



Université Mohamed Boudiaf – M'sila
Institut de Gestion des Techniques Urbaines
Département d'Architecture



Polycopie de cours
GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE 2

Destinée aux étudiants de la
Première année Architecture

Élaborée par

Dr. Assoule Dechaicha

Maitres de conférences MCA

Année universitaire : 2025 - 2026

Université Mohamed Boudiaf – M'sila
Institut de Gestion des Techniques Urbaines
Département d'Architecture

Polycopie de cours
GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE 2

Destinée aux étudiants de la
Première année Architecture

Élaborée par

Dr. Assoule Dechaicha

Maitres de conférences MCA

Année universitaire : 2025 - 2026

Table des matières

Table des matières2

Liste des figures :9

Introduction :12

 Syllabus de cours..... 12

 Aperçu général 12

 Objectifs pédagogiques généraux..... 12

 Contenus de l’enseignement..... 12

 Mode d’évaluation : 13

Chapitre I. LES OMBRES EN ARCHITECTURE14

 Introduction 15

 I.1. Définition : 15

 I.2. Méthodes de représentation : 16

 I.3. Utilité de l’ombre en architecture : 16

 I.4. Les types des ombres : 18

 I.4.1. L’ombre propre : 18

 I.4.2. L’ombre portée (projetée) : 18

 I.5. Éléments de projection de l’ombre : 19

 I.5.1. La source lumineuse : soleil, projecteur..... 19

 I.5.2. Les propriétés géométriques de l’objet : 19

 I.5.3. Positionnement de l’objet 20

 I.6. L’ombrage : cas divers 20

 I.6.1. La direction de l’ombre : 20

 I.6.2. Traces d’une droite : projection d’ombre..... 21

 I.6.3. Ombre d’un point sur le plan frontal (vertical) : 21

 I.6.4. Ombre d’un point sur le plan horizontal : 22

 I.6.5. L’ombre virtuelle d’un point 22

 I.6.5.1. L’ombre virtuelle d’un point sur le plan H 22

 I.6.5.2. L’ombre virtuelle d’un point sur le plan F 22

I.6.6. Ombre d'une droite sur les plans H et F :	23
I.6.6.1. Ombre d'une droite verticale, sur le plan F (façade/en élévation) :.....	23
I.6.6.2. Ombre d'une droite verticale, sur le plan H (façade/en élévation) :.....	23
I.6.6.3. Ombre d'une droite de bout sur le plan F (façade/en élévation) :	24
I.6.6.4. Ombre d'une droite de bout sur le plan H (façade/en élévation) :.....	24
I.6.7. Ombre d'une droite horizontale :.....	24
I.6.7.1. Ombre sur le plan H :.....	24
I.6.7.2. Ombre sur le plan V :.....	25
I.6.8. Ombre d'une droite horizontale parallèle au plan F (droite frontale) :.....	25
I.6.9. Ombrage d'un carré vertical : cas divers	26
I.6.9.1. Ombre d'un carré vertical parallèle au plan F (droite frontale) :.....	26
I.6.9.2. Ombre d'un carré vertical parallèle au plan F – 2ème cas :.....	26
I.6.9.3. Ombre d'un carré horizontale perpendiculaire au plan F :	26
I.6.9.4. Ombre d'un carré horizontal perpendiculaire au plan F – 2ème cas :	27
I.7. Ombrage des volumes simple :.....	27
I.8. Tracé de l'ombre en vue perspective :	28
I.8.1. Le rayonnement solaire.....	28
I.8.1.1. Tracé des lignes d'ombrage verticales et horizontales des sommets.	28
I.8.1.2. Cas d'une source ponctuelle	28
I.8.2. Ombre des éléments de façade en décrochement :	29
Chapitre II. LES POLYÈDRES.....	30
Introduction	31
II.1. Définition :.....	31
II.1.1. Le solide (le volume) :.....	31
II.1.2. Le polyèdre :.....	31
II.1.3. Le polyèdre régulier :	31
II.1.4. Existence historique des polyèdres réguliers :	32
II.1.5. Proportionnalité et rapports géométriques :.....	33

II.2. Les sections planes :	34
II.2.1. Section d'un cube par un plan parallèle à une face :	34
II.2.2. Section d'un cube par un plan parallèle à une arête :	35
II.2.3. Section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face :	35
II.2.4. Section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête :	35
II.2.5. Section d'un cylindre par un plan parallèle à la base :	36
II.2.6. Section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe :	36
II.2.7. Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base :	37
II.2.8. Section d'un cône par un plan parallèle à la base :	37
II.3. Les pyramides :	38
II.3.1. Section plane d'une pyramide :	38
II.4. Le cône :	39
II.4.1. Section plane d'un cône :	39
II.5. Les sections planes (niveau de coupes) :	40
II.6. Les intersections Plans – polyèdres : les sections planes :	40
II.6.1. Cas n°01 :	40
II.6.2. Cas n°02 :	41
II.6.3. Cas n°03 :	41
II.6.4. Cas n°04 :	41
II.6.5. Cas n°04 :	42
II.6.6. Récapitulation :	42
Chapitre III. LES SURFACES DE RÉVOLUTION EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE	44
Introduction	45
III.1. Définition et principe	45
III.1.1. Définitions fondamentales.....	45
III.1.2. Importance en architecture	46
III.2. Éléments caractéristiques des surfaces de révolution	47
III.2.1. Plan méridien et méridienne.....	47

III.2.2. Parallèles	48
III.2.3. Notion de directrice	48
III.3. Surfaces de révolution classiques.....	49
III.4. Le cylindre de révolution	49
III.4.1. Définition et génération.....	49
III.4.2. Équation cartésienne	49
III.4.3. Sections planes	49
III.4.4. Applications architecturales	50
III.5. Le cône de révolution.....	50
III.5.1. Définition et génération.....	50
III.5.2. Éléments caractéristiques	51
III.5.3. Équation cartésienne	51
III.5.4. Sections planes (coniques)	51
III.5.5. Applications architecturales	52
III.6. La sphère	53
III.6.1. Définition	53
III.6.2. Équation cartésienne	53
III.6.3. Sections planes	53
III.6.4. Applications architecturales	54
III.7. Le tore	54
III.7.1. Définition et génération.....	54
III.7.2. Applications.....	55
III.8. L'ellipsoïde de révolution.....	55
III.8.1. Définition	55
III.8.2. Applications.....	55
III.9. L'hyperboloïde de révolution	56
III.9.1. Types d'hyperboloïdes	56
III.9.2. Génération réglée	57

III.9.3. Applications architecturales majeures	57
III.10. Le parabolôide de révolution.....	58
III.10.1. Définition	58
III.10.2. Équation cartésienne	58
III.10.3. Sections planes	58
III.10.4. Applications.....	59
III.11. Applications architecturales	59
III.11.1. Dômes et coupoles.....	59
III.11.1.1. Définitions architecturales.....	59
III.11.1.2. Exemples historiques majeurs	60
III.11.1.3. Dômes modernes	60
III.11.1.4. Principe structural.....	61
III.11.2. Structures hyperboloïdes	61
III.11.2.1. Propriétés géométriques et structurelles	61
III.11.2.2. Exemples architecturaux emblématiques	62
III.11.2.3. Conception et tracé	63
III.11.3. Autres applications architecturales	63
III.11.3.1. Voûtes de révolution	63
III.11.3.2. Éléments architectoniques	64
III.11.3.3. Architecture contemporaine	64
III.11.3.4. Intérêt crucial pour le travail d'architecte	64
III.12. Calculs géométriques	65
III.12.1. Calcul de vraie grandeur	65
III.12.1.1. Problématique.....	65
III.12.1.2. Méthodes principales.....	65
III.12.2. Calcul d'aires de surfaces de révolution	65
III.12.2.1. Théorème de Guldin (ou Pappus-Guldin)	65
III.12.2.2. Formule générale par intégration	66

III.12.2.3. Exemples classiques	66
III.12.3. Calcul de volumes de solides de révolution	67
III.12.3.1. Théorème de Guldin (second théorème)	67
III.12.3.2. Formule générale par intégration	67
III.12.3.3. Exemples classiques	67
III.12.4. Applications en architecture	68
Conclusion.....	68
Chapitre IV. LES SURFACES DÉVELOPPEMENT : MÉTHODES ET REPRÉSENTATIONS ..	70
Introduction	71
IV.1. Définition :	71
IV.2. Principe de base :	72
IV.3. Les méthodes de développement de surfaces :	72
IV.3.1. Développement par des lignes parallèles :	72
IV.3.2. Développement par des lignes radiales :	72
IV.3.3. Développement par triangulation :	73
IV.3.4. Développement par approximation :	73
IV.4. Développement de volume courant : construction des patrons	73
IV.4.1. Patron d'un cylindre vertical :	73
IV.4.2. Patron d'un parallélépipède :	74
IV.4.3. Développement d'un prisme régulier :	74
IV.4.3.1. 1 ^{er} cas :	74
IV.4.3.2. 2 ^{ème} cas :	74
IV.4.4. Développement d'une pyramide carré :	75
IV.4.5. Démarche de développement d'une pyramide :	75
IV.4.5.1. La vraie grandeur :	75
IV.4.5.2. Démarche de construction d'un patron de pyramide à base carré :	76
IV.4.6. Patron d'un cône :	77
IV.4.7. Patron d'un tronc de cône :	78

IV.4.8. Patron d'un tronc de pyramide :	78
IV.4.9. Développement surfacique de formes variées	79
IV.4.10. Patron d'un prisme hexagonal coupé par un plan incliné (à 30°) :	79
IV.4.11. Développement d'un cylindre tranché par un plan incliné :	80
IV.4.12. Patron d'un cône régulier coupé par un plan incliné (à 30°) :	81
IV.4.13. Patron d'un prisme pentagonal coupé par un plan incliné (à 30°) :	85
IV.4.14. Patron d'un prisme hexagonal coupé par un plan incliné :	86
Bibliographie :	88

Liste des figures :

Figure 1 : l'effet d'ombre	15
Figure 2 : l'ombre d'un chapiteau	16
Figure 3 : l'ombre en dégradé	16
Figure 4 : représentation conventionnelle de l'ombre.....	17
Figure 5 : différenciation des volumes et des fonds d'images	17
Figure 6 : distinction des niveaux des blocs par leurs ombres	17
Figure 7 : distinction des profondeurs à travers l'ombres.....	18
Figure 8 : l'ombre et sa constitution	18
Figure 9 : ombre propre et ombre portée.....	19
Figure 10 : éléments de tracé de l'ombre.....	19
Figure 11 : éléments de projection de l'ombre	20
Figure 12 : représentation du rayonnement solaire à 45° d'inclinaison.....	20
Figure 13 : trace d'une droite (ombrage par traces).....	21
Figure 14 : ombre projetée d'un point sur le plan F.....	21
Figure 15 : ombre projetée d'un point sur le plan H.....	22
Figure 16 : ombre virtuel d'un point A sur le plan H.....	22
Figure 17 : ombre virtuel d'un point A sur le plan F.....	23
Figure 18 : Ombre d'une droite verticale, sur le plan F	23
Figure 19 : Ombre d'une droite verticale, sur le plan H.....	23
Figure 20 : Ombre d'une droite de bout sur le plan F	24
Figure 21 : Ombre d'une droite de bout sur le plan H.....	24
Figure 22 : Ombre d'une droite horizontale sur le plan H.....	25
Figure 23 : Ombre d'une droite horizontale sur le plan V.....	25
Figure 24 : Ombre d'une droite horizontale parallèle au plan F	25
Figure 25 : Ombre d'un carré vertical parallèle au plan F	26
Figure 26 : Ombre d'un carré vertical parallèle au plan F – 2ème cas.....	26
Figure 27 : Ombre d'un carré horizontale perpendiculaire au plan F	27
Figure 28 : Ombre d'un carré horizontal perpendiculaire au plan F – 2ème cas.....	27
Figure 29 : ombrage des volumes réguliers.....	28
Figure 30 : l'ombre en perspective	28
Figure 31 : orientation de l'ombre	29
Figure 32 : l'ombre en élévation (façades)	29
Figure 33 : polyèdres multifaces	31
Figure 34 : polyèdres réguliers.....	32
Figure 35 : des solides platoniciens.....	32
Figure 36 : rapport géométrique d'Euler-Descartes	33

Figure 37 : déformation et perte des propriétés géométriques	33
Figure 38 : section plane (principe).....	34
Figure 39 : Section d'un cube par un plan parallèle à une face.....	34
Figure 40 : Section d'un cube par un plan parallèle à une arête.....	35
Figure 41 : Section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face	35
Figure 42 : Section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête	36
Figure 43 : Section d'un cylindre par un plan parallèle à la base	36
Figure 44 : Section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe.....	37
Figure 45 : Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base.....	37
Figure 46 : Section d'un cône par un plan parallèle à la base.....	38
Figure 47 : Section plane d'une pyramide.....	38
Figure 48 : le rapport h/K pour une pyramide.....	39
Figure 49 : Section plane d'un cône.....	39
Figure 50 : le rapport K pour un cône	40
Figure 51 : sens et niveaux des coupes.....	40
Figure 52 : section plane simple.....	41
Figure 53 : section plane (cas n° 02)	41
Figure 54 : changement de la forme de la section 1	41
Figure 55 : changement de la forme de la section 2	42
Figure 56 : changement de la forme de la section 3	42
Figure 57 : cas divers.....	43
Figure 58: génération d'une surface de révolution. La courbe génératrice C tourne autour de l'axe fixe Δ pour engendrer la surface S.	46
Figure 59: Éléments caractéristiques d'une surface de révolution. Les plans méridiens contiennent l'axe Δ . Les parallèles sont des cercles perpendiculaires à l'axe.....	47
Figure 60: Les trois surfaces de révolution fondamentales. Le cylindre est engendré par une droite parallèle à l'axe, le cône par une droite sécante à l'axe au sommet S, et la sphère par un demi-cercle tournant autour de son diamètre.....	49
Figure 61: Éléments géométriques du cône de révolution. Le sommet S, l'axe, le demi-angle α , la hauteur h, le rayon de base R et l'apothème a sont reliés par la relation $a^2=R^2+h^2$	50
Figure 62: Les quatre types de sections coniques selon l'orientation du plan sécant par rapport au cône : cercle, ellipse, parabole et hyperbole.	52
Figure 63: Génération d'une sphère de révolution à partir d'un demi-cercle de rayon R.....	53
Figure 64: Intersection d'une sphère avec un plan sécant incluant le centre de la sphère (O).....	54
Figure 65: Un tore de révolution défini par : un cercle générateur (C), Rayon mineur r, Rayon majeur R et axe de révolution (Δ)	54
Figure 66: Ellipsoïde de révolution.....	55

Figure 67: Principe de construction d'un hyperboloïde de révolution généré autour d'un axe vertical de révolution	56
Figure 11: Deux types d'Hyperboloïde de révolution	57
Figure 12: Paraboloides de révolution générées autour de son axe vertical de symétrie	58
Figure 13: Trois exemples historiques majeurs de coupôles : le Panthéon de Rome (\varnothing 43,3 m), la cathédrale de Florence par Brunelleschi (\varnothing 45 m), et la basilique Saint-Pierre par Michel-Ange (\varnothing 42 m).	60
Figure 14: La Tour de Choukhov (1896) et les tours de refroidissement modernes illustrent l'utilisation architecturale des hyperboloïdes de révolution. La structure en treillis avec des barres droites crée une forme courbe remarquablement résistante.	62
Figure 15: Théorèmes de Guldin appliqués aux surfaces de révolution.....	66
Figure 58 : surfaces de développement	72
Figure 59 : développement d'un cylindre	73
Figure 60 : patron d'un prisme régulier	74
Figure 61 : patron d'un prisme régulier, 1 ^{er} cas.....	74
Figure 62 : patron d'un prisme régulier, 2 ^{ème} cas	75
Figure 63 : patron d'une pyramide à base carré.....	75
Figure 64 : projection de la vraie grandeur	76
Figure 65 : le tracé du patron d'une pyramide (2 cas)	77
Figure 66 : patron d'un cône	77
Figure 67 : patron d'un tronc de cône	78
Figure 68 : patron d'un tronc de pyramide	79
Figure 69 : développement de formes variées.....	79
Figure 70 : Patron d'un prisme hexagonal coupé par un plan incliné à 30°	80
Figure 71 : Développement d'un cylindre tranché par un plan incliné	81
Figure 72 : Patron d'un cône régulier coupé par un plan incliné à 30° (1er cas)	83
Figure 73 : Patron d'un cône régulier coupé par un plan incliné à 30° (2ème cas).....	84
Figure 74 : Patron d'un cône régulier coupé par un plan incliné à 30° (3ème cas).....	84
Figure 75 : Patron d'un prisme pentagonal coupé par un plan incliné à 30°	86
Figure 76 : Patron d'un prisme hexagonal coupé par un plan incliné	87

Introduction :

Ce polycopié constitue la continuité du support « Géométrie de l'Espace 1 » et approfondit les connaissances acquises durant le premier semestre. Il porte essentiellement sur la maîtrise des représentations des objets architecturaux en modes 3D et 2D, ainsi que sur la capacité à passer rigoureusement d'un mode à l'autre. L'étude des volumes complexes, de leurs projections, des procédés de construction des ombres et des différentes méthodes de développement des surfaces constitue l'axe central de cet enseignement.

L'organisation et les contenus de ce cours s'inscrivent dans les orientations du programme national de formation des architectes. Ils visent à fournir aux étudiants les outils méthodologiques nécessaires pour comprendre, représenter et analyser les formes architecturales dans une logique géométrique rigoureuse.

Syllabus de cours

Aperçu général

- **Intitulé de la matière :** Géométrie de l'Espace 2
- **Unité d'enseignement :** Enseignement Appliqué EA 2
- **Coefficient :** 2
- **Crédit :** 2

Objectifs pédagogiques généraux

Ce cours vise l'application des notions étudiées au premier semestre à la représentation des polyèdres et des surfaces de révolution. Il développe les compétences nécessaires pour traduire en plan des volumes complexes, analyser leurs intersections et représenter les effets d'ombre qu'ils génèrent.

Contenus de l'enseignement

- **Notion de polyèdre :** définitions, classifications (polyèdres réguliers), sections, développements, éléments de symétrie et propriétés topologiques.
- **Surfaces de révolution :** surfaces coniques, cylindriques et sphériques ; représentation, sections, développements ; ombres propres et ombres portées.

- **Développement des surfaces** : détermination et mise à plat des développements.
- **Intersection de deux surfaces** : typologie des intersections, méthodes de construction, détermination des lignes d'intersection.
- **Perspective** : principes fondamentaux et application à la représentation architecturale.

Mode d'évaluation :

Nature du contrôle de connaissances	Pondération en %
Examen	60
Continu	40
Total	100

Chapitre I. LES OMBRES EN ARCHITECTURE

Introduction

En architecture, la représentation graphique d'une scène ne se limite jamais aux contours d'un objet ni aux volumes qu'il décrit. Pour transmettre une perception réaliste et expressive, il est nécessaire d'enrichir le dessin par différents modes de rendu : l'épaisseur des traits, la variation des tons, le contraste des surfaces et, surtout, l'ombre. L'ombre fait partie intégrante de notre expérience visuelle du monde bâti ; elle accompagne chaque forme, modifie son apparence, révèle sa profondeur et influence la manière dont nous percevons les espaces.

L'ombre n'est donc pas un simple effet graphique ajouté en fin de dessin : elle constitue une composante essentielle du langage architectural. Qu'elle soit portée sur un support ou projetée dans l'environnement, l'ombre structure la scène, précise les volumes, oriente la lumière, crée des ambiances et participe à la compréhension spatiale d'un projet. Dans une démarche pédagogique, apprendre à construire correctement les ombres revient à former l'étudiant à "voir" et à analyser l'espace avec rigueur. La maîtrise des ombres permet non seulement de produire des représentations crédibles et expressives, mais aussi d'anticiper le comportement réel de la lumière sur les formes architecturales — un savoir indispensable pour la conception, la mise en valeur des volumes, et l'étude du confort lumineux.

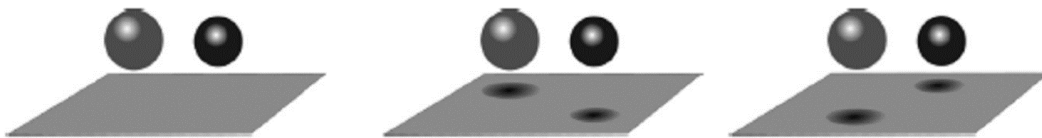


Figure 1 : l'effet d'ombre

En Architecture, les scènes réalistes nécessitent plusieurs types de rendu : Épaisseurs de traits, nuance des couleurs et ton, contraste, ... l'ombre.

L'ombre existe toujours dans notre perception de paysage vécu et construit.

Pour un graphisme complet, il est nécessaire de donner importance à l'ombre comme composante vue et projetée (ambiance).

I.1. Définition :

L'ombre est la zone qui se forme lorsqu'un objet opaque bloque la lumière provenant d'une source lumineuse.

En architecture, l'ombre constitue un élément essentiel de lecture et de représentation : elle révèle les volumes, souligne les formes, et contribue à la perception de l'espace, de l'ambiance et du relief dans un dessin ou une scène construite.



Figure 2 : l'ombre d'un chapiteau

L'ombre se rapporte aux surfaces non exposées aux rayons lumineux (surfaces ombrées).

I.2. Méthodes de représentation :

Il existe une diversité de méthodes de représentation des ombres : conventionnelles et artistiques.

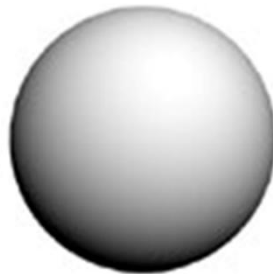


Figure 3 : l'ombre en dégradé

I.3. Utilité de l'ombre en architecture :

Les ombres offrent une meilleure lecture des vues : masse, élévations, vues panoramiques, etc.

