1.19. [2] Toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ faiblement convergente dans un espace de Banach est bornée. De plus, si la limite est x , on a $\|x\| \geq \limsup_n \|x_n\|$.

1.6 Topologie *-faible sur un dual

Définition 1.32. On appelle topologie *-faible ou topologie weak-star sur E' la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires issues de E

$$\tilde{x} : E' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longrightarrow \tilde{x}(\varphi) = \varphi(x), \quad \text{pour } x \in E.$$

On la note $\sigma(E', E)$, ou plus simplement w^* , on dit aussi que c'est la topologie préfaible sur E^* .

D'après la définition, w^* est moins fine que la topologie faible w .

1.6.1 Convergence *-faible

Définition 1.33. Soient V un espace de Banach et V' son dual.

On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de V' et $\varphi \in V'$ pour la topologie de *-faible, si on a $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$, pour tout $x \in V$. On notera

$$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi \quad \text{ou} \quad \varphi_n \xrightarrow{\sigma(V', V)} \varphi.$$

Remarque 1.13. Si V est un espace de Banach réflexif, alors la convergence faible équivalent à la convergence de faible étoile.

Résultats importants

Lemme 1.7. [13] Soit V un espace de Banach, séparable et soit $(\varphi_n)_n$ une suite bornée dans V' , alors il existe une sous-suite extraite (φ_{n_k}) de V' qui converge pour la topologie $\sigma(V', V)$, c'est à dire

$$\langle \varphi_{n_k}, x \rangle \longrightarrow \langle \varphi, x \rangle, \quad \forall x \in V.$$

Lemme 1.8. [13] Soit V un espace de Banach réflexif, alors de toute suite bornée $(x_n)_n$ de V , on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(V, V')$, c'est à dire

$$\langle T, x_{n_k} \rangle \longrightarrow \langle T, x \rangle, \quad \forall T \in V'.$$

PROBLÈME NON-LINÉAIRE POUR LES ÉQUATIONS P-LAPLACIENNES

Dans ce chapitre, nous allons donner des résultats principaux concernant l'opérateur p -Laplacien sur un espace de Sobolev dans son dual, ainsi que leurs propriétés les plus importantes dans notre étude en se concentrant sur la propriété de monotonie satisfaite par le p -laplacien. En se basant sur les propriétés de l'opérateur p -Laplacien, nous allons montrer un résultat d'existence pour $u' - \Delta_p u = f$.

Contenu

1. Problème non linéaire associé au p -Laplacien.
2. La Formulation variationnelle du problème.
3. Propriété de l'opérateur $-\Delta_p$:
 - 2.1. Borné;
 - 2.2. Hémicontinu;
 - 2.3. Monotone;
 - 2.4. Coercif.
4. Existence de la solution à $u' - \Delta_p u = f$.

2.1 Problème non linéaire associé au p-Laplacien

Les équations aux dérivées partielles non-linéaires ont été étudiées par de nombreux auteurs en se basant sur l'étude du problème de Dirichlet associé au p-Laplacien

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f, & \text{sur } \Omega, \quad p > 2 \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{I})$$

L'étude de l'opérateur $-\Delta_p$ de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,q}(\Omega)$ nous a permis d'introduire les propriétés générales d'un opérateur défini sur un espace de Banach V dans son dual V' .

En mathématiques, p-Laplacien est un opérateur différentiel partial elliptique quasilineaire, de second order, c'est une généralisation non-linéaire de l'opérateur p-Laplacien où $1 < p < \infty$, et on l'écrit comme

$$\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

ou sous forme de **divergence**

$$\Delta_p u = \text{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

où

$$\nabla u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

et $|\nabla u|^{p-2}$ est définie par :

$$|\nabla u|^{p-2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right]^{\frac{p-2}{2}}.$$

Dans le cas $p = 2$, cet opérateur réduit au **Laplacien usuel**.

Les solutions générales des équations impliquant le p-laplacien n'ont pas des dérivées de second order dans le sens classique, alors les solutions à ces équations doivent être comprises comme des **solutions faibles**.

2.2 La Formulation Variationnelle du problème

La formulation variationnelle consiste, sous certaines conditions sur les données, à réécrire (I) sous-forme

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega),$$

Soit u une solution de (I), pour $f \in W^{-1,q}(\Omega)$, on a

$$-\Delta_p u = f, \quad \forall p > 2.$$

En multipliant cette équation par un élément $v \in W^{1,p}(\Omega)$, il vient :

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega),$$

ou encore sous la forme

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx. \quad (\text{PV})$$

En utilisant la formule de Green, il en résulte

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial s_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial s_i} v \, ds.$$

Si on impose $v = 0$ sur Γ , il vient :

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

D'où on peut définir l'application suivante sur $(W_0^{1,p}(\Omega))^2$:

$$(u, v) \rightarrow a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx.$$

Lemme 2.1. Pour $f \in W^{-1,q}(\Omega)$, le problème (I) s'écrit sous la forme variationnelle suivante :

Trouver $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution de $a(u, v) = L(v)$, pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, où

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle A(u), v \rangle \\ &= \langle -\Delta_p u, v \rangle, \quad p > 2 \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx, \quad p > 2. \end{aligned}$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f.v \, dx,$$

L'application $A : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))'$, $u \mapsto Au$ est notée par :

$$-\Delta_p u = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx, \quad p > 2.$$

$$A = -\Delta_p (-\Delta \text{ si } p = 2).$$

appelée p -Laplacienne.

