REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

Méthodes numériques pour résoudre des équations intégrales linéaires de type Fredholm

Présentée par : *CHAKI Nasrine*

Soutenu publiquement le : ../10/2020.

Devant le jury composé de :

Mr. SELT Omar	M.C.A	Université de M'sila	**Président**.
Mr. DILMI Mustapha	M.C.B	Université de M'sila	**Encadreur.**
Mr. GAGUI Bachir	M.C.A	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2019/2020

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier "Allah" le tout puissant et miséricordieux, qui ma donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

Premièrement et particulièrement, je tients à remercier vivement mon promoteur Mr. DILMI Mustapha pour sa guidance patiement et pour son soutient constant pendant la rédaction de ce mèmoire, ses conseils, ses orientations, dés le début sa confiance à mon égard et à mon travail m'a donnée une énergie et une inspiration de soulever touts les difficultés.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Je remercier à touts les enseignants du département de Mathématique, sans oublies aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire .

Enfin, un grand merci à ma famille, notamment à mes parents et mon mari à qui nous devons en grand partie l'accomplissement de ce travail par l'espoir et la confiance qui'ils ont toujours su nous donner.

الملخص

في هذه المذكرة إستخدمنا كثيرات حدود توشارد لتقريب حلول معادلة فريدولم التكاملية من النوع الثاني حيث طبقنا عدة أمثلة للتأكد من مدى دقة هذه الطريقة.

الكلمات المفتاحية : معادلة فريدولم التكاملية، كثيرات حدود توشارد.

Abstract

In this thesis we presente an numerical solution of Fredholm integral equation of the second kind. The method is based on the use of Touchard polynomials. Some numerical examples are presented to illustrate the accuracy this method.

Key words : Integral Equation of Fredholm, polynomials Touchard.

Résumé

Dans ce mémoire on a traité numériquement l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce, moyennant les polynômes de Touchard. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier cette méthode en indiquant sa précision ainsi que la convergence.

Mots clés : équation Intégrale de Fredholm, polynômes de Touchard

.

Table des matières

Liste des tableaux

Notations

$C[a,b]$	espace des fonctions continues sur $[a,b]$
f	terme libre dans l'équation intégrale
A	opérateur linéaire
I	opérateur identique
$\|.\|$	norme
r	nombre de Riesz
$Ker(.)$	noyau de l'opérateur
$Im(.)$	image de l'opérateur
T_n	suite d'opérateurs compacts
B_E	boule unité
$\int$	signe intégral
P_n	opérateur de projection
$\langle,\rangle$	le produit scalaire
T	polynôme de Touchard
$K(x,t)$	noyau de l'équation intégrale
y	la fonction inconnue dans l'équation intégrale
y_n	solution approchée
λ	paramètre numérique
$(I-A)^{-1}$	inverse de l'opérateur intégrale
EI	equation intégrale

Introduction

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé. Ainsi, notons qu'il existe actuellement un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique, ce qui rend notre présentation ne se veut ni exhaustive, ni trop théorique. Cependant, le but de notre recherche et d'insister sur la pluridisciplinarité des méthodes rencontrées que l'on peut regrouper selon trois grands axes.

les principaux fondateurs de la théorie d'équations intégrales sont Vito Volterra (1860,1940), et Ivar Fredholm (1866-1927), ainsi que David Hilbert (1862-1943) et Erhard Schmidt (b.1876). Volterra était le premier à avoir identifier l'importance de la théorie et pour la considérer systématiquement, mais la contribution de Fredholm a permis le franchissement (environ 1900), (plutôt qu'évitant), de la difficulté liée à la disparition du "déterminante des coefficients." néanmoins, la priorité de Volterra généralement aurait été reconnue si son premier papier sur le sujet (1896) avait été présenté différemment.

Mais Volterra au lieu de déduire ses résultats par les mêmes méthodes qu'il a employées pour leur découverte (qui étaient identiques à ceux utilisées plus tard tellement avec succés par Fredholm) a simplement édité une vérification de sa solution.

Suivant ces axes, notre travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre fixe brièvement le cadre théorique de notre étude. Nous y rappelons quelques notions d'analyse fonctionnelle, des espaces fonctionnelles nécessaires, et la théore des opérateurs et ses propriétés, la classification des équations intégrales

Le deuxième chapitre dans ce chapitre, on a étudie l'existence et l'unicité des équations intégrales, et nous présenterons quelques méthodes analytiques, et numériques importantes pour résoudre les équations intégrales.

Dans le **dernier chapitre** représente le but de ce mémoire, où nous allons résoudre l'équation intégrale de Fredholm en utilisant les polynômes de Touchard avec application à quelques exemples.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre, on donne la base sur la théorie des équations intégrales, étudiée sur l'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé. Ainsi on donne quelques définition sur les base de l'analyse numérique et les types des équations intégrales.

1.1 Espaces fonctionnelles

Définition 1.1 *(espace vectoriel normé)*

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.On dit qu'une application notée $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ est une norme sur E si et seulement si pour tout $(x, y) \in E$ et $\lambda \in \Bbbk$ les conditions suivates sont satisfaites

(i) $\|x\| = 0$ implique que $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iii)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.2 *(Suite de Cauchy)*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé. On dit que La suite (u_n) est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N_\varepsilon,\ \forall m, n \geq N_\varepsilon, \quad \text{on a} \ \ d(u_m, u_n) < \varepsilon$$

Toute suite convergente est évidemment de Couchy. La réciproque est fausse en général

Lemme 1.3 *Soit u_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|.\|)$ contient une sous suite u_{nk} convergente vers u alors la suite u_n est aussi convergente vers le même élément u.*

Définition 1.4 *(Espace métrique complet)*

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy u_n d'éléments de E est une suite convergente dans E. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach

Proposition 1.5 *Tout espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie est complet.*

Définition 1.6 *(Espace de Banach)*

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme $\|.\|$.

Définition 1.7 *(Produit scalaire)*

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un produit scalaire sur H est une application de $H \times H \rightarrow \mathbb{k}$, notée $\langle ., . \rangle$ telle que pour tout x, y, z dans H et α, β dans $\mathbb{R}$ on a

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(iii)$\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x; x \rangle = 0 \implies x = 0.$

Définition 1.8 *(Espace de Hilbert)*

Un espace vectoriel normé $(H, \|.\|)$ sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) est de Hilbert si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est complet.