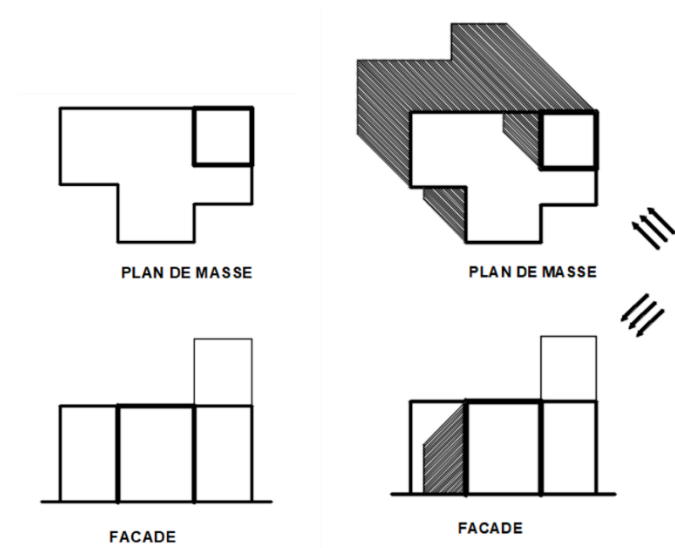


Figure 4 : représentation conventionnelle de l'ombre

Les ombres permettent :

- La différenciation des volumes.

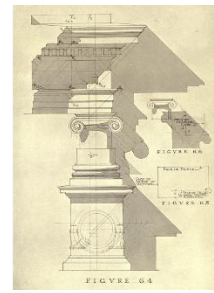


Figure 5 : différenciation des volumes et des fonds d'images

- La distinction des hauteurs dans les plans de masses.

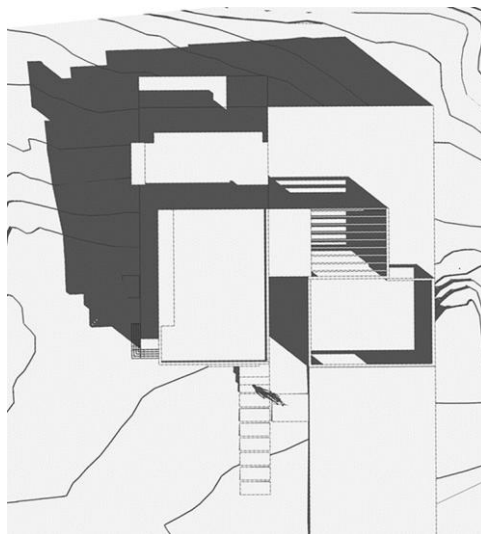


Figure 6 : distinction des niveaux des blocs par leurs ombres

- L'appréciation des profondeurs dans les élévations.

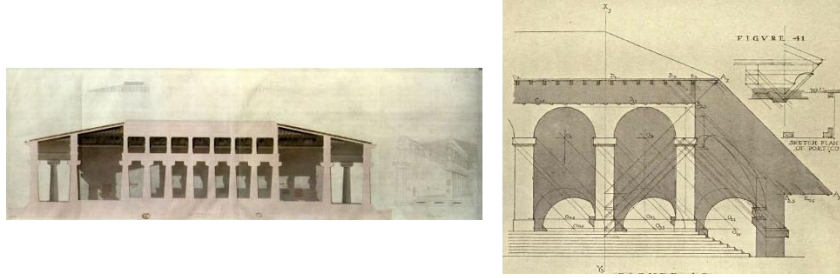


Figure 7 : distinction des profondeurs à travers l'ombres

I.4. Les types des ombres :

La projection des rayons lumineux sur un objet produit deux types d'ombre : l'ombre propre et l'ombre portée.

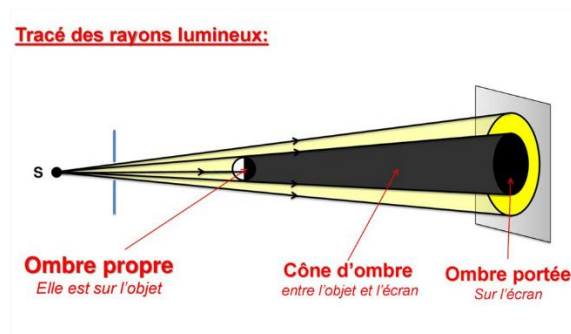


Figure 8 : l'ombre et sa constitution

I.4.1. L'ombre propre :

L'ombre propre se projette sur l'objet lui-même. C'est la zone d'un volume qui n'est pas éclairée directement par la source lumineuse. Elle correspond à la partie de l'objet située à l'opposé du soleil. L'ombre propre permet de lire le relief, la forme et le modelé d'un élément architectural.

I.4.2. L'ombre portée (projetée) :

C'est l'ombre que l'objet projette sur un autre support : sol, mur voisin, façade adjacente, etc. Elle dépend à la fois de la position du soleil et des éléments environnants. L'ombre portée est essentielle pour comprendre l'impact lumineux, l'ensoleillement et les effets climatiques ou esthétiques dans l'espace bâti. Elle est en correspondance avec les caractéristiques géométriques de l'objet en question.

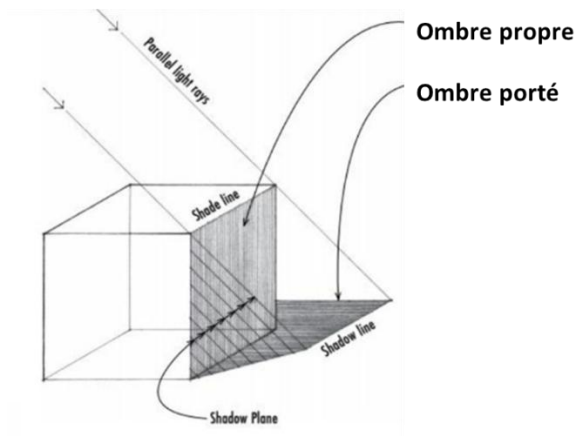


Figure 9 : ombre propre et ombre portée

Les limites de l'ombre définissent la ligne d'ombrage.

I.5. Éléments de projection de l'ombre :

I.5.1. La source lumineuse : soleil, projecteur.

La source lumineuse est pratiquement définie par :

- ✓ Sa position spatiale :
- ✓ Son hauteur (angle vertical) ;
- ✓ Sa déviation (angle horizontal) ;
- ✓ Et l'horaire (temps local).

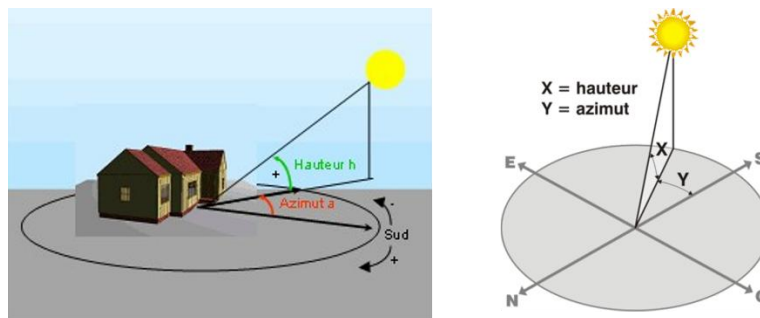


Figure 10 : éléments de tracé de l'ombre

I.5.2. Les propriétés géométriques de l'objet :

- ✓ Taille :
- ✓ Dimensions ;
- ✓ Orientation ;
- ✓ Opacité.

I.5.3. Positionnement de l'objet

Éloignement, proximité, superposition ;

Devant, derrière, en dessus, en dessous, etc.

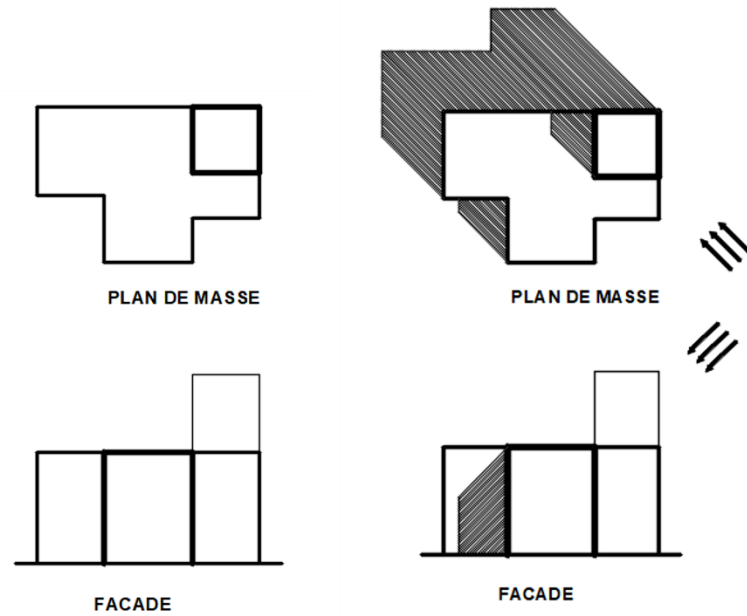


Figure 11 : éléments de projection de l'ombre

I.6. L'ombrage : cas divers

I.6.1. La direction de l'ombre :

Les angles solaires (Hauteur et Azimut).

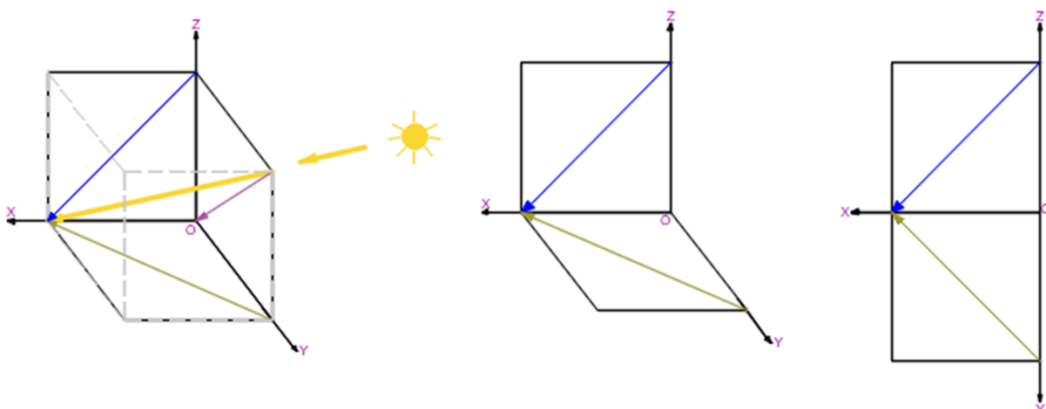


Figure 12 : représentation du rayonnement solaire à 45° d'inclinaison

I.6.2. Traces d'une droite : projection d'ombre

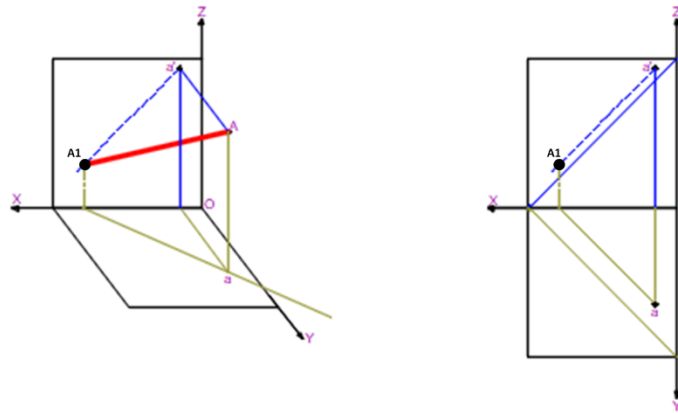


Figure 13 : trace d'une droite (ombrage par traces)

I.6.3. Ombre d'un point sur le plan frontal (vertical) :

A : un point dans l'espace ;

a : projection de A sur le Plan H ;

a' : projection de A sur le Plan F ;

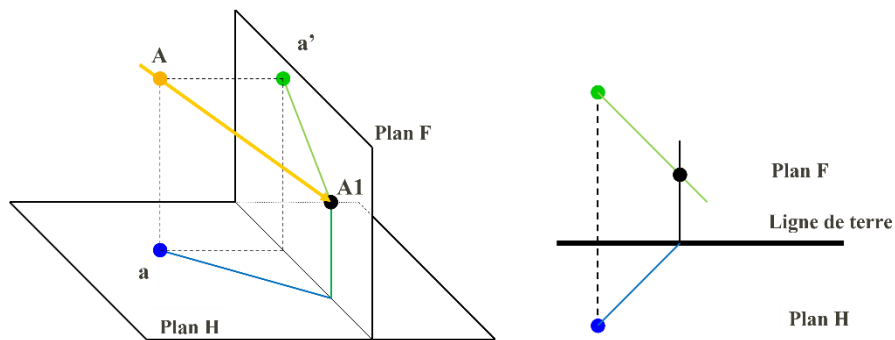


Figure 14 : ombre projetée d'un point sur le plan F

- A_1 : l'ombre de A sur le plan F.
- **Le point A est plus proche au plan F**

I.6.4. Ombre d'un point sur le plan horizontal :

Le point A est plus proche au plan H.

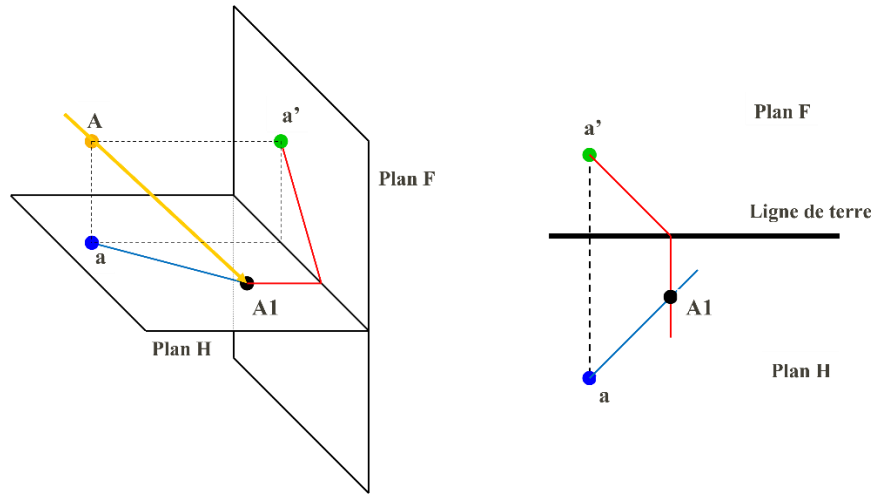


Figure 15 : ombre projetée d'un point sur le plan H

I.6.5. L'ombre virtuelle d'un point

I.6.5.1. L'ombre virtuelle d'un point sur le plan H

Prolongement des lignes de projection et des lignes de rappels.

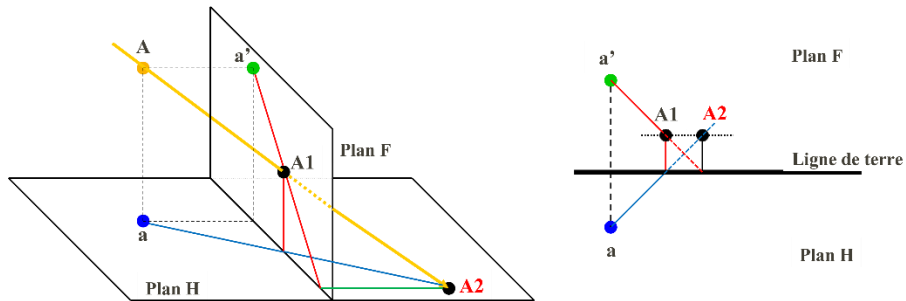


Figure 16 : ombre virtuel d'un point A sur le plan H

I.6.5.2. L'ombre virtuelle d'un point sur le plan F

Prolongement des lignes de projection et des lignes de rappels.

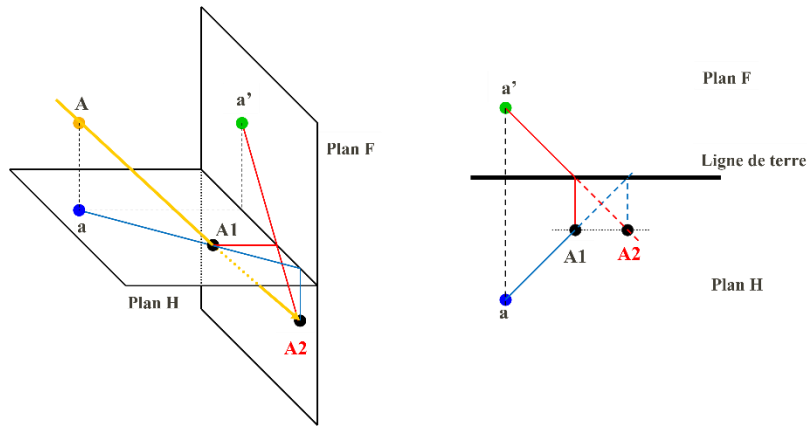


Figure 17 : ombre virtuel d'un point A sur le plan F

I.6.6. Ombre d'une droite sur les plans H et F :

I.6.6.1. Ombre d'une droite verticale, sur le plan F (façade/en élévation) :

La droite AB est complètement plus proche au plan F, son ombre est complètement projetée sur le plan F (**sur la façade**).

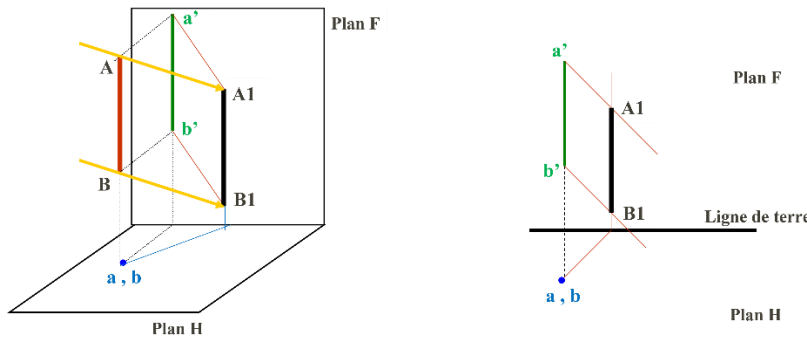


Figure 18 : Ombre d'une droite verticale, sur le plan F

I.6.6.2. Ombre d'une droite verticale, sur le plan H (façade/en élévation) :

La droite AB est complètement plus proche au plan H, son ombre est complètement projetée sur le plan H (**sur la façade**).

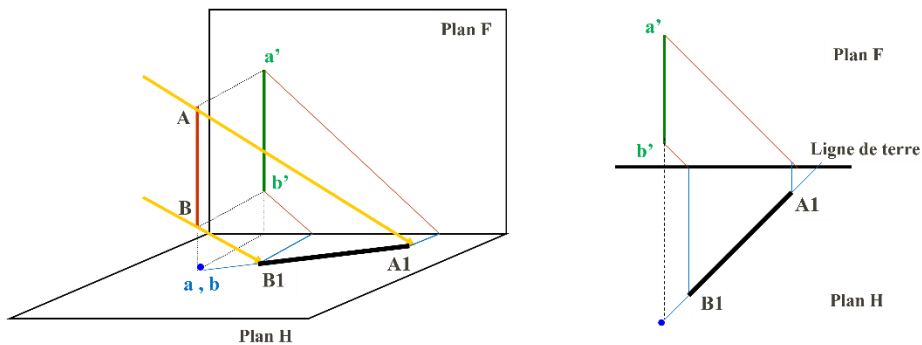


Figure 19 : Ombre d'une droite verticale, sur le plan H

I.6.6.3. Ombre d'une droite de bout sur le plan F (façade/en élévation) :

La droite AB est complètement plus proche au plan F, son ombre est complètement projetée sur le plan F (sur la façade).

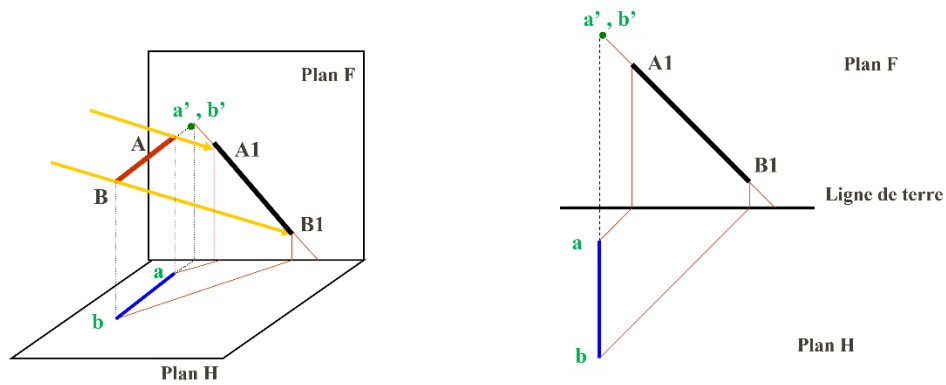


Figure 20 : Ombre d'une droite de bout sur le plan F

I.6.6.4. Ombre d'une droite de bout sur le plan H (façade/en élévation) :

La droite AB est complètement plus proche au plan H, son ombre est complètement projetée sur le plan H (sur la façade).

