

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF- M'SILA

MÉMOIRE

Présenté à la Faculté des Mathématiques et de l'informatique

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de mater

Spécialité: Mathématiques Fondamentales

Option: Analyse Fonctionnelle

Par:

Ladjel Khawla

Intitulée:

Sur les opérateurs p -intégrales

Soutenue publiquement le: 10/06/2015, devant le jury:

Mezrag Lahcène	Prof.	Université Mohamed Boudiaf- M'sila	Président
Dahia Elhadj	M.C.B	Université Mohamed Boudiaf- M'sila	Rapporteur
Achour Dahmane	Prof.	Université Mohamed Boudiaf- M'sila	Examineur

Promotion 2014/2015

0.1 Remerciements

Je remercie en tout d'abord mon Dieu, qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

Table des matières

0.1	Remerciements	2
0.2	Résumé	3
0.3	Introduction	4
1	Notations et préliminaires	5
1.1	Opérateurs linéaires bornés	6
1.2	Les espaces de Banach classique $C(K)$, L^p et $\ell_p(1 \leq p \leq \infty)$	8
1.3	Espaces de suites à valeur d'un espace de Banach	10
1.4	Idéal des opérateurs linéaires	11
1.5	Les opérateurs p -sommants	13
2	Les opérateurs p-intégrales	17
2.1	Définitions et Propriétés	18
2.2	Théorème d'extension	21
3	Relation avec d'autres classes d'opérateurs	23
3.1	Opérateurs p -intégrales et opérateurs p -sommants.	24
3.2	Opérateurs p -intégrales et opérateurs p -nucléaires.	28

0.2 Résumé

Dans ce mémoire, on étudiera la classe des opérateurs p -intégrales qui sont en général des opérateurs qui se factorise à travers les espaces bien connus, $L_\infty(\mu)$ et $L_p(\mu)$. On étudiera de même la relation entre ces opérateurs et les opérateurs p -sommants et p -nucléaires.

Mots clés : opérateur p -intégrale, opérateur p -sommant, opérateur p -nucléaire.

Il a été démontré que l'opérateur T_p admet la factorisation suivante

$$T_p : X \xrightarrow{\alpha} L_\infty(\mu) \xrightarrow{\beta} L_1(\mu) \xrightarrow{\gamma} Y$$

où α et β sont des opérateurs linéaires bornés.

En 1971, Pitts a introduit le cas général de ce concept c'est à dire les opérateurs linéaires p -intégrales avec $1 \leq p \leq \infty$, l'objectif de notre mémoire.

Notre travail se divise en trois chapitres. Le chapitre 1 est un rappel sur les opérateurs linéaires bornés, les espaces de Banach classiques et les relations de dualité concernant les espaces L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

Dans le deuxième chapitre, on étudie l'idéal \mathcal{I}_p des opérateurs linéaires p -intégrales. Le troisième chapitre représente une comparaison entre ces opérateurs, les opérateurs p -sommants et les opérateurs p -nucléaires.

0.3 Introduction

La classe des opérateurs 1-intégrales est introduite par Grothendieck [6] en 1955. En effet, un opérateur linéaire u entre deux espaces de Banach X et Y est 1-intégrale s'il existe une mesure de probabilité μ sur $B_{X^*} \times B_{Y^{**}}$ tel que, pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$ on a

$$\langle u(x), y^* \rangle = \int_{B_{X^*} \times B_{Y^{**}}} \langle x, x^* \rangle \langle y^*, y^{**} \rangle d\mu.$$

Il a montré que cette égalité équivaut que l'opérateur $k_Y \circ u$ admet la factorisation suivante

$$k_Y \circ u : X \xrightarrow{b} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i} L_1(\mu) \xrightarrow{a} Y^{**}$$

où a et b sont des opérateurs linéaires bornés.

En 1971 Pietsch [5] a étudié le cas général de ce concept c'est-à-dire les opérateurs linéaires p -intégrales avec $1 \leq p \leq \infty$, l'objectif de notre mémoire.

Notre travail se divise en trois chapitres. Le chapitre 1 est un rappel sur les opérateurs linéaires bornés, les espaces de Banach classiques et les relations de dualité concernant les espaces ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$).

Dans le deuxième chapitre, on étudie l'idéal \mathcal{I}_p des opérateurs linéaires p -intégrales. Le troisième chapitre représente une comparaison entre ces opérateurs, les opérateurs p -sommants et les opérateurs p -nucléaires.

Bibliographie

- [1] H. Apiola, *Duality between spaces of p -summable sequences, (p, q) -summing operators and characterizations of nuclearity*, Math. Ann. **219** (1976), 53–64.
- [2] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note Mat. **25** (2005/2006), 69–102.
- [3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, MASSON Paris, New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [4] B. M. Cerna Maguiña, *Operadores multilineares p -factoráveis*, PhD Thesis, Universidade Estadual de Campinas (IMECC-unicamp), 2005.
- [5] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*. Cambridge University Press, 1995.
- [6] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1956), 1–79.
- [7] Matos, M. C. *Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equations*. IMECC-UNICAMP (2007), http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2007/pdf/rp03-07.pdf
- [8] A. Pietsch, *Operator ideals*. Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.