Définition 1.9 *(Espace $L^2([a, b])$)*

On dit qu'une fonction f est de carrée intégrable sur $[a, b]$ si l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x)dx < \infty$$

L'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur $[a, b]$ sera noté $L^2([a, b])$

Définition 1.10 *(Espace $\mathbb{C}^l([a,b])$)*

les éléments de cet espace sont touts les fonctions définies sur $[a,b]$ et qui ont des dérivées continues jusqu'a l'ordre l. La norme d'une élément $f(x) \in \mathbb{C}^l([a,b])$ est définit par

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{l} \max_{a \leq x \leq b} \left| f^k(x) \right|$$

1.2 Notions sur les opérateurs

Opérateurs intégrales linéaires

Définition 1.11 *Siot K un fonction meusurable sur $\Omega \times \Omega$ dans C, et Ω un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Alors la forme général d'une opérateur intégrale linéaire A, dit aussi opérateur à noyau, est formellement donné par la forme suivante*

$$\begin{array}{rcl} A & : & C(\Omega) \to C(\Omega) \\ \varphi & \to & A\varphi \\ x & \to & (A\varphi)(x) = \int_{\Omega} K(x,t)\varphi(t)dt \end{array}$$

La fonction $K(x,t)$ est appelée noyau de l'opérateur A.la norme $\|A\|$ est donnée par

$$\|A\| = \max_{x \in \Omega} \int\limits_{\Omega} |K(x,t)| \, dt$$

Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.12 *Soient E et F deux espace vectoriels sur le même corps des scalaires. Un application $A : E \to F$ est dite linéaire si pour tout u et v dans E et pour tout scalaires α et β dans $\mathbb{R}$*

on a

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v$$

Définition 1.13 *Soient E et F deux espace normés. Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est dit borné s'il existe une constant M telle que*

$$\|Au\| \leq M \|u\|, \qquad \textit{pour tout } u \in E$$

Théorème 1.14 *Siot A un opérateur linéaire entre deux espace vectoriels normés E et F . Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *A est borné.*

(2) *A est continu sur E.*

(3) *A est continu à l'origine.*

Théorème 1.15 *Un opérateur linéaire est continu si est seulement si il est borné.*

Théorème 1.16 *Tout opératur linéaire $T : X \to Y$ d'un espace normé de dimension finie X dans un espace Y est borné.*

Opérateur adjoint

Définition 1.17 *On considére $C(D)$ muni du produit scalaire identique à celui défini sur $L^2(D)$, à savoir*

$$\forall (f,g) \in C(D)^2, \qquad \langle f,g\rangle = \int\limits_D f(x)g(x)dx$$

Ce produit scalaire permet définir la notion d'orthogonalité, ainsi que celle d'adjoint.

On dit que $A : C(D) \to C(D)$ et $B : C(D) \to C(D)$ sont adjoints si ils vérifient

$$\forall (f,g) \in C(D)^2, \qquad \langle Af,g\rangle = \langle f,Bg\rangle$$

Si un opérateur $A : C(D) \to C(D)$ admet un adjoint B, alors cet adjoint est unique et A et B sont linéaire.

Remarque 1.18 *Ces définitions s'étendent au cas d'espace quelconques X, Y munis d'une application bilinéaire $\varphi : (X,Y) \to \mathbb{R}$ non dégénérée. Un cas particulier est celui d'un espace de Banach E et de son dual E', muni de la forme dual canonique $\langle \varphi, x\rangle = \varphi(x)$.*

Théorème 1.19 *On considére un opérateur à noyau A construit à partir d'un noyau K continu sur $D \times D$ par la formule*

$$\forall x \in D, \qquad (A\varphi)(x) = \int\limits_D K(x,y)\varphi(y)dy$$

Alors l'opérateur A admet un unique opérateur adjoint B pour le produit scalaire usuel de L^2, défini par

$$\forall x \in D, \qquad (B\psi)(x) = \int_D K(y,x)\psi(y)dy$$

Preuve. Pour φ et ψ deux fonctions de $C(D)$, on a

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, B\psi\rangle$$

donc

$$\begin{aligned} \int_D \varphi(y)B(\psi(y))dy &= \int_D A\varphi(x)\psi(x)dx \\ &= \int_D \left\{ \int_D K(x,y)\varphi(y)dy \right\} \psi(x)dx. \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini relatif aux intégrales, on établit que

$$\begin{aligned} \langle A\varphi(x), \psi\rangle &= \int_D \int_D \left[K(x,y)\psi(x)dx\right] \varphi(y)dy \\ &= \int_D \varphi(y) \left[\int_D K(x,y)\psi(x)dx \right] dy \\ &= \int_D \varphi(y)B(\psi)(y)dy \end{aligned}$$

il en résulte que l'adjoint B est défini pour tout x dans $C(D)$ par

$$B\psi(x) = \int_D K(x,y)\varphi(y)dy$$

■

Opérateurs compacts

Définition 1.20 *Sioent E et F deux espace de Banach. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est dit compact ou complèment continu si l'image $T(B_E)$ de la boule unité fermée $B_E = \{u \in E; \|u\|_E \leq 1\}$ est relativement compacte.*

Théorème 1.21 *Un opérateur T de E dans F est compact si et seulement si pour tout suite $(u_n)_n$ bornée dans E, la suite $(T_{u_n})_n$ admet une sou-suite convergente dans F.*

Théorème 1.22 *L'opérateure intégrale T de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Théorème 1.23 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Lemme 1.24 *Si M est un fermé d'un espace métrique complet (E, d), alors M est compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in E$ tels que*

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_E(y_j, \varepsilon)$$

où

$$B_E(y_j, \varepsilon) = \{x \in E : d\ (x, y_j) < \varepsilon\}.$$

Propriétés des opérateurs compacts

Proposition 1.25 *Soit E et F deux espace de Banach.*

(i) L'ensemble des opérateurs compacts $K(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

(ii) Soient $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, G)$, alors si S ou T est compact, $T \circ S \in K(E, G)$. En particulier, $K(E)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Preuve. (i) Soiet $\lambda, \beta \in \mathbb{k}$ et $S, T \in K(E, F)$.Soit (x_n) une suite bornée de E.Comme S et T sont compacts, il existe une sous-suie $(x_{\phi(n)})$ telle que $S(x_{\phi(n)})$ et $T(x_{\phi(n)})$ convergent, ainsi $\lambda S(x_{\phi(n)}) + \beta T(x_{\phi(n)})$ converge. Donc la suite image de toute suite bornée par $\lambda S + \beta T$ admet une valeur d'adhérence i.e. $\lambda S + \beta T \in K(E, F)$. Soit $T \in \overline{K(E, F)}$, alors por tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon \in K(E, F)$ tel que $\|T - T_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, cela signifie que $\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in \overline{B_E}$.Comme T_ε est compact, $T_\varepsilon(\overline{B_E})$ est précompact, il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $\{y_1, \ldots, y_{N_\varepsilon}\}$ tels que $T_\varepsilon(\overline{B_E}) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$.