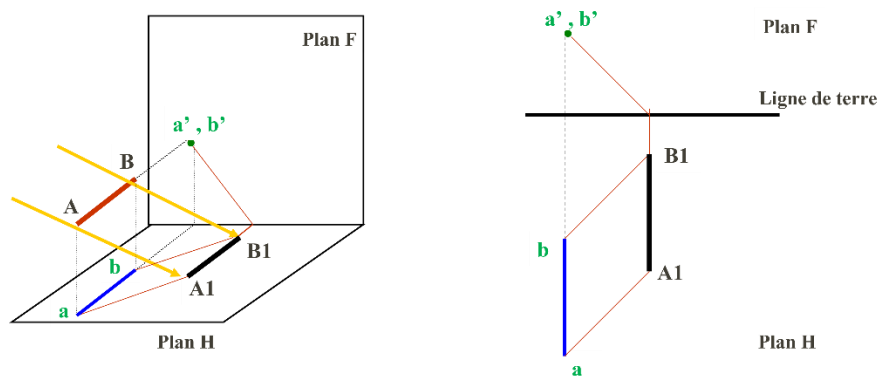


Figure 21 : Ombre d'une droite de bout sur le plan H

I.6.7. Ombre d'une droite horizontale :

I.6.7.1. Ombre sur le plan H :

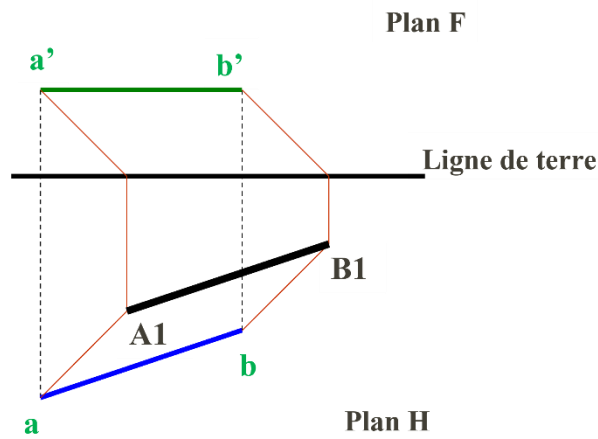


Figure 22 : Ombre d'une droite horizontale sur le plan H

I.6.7.2. Ombre sur le plan V :

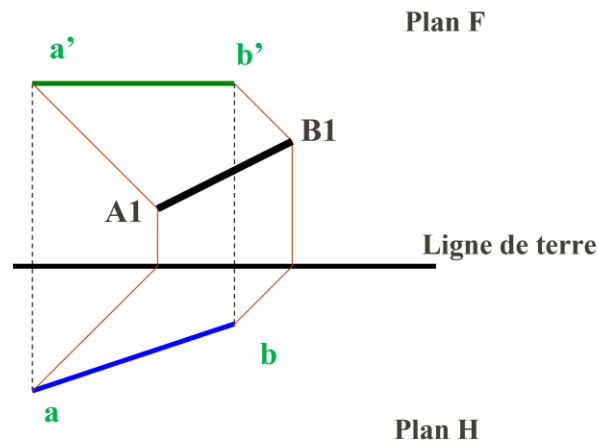


Figure 23 : Ombre d'une droite horizontale sur le plan V

I.6.8. Ombre d'une droite horizontale parallèle au plan F (droite frontale) :

Ombre d'une droite frontale est parallèle à la droite AB :

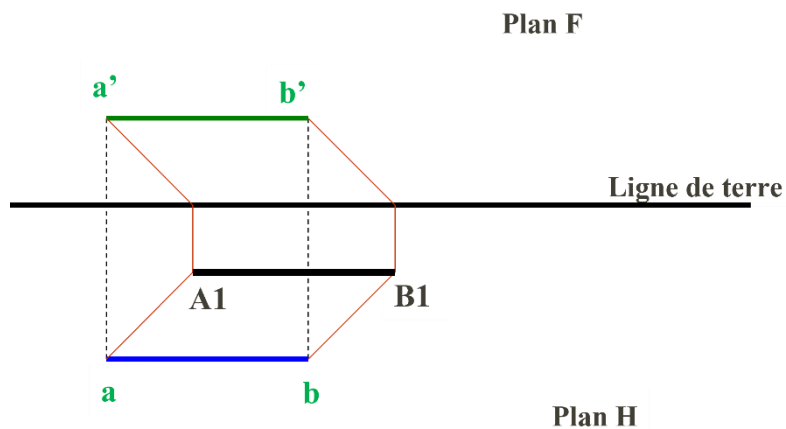


Figure 24 : Ombre d'une droite horizontale parallèle au plan F

I.6.9. Ombrage d'un carré vertical : cas divers

I.6.9.1. Ombre d'un carré vertical parallèle au plan F (droite frontale) :

Cas d'un carré plus proche au plan F, son ombre est complètement projeté sur la façade.

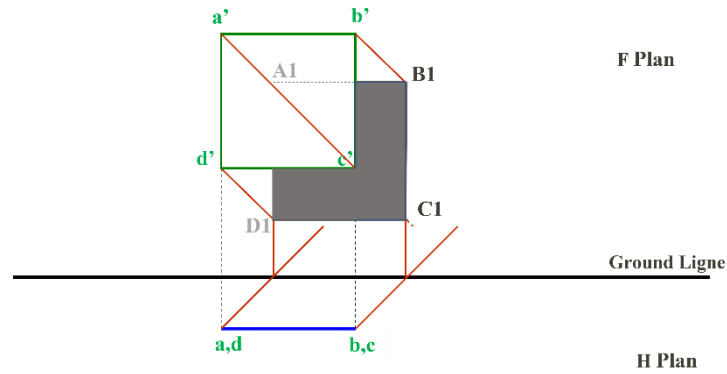


Figure 25 : Ombre d'un carré vertical parallèle au plan F

I.6.9.2. Ombre d'un carré vertical parallèle au plan F – 2ème cas :

Cas d'un ombrage sur les deux plans F et H.

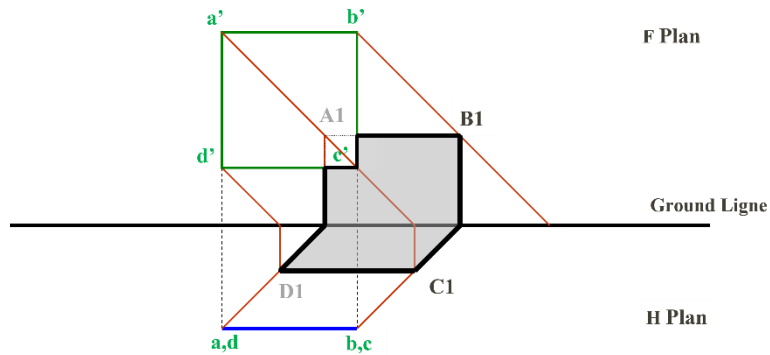


Figure 26 : Ombre d'un carré vertical parallèle au plan F – 2ème cas

I.6.9.3. Ombre d'un carré horizontale perpendiculaire au plan F :

Cas d'un carré plus proche au plan H, son ombre est complètement projeté sur le sol.

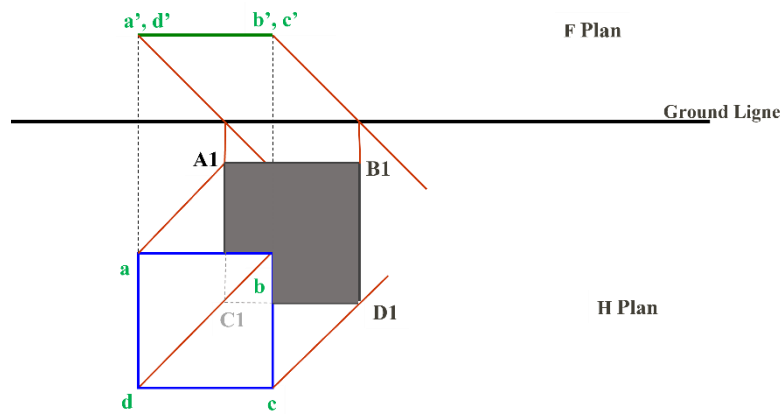


Figure 27 : Ombre d'un carré horizontale perpendiculaire au plan F

I.6.9.4. Ombre d'un carré horizontal perpendiculaire au plan F – 2ème cas :

Cas d'un ombrage sur les deux plans F et H.

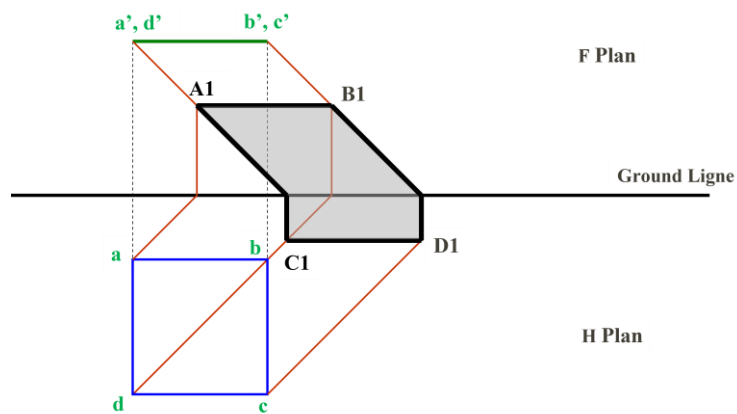


Figure 28 : Ombre d'un carré horizontal perpendiculaire au plan F – 2ème cas

I.7. Ombrage des volumes simple :

Selon la direction des rayon lumineux :

- Ombrage de la base (angle horizontal);
- Ombrage du toit (angle vertical).

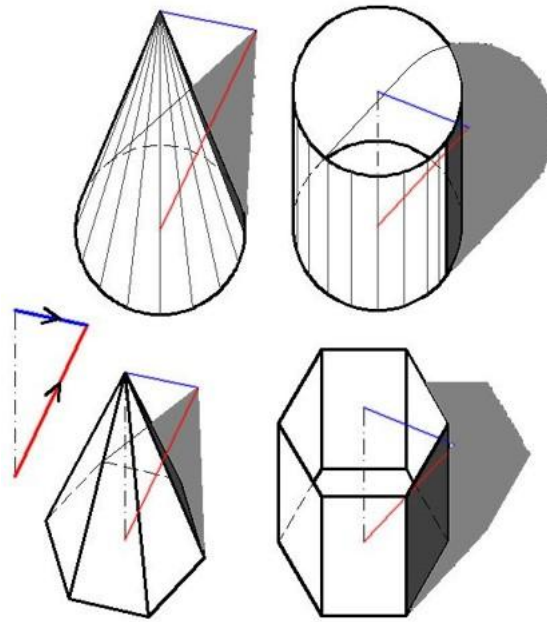


Figure 29 : ombrage des volumes réguliers

I.8. Tracé de l'ombre en vue perspective :

I.8.1. Le rayonnement solaire

Détermination de la source lumineuse et de sa projection sur la ligne/plan horizontale ;

I.8.1.1. Tracé des lignes d'ombrage verticales et horizontales des sommets.

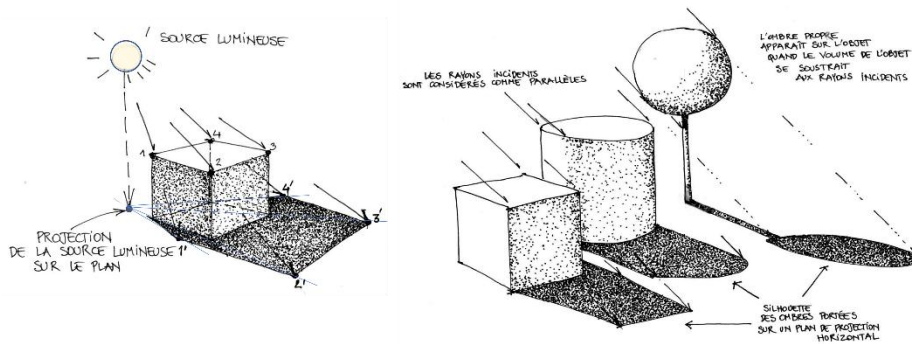


Figure 30 : l'ombre en perspective

I.8.1.2. Cas d'une source ponctuelle

La direction de l'ombre suit l'orientation des rayons lumineux.

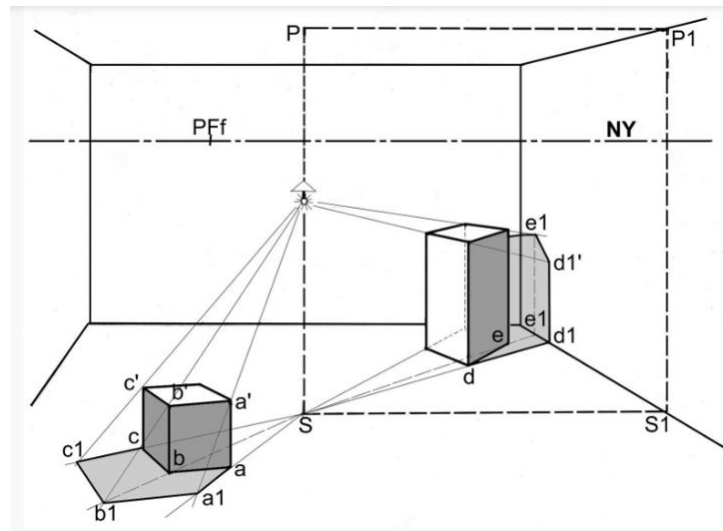


Figure 31 : orientation de l'ombre

La nature et la position de la source lumineuse détermine le traçage et le dimensionnement des ombres.

I.8.2. Ombre des éléments de façade en décrochement :

Il est important de déterminer la position de la source lumineuse et l'orientation des rayons solaires.

L'utilisation des abaques solaires facilité le calcul est le dessin des surfaces ombrées.

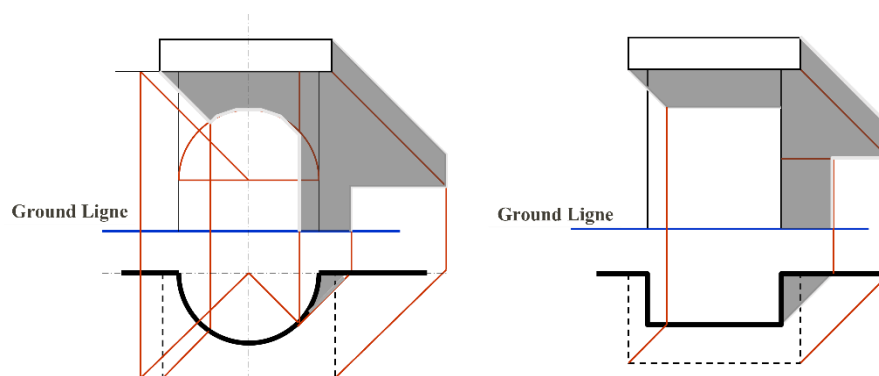


Figure 32 : l'ombre en élévation (façades)

L'ombrage varie selon la forme, l'avancée et la direction des rayons lumineux.

Chapitre II. LES POLYÈDRES

Introduction

Les volumes peuvent être en géométrie simple comme ils peuvent en géométrie complexes. La compréhension des différents types et formes des volumes fait appel à la compréhension et l'étude des polyèdres.

II.1. Définition :

II.1.1. Le solide (le volume) :

Un solide est un objet géométrique tridimensionnel qui occupe un volume donné dans l'espace. Il est limité par des surfaces (planes ou courbes) qui définissent sa forme, ses dimensions et son emplacement dans un repère spatial. En architecture, le solide correspond aux masses bâties, aux volumes construits ou aux formes élémentaires utilisées pour la conception.

II.1.2. Le polyèdre :

Un polyèdre est un solide géométrique dont **les faces sont exclusivement planes** et forment un ensemble fermé délimitant un volume. Il est composé de faces, arêtes et sommets, organisés selon des relations géométriques précises. Les polyèdres incluent des formes régulières (comme le cube ou le tétraèdre) et des formes complexes utilisées en représentation architecturale, notamment pour l'étude des sections, développements et intersections.

- ✓ Le polyèdre est un solide dont les faces ne sont pas courbées.
- ✓ C'est un volume qui ne possède pas d'arêtes courbées.

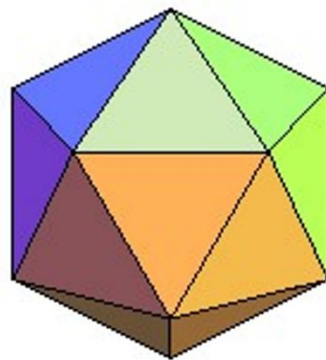


Figure 33 : polyèdres multifaces

II.1.3. Le polyèdre régulier :

Un polyèdre est dit régulier s'il est inscrit dans une sphère et si ses faces sont des polygones réguliers tous identiques.

Cinq types peuvent être distingués : le tétraèdre régulier, l'hexaèdre (cube), l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

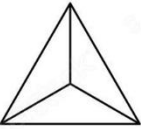
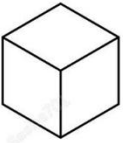



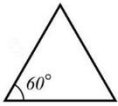
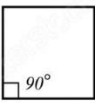
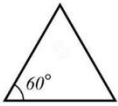
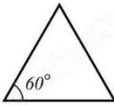

<i>Platonic Solids</i>				
<i>Tetrahedron</i> 4 sided	<i>Hexahedron</i> 6 sided	<i>Octahedron</i> 8 sided	<i>Icosahedron</i> 20 sided	<i>Dodecahedron</i> 12 sided
				
4 faces 4 points 6 edges	6 faces 8 points 12 edges	8 faces 6 points 12 edges	20 faces 12 points 30 edges	12 faces 20 points 30 edges
 60° 180° x 4 720° degrees	 90° 360° x 6 2160° degrees	 60° 180° x 8 1440° degrees	 60° 180° x 20 3600° degrees	 108° 540° x 12 6480° degrees

Figure 34 : polyèdres réguliers

II.1.4. Existence historique des polyèdres réguliers :

Les cinq solides platoniciens montrés ci-dessous datent de plus de 1000 ans avant Platon. Ils sont exposés dans le Musée d'Ashmolean (Oxford).



Figure 35 : des solides platoniciens

II.1.5. Proportionnalité et rapports géométriques :

Les polyèdres réguliers se distinguent par un rapport géométrique entre le nombre des faces, des arêtes et des sommets. Ce rapport est connu sous l'appellation de **formule d'Euler-Descartes** (formule 1).

$$S - a + f = 2 \dots\dots\dots (1)$$

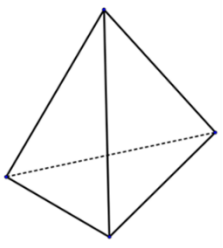
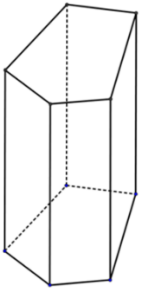
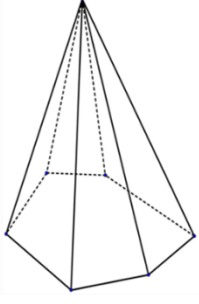
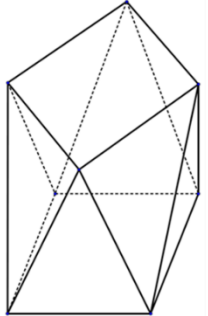
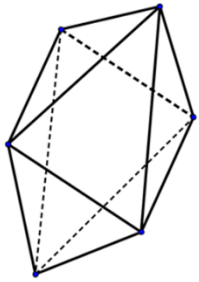
Tétraèdre	Prisme à base pentagonale	Pyramide à base hexagonale	Antiprisme à base carrée	Octaèdre régulier
				
4 sommets 6 arêtes 4 faces $S - a + f = 2$	10 sommets 15 arêtes 7 faces $S - a + f = 2$	7 sommets 12 arêtes 7 faces $S - a + f = 2$	8 sommets 16 arêtes 10 faces $S - a + f = 2$	6 sommets 12 arêtes 8 faces $S - a + f = 2$

Figure 36 : rapport géométrique d'Euler-Descartes

En cas de déformation ou de combinaison, ces rapports ne sont pas vérifiables.

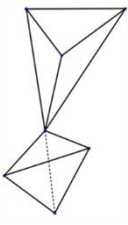
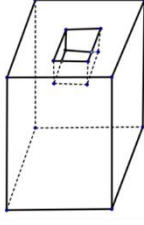
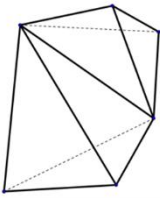
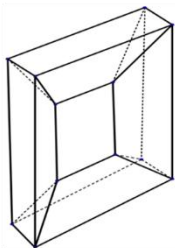
Deux tétraèdres	Prisme creusé	Deux tétraèdres	Cadre à bord prismatique
			
7 sommets 12 arêtes 6 faces $S - a + f = 1$	16 sommets 24 arêtes 11 faces $S - a + f = 3$	6 sommets 11 arêtes 8 faces $S - a + f = 3$	12 sommets 24 arêtes 12 faces $S - a + f = 0$

Figure 37 : déformation et perte des propriétés géométriques

II.2. Les sections planes :

Une section plane est la figure obtenue lorsqu'un plan coupe un solide. Le tracé de cette intersection révèle la forme géométrique résultante (triangle, quadrilatère, cercle, ellipse, etc.), dépendant à la fois du type de solide et de l'inclinaison du plan.

Les sections sont le résultat d'intersection d'un plan avec le volume.

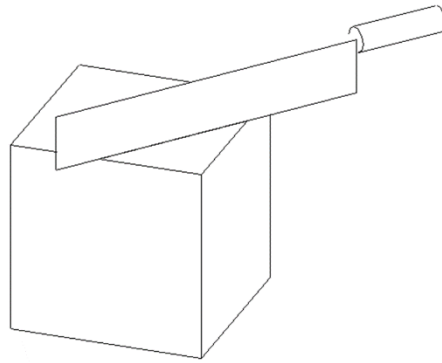


Figure 38 : section plane (principe)

L'étude des sections planes permet de comprendre la structure interne des volumes, d'analyser leurs propriétés géométriques et de représenter avec précision les découpes utilisées en architecture, en construction et en dessin technique.

II.2.1. Section d'un cube par un plan parallèle à une face :

La section d'un cube par un plan parallèle à l'une de ses faces génère une figure plane de même nature : un carré.

