



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Étude d'une classe des problèmes non locaux contenant l'opérateur $p(\chi)$ -laplacien

Présenté par :

M^r Hasni Badereddine

Membres du jury :

| | | | |
|-------------------|--------|----------------------|-------------------|
| Drihem Douadi | Pr, | Université de M'sila | Président. |
| Mokhtari Abdelhak | M.C.B, | Université de M'sila | Encadreur. |
| Bouafia Dahmen | M.C.B, | Université de M'sila | Examineur. |

Année universitaire 2019/2020



Remerciements



Au nom d'Allah le

miséricordieux

Premièrement et partic-

ulièrement, je tiens à remercier

ALLAH le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années. Ainsi, je tiens également à exprimer ma vifs remerciements à notre encadreur Mokhtari abdelhak, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire, ses conseils, ses encouragement. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Par ailleurs, mes remerciements s'adressent aussi à de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et a tous les membres du département des mathématiques. Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail. Et tous mes remerciements particuliers à mes parents pour leur soutien et leurs encouragements continus.



❖ *Badereddine*





Dédicaces

Au nom d'Allah le miséricordieux

Je

Aux personnes

peuvent pas calculer leurs vertus.

Mon père et ma mère que Dieu le

À me

À tous me

À tous le

Résumé

Dans ce mémoire on va présenter quelques conditions suffisantes pour résoudre des problèmes de Dirichlet de type :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

où Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue avec $p(x) > 1$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory. On donne des conditions suffisantes qui permettent d'utiliser des méthodes variationnelles et topologiques dans le cas de $p(x)$ -laplacien pour prouver l'existence et multiplicité des solutions faibles du problème.

La discussion est basée sur des méthodes variationnelles ainsi que la théorie points critiques et le cadre fonctionnel s'appuie sur la théorie des espaces de Lebesgue et de Sobolev avec exposant variable.

Mots-Clés : $p(x)$ -laplacien; Solution faible; Espaces de Lebesgue-Sobolev avec exposant variable; Points critiques.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | iv |
| 1 Espaces fonctionnels classiques et généralités | 7 |
| 1.1 Espace de Lebesgue classique | 7 |
| 1.2 Espace de Sobolev classique | 8 |
| 1.3 Dérivation dans un espace de Banach | 9 |
| 1.4 Notions sur les opérateurs | 11 |
| 1.5 Quelques inégalités utilisés | 13 |
| 2 Espace de Lebesgue et de Sobolev avec exposant variable | 15 |
| 2.1 Espaces $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ | 15 |
| 2.1.1 Norme sur $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ | 19 |
| 2.2 l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ et $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ | 24 |
| 3 Sur l'opérateur $p(x)$-Laplacien | 26 |
| 3.1 Dérivabilité de la fonctionnelle J | 26 |
| 3.2 Propriétés topologiques de J' | 29 |
| 4 Existence de Solutions faibles d'un problème contenant l'opérateur $p(x)$-Laplacien | 32 |
| 4.1 Présentation du problème | 32 |
| 4.2 Résultat d'existence d'un problème quasi-linéaire | 32 |
| 4.3 Application d'un principe de Minimisation | 34 |
| 4.4 Existence de solutions non triviales via le théorème du Col | 38 |
| 4.5 Résultat d'existence et multiplicités | 44 |
| Bibliographie | 49 |

Introduction

L'étude des problèmes de Dirichlet contenant $p(x)$ -laplacien est un sujet intéressant ces dernières années. En particulier, dans le cas $p(x) = p$ (constante) est le problème de Dirichlet bien connu avec p -laplacien. Il y a eu un grand nombre d'articles sur l'existence de solutions pour les équations p -laplaciennes dans un domaine borné. Par exemple, Dinca et al. ([10], [9]) ont prouvé l'existence de solutions faibles pour le problème de Dirichlet avec p -laplacien en utilisant des méthodes variationnelles et topologiques.

Dans ce travail, on considère le problème elliptique suivant :

$$(P) \begin{cases} -\operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

où Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue avec $p(x) > 1$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait des conditions inspirée du cas $p(x) = p$, ces conditions suffisantes nous permettent d'appliquer quelques théorèmes (principe de minimisation, théorème du Mountain-pass, théorème du point fixe,...) pour démontrer l'existence de solutions faibles ainsi la multiplicité via le théorème de Fountain, tous ces résultats sont des généralisations de résultats connus pour les problèmes p -laplaciens.

Notre travail est basé essentiellement sur l'article [26] où il s'agit de présenter de nouvelles conditions sur f pour assurer l'existence des solutions faibles. Notre travail se propose de reprendre systématiquement toute les démonstrations de [26] en les détaillant dans l'espoir de les rendre plus claires pour un public plus large.

Cela nous amène à rappeler ou à détailler certaines notions fondamentales utilisées telles les espaces de Lebesgue et de Sobolev avec exposant variable, la dérivation sur un espace de Banach, la théorie de minimisation et point critiques...

L'opérateur $p(x)$ -laplacien apparaît dans certains problèmes physiques, par exemple, dans la théorie de l'élasticité et de la mécanique des fluides ... (voir [18] et [20]).

Ce mémoire se compose de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on donne quelques résultats classiques concernant les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev. On y donne en plus quelques outils de base qui nous seront utiles (Dérivation dans un espace de Banach, Notions sur les opérateurs et quelque inégalités premiers).

Dans le second chapitre, on introduit les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable accompagnés de quelques résultats fondamentaux qui nous seront utiles dans l'étude de notre problème. Ce chapitre est basé sur les articles [3, 5, 26].

Le chapitre 3 est consacré à étudié l'existence des solutions faibles dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ pour le problème (P).

ESPACES FONCTIONNELS CLASSIQUES ET GÉNÉRALITÉS

1.1 Espace de Lebesgue classique

Dans tout ce qui suit, Ω désignera un ouvert de \mathbb{R}^N .

Définition 1.1. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$.

On pose :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

muni de la norme $\|f\|_{L^p}$ suivante :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.2. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et il existe une constant } c \geq 0$$

$$\text{telle que } |f(x)| \leq c \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

cet espace muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{c \in \mathbb{R}_+ \mid |f(x)| \leq c \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Lemme 1.1. (de Fatou) Soit $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions positives de $L^1(\Omega)$, telle que

$$\sup_n \int_{\Omega} f_n(x) dx < \infty.$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

Théorème 1.1. (de convergence dominée de Lebesgue) Soit $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonction de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction f . On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$, telle que pour tout n , on ait $|f_n| \leq g$ p.p. sur Ω . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

1.2 Espace de Sobolev classique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, avec $p \in [1, +\infty[$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 1.3. [11] L'espace de Sobolev d'ordre 1, $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble suivante.

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_i (i = 1, \dots, n) \text{ tel que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right\}$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, quand on muni de la norme :

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \\ &\equiv \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \end{aligned}$$

Quand $p = 2$, on note $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire.

$$(u | v)_{H^1(\Omega)} = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

et par suite, on a.

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 1.1. $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Définition 1.4. $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ on écrit

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)},$$

on note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Le conjugué de Hölder de p est le nombre q tel que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1.3 Dérivation dans un espace de Banach

Dérivé au sens de Gâteaux

Définition 1.5. Soient Ω une partie d'un espace de Banach E et $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

une fonction à valeurs réelles. Si $u \in \Omega$ et $v \in E$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on a $u + tv \in \Omega$, on dit que I admet (au point u) une dérivée dans la direction v si la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t}$$

existe. On notera cette limite $I'_v(u)$.

On notera qu'une fonction I peut avoir une dérivée directionnelle dans toute direction $v \in E$, sans pour autant être continue. Lorsque la dérivée directionnelle de I existe pour certains $v \in E$ on introduit la notion de dérivée au sens de Gâteaux.

Définition 1.6. Soient Ω une partie d'un espace de Banach E et $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $u \in \Omega$, on dit que I est dérivable au sens de Gâteaux (ou G -dérivable ou encore G -différentiable) en u , s'il existe $A \in E'$ tel que dans chaque direction $v \in E$ où $I(u + tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $I'_v(u)$ existe et on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \langle A, v \rangle.$$

On posera $I'(u) := A$.

Exemple 1.1. Soit Ω une ouvert de \mathbb{R} et soit $2 < p < +\infty$.

Les fonctionnelles

$$\varphi(u) = \int_{\Omega} |u(t)|^p dt, \quad \psi(u) = \int_{\Omega} |u^+(t)|^p dt,$$

où u^+ est la partie positive de u , sont de classe $C^1(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ et

$$\langle \varphi'(u), h \rangle = p \int_{\Omega} |u(t)|^{p-2} u(t) h(t) dt, \quad \langle \psi'(u), h \rangle = p \int_{\Omega} \{u^+(t)\}^{p-1} h(t) dt.$$

Dérivé au sens de Fréchet

Définition 1.7. Soit E un espace de Banach, $\Omega \subseteq E$ un ensemble ouvert et soit $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle.

On dit que I est différentiable au sens de Fréchet en $u \in \Omega$, s'il existe $A \in E'$ tel que :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0.$$

Donc, pour I une fonctionnelle différentiable on a :

$$I(u+v) - I(u) = Av + o(\|v\|)$$

si I est différentiable, A est unique et on note $I'(u) := A$.

L'ensemble des fonctions différentiables de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sera noté $C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Ce qui implique que si I est différentiable en u , alors I est continue en u .

Proposition 1.1. Supposons que $\Omega \subseteq E$ un ensemble ouvert, tel que I Gâteau différentiable dans Ω et que I'_G est continue en $u \in \Omega$.