2.3 Propriétés de l'opérateur $-\Delta_p$

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , p un réel tel que $1 \leq p < +\infty$, et on introduit le réel q qui vérifie

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Proposition 2.1. L'application définie sur $L^p(\Omega)$ par :

$$u \mapsto |u|^{p-2} u,$$

est à valeurs dans $L^q(\Omega)$, de plus elle est continue.

Démonstration. Si u appartient à $L^p(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ||u|^{p-2} u|^q dx &= \int_{\Omega} |u|^{q(p-1)} dx \\ &= \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty. \end{aligned}$$

D'où l'appartenance à $L^q(\Omega)$. □

Remarque 2.1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq n$, on déduit de la proposition

(2.1) que $\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ appartient à $L^q(\Omega)$, d'où on peut définir l'opérateur suivant sur $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,q}(\Omega).$$

Remarque 2.2. Le résultat précédent reste vrai si on définit notre application $-\Delta_p$ sur V dans son dual V' , où $V = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \gamma_0 u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$.

Nous avons les propriétés suivantes :

2.3.1 Bornitude

Proposition 2.2. *L'opérateur $-\Delta_p$ est borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Démonstration. De l'expression de la norme dans un espace dual, on en déduit :

$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\| -\Delta_p u \|_{W^{-1,q}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} | \langle -\Delta_p u, v \rangle |,$$

pour tout v de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

D'après la formule de Green, on a :

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) : \langle Au, \varphi \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

D'où

$$\| Au \|_{W^{-1,q}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1}} | \langle Au, \varphi \rangle | = \sup_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1}} \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \right|.$$

Mais

$$\left| \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla \varphi| \, dx.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \right| &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \| u \|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \| \varphi \|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \| \varphi \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où, on conclut qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\| Au \|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq C \| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}.$$

□

2.3.2 Hémicontinuité

Proposition 2.3. *L'opérateur $-\Delta_p$ est hémicontinuu de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Démonstration. On considère l'opérateur $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lambda \mapsto A(\lambda) &= \langle \Delta_p(u + \lambda v), w \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(u + \lambda v)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial(u + \lambda v)}{\partial x_i} \right| \frac{\partial w}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Relativement à cet opérateur on a

$$|A(\lambda) - A(\lambda_0)| = \left| \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(u + \lambda v)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial(u + \lambda v)}{\partial x_i} \right| \frac{\partial w}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(u + \lambda_0 v)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial(u + \lambda_0 v)}{\partial x_i} \right| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \right|. \quad (2.1)$$

Posons :

$$U_1 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(u + \lambda v)}{\partial x_i} \right|, \quad (2.2)$$

$$U_2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(u + \lambda_0 v)}{\partial x_i} \right|, \quad (2.3)$$

$$U_1 - U_2 = (\lambda - \lambda_0) \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \text{et } \rho = p - 2. \quad (2.4)$$

Si on remplace (2.2), (2.3), et (2.4) dans (2.1), on obtient

$$|A(\lambda) - A(\lambda_0)| = \left| |U_1|^\rho U_1 - |U_2|^\rho U_2 \right| \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|.$$

On a pour tout $\rho > 0$,

$$| |U_1|^\rho U_1 - |U_2|^\rho U_2 | = | |U_1|^\rho |U_1| - |U_2|^\rho |U_1| | + | |U_2|^\rho |U_1| - |U_2|^\rho |U_2| |.$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, en utilisant l'égalité suivante, il résulte

$$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-2}a + b^{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} |U_1|^\rho - |U_2|^\rho &= (|U_1| - |U_2|) (|U_1|^{\rho-1} + |U_1|^{\rho-2}|U_2| + \dots + |U_2|^{\rho-2}|U_1| + |U_2|^{\rho-1}) \\ &\leq |U_1 - U_2| (|U_1|^{\rho-1} + \dots + |U_2|^{\rho-1}). \end{aligned}$$

D'où, il en découle

$$\begin{aligned} ||U_1|^\rho U_1 - |U_2|^\rho U_2| &= (|U_1|^\rho - |U_2|^\rho) |U_1| + (U_1 - U_2) |U_2|^\rho \\ &\leq |U_1 - U_2| (|U_1|^\rho + \dots + |U_2|^\rho) \\ &\leq |U_1 - U_2| \begin{cases} (\rho + 1) |U_1|^\rho & \text{Si } |U_2| \leq |U_1| \\ (\rho + 1) |U_2|^\rho & \text{Si } |U_1| \leq |U_2| \end{cases} \\ &\leq (\rho + 1) |U_1 - U_2| \sup(|U_1|^\rho, |U_2|^\rho). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |A(\lambda) - A(\lambda_o)| &\leq (\rho + 1) |U_1 - U_2| \sup(|U_1|^\rho, |U_2|^\rho) \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \\ &\leq (\rho + 1) \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \sup(|U_1|^\rho, |U_2|^\rho) |\lambda - \lambda_o|. \end{aligned}$$

Si on impose $C = (\rho + 1) \sup(|U_1|^\rho, |U_2|^\rho) \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|$, il en résulte

$$|A(\lambda) - A(\lambda_o)| \leq C |\lambda - \lambda_o|.$$

D'où l'hémicontinuité. □

2.3.3 Monotonie

Proposition 2.4. *L'opérateur $-\Delta_p$ est monotone de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Démonstration. En utilisant l'inégalité de convexité, voir la proposition (1.15), on peut vérifier facilement que

$$(-\Delta_p u - (-\Delta_p v))(u - v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \geq 0.$$

D'où la monotonie de Δ_p . □

2.3.4 Coercivité

Proposition 2.5. *L'opérateur $-\Delta_p$ est coercif de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Démonstration. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on déduit de l'inégalité de Poincaré que

$$\begin{aligned} \langle -\Delta_p u, u \rangle &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \\ &\geq C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

D'où le résultat car on a p supérieur à 1. □

2.4 Existence de la solution de $u' - \Delta_p u = f$

Théorème 2.1. (Théorème d'existence)

Soit V un espace de Banach, séparable et réflexif, contenu dans un espace de Hilbert H , et V' désigne le dual de V de sorte que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, avec une injection continue.