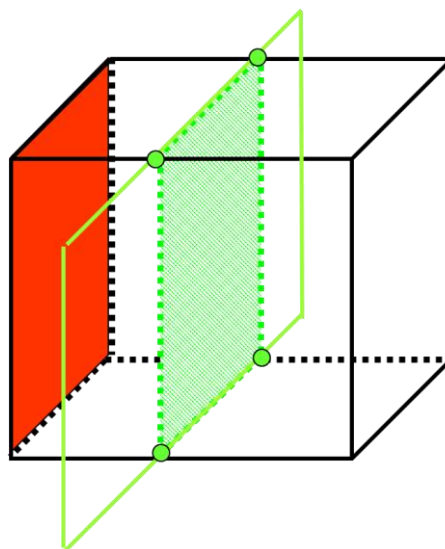


Figure 39 : Section d'un cube par un plan parallèle à une face

II.2.2. Section d'un cube par un plan parallèle à une arête :

La section produite par l'intersection d'un cube avec un plan parallèle à l'une de ses arêtes est un rectangle, conséquence directe du parallélisme entre les directions du plan et celles de l'arête considérée.

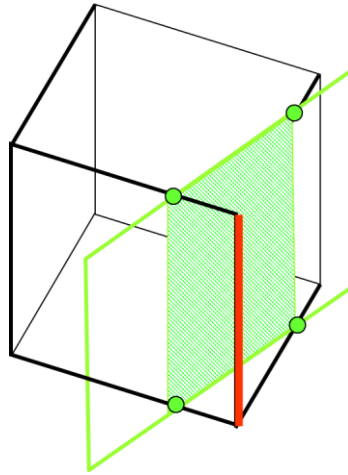


Figure 40 : Section d'un cube par un plan parallèle à une arête

II.2.3. Section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face :

La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est un rectangle.

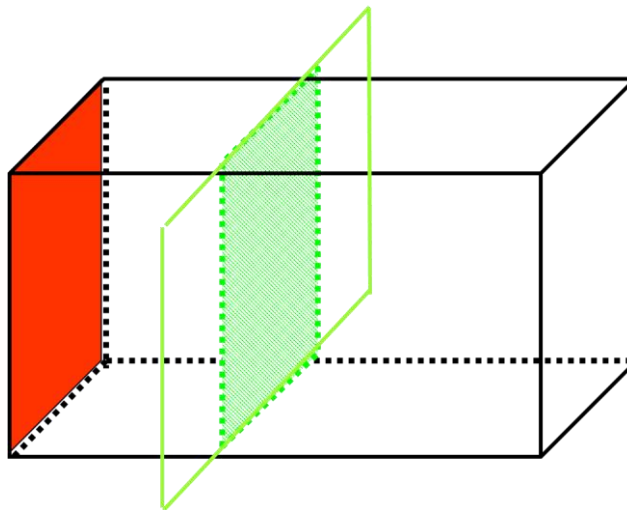


Figure 41 : Section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face

II.2.4. Section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête :

La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle.

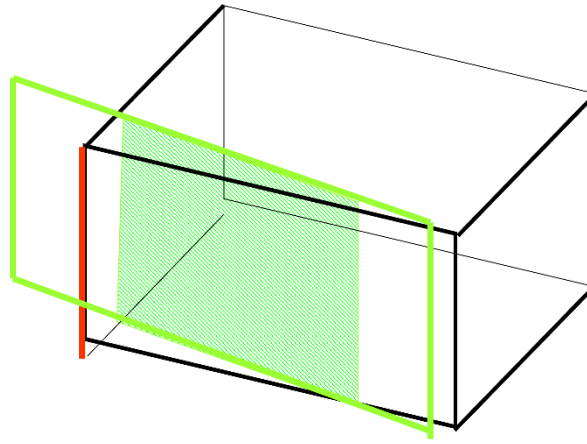


Figure 42 : Section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête

II.2.5. Section d'un cylindre par un plan parallèle à la base :

La section d'un cylindre par un plan parallèle à sa base est un cercle ayant le même rayon que celui du cylindre

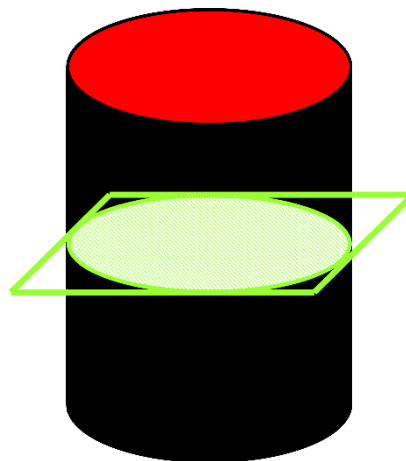


Figure 43 : Section d'un cylindre par un plan parallèle à la base

II.2.6. Section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe :

La section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe génère un rectangle dont la hauteur est celle du cylindre et dont la largeur correspond au diamètre de la base.

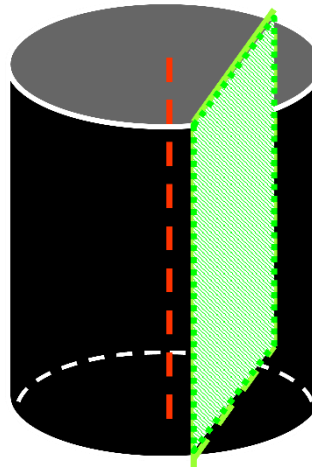


Figure 44 : Section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe

II.2.7. Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base :

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que la base.

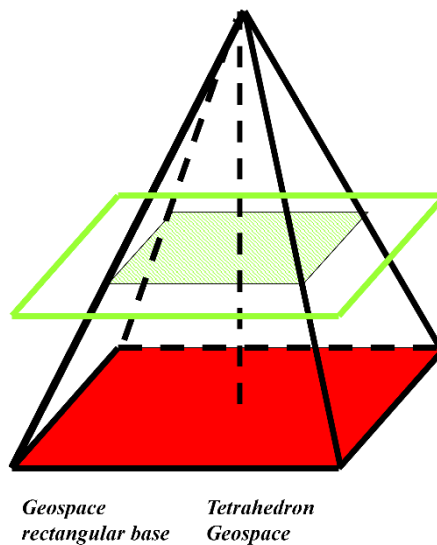


Figure 45 : Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base

Lorsqu'une pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base, la figure obtenue est un polygone semblable à la base, mais de dimensions réduites. En effet, toutes les arêtes reliant le sommet à la base sont interceptées à la même hauteur, ce qui produit une section homothétique de la base.

II.2.8. Section d'un cône par un plan parallèle à la base :

La section d'un cône par un plan parallèle à la base est un cercle.

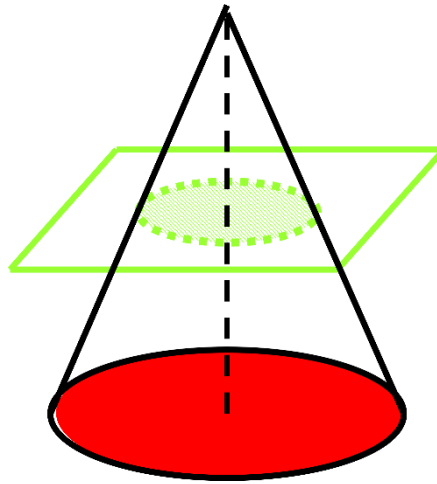


Figure 46 : Section d'un cône par un plan parallèle à la base

II.3. Les pyramides :

II.3.1. Section plane d'une pyramide :

En coupant la pyramide, on obtient une petite pyramide et un tronc de pyramide.

Lorsqu'un plan parallèle à la base coupe une pyramide, le solide se divise en deux parties : une petite pyramide située au sommet et un tronc de pyramide situé en dessous.

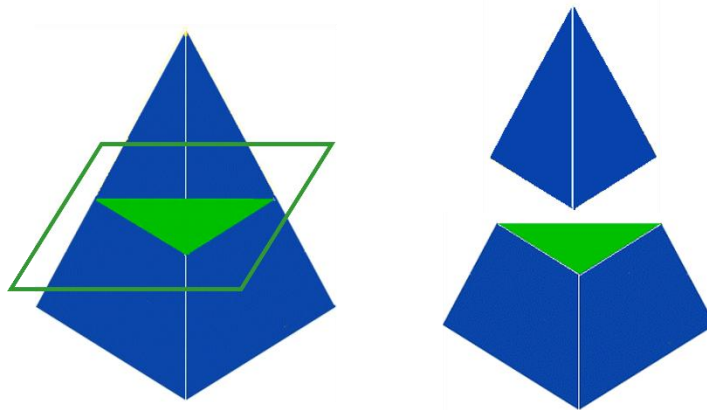


Figure 47 : Section plane d'une pyramide

La petite pyramide est une reproduction réduite de la pyramide initiale. Cette réduction est homothétique : toutes les dimensions sont proportionnelles selon un rapport $k = h/K$, où :

h représente la hauteur de la petite pyramide et K celle de la pyramide complète. Ainsi, les faces, les arêtes et la base de la petite pyramide conservent la même forme que celles de la grande, mais à une échelle diminuée.

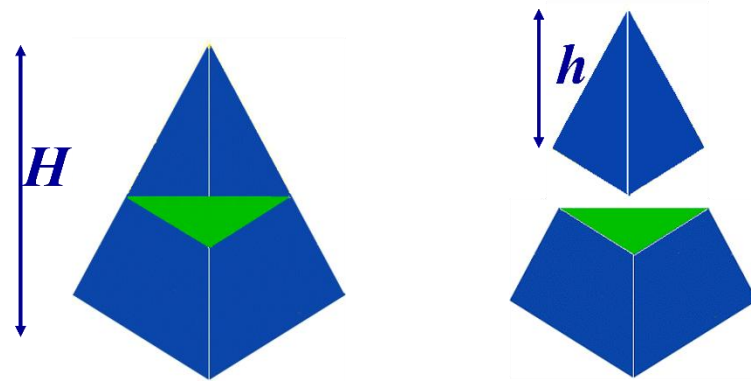


Figure 48 : le rapport h/K pour une pyramide

II.4. Le cône

II.4.1. Section plane d'un cône :

On coupe le cône et on obtient un petit cône et un tronc de cône.

Lorsqu'un cône est coupé par un plan parallèle à sa base, la section isole deux volumes distincts : un petit cône au sommet et un tronc de cône dans la partie inférieure.

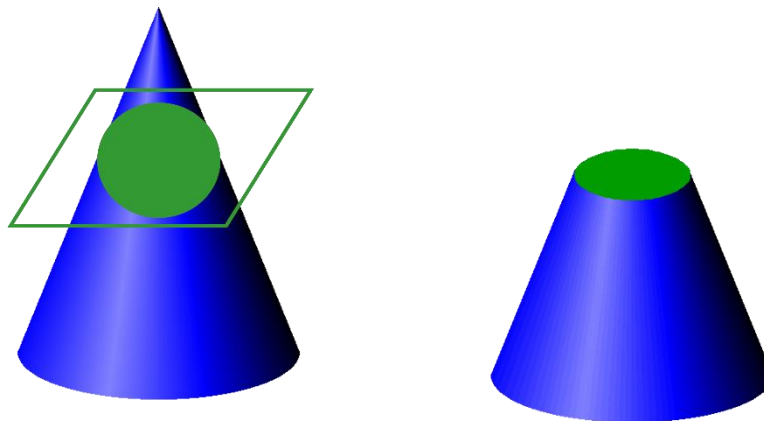


Figure 49 : Section plane d'un cône

Le petit cône ainsi obtenu est une réduction homothétique du cône initial. Le rapport de réduction est donné par : $k = h/H = r/R$, où :

H et R représentent respectivement la hauteur et le rayon du grand cône, tandis que h et r correspondent à la hauteur et au rayon du petit cône. Cette relation traduit une proportionnalité parfaite entre les dimensions des deux cônes, conséquence directe du parallélisme entre le plan de section et la base.

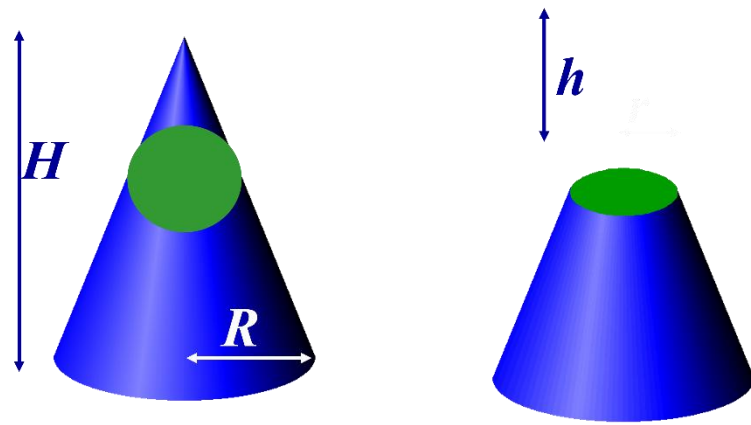


Figure 50 : le rapport K pour un cône

II.5. Les sections planes (niveau de coupes) :

Pour construire graphiquement une section plane, il est important de définir le niveau de coupe aussi bien dans le sens horizontal (plan) que dans le sens vertical (élévation).

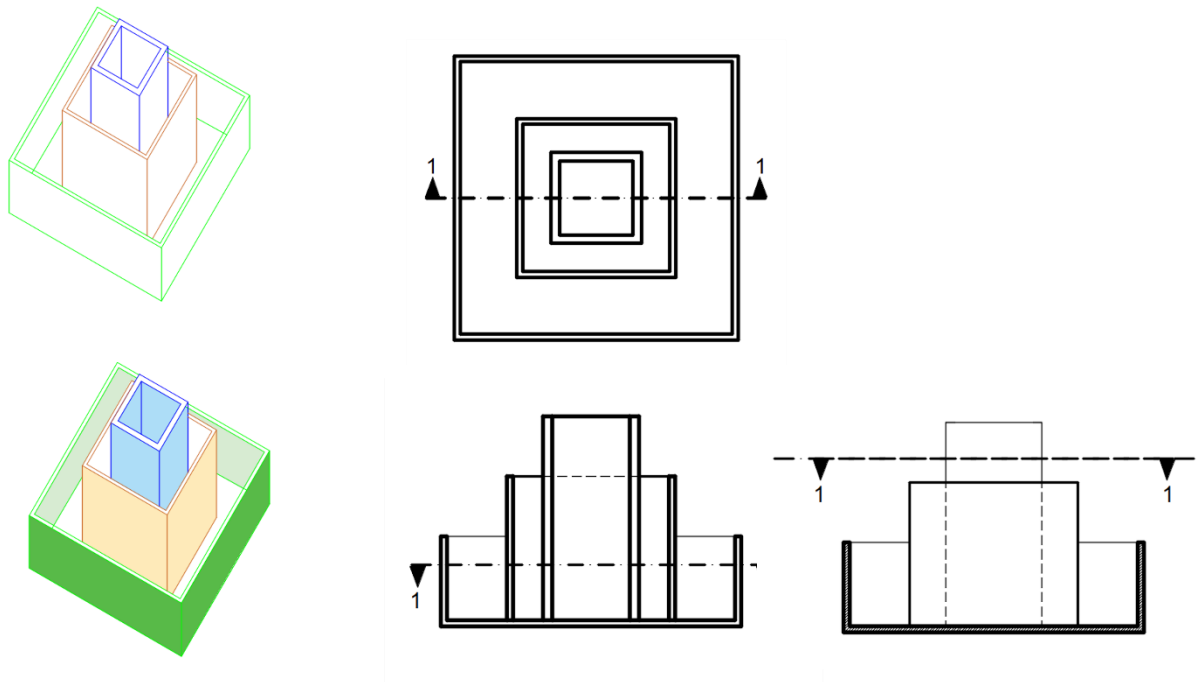


Figure 51 : sens et niveaux des coupes

II.6. Les intersections Plans – polyèdres : les sections planes

II.6.1. Cas n°01 :

L'intersection d'un plan parallèle avec un parallélogramme résulte une forme de rectangle.

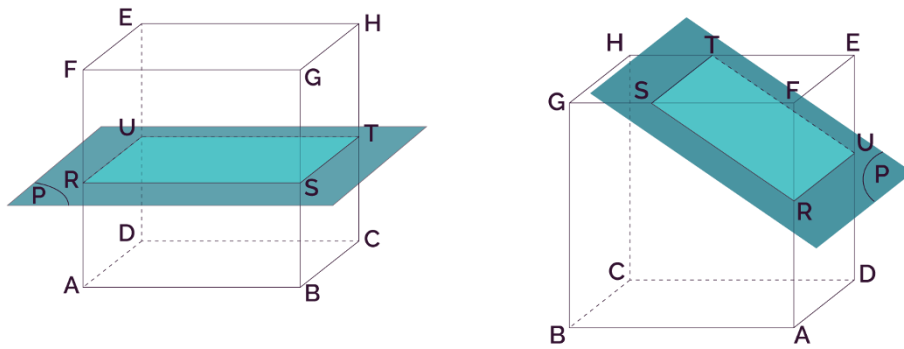


Figure 52 : section plane simple

II.6.2. Cas n°02 :

En fonction de la position de l'intersection, le nombre de sommets augmente.

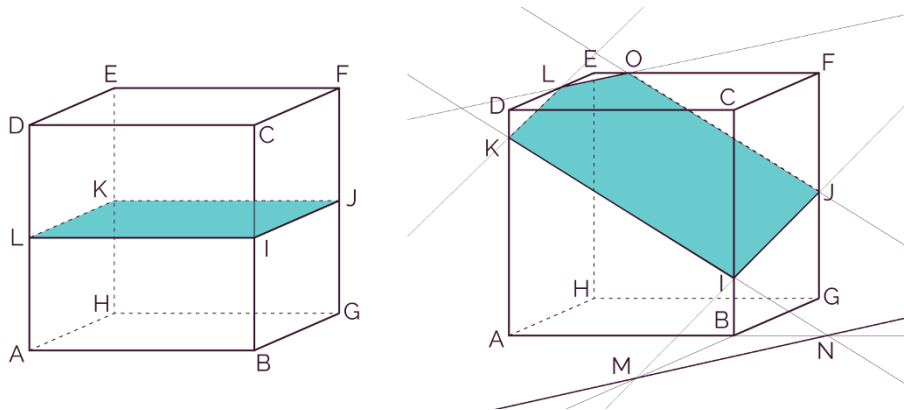


Figure 53 : section plane (cas n° 02)

II.6.3. Cas n°03 :

Pour un cube coupé par un plan incliné, la forme de la section varie suivant l'angle et le niveau de coupe.

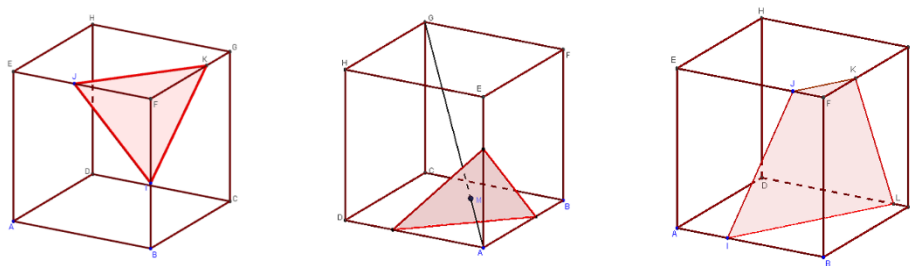


Figure 54 : changement de la forme de la section 1

II.6.4. Cas n°04 :

Changement de la forme de la section suivant le niveau et l'inclinaison du plan de coupe.

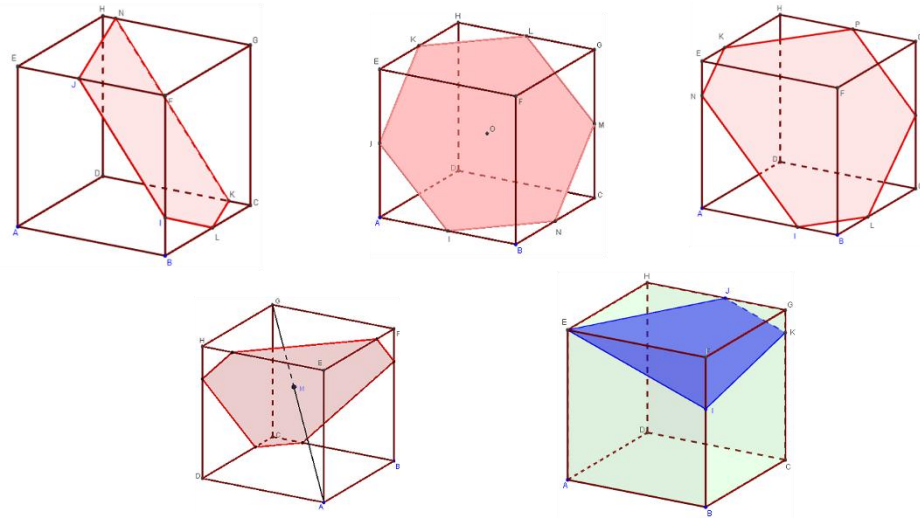


Figure 55 : changement de la forme de la section 2

II.6.5. Cas n°04 :

Le même principe cité ci-dessus, forme résultante de la section change suivant le niveau et l'inclinaison du plan de coupe.