Alors I est aussi différentiable en u , et bien sur

$$I'_G(u) = I'(u).$$

Remarque 1.1. L'importance de la proposition (1.1) réside dans le fait qu'il est souvent techniquement plus facile de calculer la dérivée au sens de Gâteau et ensuite de prouver qu'il est continu, plutôt que de prouver directement la différentiabilité au sens de Fréchet.

Points critiques

Définition 1.8. Soient Ω un ouvert d'un espace de Banach E .

Supposons que $I \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

On dit que $u \in \Omega$ est un point critique de I , si :

$$I'(u) = 0.$$

Si u n'est pas un point critique, alors on dit que u est un point régulier de I .

Si $c \in \mathbb{R}$, alors on dit que c est une valeur critique de I , s'il existe $u \in \Omega$ tel que :

$$I(u) = c \text{ et } I'(u) = 0.$$

Si c n'est pas valeur critique, alors on dit que c est une valeur régulière de I .

1.4 Notions sur les opérateurs

Soit E et Y , deux espaces de Banach .

Définition 1.9 (Convergence d'une suite). Soit $(x_n)_n$ une suite de E et $x_0 \in E$.

On dit que $(x_n)_n$ converge vers x_0 (en norme) si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_E = 0,$$

et on écrit $x_n \rightarrow x_0$ dans E .

Définition 1.10 (Opérateur borné). On dit qu'un opérateur $T : E \rightarrow Y$ est borné si l'image de tout borné dans E par T est un borné de Y .

i.e : pour tout ensemble D borné dans E , $T(D)$ est borné dans Y .

On note $B(E, Y)$ l'ensemble des applications linéaires et bornées de E dans Y .

Le cas $Y = \mathbb{R}$ est très important par la suite.

Définition 1.11 (Espace dual). La classe des fonctionnelles linéaires et bornées définies sur E , sera notée par E' .

On munit E' de la norme

$$\|J\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} |\langle J, x \rangle|, \quad \text{pour } J \in E',$$

E' muni de cette norme est un espace de Banach et nous avons l'inégalité

$$|\langle J, x \rangle| \leq \|J\|_{E'} \|x\|_E, \quad \forall J \in E', \quad \forall x \in E.$$

Définition 1.12 (Convergence faible). On dit qu'une suite $(x_n) \subset E$ converge faiblement vers x , si

$$\forall J \in E', \langle J, x_n \rangle \rightarrow \langle J, x \rangle,$$

et on écrit $x_n \rightarrow x$.

Proposition 1.2. [13] Soit (x_n) une suite de E .

On a :

1. Si $x_n \rightarrow x$, alors $x_n \rightarrow x$.
2. Si $x_n \rightarrow x$, alors (x_n) est bornée et $\|x\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|_E$.

3. Si $x_n \rightarrow x$, et $J_n \rightarrow J$ dans E' , alors $\langle J_n, x_n \rangle \rightarrow \langle J, x \rangle$.

Proposition 1.3. [13] Lorsque E est de dimension finie, une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

Définition 1.13. On dit que E est réflexif si $i(E) = E''$ (i.e. i est surjective de E sur E'')

Définition 1.14 (Continuité des opérateurs). L'opérateur $T : E \rightarrow Y$ est dit continu en $x \in E$, si pour toute suite $(x_n) \subset E$ qui converge vers x , $T(x_n)$ converge vers $T(x)$.

T est dit continu sur un ensemble $A \subset E$ si T est continu en tout point $x \in A$.

Définition 1.15 (Semi-continue inférieurement). pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que :

$$\text{pour tout } x \in U : f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

Ou

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0),$$

où \liminf désigne la limite inférieure (d'une fonction en un point).

Définition 1.16 (Compacité des opérateurs). Un opérateur $T : E \rightarrow Y$ est dit compact si pour toute suite $(x_n)_n$ bornée dans E , la suite $(T(x_n))$ admet une sous suite convergente.

Définition 1.17 (Suite minimisation). Une suite minimisante d'une fonctionnelle $J : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est une suite (x_n) telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_E J.$$

Définition 1.18 (Opérateur monotone). Un opérateur $T : E \rightarrow E'$ est dit monotone si

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq 0, \text{ pour toute } x, y \in E.$$

Définition 1.19 (Opérateur coercitif). Un opérateur $T : E \rightarrow E'$ est dit coercitif si

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\langle T(x), x \rangle}{\|x\|} = \infty.$$

Théorème 1.2. (Voir [19]) Soient E un espace de Banach réflexif, et φ une fonctionnelle définie sur E , telle que :

1. $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ (coercivité uniforme)
2. φ est (f.s.c.i),

alors φ est bornée inférieurement sur E et atteint sa borne inférieure en un point x_0 . De plus, si φ est Gâteaux-différentiable en x_0 , alors $\text{Grad } \varphi(x_0) = 0$.

Théorème 1.3 (Minty-Browder). [21] Soit E un espace de Banach réflexif et $T : E \rightarrow E'$ un opérateur continu monotone et coercitif. Donc, T est surjectif.

1.5 Quelques inégalités utilisés

Lemme 1.2. Soit $x, y \in \mathbb{R}^N$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard en \mathbb{R}^N . Alors,

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \begin{cases} c_p |x - y|^p, & \text{si } p \geq 2 \\ c_p \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & \text{si } 1 < p < 2 \end{cases}$$

Preuve. Par homogénéité, on peut supposer que $|x| = 1$ et $|y| \leq 1$. En choisissant une base canonique dans \mathbb{R}^N , on peut supposer

$$x = (1, 0, \dots, 0), y = (y_1, y_2, 0, \dots, 0), \text{ et } \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1.$$

(i) Cas $1 < p < 2$. Il est clair que l'inégalité est équivalente à la suivante :

$$\left\{ \left(1 - \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right) (1 - y_1) + \frac{y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right\} \frac{(1 - \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geq C.$$

Mais

$$1 - \frac{y_1}{(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}} \geq \begin{cases} 1 - \frac{y_1}{|y_1|^{2-p}} \geq (p-1)(1 - y_1), & \text{if } 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 1 - y_1 \geq (p-1)(1 - y_1), & \text{if } y_1 \leq 0, \end{cases}$$

alors,

$$(p-1) \left\{ (1 - y_1)^2 + y_2^2 \right\} \frac{(1 + y_1 + y_2)^{\frac{2-p}{2}}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geq p - 1.$$

(ii) Cas $p \geq 2$. L'inégalité est équivalente à prouver que :

$$\frac{\left[1 - y_1 (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{p-2}{2}} \right] (1 - y_1) + y_2^2 (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{p-2}{2}}}{((1 - y_1)^2 + y_2^2)^{\frac{p}{2}}} \geq C.$$

Posons $t = \frac{|y|}{|x|}$ et $s = \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}$, alors, il suffit de montrer que la fonction

$$f(t, s) = \frac{1 - (t^{p-1} + t)s + t^p}{(1 - 2ts + t^2)^{\frac{p}{2}}},$$

est bornée. Le calcul direct montre que pour t est fixé, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ si

$$1 - (t^{p-1} + t)s + t^p = \frac{t^{p-2} + 1}{p} (1 - 2ts + t^2),$$

alors on a :

$$\begin{aligned} f(t, s) &= \frac{t^{p-2} + 1}{p} \frac{1}{(1 - 2ts + t^2)^{\frac{p-2}{2}}} \\ &\geq \frac{1}{p(t+1)^{p-2}} \\ &\geq \frac{t^{p-2} + 1}{p} \min_{0 \leq t \leq 1} \frac{t^{p-2} + 1}{(t+1)^{p-2}} \\ &\geq \frac{1}{2p}. \end{aligned}$$

□

ESPACE DE LEBESGUE ET DE SOBOLEV

AVEC EXPOSANT VARIABLE

2.1 Espaces $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Les espaces de Lebesgue sont considérés comme cas particulier des espaces d'Orlicz qui appartiennent à une grande famille appelée espaces modulaires voir ([16, 24]; Chapitre 3). Cette approche correspond à la norme de Luxemburg et Orlicz sur $L^{p(\cdot)}$. Si la fonction p est finie presque partout sur Ω , alors $L^{p(\cdot)}$ est un cas particulier de ce qu'on appelle espace de Musielak-Orlicz traité par J.Musielak [14].

On considère Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on pose

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{p : \text{mesurable}; p : \Omega \longrightarrow [1, +\infty]\}.$$

Les élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont appelés exposants variables sur Ω , on pose

$$p_{\Omega}^{+} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } p(x) \text{ et } p_{\Omega}^{-} = \inf_{x \in \Omega} p(x)$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $p_{\mathbb{R}^n}^{+} = p^{+}$ et $p_{\mathbb{R}^n}^{-} = p^{-}$

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : p(x) = 1\}$$

$$\Omega_{\infty} = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$$

$$\Omega_{*} = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}$$

Définition 2.1. Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. On définit l'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{p(x)}$ suivant :

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ f \text{ est une fonction mesurable sur } \Omega : \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

posons

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \sup_{\Omega_\infty} |f(x)|$$

et

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Dans la proposition suivant, on rassemble quelques propriétés du module $\varrho_{p(\cdot)}$

Proposition 2.1. Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. La fonction $\varrho_{p(\cdot)}$ satisfait les propriétés suivantes :

- (a) $\varrho_{p(\cdot)}(f) \geq 0$ pour toute fonction f .
- (b) $\varrho_{p(\cdot)}(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p. dans Ω .
- (c) $\varrho_{p(\cdot)}(-f) = \varrho_{p(\cdot)}(f), \forall f$.
- (d) $\varrho_{p(\cdot)}$ est convexe.
- (e) Si $|f(x)| > |g(x)|$ p.p. $x \in \Omega$ et si $\varrho_{p(\cdot)}(f) < \infty$ alors $\varrho_{p(\cdot)}(f) > \varrho_{p(\cdot)}(g)$.
- (f) Si $0 < \varrho_{p(\cdot)}(f) < \infty$, alors la fonction $\lambda \mapsto \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right)$ est continue et décroissante dans $[1, +\infty[$.
- (g) $\varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq 1$ pour tout f avec $0 < \|f\|_{p(\cdot)} < \infty$.
- (h) Si $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, alors $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$.
- (i) Si f est une fonction mesurable sur Ω et $\Omega' \subset \Omega$ est vérifie la condition $\Omega' \subset \Omega_\infty$ ou bien $\Omega' \subset (\Omega_\infty)^c$ on a

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')} \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

Preuve. Les propriété (a), (b) et (c) sont faciles à vérifier.