Soit A un opérateur non linéaire de $V \rightarrow V'$ ayant les propriétés suivantes :

- A est hémicontinu de $V \rightarrow V'$,
- A est borné, on a plus précisément $\|A(v)\|_* \leq c \|v\|^{p-1}$,
- A est monotone de $V \rightarrow V'$,
- A est coercif au sens que $\forall v \in V, \exists \alpha > 0, (A(v), v) \geq \alpha \|v\|^p, (1 < p < \infty)$.

Alors pour tout $f \in L^q(0, T; V')$, il existe au moins $u \in L^p(0, T; V)$, solution de

$$u' + Au = f.$$

Lemme 2.2. Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $V = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \gamma_o u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ comme dans la situation de la remarque (1.6), on considère l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ défini par :

$$Au = -\Delta_p u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad p > 2.$$

Alors l'opérateur A vérifie toutes les hypothèses du théorème (2.1)

Démonstration.

Moyennant les démonstrations utilisées pour montrer les propositions (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5), on peut vérifier que A est **borné, hémicontinu, monotone et coercif** respectivement en remplaçant $W_0^{1,p}(\Omega)$ par V et $W^{-1,q}(\Omega)$ par V' . □

Remarque 2.3. D'après la proposition (1.16), on peut rattacher la propriété (2.3) et la propriété (2.4) de A à une propriété plus générale, comme l'indique ci-dessous :

Propriétés 2.1. Introduisons la fonctionnelle sur V :

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto J(v) = \int_{\Omega} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |D_i v|^p dx, \quad p > 2, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On a les propriétés suivantes :

1. J est différentiable au sens de Gateaux de $V \rightarrow \mathbb{R}$,
2. $\langle J'u, \varphi \rangle = \langle \Delta_p u, \varphi \rangle$ est la différentielle de J pour chaque $\varphi \in V$ est linéaire et continue de $V \rightarrow \mathbb{R}$,
3. J est convexe de $V \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors l'application $J' : V \rightarrow V', u \mapsto J'u = \Delta_p u$ est **monotone et hémicontinue**.

Démonstration.

1) Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ qui est une fonction de classe C^1 et $\nabla \varphi(x) = |x|^{p-2} x$, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + ty) - \varphi(x)}{t} = |x|^{p-2} \cdot x \cdot y.$$

Par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{|D_i u(x) + t D_i v(x)|^p - |D_i u(x)|^p}{t} = \sum_{i=1}^n |D_i u(x)|^{p-2} \cdot D_i u(x) \cdot D_i v(y), \quad p.p \text{ sur } \Omega.$$

On pose $\psi(\lambda) = |X + \lambda Y|^p$ est dérivable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , en appliquant le théorème des accroissements finis en $[0, \lambda[$, alors il existe Θ dans $]0, \lambda[$ tel que

$$\psi(\lambda) - \psi(0) = \lambda \psi'(\Theta).$$

Ou encore sous la forme

$$|X + \lambda Y|^p - |X|^p = \lambda p |X + \Theta Y|^{p-2} (X + \Theta Y) \cdot Y.$$

D'où

$$\frac{|X + \Theta Y|^{p-2} - |X|^{p-2}}{\lambda} = p |X + \Theta Y|^{p-2} \cdot (X + \Theta Y) \cdot Y.$$

Par conséquent

$$\left| \frac{|X + \Theta Y|^{p-2} - |X|^{p-2}}{\lambda} \right| \leq p \cdot |X + \Theta Y|^{p-1} \cdot |Y|.$$

En utilisant le fait, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|a + b|^\alpha \leq c (|a|^\alpha + |b|^\alpha), \quad \forall \alpha > 0,$$

il en découle

$$\begin{aligned} \left| \frac{|X + \lambda Y|^p - |X|^p}{\lambda} \right| &\leq p \cdot c (|X|^{p-1} + |\Theta|^{p-1} |Y|^{p-1}) |Y| \\ &\leq c' (|X|^{p-1} |Y| + |Y|^p), \quad p > 1; \quad 0 < \Theta < 1; \quad |\lambda| < 1. \end{aligned}$$

D'où, il vient

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{|D_i u + t D_i v|^p - |D_i u|^p}{t} \right| \leq c' \left(\sum_{i=1}^n |D_i u|^{p-1} + |D_i v| + |D_i v|^p \right) \in L^1(\Omega).$$

Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue (1.3), on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{|D_i u + t D_i v|^p - |D_i u|^p}{t} dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v dx.$$

Enfin J est Gateaux différentiable de V dans \mathbb{R} et :

$$\langle J'u, v \rangle = \langle -\Delta_p u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v dx.$$

2) Montrons que $v \rightarrow J'u.v$ est linéaire sur V dans \mathbb{R} .

$\forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \langle J'u, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle &= \langle J'u, \alpha v_1 \rangle + \langle J'u, \beta v_2 \rangle \\ &= \alpha \langle J'u, v_1 \rangle + \beta \langle J'u, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

Montrons que $v \rightarrow J'u.v$ est continue sur V .

On a

$$\begin{aligned} |\langle J'u, v \rangle| &\leq \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |D_i u|^{p-1} |D_i v| dx. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle J'u, v \rangle| &\leq \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |D_i u|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |D_i v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_V^{p-1} \|v\|_V. \end{aligned}$$

Pour chaque $u \in V$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\langle J'u, v \rangle| \leq C \|v\|_V.$$

Ce qui revient à dire que $v \rightarrow J'u.v$ est linéaire et continu sur V .