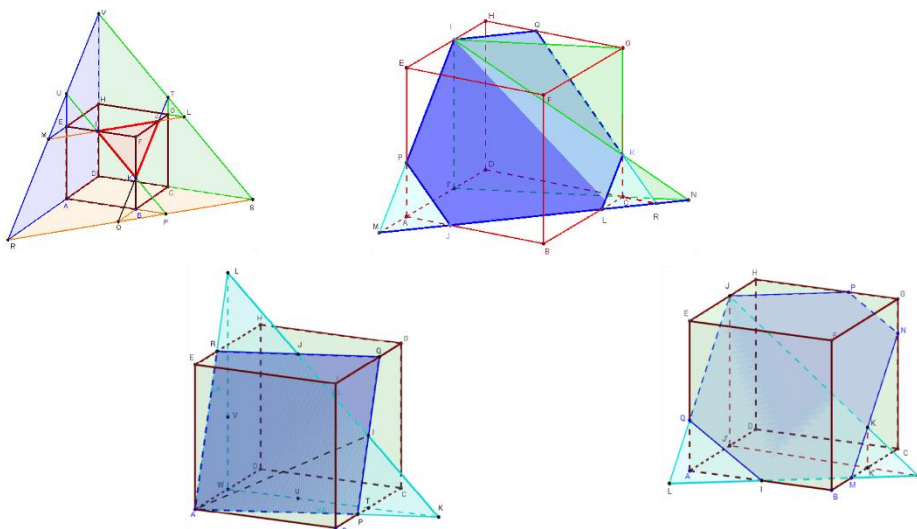


Figure 56 : changement de la forme de la section 3

Dans ce cas, on est appelé à trouver les traces des arêtes par la recherche des intersections de leurs prolongements dans les directions nécessaires.

II.6.6. Récapitulation :

La forme de la section résultante est en fonction de l'inclinaison et le niveau de coupe (niveau du plan de section).

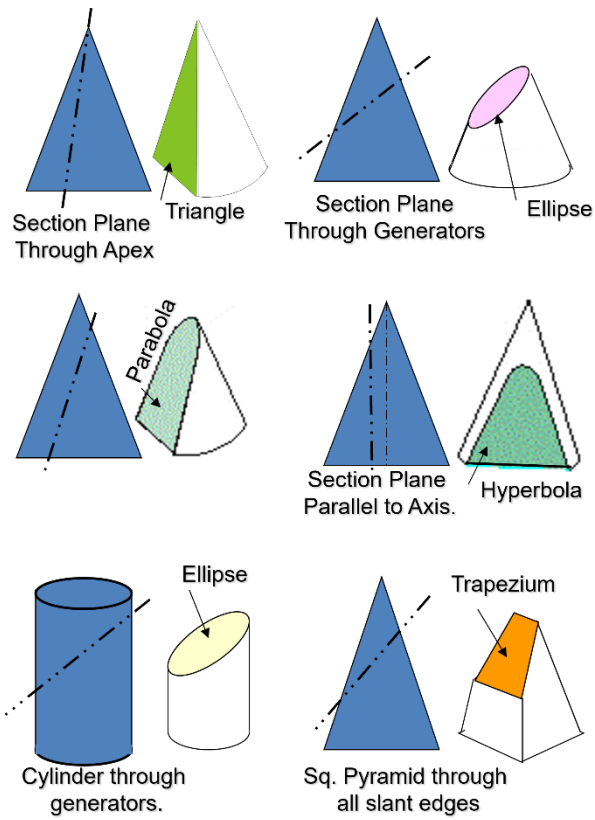


Figure 57 : cas divers

**Chapitre III. LES SURFACES DE RÉVOLUTION EN GÉOMÉTRIE
DESCRIPTIVE**

Introduction

Les surfaces de révolution constituent une des applications les plus fondamentales en géométrie descriptive. Elles permettent, d'une part, la génération et la construction des formes tridimensionnelles complexes, et d'autre part, la compréhension des principes de composition géométriques de ces formes. Ce cours vise l'appréhension et la maîtrise des représentations graphiques des surfaces de révolution avec un intérêt particulier donné aux formes spatiales les plus courantes : les cônes, les cylindres, les sphères, les tores, les ellipsoïdes, les hyperboles, et les paraboles de révolutions.

L'application des surfaces de révolution en architecture est ainsi courante, autant bien dans la conception que dans l'analyse et la quantification des espaces et formes produites.

III.1. Définition et principe

III.1.1. Définitions fondamentales

La **surface de révolution** constitue une famille particulière de surfaces dans l'espace tridimensionnel, caractérisée par une propriété d'invariance par rotation. Cette notion, fondamentale en géométrie descriptive, trouve des applications majeures en architecture, de l'Antiquité à nos jours.

Une surface S est dite **surface de révolution** s'il existe une courbe C (appelée génératrice) et une droite Δ (appelée axe de révolution) telles que S est constituée par l'ensemble des points obtenus en faisant tourner la courbe C autour de l'axe Δ . Autrement dit, la surface S est globalement invariante par toute rotation autour de son axe Δ .

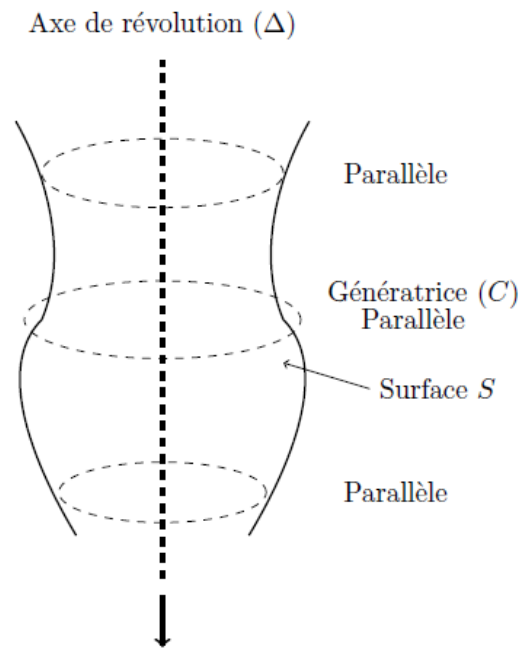


Figure 58: génération d'une surface de révolution. La courbe génératrice C tourne autour de l'axe fixe Δ pour engendrer la surface S .

L'**axe de révolution** est cette droite fixe autour de laquelle s'effectue la rotation. Il joue le rôle d'élément générateur central de la surface. Chaque point de la génératrice décrit un cercle lors de la rotation, et l'ensemble de ces cercles constitue la surface de révolution.

La **génératrice** (ou courbe génératrice) est la courbe ou la ligne dont le déplacement par rotation engendre la surface. Elle peut être une droite, un arc de cercle, une parabole, une hyperbole, ou toute autre courbe plane ou gauche. La nature de la génératrice détermine le type de surface de révolution obtenue.

Un aspect fondamental des surfaces de révolution réside dans leur **invariance globale par rotation** : si on applique une rotation quelconque autour de l'axe Δ , la surface reste identique à elle-même. Cette propriété de symétrie confère aux surfaces de révolution des caractéristiques géométriques et mécaniques particulièrement intéressantes pour l'architecture.

III.1.2. Importance en architecture

Les surfaces de révolution occupent une place prépondérante dans l'histoire de l'architecture. Des coupoles des édifices religieux byzantins et de la Renaissance aux structures hyperboloïdes de l'architecture moderne, ces surfaces permettent de créer des volumes intérieurs monumentaux tout en assurant une excellente stabilité structurelle.

La compréhension géométrique de ces surfaces est indispensable pour l'architecte, car elle permet non seulement de les représenter correctement en projection, mais également de concevoir leurs intersections avec d'autres éléments architecturaux, de calculer leurs dimensions réelles, et d'élaborer les plans nécessaires à leur construction.

III.2. Éléments caractéristiques des surfaces de révolution

III.2.1. Plan méridien et méridienne

Le **plan méridien** d'une surface de révolution S d'axe Δ est tout plan contenant l'axe de révolution Δ . Étant donné que l'axe est une droite, il existe une infinité de plans méridiens, tous passant par Δ . Ces plans jouent un rôle fondamental dans l'étude et la représentation des surfaces de révolution.

La **méridienne** (ou courbe méridienne) est la courbe d'intersection de la surface S avec un plan méridien. Toutes les méridiennes d'une même surface de révolution sont identiques, à une rotation autour de l'axe près. Cette propriété permet de caractériser entièrement une surface de révolution par la donnée de son axe et d'une seule méridienne.

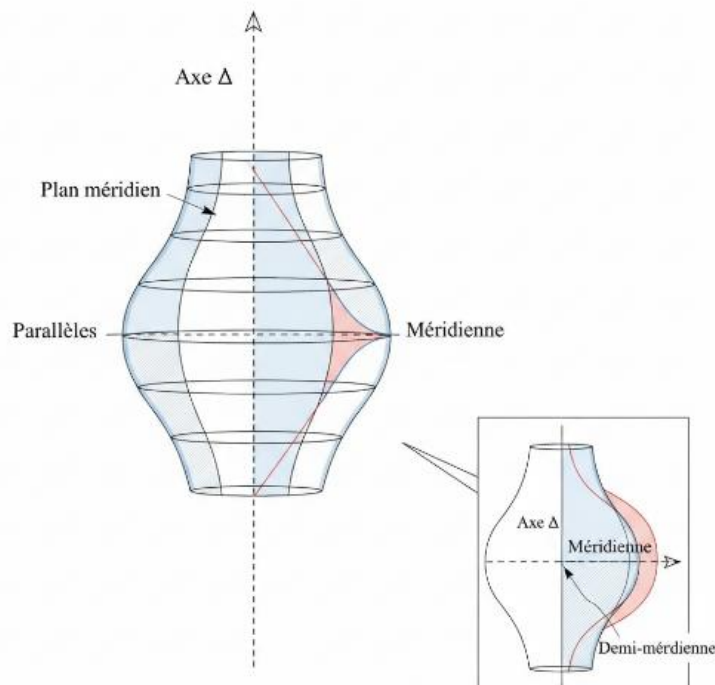


Figure 59: Éléments caractéristiques d'une surface de révolution. Les plans méridiens contiennent l'axe Δ . Les parallèles sont des cercles perpendiculaires à l'axe.

Plus précisément, l'intersection de la surface S par un demi-plan de frontière Δ est appelée **demi-méridienne**. Une surface de révolution est entièrement déterminée par son axe de révolution et une demi-méridienne : il suffit de faire tourner cette demi-méridienne autour de l'axe pour engendrer toute la surface.

En géométrie descriptive, la méridienne permet de :

- Définir complètement la surface de révolution
- Déterminer les sections planes de la surface
- Construire les plans tangents à la surface
- Calculer les dimensions réelles (vraies grandeurs)
- Tracer la surface en projection orthogonale.

III.2.2. Parallèles

Un **parallèle** d'une surface de révolution S d'axe Δ est un cercle de la surface, centré sur l'axe Δ , obtenu par intersection de S avec un plan perpendiculaire à l'axe.

Pour tout point M de la surface de révolution, le cercle d'axe Δ passant par M est inclus dans S . Ce cercle est le parallèle de S passant par M . Tous les points d'un même parallèle sont situés à la même distance de l'axe de révolution.

Les parallèles possèdent plusieurs propriétés importantes :

- Ils sont tous perpendiculaires à l'axe de révolution
- Leur rayon varie selon leur position le long de l'axe
- Leur plan est perpendiculaire à tous les plans méridiens
- Ils permettent une construction systématique de la surface point par point

III.2.3. Notion de directrice

Une partie C de la surface S est appelée **directrice** de S si son intersection avec tout parallèle de S est non vide. Une directrice engendre la surface S par rotation autour de l'axe. La demi-méridienne constitue un cas particulier de directrice, mais il peut exister d'autres directrices selon la nature de la surface.

III.3. Surfaces de révolution classiques

Nous allons aborder trois exemples de surfaces de révolution basiques : le cylindre, le cône et la sphère de révolution.

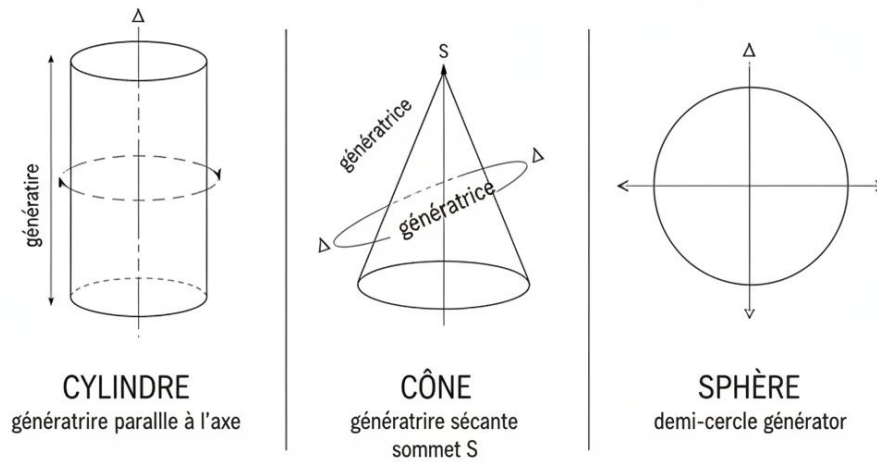


Figure 60: Les trois surfaces de révolution fondamentales. Le cylindre est engendré par une droite parallèle à l'axe, le cône par une droite sécante à l'axe au sommet S, et la sphère par un demi-cercle tournant autour de son diamètre.

III.4. Le cylindre de révolution

III.4.1. Définition et génération

Le **cylindre de révolution** (ou cylindre circulaire droit) est la surface de révolution engendrée par la rotation d'une droite parallèle à l'axe de révolution. C'est une surface réglée, c'est-à-dire constituée entièrement de droites (les génératrices du cylindre).

Si l'axe de révolution est l'axe (Oz) et si la génératrice est une droite parallèle à (Oz) située à une distance R de cet axe, alors le cylindre de révolution d'axe (Oz) et de rayon R est obtenu.

III.4.2. Équation cartésienne

Dans un repère orthonormé (O; x, y, z) où l'axe (Oz) est l'axe de révolution, le cylindre de révolution de rayon R a pour équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 = R^2 \dots\dots\dots (1)$$

Cette équation exprime que pour tout point M (x, y, z) du cylindre, la distance de M à l'axe (Oz) est constante et égale à R, quelle que soit la cote z.

III.4.3. Sections planes

Les sections d'un cylindre de révolution par des plans présentent différentes configurations selon l'orientation du plan sécant :

- **Plan perpendiculaire à l'axe** : la section est un **cercle** de rayon R (parallèle du cylindre)
- **Plan parallèle à l'axe** : la section est constituée de **deux droites parallèles** (deux génératrices) si le plan contient l'axe, ou une **ellipse** dans le cas contraire
- **Plan oblique** : la section est une **ellipse** (cas général)

III.4.4. Applications architecturales

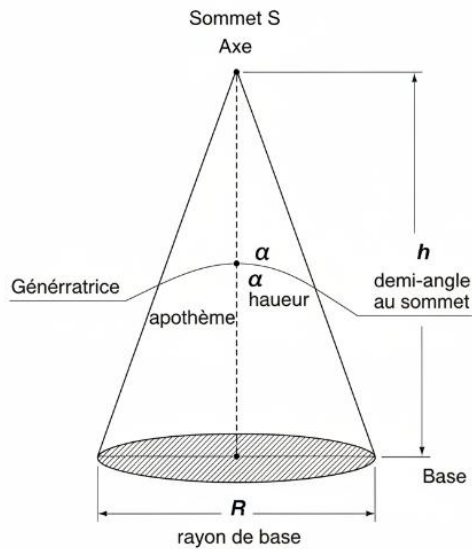
Le cylindre de révolution est omniprésent en architecture : colonnes, piliers circulaires, tours, silos, réservoirs, et de nombreux éléments structurels. Sa simplicité géométrique et sa résistance mécanique en font une forme privilégiée depuis l'Antiquité.

III.5. Le cône de révolution

III.5.1. Définition et génération

Le **cône de révolution** (ou cône circulaire droit) est la surface de révolution engendrée par la rotation d'une droite sécante à l'axe de révolution. Le point d'intersection de la génératrice avec l'axe est appelé **sommet** du cône (noté S). C'est également une surface réglée.

L'angle constant α que forme la génératrice avec l'axe de révolution est appelé **demi-angle au sommet** du cône. Cet angle caractérise l'ouverture du cône.



$$a^2 = R^2 + h^2$$

Figure 61: Éléments géométriques du cône de révolution. Le sommet S, l'axe, le demi-angle α , la hauteur h, le rayon de base R et l'apothème a sont reliés par la relation $a^2=R^2+h^2$.

III.5.2. Éléments caractéristiques

- **Sommet (S)** : point de concours de toutes les génératrices
- **Axe de révolution** : droite passant par le sommet
- **Génératrices** : droites passant par le sommet et formant un angle α constant avec l'axe
- **Base** : cercle obtenu par section perpendiculaire à l'axe (si on limite le cône)
- **Hauteur (h)** : distance du sommet au plan de base
- **Rayon de base (R)** : rayon du cercle de base
- **Apothème (a)** : longueur d'une génératrice du sommet au cercle de base, avec :

$$a^2 = R^2 + h^2 \dots\dots\dots (2)$$

III.5.3. Équation cartésienne

Dans un repère orthonormé (O; x, y, z) où le sommet est placé à l'origine O et l'axe (Oz) est l'axe de révolution, le cône de révolution de demi-angle au sommet θ a pour équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 (\theta) \dots\dots\dots (3)$$

III.5.4. Sections planes (coniques)

Les sections d'un cône de révolution par des plans produisent les célèbres **coniques**, dont l'étude remonte à l'Antiquité grecque :

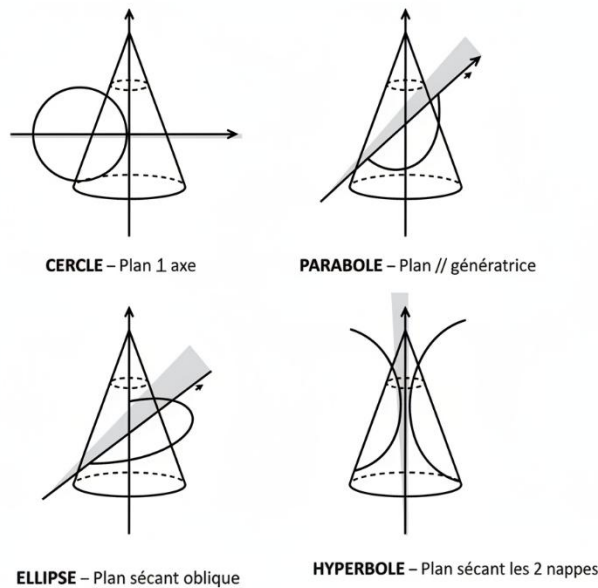


Figure 62: Les quatre types de sections coniques selon l'orientation du plan sécant par rapport au cône : cercle, ellipse, parabole et hyperbole.

- **Plan perpendiculaire à l'axe : cercle**
- **Plan parallèle à une génératrice : parabole**
- **Plan sécant non parallèle à une génératrice : ellipse** (si le plan coupe toutes les génératrices d'un même côté du sommet) ou **hyperbole** (si le plan coupe les génératrices des deux côtés du sommet)
- **Plan contenant l'axe : deux droites sécantes** (deux génératrices)

Cette richesse de sections planes fait du cône une surface géométrique d'une importance majeure, tant en mathématiques qu'en architecture.

III.5.5. Applications architecturales

Les cônes de révolution apparaissent dans les flèches d'églises, les toitures coniques, les tours de guet médiévales, et de nombreux éléments de couverture. La forme conique assure une bonne évacuation des eaux pluviales et présente une esthétique élancée.

III.6. La sphère

III.6.1. Définition

La **sphère** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance R du point O. C'est une surface de révolution très particulière, car elle possède une **infinité d'axes de révolution** : toutes les droites passant par son centre O sont des axes de révolution.

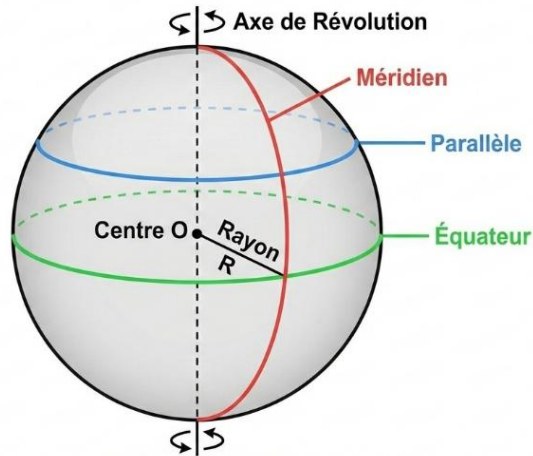


Figure 63: Génération d'une sphère de révolution à partir d'un demi-cercle de rayon R

On peut engendrer une sphère en faisant tourner un demi-cercle de rayon R autour de son diamètre. La méridienne est alors un demi-cercle, et tous les parallèles sont des cercles de rayon variable (maximum R à l'équateur, minimum 0 aux pôles).

III.6.2. Équation cartésienne

Dans un repère orthonormé (O ; x, y, z) de centre O, la sphère de rayon R a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \dots\dots\dots (4)$$

III.6.3. Sections planes

Toute section d'une sphère par un plan est un cercle (cas d'un plan sécant) ou un point (cas d'un plan tangent). Le rayon du cercle de section dépend de la distance du plan au centre de la sphère.

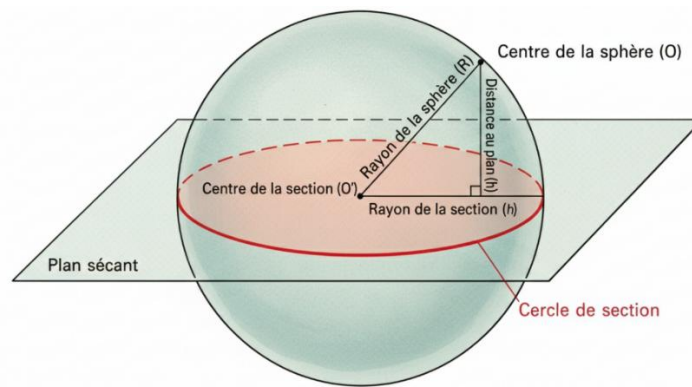


Figure 64: Intersection d'une sphère avec un plan sécant incluant le centre de la sphère (O)

III.6.4. Applications architecturales

Les coupoles sphériques et les dômes hémisphériques sont utilisés depuis l'Antiquité (Panthéon de Rome) jusqu'à l'époque contemporaine. La sphère offre le meilleur rapport volume/surface et une répartition uniforme des contraintes mécaniques.