Ainsi, $\forall x \in \overline{B_E}$, il existe $i_0 \in \{1, ..., N_\varepsilon\}$ tel que $\|T_\varepsilon x - y_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, alors $\|Tx - y_{i_0}\| + \|T_\varepsilon x - y_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

D'ou $T_\varepsilon(\overline{B_E}) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, \varepsilon)$, par suit $\overline{T(\overline{B_E})}$ est compact car F est complet. On a donc montrer que $T \in K(E, F)$. Ainsi $\overline{K(E, F)} = K(E, F)$.

(ii) Supposons $S \in K(E, F)$. Comme $T(S(\overline{B_E}.)) \subset T(\overline{S(\overline{B_E}.)})$, ce dernier est compact, comme image du compact$\overline{S(\overline{B_E}.)}$ par l'application continue T.

Ains $\overline{T \circ S(\overline{B_E})}$ est compact i.e. $T \circ S(B_E) \in K(E, F)$. ∎

Corollaire 1.26 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors, l'opérateur identité de E n'est pas compact. Plus généralement, tout isomorphisme $T : E \to E$ n'est pas compact.*

Preuve. *Pour l'opérateur identité I sur E ,on a $\overline{I(\overline{B_E}.)} = \overline{B_E}$, qui ne peut etre compacte car la dimension de E est infinie. Quant à l'assertion générale, si un isomorphisme $T : E \to E$ est compact alors l'opérateur identité $I = T^{-1} \circ T$ serait compact, d'aprés la proposition précédente, ce qui serait une contradiction.* ∎

Définition 1.27 *Soient E et F deux espace vectoriels un opérateur $T : E \to F$ est dit de rang fini si son image est de dimension finie. Le rang de T est la dimension de son image. On note*

$$rg(T) = \dim(\mathrm{Im}(T))$$

Lemme 1.28 *Soient E et F deux espace vectoriels normés et soit $T : E \to F$ un opérateur de rang fini alors T est un opérateur compact*

Preuve. *En effet $\overline{T(\overline{B_E}.)}$, est un fermé borné de l'espace de dimension finie $L(E)$, est donc compact.Comme $K(E, F)$ est fermé, il s'ensuit que tout opérateur qui peut être approché par des opérateurs de rang fini est également compact, c'est un critère très utile pour montrer qu'un opérateur est compact.* ∎

Théorème 1.29 *le produit $A_1 A_2$ de deux opérateurs bornés A_1 et A_2 est compact si l'un des opérateurs A_1 ou A_2 est compacts*

Théorème 1.30 *(Théorème de Rize) Soit E un espace vectoriel normé tel que B_E soit compacte. Alors E est de dimensoin finie.*

Lemme 1.31 *Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach.et soient $T \in \mathcal{L}(E, F), (T_n)$ une suit opérateurs compacts dans $\mathcal{L}(E, F)$ suposons que $T_n \to T$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ i.e $\|T_n - T\| \to 0$ alors T est un opérateur compact.*

Théorème 1.32 *Si T est un opérateur compact et S un opérateur borné, les opérateurs TS et ST sont compacts.*

1.3 Les équations intégrales

1.3.1 Classification des équations intégrales

Equation intégrale linéaire

la forme ordinaire d'une équation intégrale linéaire est donée par

$$\alpha(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

où $\alpha(x), f(x), K(x,t)$ sont des fonctions données, la fonction $\varphi(x)$ qui figure à l'intérieur et à l'éxtérieur du signe intégrale à déterminer, λ est un paramétre numérique réel ou complexe différent de zéro. La fonction $K(x,t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale. Sous une autre forme simple en terme d'opérateurs

$$(I - \lambda A)\varphi(x) = f(x)$$

Si l'exposant de la fonction inconnue $\varphi(x)$ dans le signe de l'intégrale est l'un, l'équation intégrale est appelé linéaire. Si la fonction inconnue $\varphi(x)$ est d'exposant autre qu un, ou si l'équation contient des fonctions non linéaires de $\varphi(x)$, comme e^{φ}, l'équation intégrale est appelé non linéaire.

Equation intégrale de Fredholm

Une équation de la forme (1.1) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale linéaire de Fredholm on écrit.

$$\alpha(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.2}$$

i) si $\alpha(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.3}$$

est dite de première espèce.

ii) si $\alpha(x) = 1$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = \varphi(x) \tag{1.4}$$

est dite de seconde spèce.

iii) si $\alpha(x)$ est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de $[a, b]$, elle est dite équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 1.33 *Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit*

$$\lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = \varphi(x) \tag{1.5}$$

elle est dite équation intégrale de Fredholm de seconde espèce homogène si dans le cas contraire $f(x) \neq 0$ elle est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce non homogène.

Equation intégrale de volterra

Définition 1.34 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra une équation de la forme*

$$\alpha(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.6}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramétre reél.

1.si $\alpha(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.7}$$

est appelée équation intégrale de volterra de première espèce.

2.Si $\alpha(x) = 1$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = \varphi(x) \tag{1.8}$$

est appelée équation intégrale linéaire de volterra de seconde espèce.

3.Si $\alpha(x) \neq 1 \neq 0$, donc l'équation (1.6) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

Remarque 1.35 *Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit*

$$\lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = \varphi(x) \tag{1.9}$$

est dite équation intégrale de Volterra de seconde espèce homogène. si dans le cas contraire $f(x) \neq 0$ elle est dite équation intégrale de Volterra linéaire de seconde espèce non homogène.

Remarque 1.36 *L'équation intégrale de Volterra est une cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm il suffit de prendre le noyau K vérifiant*

$$K(x,t) = 0 \qquad \text{pour } x < t$$

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions des équations intégrales

Dans ce chapitre nous rappelons les théorèmes que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés, et nous présenterons quelques méthodes analytiques, et numériques importantes pour résoudre les équations intégrales de deuxième espèce

Théorème de la série géométrique de Neumann

Pour les équations d'opérateur du deuxième type

$$\varphi - A\varphi = f$$

L'unicité et l'existence de la solution peut être donnée par la série de Neumann pour vu que l'opérateur A soit une contraction $\|A\| < 1$.