3) On peut démontrer immédiatement que J est convexe i.e : $\forall u, v \in V, \forall \theta \in]0, 1[$.

On a

$$J((1 - \theta)u + \theta v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |(1 - \theta)D_i u + \theta D_i v|^p dx.$$

En utilisant le fait que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, il existe une constante positive $c > 0$, telle que

$$|a + b|^\alpha \leq c (|a|^\alpha + |b|^\alpha), \quad \alpha > 0.$$

Pour $c = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} J((1 - \theta)u + \theta v) &\leq \frac{1}{p} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |1 - \theta|^p |D_i u|^p + |\theta|^p |D_i v|^p dx \right) \\ &\leq (1 - \theta) \frac{1}{p} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |D_i u|^p dx + \theta \frac{1}{p} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |D_i v|^p dx \\ &\leq (1 - \theta)J(u) + \theta J(v). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Ce qui entraîne l'**hémicontinuité** et la **monotonie** de l'opérateur p -Laplacien Δ_p de $V \rightarrow V'$.

□

PROBLÈME PARABOLIQUE FORTEMENT NON LINÉAIRE POUR LES ÉQUATIONS P-LAPLACIENNES

Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème parabolique non linéaire avec conditions aux limites mixtes (Dirichlet-Neumann). Après avoir donné la formulation variationnelle, nous allons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution faible en se basant sur les techniques de Faedo-Galerkin combinées avec la méthode de monotonie.

Contenu

1. Notation et Position du problème.
2. Hypothèses.
3. Formulation Variationnelle.
4. Existence et Unicité;
 - 4.1. Existence;
 - 4.2. Unicité.

3.1 Notation et Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ assez régulière, on désigne par u un vecteur $u = (u_1, \dots, u_n)$, soit $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ une partition de Γ , i.e : $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. On désigne par $Q = \Omega \times]0, T[$ le cylindre de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, T fini et par Σ la frontière latérale de Q :

$$\Sigma = \Gamma \times]0, T[.$$

On suppose que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, et on pose $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$ et $\Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[$.

Le problème traité dans ce chapitre, il s'agit de trouver une fonction $u : Q = \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f, \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[. \quad (\text{P.1})$$

$$u = 0, \quad \text{sur } \Sigma_1. \quad (\text{P.2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \eta_A = h, \quad \text{sur } \Sigma_2. \quad (\text{P.3})$$

$$u(x, 0) = u_o(x), \quad x \in \Omega. \quad (\text{P.4})$$

Où A est l'opérateur défini par

$$Au = -\Delta_p u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

f , h et $p > 2$ sont données.

Le but de ce travail est de chercher une fonction $u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$ solution de problème (P.1) – (P.4) sous certaines hypothèses.

Pour simplifier l'écriture, on posera :

$$u(x, t) = u; \quad f(x, t) = f; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u',$$

$$\|u\|_V = \|u\|; \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p; \quad \|u\|_{V'} = \|u\|_*; \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|.$$

Hypothèses

On donne f , u_o et h avec les hypothèses :

$$f \in L^q(0, T, V'); \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (\text{H.1})$$

$$u_o \in L^2(\Omega). \quad (\text{H.2})$$

$$h \in L^q(\Sigma_2). \quad (\text{H.3})$$

3.2 Formulation Variationelle

Dans ce paragraphe, on démontre que le problème (P.1) – (P.4) est équivalent à un problème variationnel (PV).

Lemme 3.1. Posons

$$A(\varphi) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right).$$

Sous les hypothèses (H.1) – (H.3), le problème (P.1) – (P.4) est formellement équivalent au problème variationnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouvez } u \in V, \\ (u', v) + a(u, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h \cdot v \, d\Gamma, \quad \forall v \in V, \text{ (PV)} \\ u(x, 0) = u_o(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Où

$$V = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \gamma_o u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Démonstration. Soit u une solution du problème (P.1) – (P.4), en multipliant l'équation (P.1) par $v \in W^{1,p}(\Omega)$, il vient

$$(u', v) + (Au, v) = (f, v),$$

ou encore

$$(u', v) - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, dx = (f, v), \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

En utilisant la formule de Green, on obtient pour tout $v \in W^{1,p}(\Omega)$

$$(u', v) + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma = (f, v).$$

En utilisant le fait que $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de Γ , on en déduit

$$\begin{cases} (u', v) + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma_1 \\ - \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma_2 = (f, v). \end{cases}$$

En posant $v = 0$ sur Σ_1 , il en résulte

$$(u', v) + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta_A} v \, d\Gamma_2 = (f, v), \quad v \in V.$$

En prenant en considération la condition (P.3) sur Γ_2 , on obtient la formulation variationnelle

$$(u', v) + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma_2 = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

Reste à vérifier l'implication inverse :

Soit u une solution variationnelle du problème (PV), on a

$$(u', v) + a(u, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma_2, \quad \forall v \in V.$$

En utilisant la formule de Green, il découle

$$\begin{cases} (u', v) - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) v \, dx \\ + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma_2, \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} (u', v) - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma_1 \\ + \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma_2 = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma_2, \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Comme $\mathbb{D}(\Omega)$ est dense dans V , alors de (3.1) et pour $v = \psi \in D(\Omega)$, on en conclut

$$(u', \psi) - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \psi \, dx = (f, \psi), \quad \forall \psi \in D(\Omega).$$