III.7. Le tore

III.7.1. Définition et génération

Le **tore** est la surface de révolution engendrée par la rotation d'un cercle autour d'un axe situé dans le plan du cercle mais ne passant pas par son centre. Selon la position relative de l'axe et du cercle générateur, on distingue plusieurs types de tores.

Si le cercle générateur a un rayon r et que son centre est situé à une distance R de l'axe de révolution (avec $R > r$), on obtient un **tore ordinaire** (en forme de bouée ou de chambre à air).

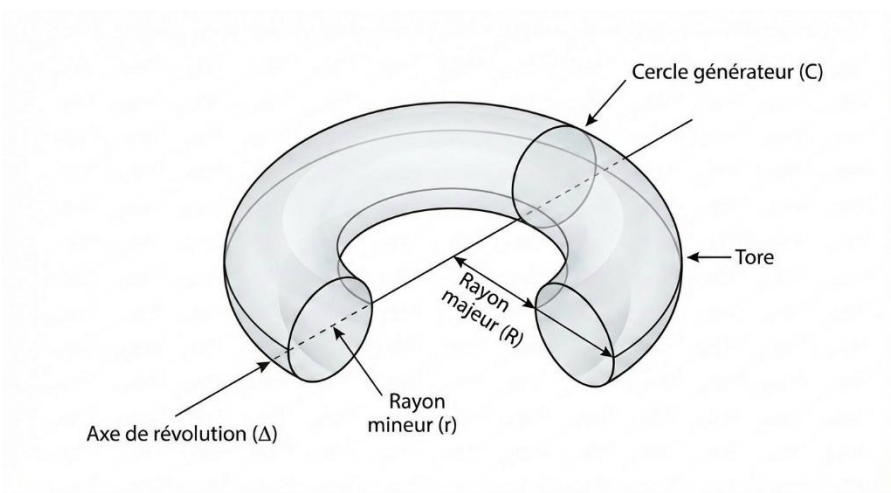


Figure 65: Un tore de révolution défini par : un cercle générateur (C), Rayon mineur r , Rayon majeur R et axe de révolution (Δ)

III.7.2. Applications

Les tores apparaissent dans certains éléments architecturaux décoratifs (moultures, chapiteaux), dans les structures gonflables, et dans l'architecture contemporaine. Les colonnes toriques sont également utilisées pour créer des effets visuels particuliers.

III.8. L'ellipsoïde de révolution

III.8.1. Définition

L'**ellipsoïde de révolution** est la surface obtenue par rotation d'une ellipse autour de l'un de ses axes de symétrie. Selon que l'on fait tourner l'ellipse autour de son grand axe ou de son petit axe, on obtient un ellipsoïde allongé ou aplati.

Le cas le plus courant en géodésie est l'ellipsoïde de révolution aplati, obtenu par rotation d'une ellipse autour de son petit axe, qui constitue le meilleur modèle mathématique de la forme de la Terre.

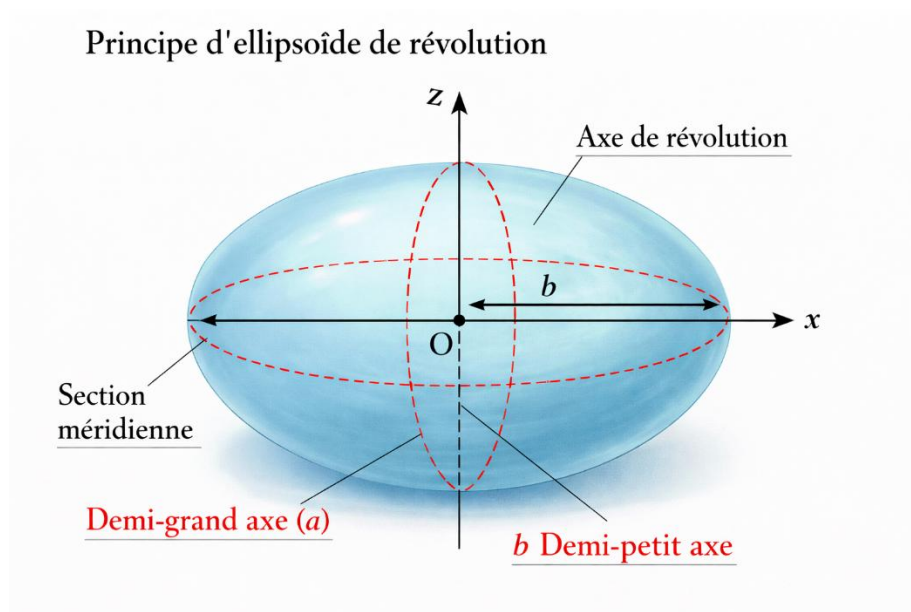


Figure 66: Ellipsoïde de révolution

III.8.2. Applications

En architecture, les ellipsoïdes de révolution sont utilisés pour des coupoles elliptiques, des dômes ovoïdes, et certaines structures contemporaines. Leur forme offre une variation intéressante par rapport à la sphère classique.

III.9. L'hyperboloïde de révolution

L'hyperboloïde de révolution est une surface tridimensionnelle obtenue par la rotation d'une hyperbole autour de l'un de ses axes principaux.

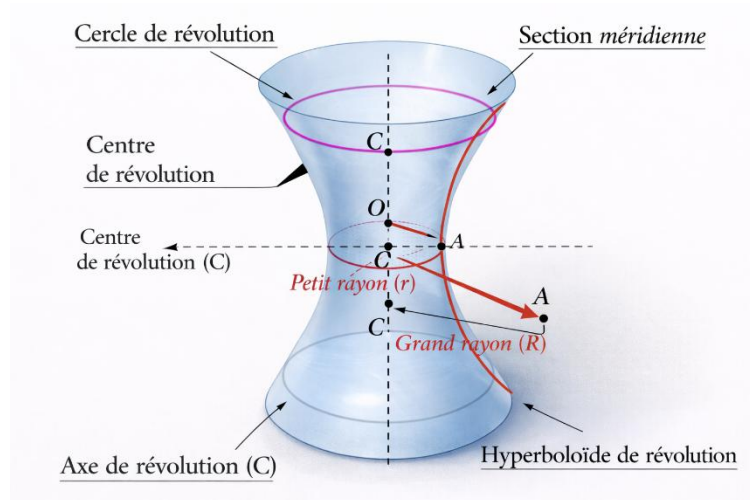


Figure 67: Principe de construction d'un hyperboloïde de révolution généré autour d'un axe vertical de révolution

Selon l'axe de rotation choisi, on obtient deux formes distinctes.

III.9.1. Types d'hyperboloïdes

On distingue deux types d'hyperboloïdes de révolution selon la branche de l'hyperbole utilisée et l'axe de rotation choisi :

Hyperboloïde de révolution à une nappe : obtenu par rotation d'une hyperbole autour de son axe non transverse (l'axe qui ne coupe pas la courbe). C'est une surface connexe, en forme de diabolo ou de sablier. Remarquablement, cette surface est **réglée** : elle peut être entièrement constituée de droites, bien qu'elle soit courbe.

Hyperboloïde de révolution à deux nappes : obtenu par rotation d'une hyperbole autour de son axe transverse. Cette surface est constituée de deux nappes séparées, symétriques par rapport au centre.

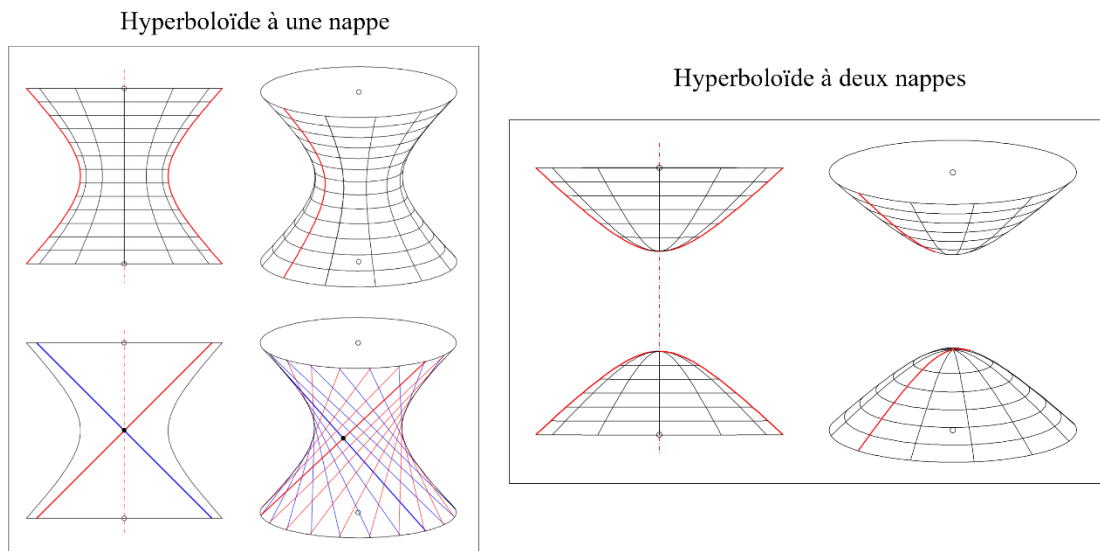


Figure 68: Deux types d'Hyperboloïde de révolution

III.9.2. Génération réglée

L'hyperboloïde à une nappe possède une propriété remarquable : il peut être engendré par la rotation d'une droite autour d'un axe qui ne lui est pas coplanaire. Cette génération réglée présente deux familles distinctes de droites génératrices, ce qui offre des possibilités constructives extraordinaires en architecture.

III.9.3. Applications architecturales majeures

Les structures hyperboloïdes ont révolutionné l'architecture structurelle au XX^e siècle :

- **Tour de Choukhov** (Russie, 1896) : première structure hyperboloïde au monde, construite en acier ajouré pour l'Exposition Pan-russe. Cette tour de 26 mètres de hauteur a démontré les propriétés structurelles exceptionnelles de l'hyperboloïde.
- **Aéroréfrigérants de centrales** : la plupart des tours de refroidissement utilisent la forme hyperboloïde pour ses excellentes propriétés hydrodynamiques (tirage des fumées) et sa simplicité de coffrage.
- **Architecture moderne** : architectes comme Le Corbusier, Oscar Niemeyer, et Philolaos ont exploité les hyperboloïdes pour créer des structures innovantes.

Les avantages structurels de l'hyperboloïde à une nappe sont nombreux :

- Construction avec des éléments droits (poutres, barres) malgré la forme courbe globale

- Résistance mécanique élevée grâce au double réseau de génératrices entrecroisées
- Traînée aérodynamique faible pour les grandes tours
- Esthétique moderne et élégante

III.10. Le parabolôïde de révolution

III.10.1. Définition

Le **parabolôïde de révolution** (ou parabolôïde circulaire) est la surface engendrée par la rotation d'une parabole autour de son axe de symétrie. La méridienne est une parabole, et les parallèles sont des cercles de rayons croissants.

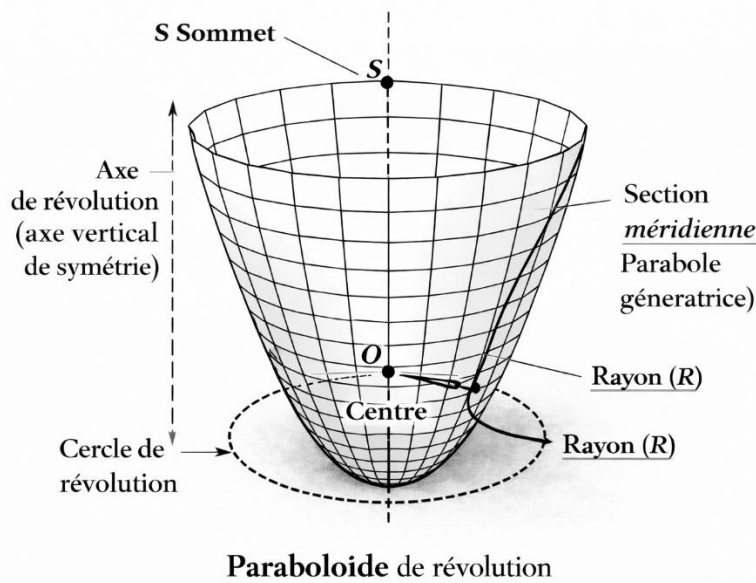


Figure 69: Parabolôïde de révolution générée autour de son axe vertical de symétrie

III.10.2. Équation cartésienne

Dans un repère orthonormé (O ; x, y, z) où l'axe (Oz) est l'axe de révolution et le sommet de la parabole est à l'origine, le parabolôïde de révolution a pour équation :

$$z = x^2 + y^2 \dots\dots\dots (5)$$

Cette équation montre que la cote z de tout point de la surface est proportionnelle au carré de sa distance à l'axe.

III.10.3. Sections planes

Les sections du parabolôïde de révolution présentent différentes configurations :

- **Plan $z = k$** (perpendiculaire à l'axe) : cercle de rayon \sqrt{k} si $k > 0$, point O si $k = 0$, ensemble vide si $k < 0$
- **Plan contenant l'axe** : parabole (méridienne)
- **Plan parallèle à l'axe** : parabole

III.10.4. Applications

Les paraboloides de révolution sont utilisés dans les miroirs paraboliques (phares, projecteurs), les antennes paraboliques (télécommunications), et certaines structures architecturales contemporaines. Leur propriété de focalisation des rayons parallèles en fait des surfaces optiques de premier ordre.

III.11. Applications architecturales

Les surfaces de révolution constituent l'un des fondements géométriques de l'architecture, de l'Antiquité à nos jours. Leur utilisation repose sur des considérations à la fois structurelles, esthétiques et fonctionnelles.

III.11.1. Dômes et coupoles

III.11.1.1. Définitions architecturales

Un **dôme** est un élément architectural désignant la couverture d'un comble de plan centré (circulaire, elliptique, ou polygonal). Une **coupoles** désigne plus précisément la voûte hémisphérique ou en calotte sphérique qui constitue la structure portante.

Les coupoles sont généralement des surfaces de révolution (sphériques, ellipsoïdales, ou paraboliques) raidies ou non par des nervures méridiennes ou parallèles. Elles reposent sur des appuis continus (murs circulaires) ou ponctuels (piliers, colonnes).

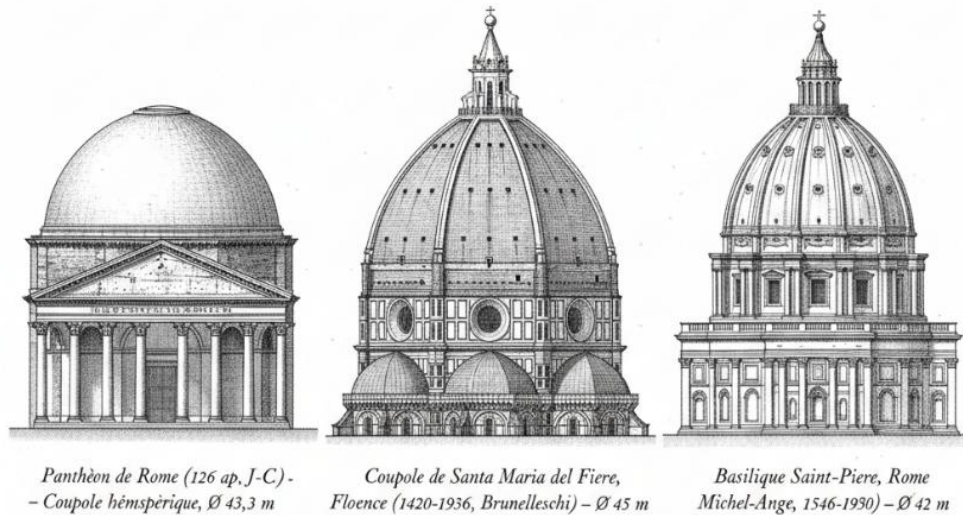


Figure 70: Trois exemples historiques majeurs de coupôles : le Panthéon de Rome (Ø 43,3 m), la cathédrale de Florence par Brunelleschi (Ø 45 m), et la basilique Saint-Pierre par Michel-Ange (Ø 42 m).

III.11.1.2. Exemples historiques majeurs

Panthéon de Rome (126 ap. J.-C.) : coupole hémisphérique en béton de 43,3 mètres de diamètre, restée pendant des siècles le plus grand dôme du monde. La surface intérieure est une demi-sphère parfaite, créant un volume intérieur monumental et unifié.

Coupole de Santa Maria del Fiore (Florence, 1420-1436, Filippo Brunelleschi) : dôme octogonal de 45 mètres de diamètre, constitué de deux coques concentriques (intérieure et extérieure) séparées par un espace vide. Brunelleschi a innové en construisant cette coupole autoportante sans échafaudage fixe au sol, utilisant un système de briques en chevrons (à arêtes de poisson) qui permettait à la structure de se tenir d'elle-même pendant la construction. Bien que le plan soit octogonal, la coupole s'inscrit dans un système de révolution avec un axe vertical.

Basilique Saint-Pierre (Rome, 1546-1590, Michel-Ange pour le projet du dôme) : dôme de 42 mètres de diamètre, devenu le symbole de la Renaissance et un chef-d'œuvre de l'architecture religieuse. La géométrie de révolution du dôme confère une majesté et une harmonie exceptionnelles à l'édifice.

III.11.1.3. Dômes modernes

Au XX^e siècle, l'architecte américain **Buckminster Fuller** (1895-1983) a popularisé le **dôme géodésique**, une structure légère et efficace construite à partir d'un réseau de triangles. Bien que

n'étant pas strictement des surfaces de révolution, ces dômes s'inscrivent dans une géométrie sphérique et présentent des propriétés structurelles remarquables :

- Grande portée avec peu de matière
- Résistance aux conditions météorologiques extrêmes
- Rapidité de construction
- Efficacité énergétique (rapport volume/surface optimal)

Les dômes géodésiques sont aujourd'hui largement utilisés dans l'éco-architecture, les espaces d'exposition, les serres, et les structures temporaires.

III.11.1.4. Principe structural

Les coupoles de révolution présentent des avantages structurels considérables :

- **Répartition des charges** : les forces se transmettent par compression le long des méridiens vers les appuis de base
- **Stabilité** : la forme courbe confère une grande rigidité à la structure
- **Portée libre** : possibilité de couvrir de grands espaces sans supports intermédiaires
- **Résistance au vent** : la forme aérodynamique minimise les pressions éoliennes

La construction des coupoles nécessite une compréhension approfondie de leur géométrie de révolution pour :

- Calculer les dimensions des éléments (nervures, voussoirs)
- Tracer les intersections avec d'autres éléments (tambours, lanternes)
- Élaborer les plans de coupe et les détails constructifs

III.11.2. Structures hyperboloïdes

III.11.2.1. Propriétés géométriques et structurelles

Les structures hyperboloïdes à une nappe présentent des propriétés exceptionnelles qui en font des solutions privilégiées pour certaines applications architecturales :

Surface réglée : l'hyperboloïde à une nappe peut être entièrement construit avec des éléments droits (poutres, barres d'acier), malgré sa forme courbe globale. Cette génération réglée offre deux familles de droites génératrices qui s'entrecroisent, formant un réseau diagonal très résistant.

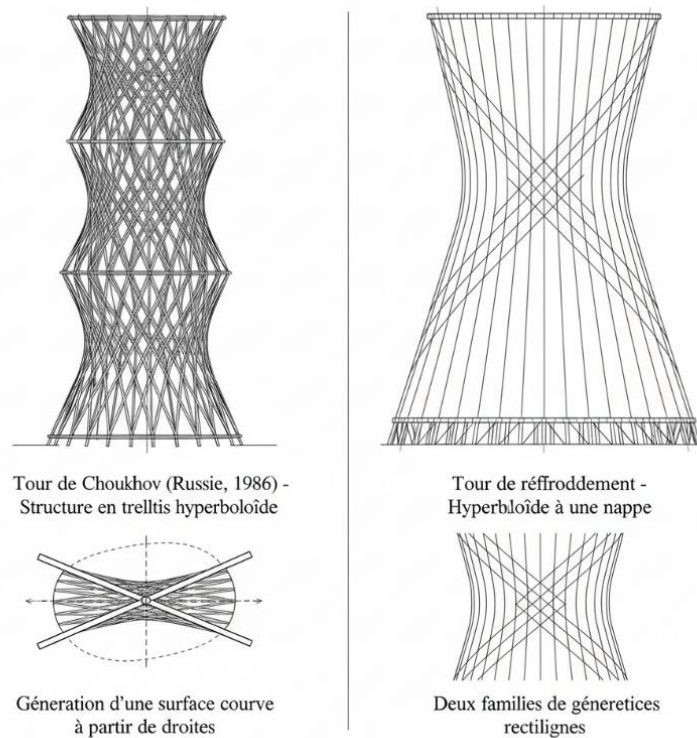


Figure 71: La Tour de Choukhov (1896) et les tours de refroidissement modernes illustrent l'utilisation architecturale des hyperboloïdes de révolution. La structure en treillis avec des barres droites crée une forme courbe remarquablement résistante.