Théorème 2.1 *Soit $A : X \to X$ être un opérateur linéaire borné d'un espèce de Banach X en lui-même avec $\|A\| < 1$, et laissez $I : X \to X$ soit I'operateur identique. Alors $I - A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \tag{2.1}$$

et qui satisfait

$$\| (I - A)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| A \|} \tag{2.2}$$

Les opérateurs itérés A^n sont définis par $A^0 = I$ et $A^n = AA^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Preuve. Comme $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ .De puis $\| A \| \leq 1$, on a la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| A^k \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| A \|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

dans léspace de Banach $\mathcal{L}(X)$, par consequent la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

Avec $\|S\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$ de plus S est l'inverse de $I - A$, Comme on peut voir que

$$(I - A)S = (I - A) \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} A^k = \lim_{n \to \infty} (I - A^{n+1}) = I$$

aussi

$$S(I - A) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} A^k (I - A) = \lim_{n \to \infty} (I - A^{n+1}) = I$$

puisque $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0, n \to \infty$. ■

Théorème 2.2 *Selon les hypothèses du théorème pour tout $f \in X$ la méthode des approximations successives*

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f, \qquad n = 0, 1, 2.....$$

avec φ_0 est arbitraire dans X convergent vers la solution unique φ de l'équation $\varphi - A = f$

Preuve. par induction, on voit facilement que

$$\varphi_n = A^n \varphi_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k f \ , \qquad n = 1, 2...$$

d'ou

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f = (I - A)^{-1} f$$

■

Corollaire 2.3 *Soit K un noyau continu vérifiant*

$$\max_{x \in [a,b]} \int_a^b | K(x,t) | \, dt < 1$$

Alors pour tout $f \in C([a,b])$, l'équation intégrale du seconde espèse

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \qquad x \in [a,b]$$

admet une unique solution $\varphi(x) \in C([a,b])$ pour toute $f \in ([a,b])$ De plus, la méthode des approximations successives

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt + f(x), \qquad n = 1,2,...$$

Avec φ_0 arbitraire dans $C([a,b])$ convergent uniformément vers cette solution.

Alternative de Fredholm

Pour les équations intégrales de Fredholm on a les théorèmes suivants

Théorème 2.4 *(Alternative de Fredholm)*

On considère les équations intégrales homgène dules, l'une de l'autres, issues d'une noyau qui sont donc définies par

$$\text{trouver } \varphi \in C[a,b]; \qquad \varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{2.3}$$

$$\text{trouver } \psi \in C[a,b]; \qquad \psi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\psi(t)dt = 0 \tag{2.4}$$

On considère pour $f \in C[a,b], g \in C[a,b]$ les équations intégrales avec seconds membres

$$\text{trouver } \varphi \in C[a,b]; \qquad \varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{2.5}$$

$$\text{trouver } \psi \in C[a,b]; \qquad \psi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = g(x) \tag{2.6}$$

alors on a l'alternative

Ou bien les équations (2.3) *et* (2.4) *n'ont que les solutions triviales $\varphi = 0, \psi = 0$ dans ces cas les équations* (2.5) *et* (2.6) *admettent une solution unique $\varphi \in C[a,b]$ et $\psi \in C[a,b]$ pour chaque $f \in C[a,b], g \in C[a,b]$.*

Ou bien les équations (2.3) *et* (2.4) *ont le même nombre fini* m *de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations* (2.3) *et* (2.4) *sont résolubles si et seulement si pour toute solution* φ *de* (2.3) *et toute solution* ψ *de* (2.4) *on a*

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)g(x)dx$$

Dans ces conditions,la solution générale de (2.5) *s'écrit sous la forme*

$$\varphi = \varphi + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i$$

où φ *est la solution particulière de* (2.5) *et les* $(\varphi_i)_{1\leq i\leq m}$ *forment une famille libre de solution de* (2.3).

Exemple 2.5 *Considérons l'équation intégrale de Fredholme*

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (5x^2-3)t^2\varphi(t)dt = e^x \qquad x \in [0,1]. \tag{2.7}$$

On a

$$\varphi(x) = e^x + C\lambda(5x^2-3) \tag{2.8}$$

où

$$C = \int_0^1 t^2\varphi(t)dt \tag{2.9}$$

substituant (2.8) *dans* (2.9), *il vient*

$$C = \int_0^1 t^2e^t dt + C\lambda\int_0^1 (5t^4-3t^2)dt$$

d'où

$$C = e - 2$$

Quels que soient λ, *l'équation proposée a la solution*

$$\varphi(x) = \lambda(e-2)(5x^2-3) \ + e^x$$

et l'équation homogène associée

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (5x^2-3)t^2\varphi(t)dt = 0$$

la seule solution nulle $\varphi(x) = 0$.

Méthodes de résolution des équations intégrales

2.1 Résolution analytique des équations intégrales

2.1.1 Méthode des noyaux dégénérés

Définition 2.6 *Le noyaux $K(x,t)$ d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espéce est dit dégénéré s'il est la somme d'un nombre fini de produits de fonctions de x seul par des fonctionsde t seul, i.e il est de la forme*

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) b_i(t), \tag{2.10}$$

Les fonctions $\alpha_i(x)$ et $b_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ seront supposées continues dans le carrés fondamental $\alpha \leq x$, et $t \leq b$ et linéairement indépendantes.

Soit l'équations intégrale de Fredholm suivante

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{2.11}$$

en remplaçant (2.10) dans (2.11) on obtient l'équation intégrale à noyau dégénéré

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) b_i(t) \right) \varphi(t)dt = f(x), \tag{2.12}$$

se résout comme suit

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \int_a^b b_i(t)\varphi(t)dt \tag{2.13}$$

Posons

$$\int_a^b b_i(t)\varphi(t)dt = C_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

L'égalité (2.13) devient alors

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_i(x) \tag{2.14}$$

Avec C_i sont des constantes inconnues (puisque la fonction $\varphi(x)$ est inconnue). Ainsi, la résolution d'une équation intégrale à noyau dégénéré se ramène à la recherche des constantes $C_i(i = 1, 2, ..., n)$. Après avoir porté (2.14) dans (2.12) et affectué des calculs simples nous obtenons.

On remplaçane la solution (2.14) dans (2.13) on obtent

$$\begin{aligned} f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) C_i - \lambda \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) b_i(t) \right) \left(f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) C_i \right) dt &= f(x) \\ \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) C_i - \lambda \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) b_i(t) \right) \left(f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) C_i \right) dt &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \left(C_i - \int_a^b b_i(t) \left(f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_i(t) \right) dt \right) \alpha_i(x) = 0$$

Les fonctions $\alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ étant linéairement indépendantes, il en résulte que

$$C_i - \int_a^b b_i(t) \left(f(t) + \lambda \sum C_i \alpha_i(t) \right) dt = 0$$

ou

$$C_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i \int_a^b \alpha_i(t) b_i(t) dt = \int_a^b b_i(t) f(t) dt \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Afin d'alléger l'écriture,introduisons les notions

$$
\begin{aligned}
f_i &= \int\limits_a^b b_i(t)f(t)dt \\
\alpha_{ik} &= \int\limits_a^b \alpha_k(t)b_i(t)dt
\end{aligned}
$$