Ou encore sous forme

$$(u', \psi) + (Au, \psi) = (f, \psi), \quad \forall \psi \in D(\Omega).$$

D'où l'équation

$$u' + Au = f, \quad p.p \text{ dans } Q.$$

Reste à vérifier les conditions (P.2) – (P.3)

Pour tout $v \in V$, on a $v = 0$ sur Γ_1 , de plus en remplaçant l'équation dans (3.1)

$$\int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} h v \, d\Gamma_2 \quad \forall v \in V.$$

En admettant que l'espace des traces sur Γ_2 est dense dans $L^p(\Gamma_2)$, on trouve

$$\forall w \in L^p(\Gamma_2), \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A w \, d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} h w \, d\Gamma_2.$$

Ce qui donne

$$\forall w \in L^p(\Gamma_2), \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta_A} w \, d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} h w \, d\Gamma_2.$$

D'où il résulte que $\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = h$ sur Γ_2 .

□

3.3 Existence et Unicité

Dans cette section on va démontrer que le problème (P.1) – (P.4), sous certaines hypothèses qu'on a précisé, possède une solution unique, commençons par :

3.3.1 Existence

Théorème 3.1. (Théorème d'existence)

Sous hypothèses (H.1) – (H.3), le problème admet au moins une solution u vérifiant

$$u \in L^p(0, T; V). \quad (3.2)$$

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

$$Au \in L^q(0, T; V').$$

Remarque 3.1. L'expression $u(x, 0) = u_o(x)$ a un sens.

En effet, on doit utiliser l'équation (P.1), qui s'écrit

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} = f + \Delta_p u. \quad (3.3)$$

Comme

$$u \mapsto \Delta_p u \text{ applique } V \longrightarrow V',$$

on vérifie sans peine que

$$\Delta_p u \in L^\infty(0, T; V').$$

On a $f \in L^q(0, T; V')$ de sorte que l'équation (3.3) entraîne :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(0, T; V') + L^\infty(0, T; V').$$

D'où en particulier

$$u' \in L^q(0, T; V').$$

D'après la propriété (1.2)

$$u \in L^q(0, T; V'). \quad (3.4)$$

Ce qui, joint à (3.4), montre grâce au lemme (1.5), u est continue de $[0, T] \longrightarrow V'$ de sorte que u_o a un sens.

Démonstration de l'existence

La démonstration se fait en réalisant les trois étapes suivantes :

- **Etape(1)** : Construction des solutions "approchées" par la méthode de «Faedo-Galerkin».
- **Etape(2)** : Etablir, sur ces solutions approchées, des estimations à priori.
- **Etape(3)** : Passer à la limite, grâce à les propriétés de monotonie.

Etape(1) : (Solution approchée) :

Comme l'espace d'étude est Séparable, on utilise la méthode de Faedo-Galerkin, qui consiste à approcher l'espace V par une suite d'espaces de dimensions finies et donc approximer un problème par une suite de problèmes posés dans des espaces de dimensions finies.

D'après la proposition (1.12), il existe une suite ayant les propriétés suivantes :

- ▶ $w_i \in V, \forall i,$
- ▶ $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ une famille linéairement indépendante de $V,$
- ▶ $V_m = \langle \{w_1, \dots, w_m\} \rangle$ espace engendré par la famille $\{w_1, \dots, w_m\}$ est dense dans V
i.e : $\overline{\cup_{m \geq 0} V_m} = V, \dim V_m = m.$

On introduit $u_m(t)$ solution « approchée » du problème de la façon suivante :

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on cherche de $u_m(t) = u_m$ dans V_m sous forme

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m K_{jm}(t) w_j, \quad (3.5)$$

dans V_m vérifiant

$$\left(\frac{d}{dt} u_m(t), w_i \right) + a(u_m(t), w_i) = (f(t), w_i) + (h(t), w_i)_{L^2(\Gamma_2)}, \quad (3.6)$$

Avec la condition :

$$u_m(0) = u_{om}, \quad u_{om} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm}(0) w_j \longrightarrow u_o \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad \text{lorsque } m \longrightarrow \infty.$$

En utilisant les équations (3.6) et (3.5), il en résulte :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m K'_{jm}(t) (w_j, w_i) + a \left(\sum_{j=1}^m K_{jm}(t) w_j, w_i \right) = (f(t), w_i) + (h(t), w_i)_{L^2(\Gamma_2)}, & \forall t \in]0, T[. \\ K_{jm}(0) = \alpha_{j0}, & i, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (\mathbf{P}'_m)$$

(P'_m) est un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires du premier ordre pour les fonctions réelles $t \mapsto K_{jm}(t)$ de $]0, T[$. On considère les fonctions :

$$K_m(t) = (K_{1m}(t), \dots, K_{mm}(t)), \quad F(t) = ((f(t), w_1), \dots, (f(t), w_m)),$$

$$H(t) = \left((h(t), w_1)_{L^2(\Gamma_2)}, \dots, (h(t), w_m)_{L^2(\Gamma_2)} \right),$$

et les matrices

$$B = (w_j, w_i)_{1 \leq i, j \leq m}, \quad A = (a(w_j, w_i))_{1 \leq i, j \leq m}.$$

Comme la famille $\{w_1, \dots, w_m\}$ est linéairement indépendante (*i.e.* $\det(w_j, w_i) \neq 0$), la matrice B est inversible, par conséquent le système (P'_m) est résoluble par rapport à $K'_{jm}(t)$; alors $K_{jm}(t)$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} K_m(t) = -B^{-1}A(K_m(t)) + B^{-1}F(t) + B^{-1}H(t), & \forall t \in]0, T[. \\ K_{jm}(0) = \alpha_{j0}, & i, j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Alors ce système admet au moins une solution locale u_m dans $(0, t_m; V_m)$. t_m dépend de m , l'étape qui suit montre que $t_m = T$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Etape (2) : Estimation a priori :