Avantages structurels :

- **Construction simplifiée** : utilisation d'éléments rectilignes standardisés
- **Résistance mécanique** : le double réseau de barres entrecroisées crée une structure en treillis très rigide
- **Légèreté** : possibilité de construire des tours de grande hauteur avec une masse réduite
- **Aérodynamisme** : la forme en diabolo minimise la traînée et les vibrations dues au vent

III.11.2.2. Exemples architecturaux emblématiques

Tour de Choukhov (Nijni Novgorod, Russie, 1896, Vladimir Choukhov) : première structure hyperboloïde au monde, construite pour l'Exposition Pan-russe de l'Industrie et de l'Artisanat. Cette tour de 26 mètres de hauteur, capable de supporter un réservoir d'eau de 100 m³, était réalisée en acier ajouré à claire-voie. Son succès a démontré la viabilité et l'efficacité des structures hyperboloïdes, ouvrant la voie à de nombreuses réalisations ultérieures.

Aéroréfrigérants (tours de refroidissement) : la plupart des tours de refroidissement de centrales électriques (notamment nucléaires) utilisent la forme hyperboloïde à une nappe. Cette géométrie présente plusieurs avantages :

- Simplicité du coffrage (surfaces réglées)
- Excellentes propriétés hydrodynamiques pour le tirage des fumées
- Stabilité structurelle face aux charges de vent
- Esthétique moderne

Architecture moderne : architectes et ingénieurs renommés ont exploité les hyperboloïdes :

- **Le Corbusier** : certains projets utopiques comportaient des éléments hyperboloïdes
- **Oscar Niemeyer** : l'architecte brésilien a utilisé des formes hyperboliques dans plusieurs œuvres
- **Philolaos** (sculpteur et architecte) : réalisations intégrant des hyperboloïdes
- De nombreux architectes contemporains continuent d'explorer cette géométrie pour des tours, des ponts, et des structures innovantes

III.11.2.3. Conception et tracé

La conception d'une structure hyperboloïde nécessite :

- La détermination précise de l'axe de révolution
- Le choix de l'hyperbole génératrice (ou des trois droites directrices non coplanaires)
- Le calcul des positions des barres constituant les deux familles de génératrices
- L'étude des sections par des plans horizontaux pour les différents niveaux
- La représentation en projection orthogonale pour les plans d'exécution

La maîtrise de la géométrie descriptive des surfaces de révolution et des surfaces réglées est donc indispensable pour la conception et la réalisation de telles structures.

III.11.3. Autres applications architecturales

III.11.3.1. Voûtes de révolution

Certaines voûtes architecturales utilisent des surfaces de révolution partielles :

- **Voûtes en berceau** (portion de cylindre)

- **Voûtes en cul-de-four** (quart de sphère ou portion d'ellipsoïde)
- **Voûtes paraboliques** (arcs paraboliques en révolution partielle)

III.11.3.2. Éléments architectoniques

De nombreux éléments architecturaux courants sont des surfaces de révolution :

- **Colonnes** : cylindres de révolution, parfois avec un léger galbe (renflement)
- **Chapiteaux** : combinaisons de tores, de cônes tronqués, et de formes complexes
- **Escaliers en colimaçon** : surface hélicoïdale (non strictement de révolution mais apparentée)
- **Balustrades** : balustres en forme de surfaces de révolution (combinaisons de cylindres, cônes, sphères partielles, tores)

III.11.3.3. Architecture contemporaine

L'architecture contemporaine continue d'explorer les surfaces de révolution :

- **Stades couverts** : toitures en portions de sphères ou d'ellipsoïdes
- **Salles de spectacle** : coupoles acoustiques optimisées
- **Observatoires** : dômes hémisphériques rotatifs
- **Centres culturels** : formes organiques combinant diverses surfaces de révolution
- **Éco-architecture** : dômes géodésiques pour l'habitat durable, serres, espaces d'exposition

III.11.3.4. Intérêt crucial pour le travail d'architecte

L'étude des surfaces de révolution en géométrie descriptive permet à l'étudiant architecte de :

- **Concevoir** des formes courbes avec rigueur géométrique
- **Représenter** fidèlement ces formes en projection (plans, coupes, élévations)
- **Calculer** les dimensions réelles, les intersections, les développements
- **Comprendre** les principes structurels liés à ces géométries
- **Analyser** les réalisations historiques et contemporaines
- **Innover** en maîtrisant les outils géométriques fondamentaux

La géométrie descriptive constitue ainsi un pont entre la théorie mathématique et la pratique architecturale, indispensable à la formation complète de l'architecte.

III.12. Calculs géométriques

III.12.1. Calcul de vraie grandeur

III.12.1.1. Problématique

En géométrie descriptive, une longueur, un angle, ou une surface apparaissent rarement en **vraie grandeur** (dimensions réelles) dans les projections orthogonales. Pour obtenir les mesures exactes nécessaires à la réalisation architecturale, il faut appliquer des méthodes de rabattement ou de rotation.

III.12.1.2. Méthodes principales

Méthode par rotation : on fait pivoter l'élément à mesurer autour d'un axe horizontal ou frontal jusqu'à ce qu'il devienne parallèle à un plan de projection. La vraie grandeur apparaît alors dans la projection correspondante.

Méthode par changement de plan de projection : on remplace l'un des plans de projection par un nouveau plan parallèle à l'élément à mesurer. Dans le nouveau système de projection, l'élément apparaît en vraie grandeur.

Méthode par rabattement : on bascule le plan contenant l'élément autour de l'une de ses traces jusqu'à le faire coïncider avec un plan de projection.

Ces méthodes ont été détaillées au chapitre V dans le contexte des sections planes. Elles s'appliquent également à tout problème de mesure de vraie grandeur sur une surface de révolution.

III.12.2. Calcul d'aires de surfaces de révolution

III.12.2.1. Théorème de Guldin (ou Pappus-Guldin)

Le **premier théorème de Guldin** fournit une formule remarquable pour calculer l'aire d'une surface de révolution :

Énoncé : L'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation d'un arc de courbe plane autour d'un axe de son plan (ne traversant pas l'arc) est égale à :

$$A = 2\pi \cdot d \cdot l \dots\dots\dots (6)$$

Où :

- **l** est la longueur de l'arc de courbe (génératrice)
- **d** est la distance du centre de gravité de l'arc à l'axe de révolution

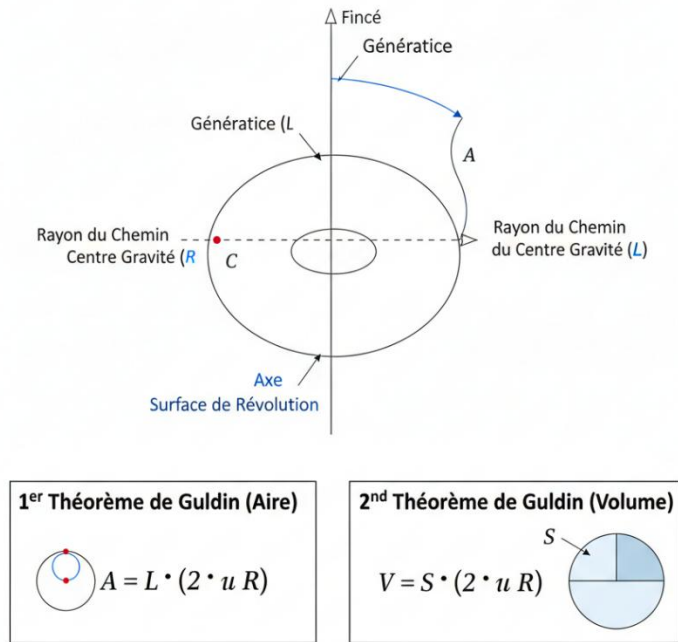


Figure 72: Théorèmes de Guldin appliqués aux surfaces de révolution

Ce théorème permet de calculer rapidement l'aire d'une surface de révolution sans passer par un calcul intégral complexe, à condition de connaître le centre de gravité de la génératrice.

III.12.2.2. Formule générale par intégration

Pour une surface de révolution engendrée par la rotation d'une courbe $y = f(x)$ (de $x = a$ à $x = b$) autour de l'axe des abscisses, l'aire est donnée par l'intégrale :

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \dots\dots\dots (7)$$

Cette formule généralise le calcul d'aire à toute génératrice dont on connaît l'équation.

III.12.2.3. Exemples classiques

Aire d'une sphère de rayon R :

Généré par un demi-cercle, le calcul donne :

$$A = 4\pi R^2 \dots\dots\dots (8)$$

Aire latérale d'un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur h :

$$A = 2\pi R h \dots\dots\dots (9)$$

(périmètre de la base \times hauteur)

Aire latérale d'un cône de révolution de rayon de base R et d'apothème a :

$$A = \pi R a \dots\dots\dots (10)$$

(demi-périmètre de la base \times apothème)

III.12.3. Calcul de volumes de solides de révolution

III.12.3.1. Théorème de Guldin (second théorème)

Le **second théorème de Guldin** fournit une formule pour calculer le volume d'un solide de révolution :

Énoncé : Le volume du solide de révolution engendré par la rotation d'une surface plane autour d'un axe de son plan (ne traversant pas la surface) est égal à :

$$V = 2\pi \cdot d \cdot S \dots\dots\dots (11)$$

où :

- **S** est l'aire de la surface plane (génératrice)
- **d** est la distance du centre de gravité de la surface à l'axe de révolution

III.12.3.2. Formule générale par intégration

Pour un solide de révolution engendré par la rotation d'une courbe $y = f(x)$ (de $x = a$ à $x = b$) autour de l'axe des abscisses, le volume est donné par :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \dots\dots\dots (12)$$

Cette formule correspond à la somme (intégrale) des aires des disques infinitésimaux perpendiculaires à l'axe de révolution.

III.12.3.3. Exemples classiques

Volume d'une sphère de rayon R :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \dots\dots\dots (13)$$

Volume d'un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur h :

$$V = \pi R^2 h \dots\dots\dots (14)$$

(aire de la base \times hauteur)

Volume d'un cône de révolution de rayon de base R et de hauteur h :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \dots\dots\dots (15)$$

(un tiers du volume du cylindre de mêmes base et hauteur)

Volume d'un parabolôide de révolution de hauteur h et de rayon de base R :

$$V = \frac{1}{2}\pi R^2 h \dots\dots\dots (16)$$

(la moitié du volume du cylindre de mêmes base et hauteur)

Ces formules sont indispensables en architecture pour estimer les quantités de matériaux, les capacités de réservoirs, ou les volumes intérieurs de bâtiments à géométrie de révolution.

III.12.4. Applications en architecture

Les calculs géométriques sur les surfaces de révolution trouvent des applications directes dans le projet architectural :

- **Dimensionnement** : calcul des dimensions réelles d'éléments courbes à partir des projections
- **Métrés** : évaluation des surfaces de couverture (toitures, coupôles) et des volumes intérieurs
- **Capacités** : calcul de volumes de réservoirs, citernes, silos
- **Matériaux** : estimation des quantités de matériaux nécessaires (tôles, briques, béton)
- **Structures** : vérification des dimensions pour le calcul de résistance des matériaux

La maîtrise de ces calculs est donc essentielle pour passer du dessin architectural à la réalisation concrète du projet.

Conclusion

Les **surfaces de révolution** constituent un aspect fondamental de la géométrie descriptive et de la création architecturale. Leur étude permet de maîtriser :

- Les **concepts géométriques** fondamentaux : axe, génératrice, méridienne, parallèle, plan tangent
- Les **méthodes de représentation** en projection orthogonale (méthode de Monge)
- Les **constructions graphiques** : sections planes, intersections, développements, ombres

- Les **calculs** : vraies grandeurs, aires, volumes
- Les **applications architecturales** : dômes, coupes, structures hyperboloïdes, éléments courants

La géométrie descriptive développe la **vision spatiale** et la **rigueur géométrique** indispensables à la pratique architecturale. Elle établit le lien entre la conception abstraite et la réalisation concrète, entre le dessin bidimensionnel et l'espace tridimensionnel.

Les surfaces de révolution, omniprésentes dans l'histoire de l'architecture (du Panthéon de Rome aux dômes géodésiques contemporains), continuent d'inspirer architectes et ingénieurs. Leur étude approfondie ouvre la voie à l'innovation architecturale en combinant tradition géométrique et technologies modernes.

**Chapitre IV. LES SURFACES DÉVELOPPEMENT : MÉTHODES ET
REPRÉSENTATIONS**

Introduction

Le développement géométrique des formes 3D consiste en la décomposition de ces formes en facettes 2D (juxtaposées) en vue de les simplifier.

Les surfaces développables occupent une place essentielle dans la représentation géométrique des formes architecturales. Elles regroupent l'ensemble des surfaces qui peuvent être dépliées sur un plan sans déformation, c'est-à-dire sans étirement ni compression. Cette propriété en fait des outils privilégiés pour comprendre la structure géométrique de nombreuses enveloppes architecturales : toitures en pans, rampes droites, manteaux cylindriques, cônes, pyramides, ou encore éléments de charpente. Ce chapitre introduit les définitions fondamentales, distingue les principales familles de surfaces développables (planes, cylindriques, coniques) et rappelle leurs caractéristiques géométriques essentielles. Une attention particulière est accordée au lien entre la forme tridimensionnelle et son développement en deux dimensions, étape indispensable pour toute fabrication, modélisation ou analyse technique.

Dans une perspective méthodologique, ce chapitre présente les procédés rigoureux de construction des développements et les différentes situations rencontrées dans la pratique architecturale : développement d'un cylindre ou d'un cône, patron d'une pyramide, déroulement d'une surface formée par des génératrices droites, etc. Chaque méthode est expliquée étape par étape, avec schémas, commentaires et applications directes aux objets courants de l'architecture. L'objectif est de permettre à l'étudiant de passer aisément de la surface en volume à son patron plan, tout en comprenant les principes géométriques qui fondent ces transformations. Ainsi, l'étude des surfaces développables devient non seulement un exercice graphique, mais également un outil d'analyse et de conception, mobilisable dans les projets dès la première année d'architecture.

IV.1. Définition :

Le développement d'une surface consiste à déplier ou à projeter une surface tridimensionnelle sur un plan, sans déformation de longueurs ni modification des angles. Cette opération permet d'obtenir une figure plane équivalente à la surface réelle, facilitant ainsi sa représentation, son calcul et sa fabrication. Elle est particulièrement utilisée pour les surfaces développables telles que les cylindres, les cônes et certains polyèdres.

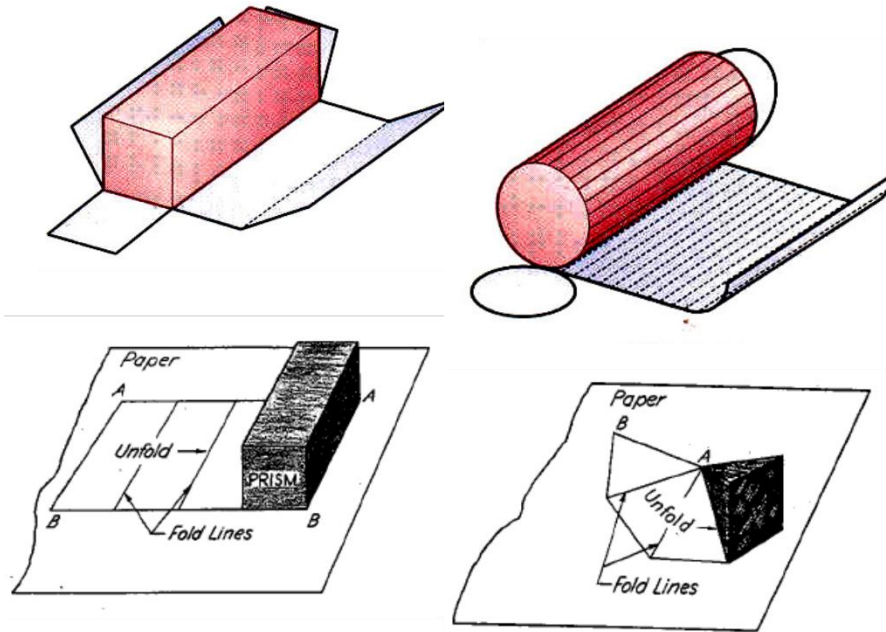


Figure 73 : surfaces de développement

Il s'agit d'une opération, géométrique, de dépliage des formes en différentes vues ou facettes.

IV.2. Principe de base :

Toutes les lignes de développement doivent correspondre aux vraies grandeurs des lignes constituant la forme 3D développées.

IV.3. Les méthodes de développement de surfaces :

Quatre (4) méthodes de développement de surfaces sont à distinguer :

IV.3.1. Développement par des lignes parallèles :

Cette méthode consiste à dérouler la surface en projetant des lignes parallèles entre elles, généralement perpendiculaires à une direction donnée. Elle s'applique principalement aux surfaces cylindriques ou prismatiques, où toutes les génératrices sont parallèles. Le principe est de reporter, sur le plan de développement, les longueurs réelles des génératrices parallèles tout en conservant la distance entre elles. Ce procédé permet d'obtenir une surface développée exacte et fidèle à la géométrie initiale. Elle est davantage utilisée pour le développement des prismes et des cylindres.

IV.3.2. Développement par des lignes radiales :

Le développement par lignes radiales est utilisé pour les surfaces coniques ou pyramidales, où les génératrices convergent vers un point appelé sommet. Le déroulement s'effectue en faisant pivoter les génératrices autour du sommet jusqu'à ce qu'elles s'inscrivent sur un plan de développement. Le résultat est un secteur circulaire dont le rayon correspond à la longueur de la génératrice et dont l'arc représente la base développée. Cette méthode permet d'obtenir une représentation exacte,

très utile pour les surfaces à base circulaire ou polygonale convergente. Elle est utile Pour le développement des pyramides et des cônes.

IV.3.3. Développement par triangulation :

La triangulation consiste à décomposer une surface quelconque, souvent irrégulière ou doublement courbée, en un ensemble de petits triangles plans. Chaque triangle étant une surface plane, il peut être développé directement sans déformation. Le développement complet s'obtient en juxtaposant ces triangles sur le plan. Cette méthode est approximative mais très pratique pour les surfaces complexes, comme les coques, les toitures incurvées ou les revêtements de formes libres.

IV.3.4. Développement par approximation :

Le développement par approximation est utilisé pour les surfaces non développables, c'est-à-dire celles qui ne peuvent pas être déroulées sans distorsion (comme les sphères ou les surfaces gauches). Le principe est de substituer à la surface réelle une surface développable voisine, ou d'accepter de petites déformations réparties uniformément. L'objectif est d'obtenir un développement approché, exploitable pour la fabrication ou la représentation graphique, tout en conservant les dimensions principales et les proportions générales. Cette méthode est utile pour le développement des formes sphériques.

IV.4. Développement de volume courant : construction des patrons

IV.4.1. Patron d'un cylindre vertical :

Trois surfaces de composition : la surface latérale – la base et le toit.

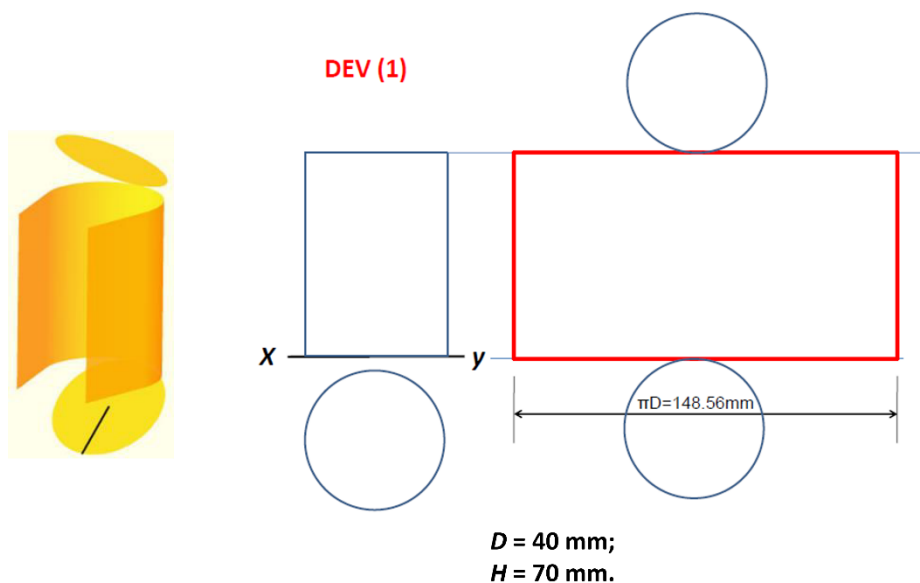


Figure 74 : développement d'un cylindre

IV.4.2. Patron d'un parallélépipède :

Le même principe de décomposition : trois surfaces de composition à obtenir : les surfaces latérales, la surface de base et le toit.

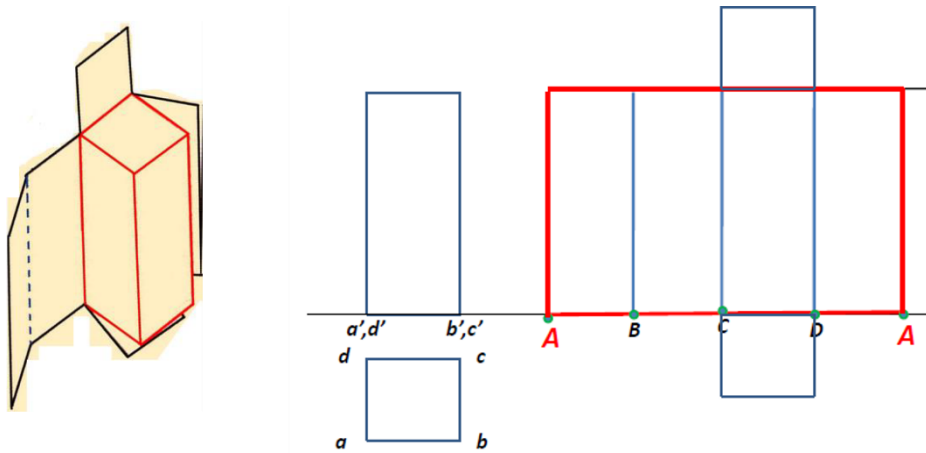


Figure 75 : patron d'un prisme régulier

IV.4.3. Développement d'un prisme régulier :

Trois surfaces de composition : les surfaces latérales – la base et le toit.