Nous obtenons

$$C_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}C_k = f_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

ou,sous forme développée

$$
\begin{cases}
(1-\lambda\alpha_{11})C_1 - \lambda\alpha_{12}C_2 - ... - \lambda\alpha_{1n}C_n = f_1 \\
-\lambda\alpha_{21}C_1 + (1-\lambda\alpha_{22})C_2 - ... - \lambda\alpha_{2n}C_n = f_2 \\
\vdots \\
-\lambda\alpha_{n1}C_1 - \lambda\alpha_{n2}C_2 - ... + (1-\lambda\alpha_{nn})C_n = f_n
\end{cases} \tag{2.15}
$$

qui s'écrit sous forme matricielle

$$
\begin{pmatrix}
1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \cdots & -\lambda\alpha_{1n} \\
-\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & \cdots & -\lambda\alpha_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \cdots & 1-\lambda\alpha_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}
$$

l'our trouver les C_i , nous avons donc un système algébrique de n-équations linéaires à n inconnues C_i, dont le détrminant est

$$
\triangle(\lambda) = \begin{vmatrix}
1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda\alpha_{1n} \\
-\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \dots & 1-\lambda\alpha_{nn}
\end{vmatrix}
$$

si $\triangle(\lambda) \neq 0$, le systéme (2.15) admet une solution unique $C_1, C_2, ..., C_n$ obtenue moyennant les formules de Crame

$$C_i = \frac{\triangle_i(\lambda)}{\triangle(\lambda)} = \frac{1}{\triangle(\lambda)} = \begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & ... & -\lambda\alpha_{1,k-1} f_1 - \lambda\alpha_{1,k+1} & ... & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & ... & -\lambda\alpha_{2,k-1} f_2 - \lambda\alpha_{2,k+1} & ... & -\lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda\alpha_{n1} & ... & -\lambda\alpha_{n,k-1} f_n - \lambda\alpha_{n,k+1} & ... & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Donc la solution est donnée par l'égalité

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_i(x).$$

Exemple 2.7 *Résoudre l'équation intégrale*

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x\cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t)\varphi(t)dt = x. \tag{2.16}$$

Mettons cette équation sous la forme

$$\varphi(x) = x + \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos t dt + \lambda \sin x \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t)dt + \lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin t dt$$

et introduisons les notations

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos t dt \ , \quad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t)dt \ , \quad C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin t dt \tag{2.17}$$

Ou C_1, C_2, C_3 sont les constantes inconnues. L'équation (2.16) *alors ils deviennent déformés*

$$\varphi(x) = x + C_1\lambda x + C_2 \lambda \sin x + C_3 \lambda \cos x \tag{2.18}$$

Portons (2.18) *dans les égalités* (2.17), *il vient*

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} (t + C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t)\cos t dt \\ C_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (t + C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t) t^2 dt \\ C_3 &= \int_{-\pi}^{\pi} (t + C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t)\sin t dt \end{aligned}$$

ou

$$C_1(1-\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\cos tdt) - C_2\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos tdt - C_3\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 tdt \;=\; \int\limits_{-\pi}^{\pi} t\cos tdt$$

$$-C_1\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^3dt + C_2(1-\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2\sin tdt) - C_3\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2\cos tdt \;=\; \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^3dt$$

$$-C_1\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\sin tdt - C_2\int t\sin tdt + C_3(1-\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos t\sin tdt) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t\sin tdt.$$

En calculant les intégrales, nous obtenons le systéme d'équations algébriques en C_1, C_2, C_3

$$\begin{cases} C_1 - \lambda\pi C_3 = 0 \\ C_1 + \lambda\pi C_3 = 0 \\ -2\lambda\pi C_1 - \lambda\pi C_2 + C_3 = 2\pi \end{cases} \tag{2.19}$$

Le déterminant du systéme est

$$\triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & -\pi\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2\pi^2 \neq 0$$

le systéme (2.19) *admet les solutions*

$$C_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}\ , \qquad C_2 = -\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}\ , \qquad C_3 = \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}.$$

En portant les valeurs obtenues de C_1, C_2, C_3 *dans* (2.18) *nous obtenons la solution de l'équation intégrale donnée par*

$$\varphi(x) = x + \frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x - 4\lambda\pi\sin x + \cos x)$$

2.1.2 Méthode de décomposition D'Adomian

La métode de décomposition d'Adomian[18]. Est adaptable pour les éqations intégrales et les éqations intégro-diférencielles linéaires et non linéaires. Elle est similaire à la méthode de la série, en ecrivant la solution $\varphi(x)$ sous la forme suivante

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \tag{2.20}$$

En remplaçant l'équation (2.20) dans (1.4), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \right) dt \tag{2.21}$$

L'équation (2.21) peut être écrite explicitement comme suivant

$$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)+...+\varphi_n(x) = f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)(\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\varphi_3(t)+...+\varphi_n(t))dt$$

Les composantes $\varphi_i(x), i \geq 0$ de la fonction inconnue $\varphi(x)$ sont complètement déterminées en déffinissant la relation de réccurence suivante

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= f(x) \\
\varphi_1(x) &= \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt \\
\varphi_2(x) &= \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt \\
&\vdots \\
\varphi_n(x) &= \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt
\end{aligned}$$

Le shéma discuté ci-dessus pour la détermination des composants $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), ...$ de la solution $\varphi(x)$ de l'équation (1.4) peut être écrit de manière récursive par

$$\varphi_0(x) = f(x) \tag{2.22}$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt \tag{2.23}$$

Exemple 2.8 *Résoudre l'éqation inégale de Freholm suivante*

$$\varphi(x) = \cos x + 2x + \int_0^{\pi} xt\varphi(t)dt \tag{2.24}$$

Il est clair que $f(x) = \cos x + 2x, \lambda = 1, K(x,t) = xt$, *nous utilisons le schéma récursif* (2.22) *et* (2.23) *pour trouver.*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \cos x + 2x \\
\varphi_1(x) &= \int_0^{\pi} xt\varphi_0(t)dt \\
&= \int_0^{\pi} xt(\cos t + 2t)dt \\
&= \left(-2 + \frac{2}{3}\pi^3\right)x \\
\varphi_2(x) &= \int_0^{\pi} xt\varphi_1(t)dt \\
&= \int_0^{\pi} x(\left(-2 + \frac{2}{3}\pi^3\right)t^2dt \\
&= \left(-\frac{2}{3}\pi^3 + \frac{2}{9}\pi^6\right)x
\end{aligned}$$

Par conséquent, la solution de (2.24) *sous forme de série est donnée par*

$$\varphi(x) = \cos x + 2x + \left(-2 + \frac{2}{3}\pi^3\right)x + \left(-\frac{2}{3}\pi^3 + \frac{2}{9}\pi^6\right)x + ...$$

et sur une forme fermée

$$\varphi(x) = \cos x.$$

2.1.3 Méthode des approximations successives

La méthode d'approximations successives [18]. appélée méthode d'itération de Picard fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problémes de valeurs initiales ou des équations intégrales. Nous appliqouns maintenant, cette méthode sur l'équation intégrale de Fredhom