- (d) Soient $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. On utilise la convexité de la fonction $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto t^p, \quad p \geq 1$, il vient

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)|^{p(x)} \leq \alpha |f(x)|^{p(x)} + \beta |g(x)|^{p(x)}$$

$\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$, avec $\alpha + \beta = 1$, p.p. $x \in \Omega$. En intégrant sur $\Omega \setminus \Omega_\infty$ on obtient

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |\alpha f + \beta g|^{p(x)} dx \leq \alpha \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f|^{p(x)} dx + \beta \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |g|^{p(x)} dx.$$

Et on a

$$|\alpha f + \beta g| \leq \alpha |f| + \beta |g|,$$

donc

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_\infty}(|\alpha f + \beta g|) &\leq \sup_{\Omega_\infty} \text{ess}(\alpha|f| + \beta|g|) \\ &\leq \sup_{\Omega_\infty} \text{ess}(\alpha|f|) + \sup_{\Omega_\infty} \text{ess}(\beta|g|) \\ &\leq \alpha \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |f| + \beta \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |g|. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \varrho_{p(\cdot)}(\alpha f + \beta g) &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |\alpha f + \beta g|^{p(x)} dx + \sup_{\Omega_\infty} \text{ess}(|\alpha f + \beta g|) \\ &\leq \alpha \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f|^{p(x)} dx + \beta \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |g|^{p(x)} dx + \alpha \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |f| + \beta \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |g| \\ &\leq \alpha \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f|^{p(x)} dx + \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |f| \right) + \beta \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |g|^{p(x)} dx + \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |g| \right) \\ &\leq \alpha \varrho_{p(\cdot)}(f) + \beta \varrho_{p(\cdot)}(g). \end{aligned}$$

(e) Soient f, g deux fonctions mesurables telles que

$|f(x)| \geq |g(x)|$ p.p. $x \in \Omega$. Pour $p : \Omega \rightarrow [1, +\infty[$ une fonction mesurable, on a

$$|f(x)|^{p(x)} \geq |g(x)|^{p(x)}.$$

En intégrant sur Ω on obtient

$$\int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx \geq \int_{\Omega} |g(x)|^{p(x)} dx,$$

ce qui veut dire

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) \geq \varrho_{p(\cdot)}(g).$$

(f) Soit λ un point de l'intervalle $[1, +\infty[$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset [1, +\infty[$ une suite tendant vers λ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{\lambda_n} \right|^{p(x)} = \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)}$$

et on a $\left| \frac{f(x)}{\lambda_n} \right|^{p(x)} \leq \|f(x)\|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$.

Alors, le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda_n} \right|^{p(x)} dx = \int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx,$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda_n}\right) = \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right)$.

Donc la fonction $\lambda \mapsto \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right)$ est continue. Soit maintenant $\lambda_1 > \lambda_2$ deux

nombre appartenant à $[1, \infty[$. On a :

$$\left| \frac{f(x)}{\lambda_1} \right|^{p(x)} \leq \left| \frac{f(x)}{\lambda_2} \right|^{p(x)}.$$

En intégrant sur Ω , on obtient $\varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda_1}\right) \leq \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda_2}\right)$ ce qui montre que la fonction $\lambda \mapsto \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right)$ est décroissante.

- (g) En utilisant la propriété caractéristique de la borne inférieure, on voit qu'il existe une suite $E_f = \{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ de points de l'ensemble $\{\lambda > 0 \mid \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}$ tendant vers $\|f\|_{p(\cdot)}$. En utilisant le lemme de Fatou, la propriété(f) et la définition tendant vers $\|f\|_{p(\cdot)}$. En utilisant le lemme de Fatou, la propriété(f) et la définition de la norme $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$, on obtient

$$\varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) = \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{\gamma_n} \right|^{p(x)} dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\gamma_n}\right) \leq 1.$$

- (h) Comme $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, en utilisant la convexité de $\varrho_{p(\cdot)}(f)$ on obtient

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) = \varrho_{p(\cdot)}\left(\|f\|_{p(\cdot)} \frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq \|f\|_{p(\cdot)} \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \|f\|_{p(\cdot)}$$

par ce que $\varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq 1$.

- (i) Soit u une fonction mesurable sur Ω et $\Omega' \subset \Omega$ et vérifie la condition $\Omega' \subset \Omega_{\infty}$ ou bien $\Omega' \subset (\Omega_{\infty})^c$ on a :

$$\varrho_{p(\cdot)}^{\Omega'}(f) = \int_{\Omega' \setminus \Omega'_{\infty}} |f(x)|^{p(x)} dx + \sup_{\Omega'_{\infty}} \text{ess } |f(x)| \leq \varrho_{p(\cdot)}(f)$$

donc

$$\left\{ \lambda > 0 \mid \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} \subset \left\{ \lambda > 0 \mid \varrho_{p(\cdot)}^{\Omega'}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

donc

$$\inf \left\{ \lambda > 0 \mid \varrho_{p(\cdot)}^{\Omega'}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} \leq \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

ce qui implique

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')} \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

□

2.1.1 Norme sur $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Définition 2.2. Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$.

On définit l'espace de Lebesgue avec exposant variable $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ par :

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{f \text{ mesurable} : \|f\|_{p(\cdot)} < \infty\}.$$

Proposition 2.2. L'application

$$\begin{aligned} L^{p(\cdot)}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \|f\|_{p(\cdot)} \end{aligned}$$

est une norme sur l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Preuve.

1. Si $f = 0$ p.p, alors

$$\|0\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{0}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} = \inf \{ \lambda > 0 \} = 0.$$

Et si $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$, on a :

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$$

d'après la propriété (h) de la Proposition 2.1 ce qui implique que $\varrho_{p(\cdot)}(f) = 0$ donc $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p.

2. Pour prouver que

$$\|\alpha f\|_{p(\cdot)} = |\alpha| \|f\|_{p(\cdot)},$$

on remarque que si $\alpha = 0$ l'égalité est vraie. Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{p(\cdot)} &= \inf \left\{ \lambda > 0, \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{\alpha f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\ &= |\alpha| \inf \left\{ \frac{\lambda}{|\alpha|} > 0, \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda/|\alpha|} \right) \leq 1 \right\} \\ &= |\alpha| \|f\|_{p(\cdot)}. \end{aligned}$$

3. L'inégalité triangulaire est évidemment vraie si l'une des fonctions f ou g est nulle.

Supposons donc que $f \neq 0$ et $g \neq 0$.

Grâce à la convexité de $\varrho_{p(\cdot)}$ et la propriété (g), on a :

$$\begin{aligned} \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f+g}{\|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}} \right) &= \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{\|f\|_{p(\cdot)}}{\|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}} \frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}} + \frac{\|g\|_{p(\cdot)}}{\|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}} \frac{g}{\|g\|_{p(\cdot)}} \right) \\ &\leq \frac{\|f\|_{p(\cdot)}}{\|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}} \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}} \right) + \frac{\|g\|_{p(\cdot)}}{\|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}} \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{g}{\|g\|_{p(\cdot)}} \right) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.3. [3, 6] *L'espace $(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(x)})$ est séparable, espace Banach, uniformément convexe et son espace conjugué est $L^{q(x)}(\Omega)$, où $\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{p(x)} = 1$.*

De plus, pour toute $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) \|f\|_{p(x)} \|g\|_{q(x)}. \quad (2.1)$$

L'inégalité 2.1 est appelé de **Hölder généralisé** (voir[17, 2])

Proposition 2.4. *Si $\varrho_{p(\cdot)}(f) > 1$, alors*

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) \geq \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la convexité de la fonction $\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$, en effet :

$$\varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\varrho_{p(\cdot)}(f)} \right) \leq \frac{1}{\varrho_{p(\cdot)}(f)} \varrho_{p(\cdot)}(f) = 1$$

Alors

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) \geq \|f\|_{p(\cdot)}.$$

□

Proposition 2.5. *Si la fonction $p(x) = p$ est constante, alors*

$$\|\cdot\|_{p(x)} = \|\cdot\|_p,$$

où $\|\cdot\|_p$ est la norme usuelle de l'espace $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Preuve. Si $f = 0$, c'est immédiat. Supposons que $f \neq 0$. Donc,

$$\begin{aligned} \|f\|_{p(x)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda^{p(x)}} |f(x)|^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\lambda^p} \|f\|_p^p dx \leq 1 \right\} \\ &= \inf \{ \lambda > 0 : \|f\|_p \leq \lambda \} \\ &= \|f\|_p. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.6. (a) Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$.