En multipliant (3.6) par $K_{jm}(t)$ en faisant la somme sur j , on obtient :

$$\left(\frac{d}{dt} u_m(t), u_m(t) \right) + (A(u_m(t)), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)) + \int_{\Gamma_2} h \cdot u_m d\Gamma_2. \quad (3.7)$$

Cela définit $u_m(t)$ dans un intervalle $[0, t_m]$, $t_m > 0$. Mais on note que

$$(A(u), u) \geq \alpha \|u\|^p, \quad \alpha > 0 \quad (3.8)$$

et

$$\left(\frac{d}{d\sigma} u_m(\sigma), u_m(\sigma) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} |u_m(\sigma)|^2.$$

Alors, on déduit de (3.7) que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m|^2 + \alpha \|u_m\|^p \leq (f, u_m) + \int_{\Gamma_2} h \cdot u_m d\Gamma_2.$$

En intégrant sur $(0, t)$, il en résulte :

$$\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma \leq \int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma)) d\sigma + \int \int_{\Sigma_2} h(\sigma) \cdot u_m(\sigma) d\Sigma_2 + \frac{1}{2} |u_{om}|^2.$$

En valeur absolue en utilisant l'inégalité de Hölder (1.1), il vient

$$\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma \leq \int_0^t \|f(\sigma)\|_* \|u_m(\sigma)\| d\sigma + \int_0^t \|h(\sigma)\|_{L^q(\Gamma_2)} \|u_m(\sigma)\|_{L^p(\Gamma_2)} d\sigma + \frac{1}{2} |u_{om}|^2.$$

Comme $u_{om} \in L^2(\Omega)$, on obtient

$$|u_{om}|^2 \leq C_1.$$

Et par conséquent, on a

$$\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma \leq \int_0^t \|f(\sigma)\|_* \|u_m(\sigma)\| d\sigma + \int_0^t \|h(\sigma)\|_{L^q(\Gamma_2)} \|u_m(\sigma)\|_{L^p(\Gamma_2)} d\sigma + C_1.$$

En tenant en compte la continuité de la fonction trace, il résulte

$$\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma \leq \int_0^t \|f(\sigma)\|_* \|u_m(\sigma)\| d\sigma + C_2 \int_0^t \|h(\sigma)\|_{L^q(\Gamma_2)} \|u_m(\sigma)\|_{W^{1,p}(\Omega)} d\sigma + C_1.$$

Comme $V \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, donc $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|\cdot\|$, et par conséquent

$$\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma \leq \int_0^t \|f(\sigma)\|_* \|u_m(\sigma)\| d\sigma + C_2 \int_0^t \|h(\sigma)\|_{L^q(\Gamma_2)} \|u_m(\sigma)\| d\sigma + C_1.$$

Remarquons que d'après l'inégalité de Young, voir le lemme (1.2) il en résulte :

$$a \cdot b = (\varepsilon a) \cdot \frac{b}{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon^p}{p} a^p + \frac{\varepsilon^{-q}}{q} b^q, \forall \varepsilon > 0$$

On aura alors

$$\int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma)) d\sigma \leq \frac{\varepsilon^{-q}}{q} \int_0^t \|f(\sigma)\|_*^q d\sigma + \frac{\varepsilon^p}{p} \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma.$$

En choisissant ε de sorte que $\frac{(\varepsilon)^p}{p} = \frac{\alpha}{4}$, on a :

$$\int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma)) d\sigma \leq C_3 \int_0^t \|f(\sigma)\|_*^q d\sigma + \frac{\alpha}{4} \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma, \quad (3.9)$$

et

$$C_2 \int_0^t \|h(\sigma)\|_{L^q(\Gamma_2)} \|u_m(\sigma)\| d\sigma \leq C_2 \frac{(\varepsilon)^{-q}}{q} \int_0^t \|h(\sigma)\|_{L^q(\Gamma_2)}^q d\sigma + C_2 \frac{(\varepsilon)^p}{p} \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma.$$

En choisissant ε de sorte que $C_2 \frac{(\varepsilon)^p}{p} = \frac{\alpha}{4}$, on a :

$$C_2 \int_0^t \|h(\sigma)\|_{L^q(\Gamma_2)} \|u_m(\sigma)\| d\sigma \leq C_4 \int_0^t \|h(\sigma)\|_{L^q(\Gamma_2)}^q d\sigma + \frac{\alpha}{4} \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma. \quad (3.10)$$

De (3.9) et (3.10), on déduit

$$\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma \leq C_3 \int_0^t \|f(\sigma)\|_*^q d\sigma + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma + C_4 \int_0^t \|h(\sigma)\|_{L^q(\Gamma_2)}^q d\sigma + C_1.$$

En utilisant les hypothèses (H.1) et (H.3), on conclut que

$$\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma \leq C_1 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma + C_5.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma \leq C_6.$$

Alors

$$|u_m(t)|^2 \leq C_7,$$

$$\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p d\sigma \leq C_7.$$

D'où, l'on déduit que $t_m = T$ et que :

(u_m) demeure dans un borné de $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T; V)$.

Etape(3) : Passage à la limite

On déduit du lemme (1.8), qu'on peut extraire une sous-suite (u_μ) de (u_m) telle que

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible} - *, \quad (3.11)$$

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^p(0, T; V) \text{ faible}, \quad (3.12)$$

$$u_\mu(T) \rightarrow \xi \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible}, \quad (3.13)$$

$$A(u_\mu) \rightarrow \chi \text{ dans } L^q(0, T; V') \text{ faible}. \quad (3.14)$$

car $\|A(u_m)\| \leq c \|u_m\|^{p-1}$ et donc $A(u_m)$ demeure dans un borné de $L^q(0, T; V')$.