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad a \leq x \leq b \tag{2.25}$$

Par toute fonction sélective de valeur réelle φ_0, $a \leq x \leq b$. En conséquence le premier approximation $\varphi_1(x)$ de la solution $\varphi(x)$ est défini par

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt \tag{2.26}$$

La seconde approximation de $\varphi_2(x)$ de la solution $\varphi(x)$ peut être obtenu en remplaçant $\varphi_0(x)$ dans (2.26) par l'approximation obtenue $\varphi_1(x)$, donc on trouve

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt$$

Les différentes approximations de la solution $\varphi(x)$ de (2.25) peuvent être obtenues en un schéma récursif donné par

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = fonction\ sélective\ de\ valeur\ réelle \\ \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt, \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

Meme si nous pouvons sélectionner n'importe quelle fonction de valeur réelle pour l'approximation en zéro $\varphi_0(x)$, les fonctions les plus couramment sélectionnées pour φ_0 valent $0, 1$ ou x .

la solution $\varphi(x)$ est obtenu par

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x)$$

Exemple 2.9 *Résoudre l'éqation inégale de Freholm suivante*

$$\varphi(x) = e^x + e^{-1} \int_0^1 \varphi(t)dt$$

Posons $\varphi_0(x) = 0$, *puis la première approximation peut être calculée comme suit*

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= e^x + e^{-1}\int_0^1 \varphi_0(t)dt \\ &= e^x\end{aligned}$$

la deuxième approximation est obtenue par

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= e^x + e^{-1}\int_0^1 \varphi_1(t)dt \\ &= e^x + e^{-1}\int_0^1 e^t dt \\ &= e^x + 1 - e^{-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) &= e^x + e^{-1}\int_0^1 \varphi_2(t)dt \\ &= e^x + e^{-1}\int_0^1 (e^t + 1 - e^{-1})dt \\ &= e^x + 1 - e^{-2}.\end{aligned}$$

Et ainsi de suite, on obtient

$$\varphi_n(x) = e^x + 1 - e^{-(n-1)}, \quad n \geq 1.$$

D'ou

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} (e^x + 1 - e^{-(n-1)}) \\ &= e^x + 1\end{aligned}$$

2.2 Résolution numerique des équations intégrales

2.2.1 Méthode de collection

pour résoudre l'équation de Fredholm de deuxième espèce (5), on va choisir des pionts distincts $(x_1, x_2, \ldots, x_{d_n}) \in D$ tel que

$$r_n(x_i) = 0 \qquad i = 1, \ldots, d_n$$

qui vont déterminer les ceofficients $\{c_1, c_2, \ldots, c_{d_n}\}$ comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{d_n} c_j \left\{ \lambda \Phi_j(x_i) - \int\limits_D K(x_i, t)\Phi_j(t)dt \right\} = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, d_n$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{d_n} \lambda c_j \Phi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{d_n} c_j \int\limits_D K(x_i, t)\Phi_j(t)dt + f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, d_n \tag{2.27}$$

Dans le cadre de l'écriture (2.27) sous une forme plus abstraitr,nous introduison un opérateur de projection $P_n : V = C(D) \rightarrow V_n$.soit $\varphi \in C(D)$, on défini $P_n\varphi$ comme élement de V_n l'interpolation de φ aux points $\{x_1, x_2, \ldots, x_{d_n}\}$ ca signifie l'écriture

$$P_n\varphi(x_i) = \lambda\varphi_n(x) = \lambda \sum_{j=1}^{d_n} c_j \Phi_j(x)$$

Donc

$$P_n\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{d_n} \lambda c_j \Phi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{d_n} c_j \int\limits_D K(x_i, t)\Phi_j(t)dt + f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, d_n$$

En posant $\alpha_j = c_j\lambda$, alors on peut ecrire

$$P_n\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j \Phi_j(x), \qquad x \in D$$

Avec les ceofficients$\{\alpha_j\}$ déterminés en résolvant le système linéaire

$$\sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j \Phi_j(x_i) = \varphi(x_i), \qquad i = 1, \ldots, d_n$$

Ce système linéaire admet une seule solution si et seulement si

$$\det\left[\Phi_j(x_i)\right] \neq 0$$

Cette condition implique également que les fonctions$\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{d_n}\}$ constuent sont un systéme linéairment indépendant sur D.

Application des Méthodes de collocation

si on considère le système $\{1, x, \ldots, x^n\}$ des monômes linéairment indépendants alors on obtient le déterminant de vendermonde.

pour tout i , $1 \leq i \leq d_n$, soit $l_i \in V_n$,telle que :

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & si \qquad i = j \\ 0, & si \qquad i \neq j \end{cases}$$

D'ou

$$P_n\varphi(x) = \sum_{j=1}^{d_n} \varphi(x_j) l_j(x), \quad x \in D$$

Le système $\{l_1, l_2, \ldots, l_d\}$ est appelé le système de polynome d'intérpolation de lagrange vérifiant

$$\|P_n\| = \max_{x \in D} \sum_{j=1}^{d_n} |l_j(x)|$$

Si on prend $V_n = span\left\{1, x, \ldots, x^n\right\}$, alors la base des fonctions de lagrange est donnée par

$$l_i(x) = \prod_{i \neq j, j=0}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

2.2.2 Méthode de Nyström

Cette méthode, aussi appelée méthode de quadrature, consiste à appliquer les méthodes numériques de calcul d'intégrales pour aboutir à un système linéaire. En fait, ce n'est rien d'autre que l'approximation du noyau K par un opérateur de dimension fini, ie une matrice. Cette méthode est totalement discrète, elle fournit donc un premier moyen e cace de rsolution d'équation numérique.

On souhaite approximer l'opérateur à noyau A défini par

$$(A\varphi)(x) = \int_D K(x,t)\varphi(t)dt \qquad \forall x \in D$$

Pour ce faire, on se donne des règles de quadrature Q_n pour calculer l'intégrale du noyau via des points $(x_i^n)_{1\leq i\leq n}$ ainsi que des poids $(\omega_i)_{1\leq i\leq n}^n$ d'ou l'introduction d'un nouvel opérateur A_n

$$(A_n\varphi)(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k{}^{(n)} K(x, x_j{}^{(n)})\varphi(x_j^{(n)}) \qquad \forall x \in D$$

Remarque 2.10 *On peut voir ces règles de quadratures comme une suite d'opérateurs Q_n : $C(D) \to C(D)$.*

On dira que ces règles seront convergentes si elles convergent point à point, ie si

$$Q_n(f) \overset{n\to\infty}{\to} \int_D f \qquad \forall f \in C(D)$$

Alors, la solution φ de l'équation intégrale de second type

$$\varphi - A\varphi = f$$

est approchée par la solution φ_n de

$$\varphi_n - A_n\varphi_n = f \tag{2.28}$$

Ce qui est réduit à la résolution d'un système d'équation de dimension finie.