Alors,

$$\|f\|_{p(x)} = a \text{ si et seulement si } \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{a} \right) = 1.$$

(b) Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Si $\lambda > 1$, alors

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \lambda \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \lambda^{p^-} \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \varrho_{p(\cdot)}(f)(\lambda f) \leq \lambda^{p^+} \varrho_{p(\cdot)}(f)$$

et si $0 < \lambda < 1$, alors

$$\lambda^{p^+} \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \varrho_{p(\cdot)}(\lambda f) \leq \lambda^{p^-} \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \lambda \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \varrho_{p(\cdot)}(f)$$

Preuve. (a) (\Rightarrow) . On pose $I_f = [a, +\infty[$. Soit $\|f\|_{p(x)} = a$, alors,

$$\varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{a} \right) \leq 1.$$

Supposons que

$$\varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{a} \right) < 1.$$

Pour $t > 0$, la fonction $t \mapsto \varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{t} \right)$ est convexe, décroissant et continue. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{t} \right) < 1, \text{ pour } t \in (a - \delta, a + \delta).$$

Donc on a $a - \frac{\delta}{2} \in I_f$, ce qui est absurde. Par conséquent,

$$\varrho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{a} \right) = 1.$$

(\Leftarrow). Soit $\varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{a}\right) = 1$, alors, $a \in I_f$, d'où, $\|f\|_{p(x)} \leq a$. Supposons que $\|f\|_{p(x)} < a$. Donc, il existe $\lambda_0 \in I_f$ tel que

$$\|f\|_{p(x)} \leq \lambda_0 < a.$$

on obtient :

$$\varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{a}\right) < \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda_0}\right) \leq 1,$$

c'est à dire,

$$\|f\|_{p(x)} = a.$$

(b) Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$. Si $\lambda > 1$, alors on a :

$$|f(x)|^{p(x)} \leq \lambda |f(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^-} |f(x)|^{p(x)} \leq |\lambda f(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^+} |f(x)|^{p(x)}, \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Si $0 < \lambda < 1$, on a :

$$\lambda^{p^+} |f(x)|^{p(x)} \leq |\lambda f(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^-} |f(x)|^{p(x)} \leq \lambda |f(x)|^{p(x)} \leq |f(x)|^{p(x)}, \text{ p.p. dans } \Omega.$$

En intégrant les inégalités ci-dessus dans les deux cas, nous obtenons le résultat. \square

Proposition 2.7. Soit $\varrho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f|^{p(x)} dx$, $\forall f \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors,

(i) $\|f\|_{p(x)} < 1 (= 1; > 1) \Leftrightarrow \varrho(f) < 1 (= 1; > 1)$;

(ii) $\|f\|_{p(x)} > 1 \Rightarrow \|f\|_{p(x)}^{p^-} \leq \varrho(f) \leq \|f\|_{p(x)}^{p^+}$;

(iii) $\|f\|_{p(x)} < 1 \Rightarrow \|f\|_{p(x)}^{p^-} \geq \varrho(f) \geq \|f\|_{p(x)}^{p^+}$.

Preuve. (i) Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Si $f = 0$. c'est immédiat. On suppose que $f \neq 0$:

Si $\|f\|_{p(x)} = 1 \Leftrightarrow \varrho_{p(\cdot)}(f) = 1$, d'après le point (a) la proposition 2.6.

Si $\|f\|_{p(x)} = a < 1$, alors $1 < \frac{1}{a}$. Puisque $\varrho_{p(\cdot)}(\lambda f)$ croissant dans $\lambda \in [0, +\infty)$,

on a :

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) < \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{a}\right) < 1.$$

Si $\rho(f) < 1$, alors $1 \in I_f$, alors d'après le point (a) la proposition 2.6, nous obtenons le résultat $\|f\|_{p(x)} < 1$.

La preuve de l'autre équivalence est similaire.

(ii) Soit $\|f\|_{p(x)} = a > 1$. Alors,

$$\varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{a}\right) = 1.$$

Étant $\frac{1}{a} < 1$, par le point (b) de la proposition 2.6 on a :

$$\frac{1}{a^{p^+}} \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{a}\right) = 1 < \frac{1}{a^{p^-}} \varrho_{p(\cdot)}(f),$$

alors,

$$\|f\|_{p(x)}^{p^-} \leq \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(x)}^{p^+}.$$

(iii) Sémilaire à (ii). □

Proposition 2.8. Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, $(f_n) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$; $n = 1, 2, \dots$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{p(x)} = 0$;
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varrho_{p(\cdot)}(f - f_n) = 0$.

Preuve. (1) \Rightarrow (2).

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{p(x)} = 0$, pour toute $0 < \epsilon < 1$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ implique

$$\|f_n - f\|_{p(x)} < \epsilon < 1.$$

Donc,

$$\rho(f_n - f) \leq \|f_n - f\|_{p(x)}^{p^-} < \epsilon^{p^-} < \epsilon.$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n - f) = 0.$$

(2) \Rightarrow (1).

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{p(\cdot)}(f_n - f) = 0$, pour toute $0 < \epsilon < 1$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ implique

$$\varrho_{p(\cdot)}(f_n - f) < \epsilon^{p^+} < \epsilon < 1.$$

Alors, d'après la proposition 2.7 on a :

$$\|f_n - f\|_{p(x)} < 1,$$

$\forall n \geq n_0$. Alors, d'après la proposition 2.7 on a :

$$\|f_n - f\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(f_n - f) < \epsilon^{p^+}, \text{ pour toute } n \geq n_0.$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{p(x)} = 0.$$

□

2.2 l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ et $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$

Définition 2.3. On définit l'espace de Sobolev généralisé $W^{1,p(x)}(\Omega)$ (où encore espace de Sobolev d'exposant variable) par :

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{f \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla f| \in L^{p(x)}(\Omega)\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{1,p(x)} = \|f\|_{p(x)} + \|\nabla f\|_{p(x)}$$

pour tout $f \in W^{1,p(x)}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est défini comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$ par rapport à la norme $\|f\|_{1,p(x)}$.

Corollaire 2.1 (Inégalité de Poincaré). [11] Soit $p \in C(\bar{\Omega})$ tel que $p^- > 1$.

Alors, il existe $C > 0$ telle que :

$$\|f\|_{p(x)} \leq C \|\nabla f\|_{p(x)} \quad \forall f \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \quad 1 \leq p < \infty,$$

en particulière l'expression $\|\nabla f\|_{p(x)}$ est une norme sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ qui est équivalent à la norme $\|f\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}$.

D'après le corollaire 2.1, on peut écrire :

$$\|f\| = \|\nabla f\|_{p(x)} \quad \forall f \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Pour toute $p \in C(\bar{\Omega})$, on définit l'exposant critique de Sobolev :

$$p^*(x) = \begin{cases} Np(x)/(N - p(x)), & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases}.$$

Proposition 2.9 (L'injection continue et compacte). Soit $r \in C_+(\bar{\Omega})$, si $r(x) < p^*(x)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$, on a l'injection

$$W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$$

est compact et continue.

Proposition 2.10. (voir Fan et Zhao [3] et Zhao et Fan [4]) Si $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Caratheodory et satisfait

$$|f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{p_1(x)/p_2(x)} \quad \text{pour toute } x \in \Omega, s \in \mathbb{R},$$

où $p_1, p_2 \in C_+(\bar{\Omega})$, $a(x) \in L^{p_2(x)}(\Omega)$, $a(x) \geq 0$ et $b \geq 0$ est une constante, alors, le opérateur Nemytsky de $L^{p_1(x)}(\Omega)$ à $L^{p_2(x)}(\Omega)$ défini par :

$$(N_f(u))(x) = f(x, u(x))$$

est un opérateur continu et borné.

SUR L'OPÉRATEUR $p(x)$ -LAPLACIEN

3.1 Dérivabilité de la fonctionnelle J

Dans cette section, on va étudier quelques propriétés de l'opérateur $p(x)$ -laplacien, qui sera utilisés dans l'étude de notre problème fondamental.

Définition 3.1. Soit $u \in W^{1,q(x)}(\Omega)$, on définit l'opérateur $p(x)$ -laplacien par :

$$-\Delta_{p(x)}u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \cdot \nabla u).$$

On considère la fonctionnelle suivante :

$$J(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx, \quad u \in E := W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Lemme 3.1. La fonctionnelle J est de classe $C^1(E, \mathbb{R})$, de plus :

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx \quad \forall v, u \in E.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} J : W_0^{1,p(x)}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \end{aligned}$$

$J \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Étape 1 : Déterminer de Au telle que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \langle Au, v \rangle$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (\nabla u + t \nabla v)^{p(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (\nabla u)^{p(x)} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} [(\nabla u + t \nabla v)^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}] dx \right] \end{aligned}$$

on pose :

$$g(s) = |\nabla u + s \nabla v|^{p(x)}; \quad s \in [0, t].$$

D'après le théorème des accroissements finis sur la fonction g , on a :

$$\exists c_t \in]0, t[: g(t) - g(0) = g'(c_t) t ,$$

et par suite :

$$|\nabla u + t \nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)} = p(x) |\nabla u + c_t \nabla v|^{p(x)-2} (\nabla u + c_t \nabla v) t. \quad (3.1)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\nabla u + t \nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} &= \lim_{c_t \rightarrow 0} |\nabla u + c_t \nabla v|^{p(x)-2} (\nabla u + c_t \nabla v) \nabla v \\ &= |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on vérifie que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \frac{|\nabla u + t \nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{t} dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx$$

En effet :

D'après (3.2) On a :

$$h_n(x) \longrightarrow h(x) \quad \text{p.p dans } \Omega.$$

Où $t = \frac{1}{n}$ et :

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \frac{(|\nabla u + \frac{1}{n} \nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}) n}{p(x)} \\ h(x) &= |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après 3.1

$$\begin{aligned} |h_n(x)| &= |\nabla u + c_n \nabla v|^{p(x)-2} |\nabla u + c_n \nabla v|; \quad 0 < c_n < \frac{1}{n} < 1 \\ &= |\nabla u + c_n \nabla v|^{p(x)-1} \\ &\leq |\nabla u + \nabla v|^{p(x)-1}. \end{aligned}$$

Pour terminer cette étape, il suffit de vérifier que : $|\nabla u + \nabla v|^{p(x)-1} \in L^1(\Omega)$.