► **Vérification des conditions initiales**

Introduisons $\tilde{u}_m(t)$, $A(\tilde{u}_m(t))$, $\tilde{f}(t)$ prolongement de $[0, T]$ à \mathbb{R} de $u_m(t)$, $A(u_m(t))$, $f(t)$ respectivement telle que :

$$\tilde{u}_m(t) = \begin{cases} u_m(t) & \text{si } t \in]0, T[\\ 0, & \text{hailleurs} \end{cases}$$

Signifiant que c'est une distribution, voir l'équation (1.1), désigné par $u_m^\sim(t)$ associée à une fonction discontinue et sa dérivée vaut

$$\frac{d}{dt} u_m^\sim(t), \forall t \in]0, T[.$$

En utilisant la formule établie dans la proposition (1.6), on obtient au sens de distribution :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_m^\sim(t) &= \frac{du_m(t)}{dt} + \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} u_m(t) - \lim_{t \rightarrow 0^-} u_m(t) \right) \delta_0 + \left(\lim_{t \rightarrow T^+} u_m(t) - \lim_{t \rightarrow T^-} u_m(t) \right) \delta_T. \\ &= \frac{du_m(t)}{dt} + u_m(0) \delta_0 - u_m(T) \delta_T. \end{aligned}$$

Alors (3.6) donne

$$\left(\frac{d}{dt} u_\mu^\sim(t), w_i \right) + \left(A u_\mu^\sim(t), w_i \right) = \left(\tilde{f}(t), w_i \right) + (u_{0\mu}, w_i) \delta(t-0) - (u_\mu(T), w_i) \delta(t-T) \quad (3.15)$$

On peut maintenant passer à la limite dans (3.15) avec $m = \mu$ et i fixé, d'où l'on déduit

$$\left(\frac{d}{dt} \tilde{u}(t), w_i \right) + (\tilde{\chi}, w_i) = (\tilde{f}(t), w_i) + (u_o, w_i) \delta(t-0) - (\xi, w_i) \delta(t-T), \quad \forall i,$$

et par conséquent

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \tilde{\chi} = \tilde{f} + u_o \delta(t-0) - \xi \delta(t-T). \quad (3.16)$$

Restreignant (3.16) à $]0, T[$, on déduit que

$$u' + \chi = f. \quad (3.17)$$

Donc $u(0)$ et $u(T)$ ont un sens et comparant à (3.16) on en déduit que :

$$u(0) = u_o \text{ et } u(T) = \xi.$$

► On aura donc démontré l'existence d'une solution, si l'on montre que

$$\chi = A(u). \quad (3.18)$$

$$\forall u \in V; \exists \chi \in V' \text{ telque } \begin{cases} u_\mu \rightharpoonup u; & \sigma(V, V'), \\ A(u_\mu) \rightharpoonup \chi; & \sigma(V', V). \end{cases}$$

La propriété (2.4) de monotonie, résulte que

$$X_\mu = \int_0^T (A(u_\mu(t)) - A(v(t)), u_\mu(t) - v(t)) dt \geq 0, \quad \forall v \in L^p(0, T; V). \quad (3.19)$$

Or de (3.6) résulte que

$$\int_0^T (A(u_\mu), u_\mu) dt = \int_0^T (f, u_\mu) dt + \frac{1}{2} |u_{o\mu}|^2 - \frac{1}{2} |u_\mu(T)|^2.$$

Et donc

$$X_\mu = \int_0^T (f, u_\mu) dt + \frac{1}{2} |u_{o\mu}|^2 - \frac{1}{2} |u_\mu(T)|^2 - \int_0^T (A(u_\mu), v) dt - \int_0^T (A(v), u_\mu - v) dt.$$

D'après (3.11) – (3.14), on a

$$\begin{aligned}\int_0^T (f, u_\mu) dt &\rightarrow \int_0^T (f, u) dt, \\ \int_0^T (A(u_\mu), v) dt &\rightarrow \int_0^T (\chi, v) dt, \\ \int_0^T (A(v), u_\mu) dt &\rightarrow \int_0^T (A(v), u) dt.\end{aligned}$$

D'après la proposition (1.18), on a

$$\liminf |u_\mu(T)|^2 \geq |u(T)|^2.$$

Alors, en prenant la $\limsup X_\mu$, on trouve

$$\limsup X_\mu \leq \int_0^T (f, u) dt + \frac{1}{2} |u_o|^2 - \frac{1}{2} |u(T)|^2 - \int_0^T (\chi, v) dt - \int_0^T (A(v), u - v) dt. \quad (3.20)$$

Mais, en multipliant (3.17) on déduit par des intégrations par parties sur $[0, T]$ que

$$\int_0^T (f, u) dt + \frac{1}{2} |u_o|^2 - \frac{1}{2} |u(T)|^2 = \int_0^T (\chi, u) dt.$$

Ce qui, joint à (3.19) et (3.20), donne

$$\int_0^T (\chi - A(v), u - v) dt \geq 0. \quad (3.21)$$

On utilise maintenant l'hémicontinuité pour montrer que (3.21) entraîne (3.18).