Théorème 2.11 *Soit φ_n une solution de*

$$\varphi_n(x) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K(x, x_j)\varphi_n(x_j) = f(x), \quad x \in D$$

Alors les valeurs $\varphi_i^{(n)} = \varphi_n(x_i), (i = 1, \ldots, n\ )$ *aux points de quadrature sont solution du systéme linéaire suivant*

$$\varphi_i^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K(x_i, x_j) \varphi_j^{(n)} = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha_1 K_{11} & \alpha_2 K_{12} & \ldots & -\alpha_n K_{1n} \\ -\alpha_1 K_{21} & 1-\alpha_2 K_{22} & \ldots & -\alpha_n K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 K_{11} & -\alpha_1 K_{n2} & \ldots & 1-\alpha_n K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2^{(n)} \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Réciproquement, si $\varphi_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, n$ *sont solution du système* (2.29), *alors la fonction* φ_n *definie par*

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(n)} K(x, x_j) \varphi_j^{(n)}, \quad x \in D$$

est vérifie l'équation (2.28).

Théorème 2.12 *On suppose que les règles de quadrature* $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de notre méthode de Nyström sont convergentes. Dans ce cas la méthode Nyström est convergente point à point, ie*

$$A_n \varphi \overset{n\to\infty}{\to} A\varphi \qquad\qquad \forall \varphi \in C(D)$$

Mais ne converge pas nécessairement en norme.

Corollaire 2.13 *pour tuote équation intégrale de second type telle que, le noyau* K *et le terme libre* f *sont deux fonctions continues, et admet un solution unique, la méthode de Nyström avec une suite de régles de quadrature convergentes est uniformément convergente.*

Chapitre 3

Solutions des équations intégrales linéaires par la série de Touchard

Introduction

L'équation intégrale apparaît naturellement dans de nombreuses applications physiques liées à la propagation des ondes et aux phénomènes de vibration. Il est souvent utilisé pour décrire le problème de la cavité acoustique, la diffusion d'une onde et l'onde de rayonnement. La résolution numérique des équations intégrales de Fredholm et de Volterra a été étudiée par de nombreux auteurs [1, 2, 16, 17]. Pour les méthodes qui utilisent la règle en quadrature, la collocation et l'interpolation, les noyaux dégénérés. Dans ce travail, nous considérons l'approximation de la série de Touchard pour la solution de ces équations intégrales[16], certainement cette technique nous conduit aux meilleures approximations

$$u(x) - \int_{\Omega} k(x,t)u(t)dt = f(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.1}$$

où les fonctions $f(x)$ et $k(x,t)$ sont donnée et continues, la fonction $u(t)$ doit être déterminée comme fonction continue dans Ω.

La recherche de la fonction approximative u_n de la fonction u est donnée par

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k(x) \tag{3.2}$$

où l'expression (3.2) décrit la série tronquée de Touchard de la solution de l'équation (3.1) ; avec les fonctions $\{T_k\}_{0\leq k\leq n}$ représentent les polynômes de Touchard et $\{\alpha_k\}_{0\leq k\leq n}$ les coefficients à déterminer. En d'autres termes, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} r_n(x) &= u_n(x) - \int_\Omega k(x,t)u_n(t)dt - f(x), \\ &= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k T_k(x) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \int_\Omega k(x,t)T_k(t)dt - f(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \left(T_k(x) - \int_\Omega k(x,t)T_k(t)dt\right) - f(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

3.1 Solution avec méthode de collocation

Choisissez une sélection de points distincts $x_1,\ x_2, ...x_n \in \Omega$ et exigeons que

$$r_n(x_j) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{3.3}$$

La condition (3.3) nous conduit à déterminer les coefficients $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ solution du système linéaire

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \left(T_k(x_j) - \int_\Omega k(x_j,t)T_k(t)dt\right) = f(x_j), \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{3.4}$$

Définir les matrices

$$T = (T_{kj}) = T_k(x_j)$$

et

$$K = (K_{kj}) = \int_\Omega k(x_j,t)T_k(t)dt.$$

Si le $\det(E - K) \neq 0$, nous pouvons assurer qu'il existe une solution du système linéaire (3.4), et par conséquent la solution approximative $u_n(x)$ en tant que combinaison linéaire

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{kTk}(x),$$

Pour qui

$$u_n(x_j) - \int_{\Omega} k(x_j, t) u_n(t) dt = f(x_j), \quad j = 1, 2, ..., n.$$

En fait, le système linéaire peut être écrit en matrice

$$(T - K)\alpha = F, \tag{3.5}$$

Où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ et $F = (f(x_1),\ f(x_2), ..., f(x_n))^T$ Pour le le déterminant du système (3.5) est différent de zéro, alors il est admet une solution unique

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T = (T - K)^{-1} F.$$

La solution approximative correspondante

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k(x),$$

a la propriété que $r_n(x)$ soit nul aux noeuds choisis x_j.

Polynômes de Touchard

Les n^iéme Polynômes de Touchard $T_n(x)$ sont définis par $T_0(x) = 1$ et la relation de récurrence suivante

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (x)^n.$$

Les Coefficients rationnels. de polynôme de Touchard $T_n(x)$ est

n	T_n
0	1
1	$1 + x$
2	$1 + 2x + x^2$
3	$1 + 3x + 3x^2 + x^3$
4	$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$
5	$1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$
6	$x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$
$\vdots$	$\vdots$

Tableau.1 présente coefficients rationnels

Erreur d'analyse

Nous pouvons facilement vérifier l'exactitude de la méthode. puisque la série tronquée de Touchard est une solution approximative de l'equation (1), elle doit être approximativement satisfaite de cette équation, puis pour chaque $x_j \in [a, b]$.

$$r(x_j) = \left| u_n(x_j) - \int_{\Omega} k(x_j, t) u_n(t) dt - f(x_j) \right| \simeq 0$$

3.2 Résultats numériques

Exemple 3.1 *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$u(x) - \int_0^1 x \exp(-2t) u(t) dt = \exp(2x) - x, \qquad 0 \leq x, t \leq 1,$$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = \exp(2x).$$

La solution approximative $u_n(x)$ de $u(x)$ est obtenue par la méthode tronquée de la série de Touchard.