L'inégalité de Hölder 2.1 conduit à :

$$\int_{\Omega} |\nabla u + \nabla v|^{p(x)-1} dx \leq \|1\|_{L^{q(x)}} \left\| |\nabla u + \nabla v|^{p(x)-1} \right\|_{L^{p(x)}}$$

où :

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q(x)} = 1 - \frac{1}{p(x)} = \frac{p(x) - 1}{p(x)}$$

c'est à dire :

$$\int_{\Omega} |\nabla u + \nabla v|^{p(x)-1} dx \leq c \left\| |\nabla u + \nabla v|^{p(x)-1} \right\|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}$$

alors, on déduit :

$$\|u\| < \infty \Leftrightarrow \varrho_{p(\cdot)}(u) < \infty$$

c'est à dire :

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u + \nabla v|^{p(x)-1} \right)^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} dx < \infty$$

ce qui implique que :

$$\int_{\Omega} |\nabla u + \nabla v|^{p(x)} dx < \infty \quad \text{car } u, v \in W^{1,p(x)}$$

et par suite $|\nabla u + \nabla v|^{p(x)-1} \in L^1(\Omega)$.

Et on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx$$

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx.$$

Étape 2 : L'application :

$$Au : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto \langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx$$

est linéaire et continue.

Pour la linéarité est facilement à vérifier, et pour la continuité, il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder pour trouver une constante $C > 0$ telle que :

$$|\langle Au, v \rangle| \leq C \|v\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)}.$$

Plus précisément on a :

$$\begin{aligned} |\langle Au, v \rangle| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} \nabla v dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\nabla v\|_{p(x)} \|\nabla u\|_{p(x)-1} \\ &\leq C \|\nabla v\|_{p(x)} \|\nabla u\|_{p(x)} \end{aligned}$$

alors,

$$Au = J'_G(u) \quad (\text{Jest Gâteaux différentiable})$$

Étape 3 : On prouve que l'opérateur

$$\begin{aligned} A : W_0^{1,p(x)}(\Omega) &\longrightarrow \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)' \\ u &\longmapsto Au \end{aligned}$$

est continu. (Voir théorème 3.1). □

3.2 Propriétés topologiques de J'

Théorème 3.1. (i) $J' : E \rightarrow E'$ est un opérateur continu, borné et strictement monotone.

(ii) J' est une application de type (S_+) , i.e. si $u_n \rightharpoonup u$ dans E et

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (J'(u_n) - J'(u), u_n - u) \leq 0,$$

alors $u_n \rightarrow u$ dans E ;

(iii) $J' : E \rightarrow E'$ est un homéomorphisme.

Preuve. (i) Il est évident que J' est continu et borné. Pour la strictement monotonie de J' il suffit d'appliquer les inégalités suivantes (voir lemme 1.2) :

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \begin{cases} c_p |x - y|^p, & \text{si } p \geq 2 \\ c_p \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & \text{si } 1 < p < 2. \end{cases} \quad (3.3)$$

(ii) De (i), si $u_n \rightharpoonup u$ et

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (J'(u_n) - J'(u), u_n - u) \leq 0,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (J'(u_n) - J'(u), u_n - u) = 0.$$

D'après (1) et (2), ∇u_n converge vers ∇u en mesure dans Ω , nous obtenons donc une sous suite (que nous désignons toujours par ∇u_n) satisfaisante

$$\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Par lemme de Fatou 1.1, on obtient :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \geq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx. \quad (3)$$

De $u_n \rightarrow u$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (J'(u_n), u_n - u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (J'(u_n) - J'(u), u_n - u) = 0 \quad (4)$$

On a :

$$\begin{aligned} (J'(u_n), u_n - u) &= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla u dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)-1} |\nabla u| dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} \left(\frac{p(x)-1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} + \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \right) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

D'après (3) – (5), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx. \quad (6)$$

De (6), on déduit que les intégrales de la famille de fonctions $\left\{ (1/p(x)) |\nabla u_n|^{p(x)} \right\}$ une suite absolument équicontinue Ω (voir [12], chapitre 6, section 3).

Puisque

$$\frac{1}{p(x)} |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^{p(x)} \leq C \left(\frac{1}{p(x)} |\nabla u_n(x)|^{p(x)} + \frac{1}{p(x)} |\nabla u(x)|^{p(x)} \right) \quad (7)$$

les intégrales de la famille $\left\{ (1/p(x)) |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^{p(x)} \right\}$ sont également absolument équicontinue sur Ω (voir [12]) et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^{p(x)} dx = 0 \quad (8)$$

Par (8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^{p(x)} dx = 0 \quad (9)$$

D'après la proposition 2.8 et (9) $u_n \rightarrow u$ dans E , c'est-à-dire que J' est de type (S_+) .

(iii) Par la strictement monotonie, J' est une injection.

Puisque

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{(J'u, u)}{\|u\|} = \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx}{\|u\|} = \infty,$$

J' est coercitif, donc J' est une surjection au vu du théorème de Minty – Browder (voir [7], théorème 26A).

D'où J' admet une inverse $J'^{-1} : E' \rightarrow E$.

Par conséquent, la continuité de J'^{-1} est suffisante pour garantir que J' soit un homéomorphisme.

Si $f_n, f \in E'$, $f_n \rightarrow f$, soit $u_n = J'^{-1}(f_n)$, $u = J'^{-1}(f)$, alors

$$J'(u_n) = f_n, J'(u) = f$$

donc $\{u_n\}$ est borné par E .

Sans perte de généralité, on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u_0$. Comme $f_n \rightarrow f$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L(u_n) - L(u_0), u_n - u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, u_n - u_0) = 0 \quad (10)$$

puisque J' est de type (S_+) , alors $u_n \rightarrow u_0$, on conclut que $u_n \rightarrow u$, et par suite J'^{-1} est continu.

□

EXISTENCE DE SOLUTIONS FAIBLES D'UN PROBLÈME CONTENANT L'OPÉRATEUR $p(x)$ -LAPLACIEN

4.1 Présentation du problème

On considère le problème non linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u := -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné, $1 < p(x)$, et $p(x) \in C(\bar{\Omega})$. Notre objectif est de donner plusieurs résultats d'existence de solutions faibles pour le problème (P). Ces résultats sont des extensions de celui des problèmes p -laplaciens.

Définition 4.1 (Solutions faible du (P)). *On appelle $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est une solution faible de (P); si*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x, u)v \, dx \quad \forall v \in E := W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

4.2 Résultat d'existence d'un problème quasi-linéaire

On commence par le cas où f est ne dépend pas de u .

Théorème 4.1. Si $f(x, u) = f(x)$, $f \in L^{\alpha(x)}(\Omega)$, où $\alpha \in C_+(\bar{\Omega})$, satisfait

$$\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{p^*(x)} < 1, \text{ pour toute } x \in \bar{\Omega},$$

alors (P) admet une solution faible unique.

Preuve. Considérons la fonctionnelle T_f définie par :

$$\begin{aligned} T_f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto T_f(v) = \int_{\Omega} f(x)v \, dx. \end{aligned}$$

On montre que T_f est linéaire et continu.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in E$

$$\begin{aligned} T_f(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \int_{\Omega} f(x)(\alpha v_1 + \beta v_2) \, dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} f(x)v_1 + \beta \int_{\Omega} f(x)v_2 \\ &= \alpha T_f(v_1) + \beta T_f(v_2). \end{aligned}$$

Donc T_f est linéaire.

Soit $\beta \in C(\bar{\Omega})$ telle que :

$$\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{\beta(x)} = 1, \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Donc, en utilisant l'hypothèse, on a :

$$\frac{1}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x) - 1}{\alpha(x)} > \frac{1}{p^*(x)}, \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Alors,

$$\beta(x) < p^*(x), \text{ pour toute } x \in \bar{\Omega}.$$

Alors, d'après (ii) de la proposition 2.9, on obtient que l'injection :

$$E \hookrightarrow L^{\beta(x)}(\Omega).$$

est continue, c'est-à-dire il existe $C_1 > 0$ tel que :

$$\|v\|_{\beta(x)} \leq C_1 \|v\|, \text{ pour tout } v \in E. \quad (4.2)$$

En raison de l'inégalité de Hölder (2.1),

$$|T_f(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x)v \, dx \right| \leq C \|f\|_{\alpha(x)} \|v\|_{\beta(x)}. \quad (4.3)$$

Où :

$$C = \frac{1}{\alpha^-} + \frac{1}{\beta^-}.$$

Par (4.2) et (4.3), on obtient :

$$|T_f(v)| \leq C_2 \|v\|, \text{ pour tout } v \in E,$$

ce qui montre la continuité de T_f .

On considère la fonctionnelle suivante :

$$\forall T_f \in E', \exists! u \in E : J'(u) = T_f$$

$$\varphi(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx$$

$$\langle \varphi'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x) v dx \quad \forall v \in E := W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

On sait que u est un point critique de φ si : $\varphi'(u) = 0$ c'est-à-dire :

$$\langle \varphi'(u), v \rangle = 0, \quad \forall v \in E.$$

D'où :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x) v dx, \text{ pour tout } v \in E,$$

ce qui signifie que u est une solution faible de (P). □

4.3 Application d'un principe de Minimisation

Maintenant, soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifie l'hypothèse suivante (f_0) :

(f_0) $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait Carathéodory, de plus :

$$\exists C_1, C_2 > 0 : |f(x, t)| \leq C_1 + C_2 |t|^{\alpha(x)-1}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

où $\alpha \in C_+(\bar{\Omega})$ et $\alpha(x) < p^*(x)$.