On prend $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in L^p(0, T; V)$ quelconque, alors (3.20) donne

$$\lambda \int_0^T (\chi - A(u - \lambda w), w) dt \geq 0.$$

Donc

$$\int_0^T (\chi - A(u - \lambda w), w) dt \geq 0. \quad (3.22)$$

Faisant $\lambda \rightarrow 0$ dans (3.22), c'est loisible d'après le théorème de Lebesgue (1.3), on en déduit

$$\int_0^T (\chi - A(u), w) dt \geq 0, \quad \forall w. \quad (3.23)$$

De même pour $v = u + \lambda w$, on obtient

$$-\lambda \int_0^T (\chi - A(u + \lambda w), w) dt \geq 0. \quad (3.24)$$

Donc

$$\int_0^T (\chi - A(u), w) dt \leq 0. \quad (3.25)$$

De (3.23) et (3.25), on peut facilement obtenir

$$(\chi - A(u), w) = 0.$$

Alors

$$\chi = A(u).$$

Ce qui prouve l'existence d'une solution u du problème (P.1) – (P.4).

3.3.2 Unicité

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème. Alors $w = u_1 - u_2$ vérifie

$$w' + A(u_1) - A(u_2) = 0, \quad w(0) = 0,$$

d'où

$$(w', w) + (A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2) = 0,$$

et grâce à la monotonie :

$$w' = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 \leq 0,$$

donc l'application $t \mapsto |w(t)|^2$ est décroissante. Comme elle est positive et $|w(0)|^2 = 0$ alors $|w(t)|^2 = 0, \quad \forall t$ d'où $w = 0$, ce qui prouve l'unicité de la solution du problème (P.1) – (P.4).

Conclusion et Perspectives

DANS CE MÉMOIRE, nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité pour un problème aux limites mixtes, de type parabolique pour les équations p -Laplaciennes. Les techniques utilisées sont celles de Lions[8], lorsque l'opérateur a des propriétés de monotonie, la méthode de monotonie est mieux adaptée à l'étude des problèmes non linéaires, car elle nécessite moins d'estimations que, la méthode de compacité, et lorsqu'elle est applicable, elle est d'utilisation plus facile que la méthode de compacité.

Comme perspective, il est intéressant de faire une étude comparative entre les techniques basant sur la méthode de monotonie et celles basant sur la méthode de compacité, pour quelques modèles types pour montrer la complexité de chacune de méthodes.

Bibliographie

- [1] R. ABITA, *Problème aux limites non linéaire*, Mémoire de Magister soutenu en Juillet 2009 à l'Université de Laghouat.
- [2] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, 1987
- [3] CHARIF Wafa, *Résolution de problèmes aux limites non linéaires par la méthode des opérateurs monotones*, Mémoire de Master soutenu en 2018 à l'université de M'sila
- [4] DANIEL LI, *Cours d'analyse fonctionnelle*, Ellipses marketing, Paris 2013
- [5] HAMADOUche TAKLIT, *Etude de quelques problèmes aux valeurs propres non-Linéaires aux p -Laplacien*, Mémoire de Master soutenu en Juin 2012 à l'université de Béjaïa.
- [6] IBERHARD ZEIDLER, *Nonlinear Functional Analysis and Its applications, II/B, Non-linear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York (1990).
- [7] J. L. LIONS AND E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1, Dunod Paris (1968).
- [8] J. L. LIONS *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Paris, Dunod, 1969.
- [9] M.T. LACROIX-SONRIER. *Distribution, Espace de Sobolev, Applications*, Ellipses marketing, Paris, 1999.
- [10] S. OUALI AND L. IDIR, *Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ et $W^{s,p}(\Omega)$* , Mémoire de Master soutenu en Juin 2012 à l'université de Béjaïa.
- [11] S. SALAS, *PDE in action*, Springer, 2008.
- [12] R. E. SCHWARTZ, *Monotone Operators in Banach Spaces and Non Linear Partial Differential Equations*, vol.49, (1991).
- [13] S. TARRAFI, *Problème hyperbolique semi linéaire associé à un opérateur fortement eeliptique à coefficients variables*, Mémoire de Master soutenu en Juin 2014 à l'Université de M'sila

- [14] THIERRY GALLOUËT AND RAPHAËLE HERBIN, *Polycopié, Master 2 de Mathématiques*, 12/10/2019. Institut de Mathématiques, Université de Marseille. France.



ملخص: في هذه المذكرة، نهتم بدراسة مسألة حدودية مختلطة من نوع القطع المكافئ غير الخطي بقوة والمرتبطة بمؤثر بيلابلاس. بفرض بعض الشروط على المعطيات وبالاعتماد على تقريبات فاودو قلاركين مقرونة بطريقة الرتبة وبعض نتائج التحليل الرياضي التطبيقي نقوم ببرهان الوجود المحلي والوحدانية لحل ضعيف.

كلمات مفتاحية: الوجود والوحدانية، فاودو قلاركين، طريقة الرتبة، مؤثر بيلابلاس،

مسألة قطع مكافئ.

Résumé : Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites mixtes de type parabolique fortement non linéaire pour un opérateur p -Laplacien. Sous certaines conditions sur les données, en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin combinées avec la méthode de monotonie et quelques résultats d'analyse fonctionnelle appliquée, nous démontrons l'existence locale et l'unicité d'une solution faible.

Mots-Clés :

Existence et unicité, Faedo-Galerkin, Méthode de Monotonie, Opérateur p -Laplacien, Problème parabolique.

Abstract : In this memoir, We're interested in study of a strongly nonlinear parabolic mixed boundary problem for a p -Laplacian operator. Under some hypothesis on the initial data, by basing on Faedo-Galerkin approximations combined with the monotony method and some applied functional analysis results, we show the local existence and uniqueness of the weak solution.

Keywords :

Existence and uniqueness, Faedo-Galerkin, Monotony Method, p -Laplacian operator, parabolic problem.