Tableau 1. *Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.1 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 4$ est calculée.*

x	*solution exacte u*	*solution approchée u_n*	*Erreur*
0.0	1.000000E+00	1.000000E+00	1.998401E-15
0.1	1.221403E+00	1.220208E+00	1.194627E-03
0.2	1.491825E+00	1.491332E+00	4.929032E-04
0.3	1.822119E+00	1.822446E+00	3.274976E-04
0.4	2.225541E+00	2.226006E+00	4.652878E-04
0.5	2.718282E+00	2.718230E+00	5.155703E-05
0.6	3.320117E+00	3.319486E+00	6.307106E-04
0.7	4.055200E+00	4.054676E+00	5.242737E-04
0.8	4.953032E+00	4.953619E+00	5.867304E-04
0.9	6.049647E+00	6.051441E+00	1.793238E-03
1	7.389056E+00	7.388953E+00	1.031141E-04

Exemple 3.2 *Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm*

$$u(x) = \exp(2x + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}\int_0^1 \exp(2x - \frac{5}{3}t)u(t)dt, \qquad 0 \leq x, t \leq 1,$$

la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = \exp(2x).$$

La solution approximative $u_n(x)$ est obtenue par la méthode tronquée de la série de Touchard.

Tableau 2. *Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.2 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 4, 10$ est calculée.*

x	*solution exacte* u	*solution approchée* u_n *,* $N = 4$	*Erreur* $N = 4$	*Erreur* $N = 10$
0.0	1.000000E+00	1.000018E+00	1.848367E-05	1.399103E-12
0.1	1.221403E+00	1.220241E+00	1.161762E-03	1.708633E-12
0.2	1.491825E+00	1.491380E+00	4.447147E-04	2.085887E-12
0.3	1.822119E+00	1.822511E+00	3.921179E-04	2.547518E-12
0.4	2.225541E+00	2.226089E+00	5.476789E-04	3.111733E-12
0.5	2.718282E+00	2.718332E+00	5.024383E-05	3.800071E-12
0.6	3.320117E+00	3.319609E+00	5.074847E-04	4.642509E-12
0.7	4.055200E+00	4.054823E+00	3.771472E-04	5.670131E-12
0.8	4.953032E+00	4.953793E+00	7.607842E-04	6.926015E-12
0.9	6.049647E+00	6.051645E+00	1.997895E-03	8.456347E-12
1	7.389056E+00	7.389193E+00	1.365769E-04	1.033218E-11

Exemple 3.3 *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$u(x) - \int_0^x (x-t)\,u(t)dt = 1 + x, \qquad 0 \leq x, t \leq 1,$$

la solution exacte soit donnée par

$$u(x) = \exp(x).$$

La solution approximative $u_n(x)$ est obtenue par la méthode tronquée de la série de Touchard.

Tableau 3. *Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.3 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 10$ est calculée.*

x	*solution exacte* u	*solution approchée* u_n	*Erreur*
0.000000	1.000000e+00	1.000000e+00	0.000000E+00
0.200000	1.221403e+00	1.221403E+00	1.580958E-13
0.400000	1.491825e+00	1.491825E+00	3.459455E-13
0.600000	1.822119e+00	1.822119E+00	5.482281E-13
0.800000	2.225541e+00	2.225541E+00	7.731593E-13
1.000000	2.718282e+00	2.718282E+00	1.004530E-12

Conclusion

Dans ce travail, on a résolu équation intégrale de Fredholm par les polynômes de Touchard. Un avantage considérable de cette méthode est que les coefficients de la solution sont trouvés facilement en utilisant le

programme MATLAB. L'efficacité de cette méthode est testée en résolvant quelques exemples pour lesquels la solution exacte est connue. Cela nous permet d'estimer l'exactitude avec nos résultats numériques.

Cette méthode peut étre étendue et appliquée au systéme d'équations intégrales linéaires et non linéaires, équations intégro-diffirentielles, mais certaines modiffications sont nécessaires.

Bibliographie

[1] S. Abbasbandy, E. Shivanian, A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations, in Numer Algor, 56, (2011) 27–43.

[2] A. Adawi, F. Awawdeh, A numerical method for solving linear integral equations, Int. J. Contemp. Mathematics Sciences, 10, (2009) pp 485-496.

[3] G. Arfken, Laguerre functions, mathematical methods for physicists, 1985.

[4] K. Atkinson, The numerical solution of Integral équations of the second kind,the press syndicate of the university of cambridge, united kingdom, 1997.

[5] K. Atkinson, W. Han, Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework. Springer, 2001.

[6] E. Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equations of the second kind, App. Math. Comput, 165 (2005) 223–227.

[7] E. Babolian, H.R. Marzban, M. Salmani, Using triangular orthogonal functions for solving Fredholm integral equations of the second kind, App. Math. and Comput., 201, (2008) 452-464.

[8] K. E. Atkinson, The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind, Cambridge University Press, Cambridge,pp50-52, 1997

[9] A. Jerri. Introduction to integral equations with applications. John Wiley and Sons, INC, 1999.

[10] B. Gagui, Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz, thèse de Doctorat, Université de Msila, 2015.

[11] R. Kress, Linear Integral Equations. Springer. Verlag, New York, 2d ed , pp224-225, 1999.

[12] K. Maleknejad, N. Aghazadeh, Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method, Appl. Math. Comput, 161, (2005) 915–922.

[13] M. Nadir, Cours sur les équations intégrales, université M'sila 2008.

[14] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials, in Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics, 4, (2014), pp 37-44.

[15] M. Nadir, Solving linear integral equations with Fibonacci polynomials, Malaya Journal of Matematik, Vol. 6, No. 4, (2018), 711-715.

[16] M. Nadir, D. Mustapha, Euler Series solutions for linear Integral equations AJMAA, Vol. 14, No. 2, Art. 11, (2017) pp 1-7.

[17] M. Nadir, A. Rahmoune, Modified Method for Solving Linear Volterra Integral equations of the Second Kind Using Simpson's Rule, in International Journal Mathematical Manuscripts (IJMM), 1, (2) (2007), 133-140.

[18] A. Rahmoune, Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales, Thèse de Doctorat, Université de Batna, 2011

[19] Abdul-Majid Wazwaz, A first cours in integral equations, saint xavier university, USA, second edition, 2005

ملخص: في هذه المذكرة استخدمنا كثيرات حدود توشارد لتقريب حلول معادلة فريدولم التكاملية من النوع الثاني حيث طبقنا عدة أمثلة للتأكد من مدى دقة هذه الطريقة.
الكلمات المفتاحية : معادلة فريدولم التكاملية، كثيرات حدود توشار.

Résumé : Dans ce mémoire on a traité numériquement l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce, moyennant les polynômes de Touchard. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier cette méthode en indiquant sa précision ainsi que la convergence.
Mots-clés : équation Intégrale de Fredholm, polynômes de Touchard.

Abstract: In this thesis we presente an numerical solution of Fredholm integral equation of the second kind. The method is based on the use of Touchard polynomials. Some numerical examples are presented to illustrate the accuracy this method.
keywords : Integral Equation of Fredholm, polynomials Touchard.