On a besoin de prouver les lemmes suivants :

Lemme 4.1. La fonctionnelle $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$g(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx,$$

Où :

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds,$$

est de classe $C^1(E, \mathbb{R})$.

Preuve. Soit $u, v \in E$, $x \in \Omega$ et soit $0 < |t| < 1$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda(x, t) = \lambda \in (0, 1)$ tel que :

$$\frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} = f(x, u + \lambda tv)v. \quad (4.4)$$

Alors, :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} = f(x, u)v, \text{ p.p dans } \Omega. \quad (4.5)$$

On sait que :

$$v \in L^1(\Omega), L^{\alpha(x)}(\Omega).$$

Comme ça,

$$(|u| + |v|)^{\alpha(x)-1} \in L^{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}}(\Omega).$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder (2.1) et la condition (f_o) , on a :

$$\begin{aligned} |f(x, u + \lambda tv)v| &\leq C_1|v| + C_2|u + \lambda tv|^{\alpha(x)-1}|v| \\ &\leq C_1|v| + C_2(|u| + |v|)^{\alpha(x)-1}|v| \in L^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.6)$$

On utilise maintenant (4.4)-(4.6) et le théorème de convergence dominée, nous obtenons :

$$g'(u) \cdot v = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} dx = \int_{\Omega} f(x, u)v dx.$$

La continuité de g' découle de l'injection continue $E \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder (2.1.) Par conséquent, g est de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ \square

Lemme 4.2. Par les Lemmes (3.1) et (4.1) la fonctionnelle φ est de classe $C^1(E, \mathbb{R})$, et on a :

$$\varphi'(u)v = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \text{ pour tout } u, v \in E.$$

Ainsi, les solutions faibles de (P) sont exactement les points critiques de φ .

Lemme 4.3. L'opérateur $g' : E \rightarrow E'$ donné par

$$g'(u).v = \int_{\Omega} f(x, u)v dx$$

est complètement continue, c'est-à-dire si $u_n \rightharpoonup u$ dans E alors $g'(u_n) \rightarrow g'(u)$ dans E' .

Preuve. Soit $u_n \rightarrow u$ et soit $v \in E$, en utilisant la condition (f_0) et l'inégalité de Hölder (2.1), nous avons

$$\begin{aligned} |(g'(u_n) - g'(u), v)| &= \left| \int_{\Omega} (f(x, u_n) - f(x, u)) v dx \right| \\ &\leq C \|T_f(u_n) - T_f(u)\|_{\frac{\alpha(x)-1}{\alpha(x)}} \|v\|_{\alpha(x)} \\ &\leq \tilde{C} \|T_f(u_n) - T_f(u)\|_{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}} \|v\| \end{aligned}$$

Alors,

$$\|g'(u_n) - g'(u)\| \leq \tilde{C} \|T_f(u_n) - T_f(u)\|_{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}} \quad (4.7)$$

L'injection compacte $E \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$ nous permet de voir que

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^{\alpha(x)}(\Omega) \quad (4.8)$$

Alors, l'opérateur

$$T_f : L^{\alpha(x)}(\Omega) \rightarrow L^{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}}(\Omega)$$

est continue, par (4.8) on a :

$$T_f(u_n) \longrightarrow T_f(u) \text{ dans } L^{\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}}(\Omega)$$

Par conséquent, de (4.7), on conclut que

$$\|g'(u_n) - g'(u)\| \longrightarrow 0.$$

□

Lemme 4.4. La fonctionnelle $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx$$

Où : $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$, est faiblement continu, c'est-à-dire si $u_n \rightarrow u$, alors

$$g(u_n) \longrightarrow g(u).$$

Preuve. Puisque f satisfait la condition (f_0) , on a :

$$\begin{aligned} |F(x, t)| &= \left| \int_0^t f(x, s) ds \right| \\ &\leq \int_0^t (C_1 + C_2 |s|^{\alpha(x)-1}) ds \\ &\leq C_1 |t| + C_2 |t|^{\alpha(x)} \end{aligned}$$

$$\leq C (1 + |t|^{\alpha(x)}), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

On considère l'opérateur Nemytskii suivant :

$$T_F : L^{\alpha(x)}(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$$

On sait que l'injection suivante : $E \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$ est compact, alors on a :

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^{\alpha(x)}(\Omega) \quad (4.10)$$

De (4.10) et de la continuité de T_F , on a :

$$T_F(u_n) \longrightarrow T_F(u) \text{ dans } L^1(\Omega) \quad (4.11)$$

On a les estimations :

$$\begin{aligned} |g(u_n) - g(u)| &= \left| \int_{\Omega} (F(x, u_n) - F(x, u)) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |F(x, u_n) - F(x, u)| dx \\ &= \int_{\Omega} |T_F(u_n) - T_F(u)| dx. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Donc, en combinant (4.11) et (4.12), on conclut que :

$$g(u_n) \longrightarrow g(u).$$

□

Théorème 4.2. *Si f satisfait la condition :*

$$|f(x, t)| \leq C_1 + C_2 |t|^{\beta-1}, \quad \text{où } 1 \leq \beta < p^-, \quad (4.13)$$

alors (P) admet au moins une solution faible dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Preuve. De (4.13) on a :

$$|F(x, t)| \leq C (1 + |t|^{\beta}),$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^-} - C \int_{\Omega} |u|^{\beta} dx - C_3 \\ &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^-} - C_4 \|u\|^{\beta} - C_3 \rightarrow +\infty, \quad \text{quand } \|u\| \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Comme φ est faiblement semi-continu inférieurement, alors d'après le théorème 1.2, φ admet un point minimum u dans E , et u est une solution faible de (P). □

4.4 Existence de solutions non triviales via le théorème du Col

On introduit un critère de compacité important appelé la condition de Palais-Smale.

Définition 4.2 (Condition de Palais–Smale (PS)). Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle.

On dit que φ est satisfait la condition de Palais–Smale (PS), si pour toute suite $\{u_n\} \subset E$ telle que :

$$|\varphi(u_n)| \leq 0 \quad \text{et} \quad \|\varphi'(u_n)\|_{E'} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty.$$

On peut extraire une sous-suite convergente dans E .

Lemme 4.5. Si f satisfait l'hypothèse suivant :

$(f_1) \exists M > 0, \theta > p^+$ tel que :

$$0 < \theta F(x, t) \leq t f(x, t), \quad |t| \geq M, \quad x \in \Omega,$$

alors, φ satisfait la condition (PS).

Preuve. Soit $\{u_n\} \subset E$, $\{\varphi(u_n)\}$ est borné et $\|\varphi'(u_n)\| \rightarrow 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ définir l'ensemble suivant :

$$\Omega_n = \{x \in \Omega : |u_n(x)| \geq M\}$$

Utilisons l'hypothèse du lemme et (f_o) , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(x, u_n) dx &= \int_{\Omega_n} F(x, u_n) dx + \int_{\Omega_n^c} F(x, u_n) dx \\ &\leq \int_{\Omega_n} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx + C_3 \int_{\Omega_n^c} (1 + M^{\alpha(x)}) dx \\ &\leq \int_{\Omega_n} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx + C_4. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Remarquons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx &= \int_{\Omega} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx - \int_{\Omega_n^c} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx + \frac{M}{\theta} \int_{\Omega_n^c} (C_1 + C_2 M^{\alpha(x)-1}) dx \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\Omega} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx + C_5. \quad (4.15)$$

Supposons que $\|\nabla u_n\|_{p(x)} > 1$, pour toute $n \in \mathbb{N}$. Donc, en utilisant (4.14) et (4.15), on

a :

$$\begin{aligned} C &\geq \varphi(u_n) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx - C_6 \\ &\geq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{\theta} \right) |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\theta} \left(|\nabla u_n|^{p(x)} - u_n f(x, u_n) \right) dx - C_6 \\ &\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta} \right) |\nabla u_n|_{p(x)}^{p^-} - \frac{1}{\theta} \|\varphi'(u_n)\| \|u_n\| - C_6. \end{aligned} \quad (4.16)$$

car :

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u_n|^{p(x)} - u_n f(x, u_n) \right) dx = \varphi'(u_n) u_n \leq \|\varphi'(u_n)\| \|u_n\|.$$

Puisque :

$$\|\varphi'(u_n)\| \longrightarrow 0.$$

on déduit de (4.16) que $\{\|u_n\|\}$ est bornée. Comme E est un espace de Banach réflexif, il existe une sous-suite telle que $u_n \rightarrow u$, par lemme 4.3, on a :

$$g'(u_n) \longrightarrow g'(u) \quad (4.17)$$

D'une part on a :

$$J'(u_n) - g'(u_n) = \varphi'(u_n) \longrightarrow 0,$$

alors, par (4.17), on obtient :

$$J'(u_n) \longrightarrow g'(u).$$

Donc :

$$u_n \longrightarrow J'^{-1}(g'(u)),$$

car J' est un homéomorphisme, nous concluons que :

$$u_n \longrightarrow u.$$

Donc, φ satisfait la condition (PS). □

On introduit un théorème important qui assure l'existence d'un point critique d'une fonctionnelle qui appelé théorème du col (Mountain pass).

Théorème 4.3 (du Col de montagne). (Voir [15, 22]) Soient E un espace de Banach, $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $\varphi(0) = 0$ et que :

- (i) il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$, alors $\varphi(u) \geq a$;
- (ii) il existe $u_0 \in E$ tel que $\|u_0\| > R$ et $\varphi(u_0) < a$.

Alors φ possède une valeur critique C telle que $C \geq a$. De façon plus précise, si on pose

$$\mathcal{B} := \{\varphi([0, 1]); \varphi \in C([0, 1], X), \varphi(0) = 0, \varphi(1) = u_0\},$$

et :

$$C := \inf_{A \in \mathcal{B}} \max_{v \in A} \varphi(v),$$

alors C est une valeur critique de φ , et $C \geq a$.

On considère l'hypothèse suivant :

$$(f_2) \quad \limsup_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in \Omega} \frac{f(x, t)}{|t|^{p^+ - 1}} = 0.$$

Lemme 4.6. Si f vérifie les hypothèses (f_0) et (f_2) , alors on a :

$$F(x, t) \leq \varepsilon |t|^{p^+} + C_\varepsilon |t|^{\alpha(x)}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \text{ où } \alpha^- > p^+.$$

Preuve. Supposons que f vérifie (f_0) et (f_2) , c'est-à-dire :

$$(f_0) \quad F(x, t) \leq C_1 + C_2 |t|^{\alpha(x)}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

$$(f_2) \quad \limsup_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in \Omega} \frac{f(x, t)}{|t|^{p^+ - 1}} = 0.$$

Si $t > 0$:

$$\begin{aligned} (f_0) &\Rightarrow \int_0^t -C_1 - C_2 |s|^{\alpha(x)-1} ds \leq \int_0^t f(x, s) ds \leq \int_0^t C_1 + C_2 |s|^{\alpha(x)-1} ds, \\ &\Rightarrow F(x, t) \leq C_1 t + \frac{C_2}{\alpha(x)} t^{\alpha(x)}. \end{aligned}$$

Si $t < 0$:

$$F(x, t) \leq C_1(-t) + \frac{C_2}{\alpha(x)} (-t)^{\alpha(x)}.$$

Alors,

$$F(x, t) \leq C_1 |t| + \frac{C_2}{\alpha(x)} |t|^{\alpha(x)}.$$

On sait que :

$$p^+ < \alpha^- \leq \alpha(x) < p^*(x), \text{ pour toute } x \in \bar{\Omega}.$$

Donc, l'injection suivante :

$$E \hookrightarrow L^{p^+}(\Omega)$$

est continue, c'est-à-dire il existe $C_o > 0$ tel que :

$$\int_{\Omega} |u|^{p^+} dx \leq C_o \|u\|^{p^+}, \text{ pour toute } u \in E. \quad (4.18)$$

Par (f_2) , on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ tel que : $|t| < \delta$ implique

$$\frac{|f(x, t)|}{|t|^{p^+-1}} \leq \varepsilon, \text{ pour toute } x \in \Omega.$$

Alors,

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon |t|^{p^+-1}, \text{ pour toute } x \in \Omega.$$

Par (f_o) , pour tout $|t| \geq \delta$, on a :

$$\delta^{\alpha^+-1} < \delta^{\alpha(x)-1} \leq |t|^{\alpha(x)-1},$$

alors, on a :

$$\begin{aligned} \frac{|f(x, t)|}{|t|^{\alpha(x)-1}} &\leq \frac{C_1 + C_2 |t|^{\alpha(x)-1}}{|t|^{\alpha(x)-1}} \\ &= \frac{C_1}{|t|^{\alpha(x)-1}} + C_2 \\ &\leq \frac{C_1}{\delta^{\alpha^+-1}} + C_2 = C_\varepsilon. \end{aligned}$$

Alors,

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon |t|^{\alpha(x)-1}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (4.19)$$

Donc, d'après (4.18) et (4.19) on a :

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon |t|^{p^+-1} + C_\varepsilon |t|^{\alpha(x)-1}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

en intégrant sur Ω :

$$F(x, t) \leq \varepsilon |t|^{p^+} + C_\varepsilon |t|^{\alpha(x)}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

□

Lemme 4.7. *Si f vérifie l'hypothèse (f_1) , alors, on a :*

$$F(x, t) \geq C|t|^\theta, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, |t| \geq M.$$

Preuve. Supposons que f vérifie :

$$\exists M > 0, \theta > p^+ \quad 0 < \theta F(x, t) \leq tf(x, t), \quad \forall |t| \geq M, x \in \Omega.$$

$\forall x \in \Omega$ et $\tau \geq M$, on a :

$$\frac{\theta}{\tau} \leq \frac{f(x, \tau)}{F(x, \tau)} \quad (4.21)$$

En intégrant (4.21) par rapport τ de M à t , on obtient :

$$F(x, t) \geq C_4|t|^\theta, \quad \text{pour toute } x \in \Omega, t \geq M. \quad (4.22)$$

D'autre part, si $\tau < -M$, alors en utilisant (f_1) on obtient :

$$\frac{\theta}{\tau} \geq \frac{f(x, \tau)}{F(x, \tau)}. \quad (4.23)$$

En intégrant (4.23) par rapport τ de t à $-M$, on obtient :

$$F(x, t) \geq C_5|t|^\theta, \quad \forall x \in \Omega, t \leq -M. \quad (4.24)$$

Alors, il résulte de (4.22) et (4.24) que :

$$F(x, t) \geq C_6|t|^\theta, \quad \forall x \in \Omega, |t| \geq M. \quad (4.25)$$

□

Ceci le résultat fondamental de cette section.

Théorème 4.4. *Si f satisfait (f_0) , (f_1) et (f_2) où $\alpha^- > p^+$, alors le problème (P) admet une solution non triviale.*

Preuve. D'après le lemme 4.6, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ &\geq \frac{1}{p^+} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p^+} dx - \frac{\varepsilon}{p^+} \int_{\Omega} |u|^{p^+} dx - C_{\varepsilon} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(x)} dx. \end{aligned} \quad (4.26)$$

D'après l'injection continue

$$E \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega),$$

il existe $C_3 > 0$ tel que :

$$\|u\|_{\alpha(x)} \leq C_3 \|u\| \leq RC_3 < 1. \quad (4.27)$$

Par (4.27) et la proposition 2.7, on a :

$$\int_{\Omega} |u|^{\alpha(x)} dx \leq \|u\|_{\alpha(x)}^{\alpha^-} \leq \|u\|^{\alpha^-}. \quad (4.28)$$

En utilisant (4.18) et (4.28) dans (4.26), on a :

$$\begin{aligned} \varphi(u) &\geq \frac{1}{p^+} \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^+} - \frac{\varepsilon}{p^+} C_o^{p^+} \|u\|^{p^+} - C_\varepsilon \|u\|^{\alpha^-} \\ &\geq \frac{C}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\varepsilon C_o^{p^+}}{p^+} \|u\|^{p^+} - C_\varepsilon \|u\|^{\alpha^-} \\ &\geq \left(\frac{C}{p^+} - \frac{\varepsilon C_o^{p^+}}{p^+} \right) \|u\|^{p^+} - C_\varepsilon \|u\|^{\alpha^-}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Pour

$$0 < \varepsilon < \frac{C}{2C_o^{p^+}},$$

par (4.29), on a :

$$\varphi(u) \geq \frac{C}{2p^+} \|u\|_{p(x)}^{p^+} - C_\varepsilon \|u\|^{\alpha^-}, \quad \text{pour } \|u\| = R. \quad (4.30)$$

On choisit $R > 0$ de sorte que :

$$\frac{C}{2p^+} R^{p^+} - C_\varepsilon R^{\alpha^-} > 0.$$

C'est-à-dire,

$$0 < R^{\alpha^- - p^+} < \frac{C}{2p^+ C_\varepsilon},$$

d'où :

$$0 < R < \left(\frac{C}{2p^+ C_\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha^- - p^+}}.$$

On prend :

$$a = \frac{C}{2p^+} R^{p^+} - C_\varepsilon R^{\alpha^-}.$$

Par (4.30), alors, on a :

$$\varphi(u) \geq a > 0, \quad \forall u \in E \text{ avec } \|u\| = R.$$

Maintenant, on montre la deuxième condition géométrique du théorème du Col. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $t > 1$, pour $w \in E \setminus \{0\}$.

Par (4.25) et par un argument similaire pour obtenir l'équation (4.14) et (4.15), on a :

$$\begin{aligned} \varphi(tw) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |t \nabla w|^{R(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, tw) dx \\ &\leq t^{p^+} \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla w|^{p(x)} dx - C_6 t^{\theta} \int_{\Omega} |w|^{\theta} dx - C_7 \\ &= t^{p^+} \varrho_{p(\cdot)}(\nabla w) - C_6 t^{\theta} \|w\|_{L^{\theta}} - C_7. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Par (4.31), en utilisant l'hypothèse $\theta > p^+$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(tw) = -\infty,$$

ce qui implique que il existe $t_o > 0$ tel que :

$$\|t_o w\| > R \text{ et } \varphi(t_o w) < 0,$$

et on choisit $u_0 = t_o w \in E$ et par suite $\varphi(u_0) < 0$ et $\|u_0\| > R$.

Donc, d'après les lemmes 4.6 et 4.7 la fonctionnelle φ satisfait les conditions du théorème du Col de montagne donc elle admet au moins un point critique non trivial et par suite notre problème admet une solution non triviale. \square

4.5 Résultat d'existence et multiplicités

Soit E un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$ et $E = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} e_j}$ avec, $\dim e_j < \infty \forall j \in \mathbb{N}$. Soit

$$Y_k = \bigoplus_{j=0}^k e_j, \quad Z_k = \overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty} e_j},$$

et

$$B_k = \{u \in Y_k : \|u\| \leq \rho_k\}. \quad N_k = \{u \in Z_k : \|u\| = r_k\} \quad \text{pour } \rho_k > r_k > 0.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 4.5. *Si f satisfait (f_0) , (f_1) et*

(f_3) $f(x, -t) = -f(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, alors φ a une suite de points critiques $\{u_n\}$ tel que $\varphi(u_n) \rightarrow +\infty$ et (P) a une infinité de paires de solutions.

Afin de prouver le théorème 4.5, nous avons besoin du résultat préliminaire. Soit E un espace de Banach réflexif et séparable, alors il existe $\{e_j\} \subset E$ et $\{e'_j\} \subset E'$ tel que

$$E = \overline{\text{vect} \{e_j \mid j = 1, 2, \dots\}}, \quad E' = \overline{\text{vect} \{e'_j \mid j = 1, 2, \dots\}},$$

et

$$\langle e'_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Nous écrivons

$$E_j = \text{vect} \{e_j\}, \quad Y_k = \bigoplus_{j=1}^k E_j, \quad Z_k = \bigoplus_{j=k}^{\infty} E_j.$$

Lemme 4.8. Si $\alpha \in C_+(\bar{\Omega})$, $\alpha(x) < p'(x)$ pour toute $x \in \bar{\Omega}$, dénoter

$$\beta_k = \sup \{ \|u\|_{\alpha(x)} \mid \|u\| = 1, u \in \mathbb{Z}_k \},$$

alors, $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$.

Preuve. Évidemment, $0 < \beta_{k+1} \leq \beta_k$, alors $\beta_k \rightarrow \beta \geq 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure vérifie :

$$\forall \frac{1}{k} > 0, \exists u_k \in \mathbb{Z}_k, \|u_k\| = 1, \quad \beta_k - \frac{1}{k} < \|u_k\|_{\alpha(x)} \leq \beta_k,$$

donc,

$$\forall \frac{1}{k} > 0, \exists u_k \in \mathbb{Z}_k, \|u_k\| = 1, \quad 0 \leq \beta_k - \|u_k\|_{\alpha(x)} < \frac{1}{k}.$$

Alors il existe une sous-suite de $\{u_k\}$ (que nous désignons toujours par u_k) de telle que $u_k \rightharpoonup u$, et

$$\langle e'_j, u \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle e'_j, u_k \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Ce qui implique que $u = 0$, et donc $u_k \rightarrow 0$. Comme l'injection de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $L^{\alpha(x)}(\Omega)$ est compact, alors $u_k \rightarrow 0$ dans $L^{\alpha(x)}(\Omega)$. Par conséquent, nous obtenons $\beta_k \rightarrow 0$. \square

Preuve du théorème 4.5. D'après (f_3) , (f_1) , la fonctionnelle φ satisfait la condition (PS). Nous prouverons que si k est assez grand, alors il existe $\rho_k > \gamma_k > 0$ telle que :

$$(A_1) \quad b_k := \inf \{ \varphi(u) \mid u \in \mathbb{Z}_k, \|u\| = \gamma_k \} \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty);$$

(A₂) $a_k := \max \{ \varphi(u) \mid u \in Y_k, \|u\| = \rho_k \} \leq 0 :$

Soit $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ \varphi(-u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, -u) dx\end{aligned}\tag{4.32}$$

et on a :

$$F(x, -u) = \int_0^{-u} f(x, s) ds,$$

on pose

$$s = -t.$$

$$ds = -dt.$$

Alors,

$$\begin{aligned}F(x, -u) &= - \int_0^{-u} f(x, -t) dt \\ &= \int_0^u f(x, t) dt \\ &= F(x, u).\end{aligned}\tag{4.33}$$

D'après (4.32) et (4.33), on a :

$$\varphi(-u) = \varphi(u),$$

donc φ est paire.

L'affirmation du théorème 4.5 peut être obtenue à partir du théorème de fontaine (voir [21]).

(A₁) Pour toute $u \in \mathbb{Z}_k$, $|u| = \gamma_k = \left(C\alpha^+\beta_k^{\alpha^+}\right)^{1/(p^--\alpha^+)}$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\
&\geq \frac{1}{p^+} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx - C \int_{\Omega} |u|^{\alpha(x)} - C_1 \\
&\geq \frac{1}{p^+} |u|^{p^-} - C |u|_{\alpha(x)}^{\alpha(\xi)} - C_2, \quad \text{où } \xi \in \Omega \\
&\geq \begin{cases} \frac{1}{p^+} |u|^{p^-} - C - C_2 & \text{si } |u|_{\alpha(x)} \leq 1 \\ \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^-} - C\beta_k^{\alpha^+} |u|^{\alpha^+} - C_2 & \text{si } |u|_{\alpha(x)} > 1 \end{cases} \\
&\geq \frac{1}{p^+} |u|^{p^-} - C\beta_k^{\alpha^+} |u|^{\alpha^+} - C_3 \\
&= \frac{1}{p^+} \left(C\alpha^+\beta_k^{\alpha^+}\right)^{p^-/(p^--\alpha^+)} - C\beta_k^{\alpha^+} \left(C\alpha^+\beta_k^{\alpha^+}\right)^{\alpha^+/(p^--\alpha^+)} - C_3 \\
&= \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\alpha^+}\right) \left(C\alpha^+\beta_k^{\alpha^+}\right)^{p^-/(p^--\alpha^+)} - C_3 \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

car $p^+ < \alpha^+$ et $\beta_k \rightarrow 0$.

(A₂) de la part de (f_1) , on a :

$$F(x, t) \geq c_1 |t|^\theta - C_2.$$

Par $\theta > p^+$ et $\dim Y_k = k$, il est facile de voir que $g(u) \rightarrow -\infty$ comme $\|u\| \rightarrow +\infty$ pour $u \in Y_k$. □

Conclusion

La méthode de point critique est un outil permettant de montrer l'existence d'au moins une solution faible de problème semi linéaire grâce à la fonctionnelle d'énergie associée à ce problème.

En perspective : En généralisé l'équation 4.1 dans l'espace d'Olicz Sobolev et démontrer l'existence et l'unicité par la mémé méthode.

Bibliographie

- [1] C.K. Zhong, X.L. Fan, W.Y. Chen, *Introduction to Nonlinear Functional Analysis*, Lanzhou University Press, Lanzhou, 1998.
- [2] D. Zhao, X.L. Fan and J. Shen, *Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$* , *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 262(2001) 749 – 760.
- [3] D. Zhao, X.L. Fan, *On the generalized Orlicz-Sobolev space $W^{k,p(x)}(\Omega)$* , *J. Gansu Education College* 12 (1) (1998) 1 – 6.
- [4] D. Zhao, X.L. Fan, *On the Nemytsky operators from $L^{p_1(x)}$ to $L^{p_2(x)}$* , *J. Lanzhou Univ.* 34 (1) (1998) 1 – 5.
- [5] D. Zhao, X. L. Fan, *On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$* , *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 263, 424 – 446(2001).
- [6] D. Zhao, X.L. Fan, W.J. Qiang, *On generalized Orlicz spaces $L^{p(x)}(\Omega)$* , *J. Gansu Sci.* 9(2)(1996) 1 – 7.
- [7] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/B : Nonlinear Monotone Operators*, Springer, New York, 1990.
- [8] F.D. Thelin, *Local regularity properties for the solutions of a nonlinear partial differential equation*, *Nonlinear Anal.* 6 (1982) 839 – 844.
- [9] G. Dinca, *A Fredholm-type result for a couple of nonlinear operators*, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris* 333 (2001), 415–419.
- [10] G. Dinca, P. Jebelean and J. Mawhin, *Variational and topological methods for Dirichlet problems with p -laplacian*, *Port. Math. (N.S.)* 58 (2001), 339–378.
- [11] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [12] I.P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Nauka, Moscow, 1950.

- [13] J.J. Nieto ,D. O'Regan. *Variational approach to impulsive differential equations*. Nonlinear Analysis. 10(2009), 680 – 690.
- [14] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular spaces*, Lecture Notes, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [15] K.C. Chang, *Critical Point Theory and Applications*, Shanghai Scientific and Technology Press, Shanghai, 1986.
- [16] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ružicka, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, December 2, 2010.
- [17] L. Diening, *Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$* , Mathematische Nachrichten 268 (2004) 31 – 43.
- [18] L. Diening, *Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids*, Ph.D thesis, University of Freiburg, Germany, 2002.
- [19] M. Briki, *MÉMOIRE MAGISTER, Étude de quelques problèmes aux limites par des méthodes variationnelles*, ENS-Kouba, Alger, 2012.
- [20] M. Ruzicka, *Electrorheological Fluids : Modeling and Mathematical Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [21] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhauser, Basel, 1996.
- [22] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, London, Paris, Tokyo, HongKong, Barcelona, Budapest.
- [23] O. Kováčik & J. Rákosník, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W_0^{1,p(x)}$* , Czechoslovak Math, J. 41(116)(1991), 592 – 618.
- [24] P. Harjulehto, P. Hästö, *Orlicz spaces and Generalized Orlicz spaces*, June 27, 2018.
- [25] S. Kichenassamy, L. Veron, *Singular solutions of the p -Laplace equation*, Math. Ann. 275 (1985) 599 – 615.
- [26] X. L. Fan, Q. H. Zhang, *Existence of solutions for $p(x)$ -laplacian Dirichlet problem*, Nonlinear Analysis 52(2003), 1843 – 1852