IV.4.3.1. 1^{er} cas :

Un prisme de base triangulaire.

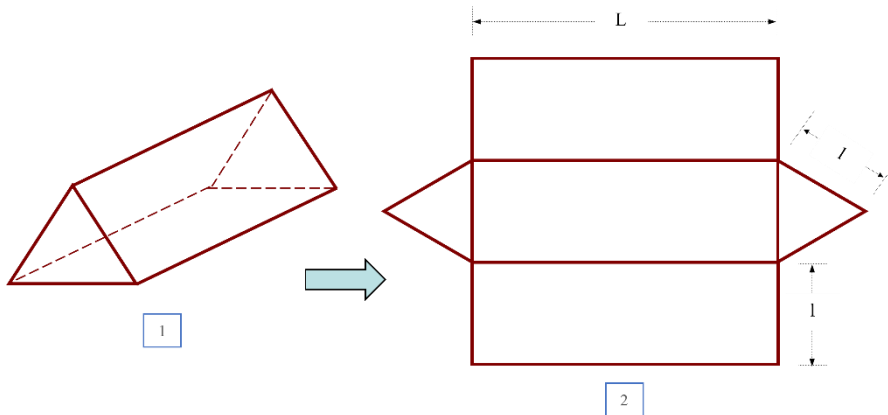


Figure 76 : patron d'un prisme régulier, 1^{er} cas

IV.4.3.2. 2^{ème} cas :

Un prisme régulier de base rectangulaire et un toit incliné.

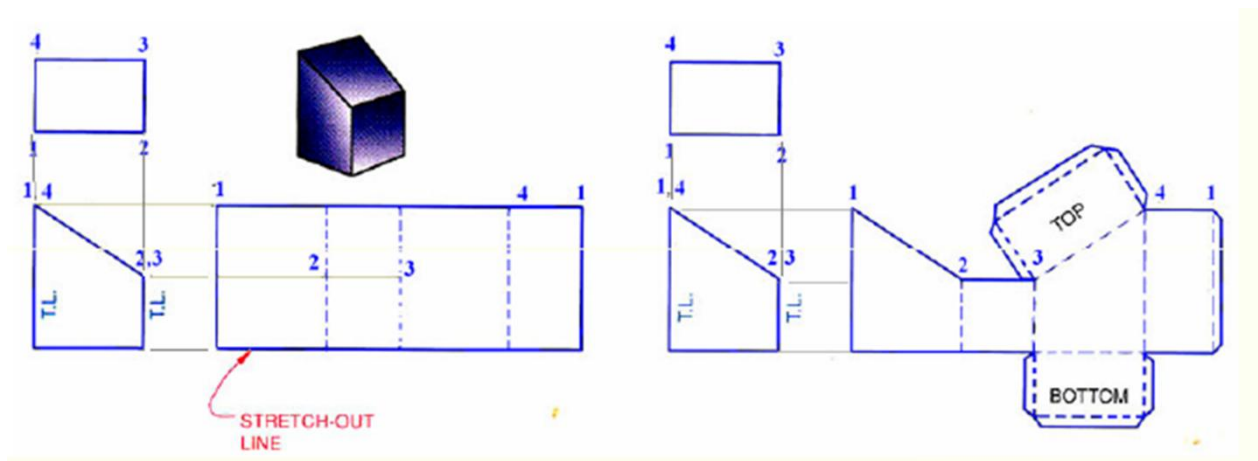


Figure 77 : patron d'un prisme régulier, 2ème cas

IV.4.4. Développement d'une pyramide carré :

Lors du développement d'une pyramide à base carrée, chacune des faces triangulaires latérales est « ouverte » et rabattue dans le même plan que la base. Les facettes se déploient ainsi en surfaces planes juxtaposées, disposées autour du point correspondant au sommet, formant un ensemble de triangles isocèles articulés sur les arêtes de base.

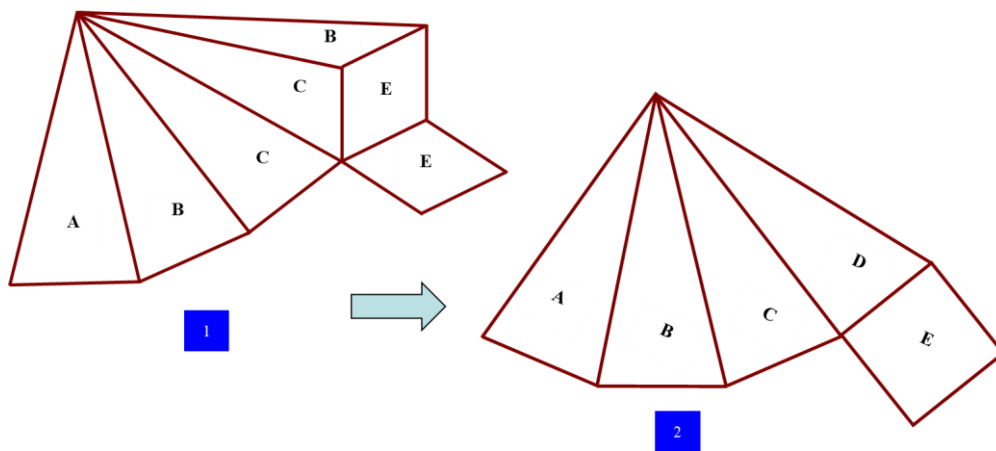


Figure 78 : patron d'une pyramide à base carré

Les facettes pliées seront dépliées en surfaces 2D juxtaposées et convergées vers le point du sommet de la pyramide.

IV.4.5. Démarche de développement d'une pyramide :

IV.4.5.1. La vraie grandeur :

La détermination de la vraie grandeur constitue la première étape indispensable dans le développement d'une pyramide. En effet, pour pouvoir déplier correctement les faces latérales, il

est nécessaire de connaître la longueur réelle des arêtes, car celles-ci apparaissent souvent en réduction ou en fausse grandeur dans les projections orthogonales.

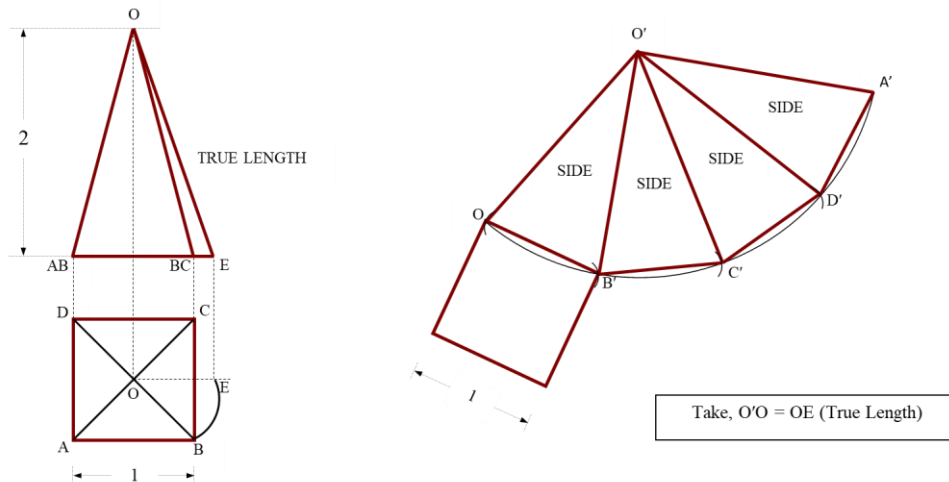


Figure 79 : projection de la vraie grandeur

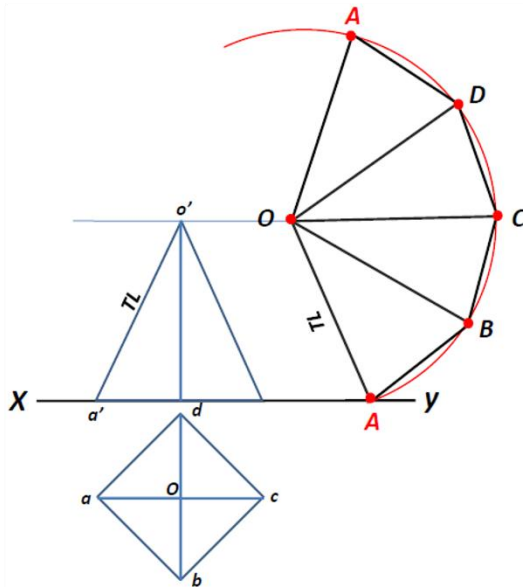
La démarche consiste donc à repositionner chaque arête dans un plan parallèle à elle-même ou à appliquer une méthode de rabattement afin de restituer sa dimension exacte. Une fois la vraie grandeur obtenue, toutes les faces triangulaires peuvent être construites fidèlement, garantissant un développement précis et cohérent de la pyramide.

IV.4.5.2. Démarche de construction d'un patron de pyramide à base carré :

La démarche de développement du patron d'une pyramide se résume comme suit :

- Tracé de la base et de l'élévation ;
- Projection de la vraie grandeur ;
- À partir du centre et de la vraie grandeur, en trace un cercle arbitraire dont le rayon est égale à la vraie grandeur ;
- Tracé des arrêtes de la base au moyen d'un compas (transcription des arrêtes de la base) ;
- Report de la base.

CASE N° 01



CASE N° 02 :

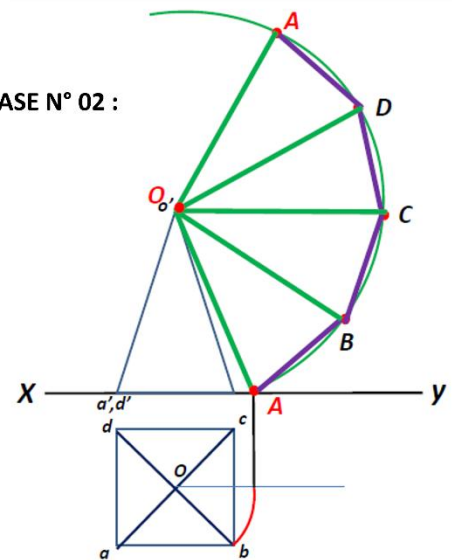
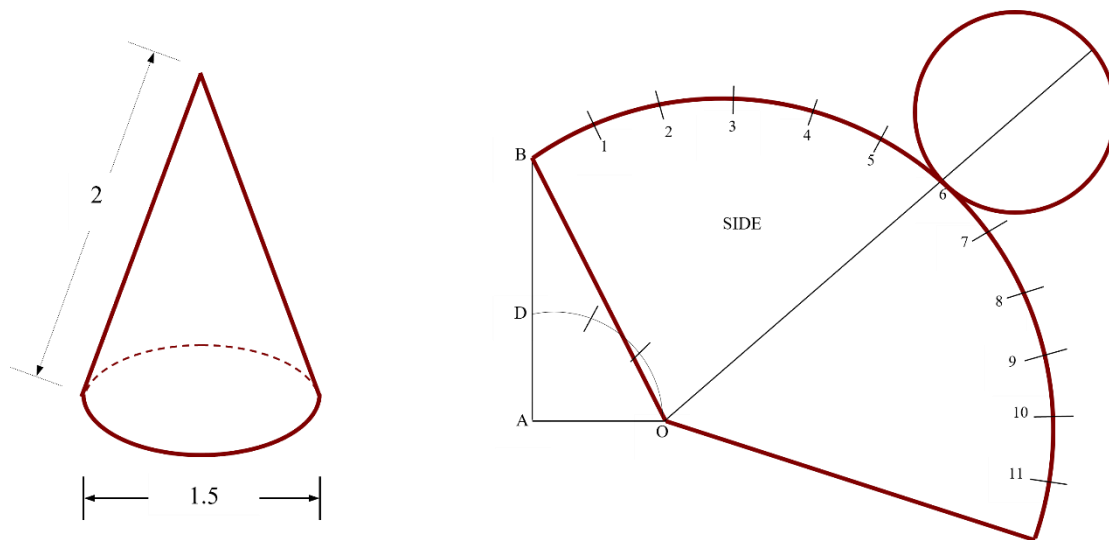


Figure 80 : le tracé du patron d'une pyramide (2 cas)

IV.4.6. Patron d'un cône :

Le développement surfacique d'un cône s'effectue comme suivant :

- À partir du rayon r , on calcul l'angle θ , l'angle de l'arc du patron.
- On trace par la suite le cercle de base (figure 66).



AO = Radius of the base = $\frac{3}{4}$
 BO = Inclined height of cone = 2

$$\theta = 360 \times \frac{R}{L} \text{ degrees}$$

Figure 81 : patron d'un cône

IV.4.7. Patron d'un tronc de cône :

Le développement surfacique d'un tronc de cône s'effectue comme suivant :

- À partir du rayon r , on calcul l'angle θ , l'angle de l'arc du patron.

$$\theta = 360 \times \frac{R}{L} \quad \text{degrees}$$

- R : rayon du cercle de la base ;
 - L : longueur de la génératrice totale ;
 - $L1$: longueur de la génératrice de la partie soustraite.
- On trace les deux arcs : de toiture et de base ;
 - On trace par la suite le cercles toiture et de base (figure 67).

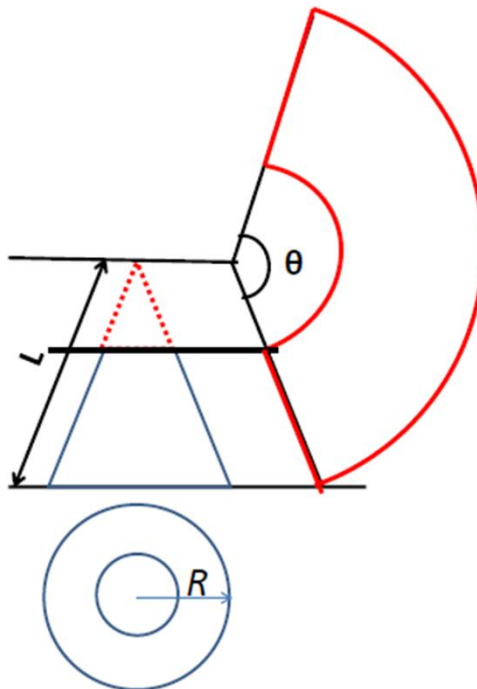


Figure 82 : patron d'un tronc de cône

IV.4.8. Patron d'un tronc de pyramide :

Pyramide à base carré :

- L : bord incliné de la pyramide
- $L1$: bord incliné du tronc de la pyramide

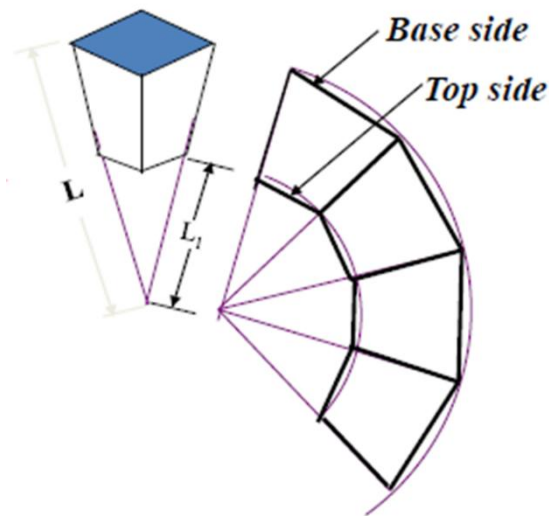


Figure 83 : patron d'un tronc de pyramide

IV.4.9. Développement surfacique de formes variées

La figure 69 illustre des formes de quelques patrons représentant les résultats de développement de volumes variés.

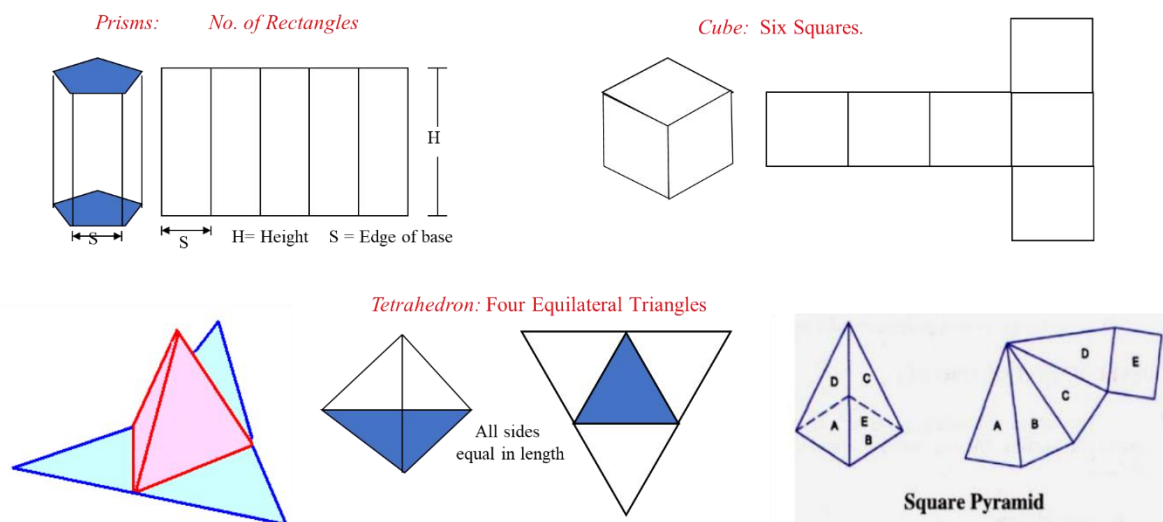


Figure 84 : développement de formes variées

IV.4.10. Patron d'un prisme hexagonal coupé par un plan incliné (à 30°) :

Dans ce cas d'étude, il s'agit d'établir le patron d'un prisme hexagonal dont la partie supérieure est tronquée par un plan incliné. La démarche consiste d'abord à identifier la position du plan de

coupe et à déterminer, sur chaque arête du prisme, les points d'intersection entre ce plan et les génératrices du solide. Une fois ces points localisés dans les vues orthogonales, on procède au développement latéral du prisme : les six faces rectangulaires sont dépliées successivement autour de l'hexagone de base. Sur ce patron, les points de coupe sont ensuite reportés avec précision, ce qui permet de tracer la ligne de section véritable, généralement polygonale, qui correspond à la trace du plan incliné sur le développement. Ce travail permet de visualiser clairement la géométrie du solide tronqué et constitue une étape essentielle dans la lecture et la représentation des volumes complexes.

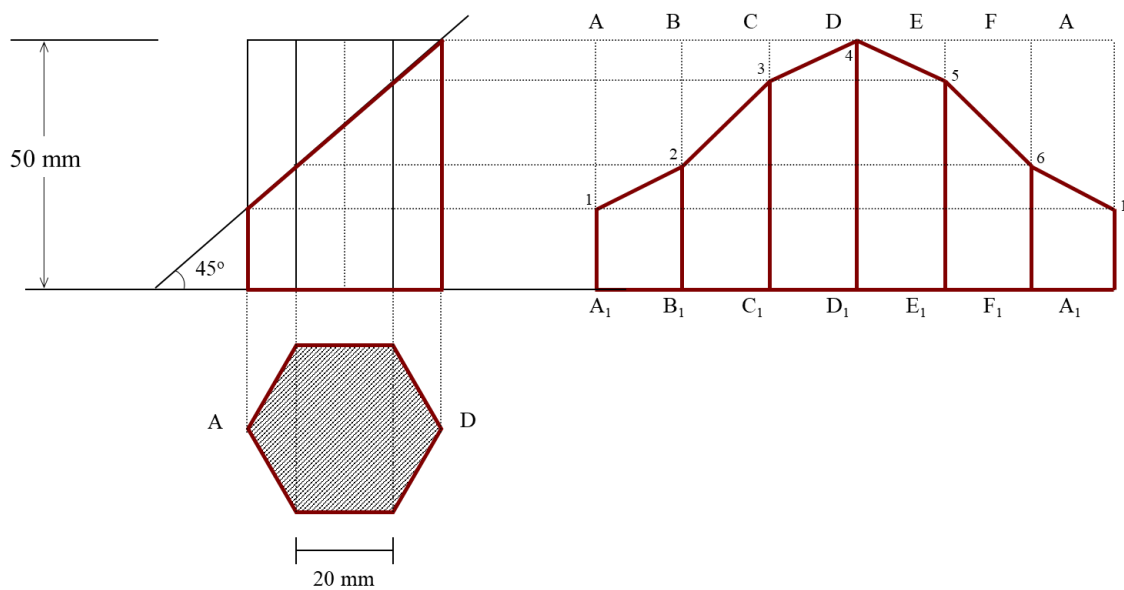


Figure 85 : Patron d'un prisme hexagonal coupé par un plan incliné à 30°

L'articulation des lignes de rappel, disposées horizontalement et verticalement, permet de reconstituer avec précision le tracé complet de la ligne d'intersection (ou tranchée) entre les deux surfaces.

IV.4.11. Développement d'un cylindre tranché par un plan incliné :

Le développement d'un cylindre coupé par un plan incliné consiste à transformer la surface latérale du cylindre en une surface plane tout en reportant avec précision la ligne de coupe oblique. La procédure se déroule en trois étapes méthodiques.

Étape 1 – Division de la base et tracé du développement élémentaire : On commence par diviser la base circulaire du cylindre en un nombre régulier de génératrices (souvent 12). Ces divisions sont projetées verticalement sur l'élévation (vue de face) afin d'identifier les points où le plan incliné intersecte chaque génératrice. En parallèle, on construit le développement de la surface latérale sous forme d'un rectangle dont la longueur est égale à la circonférence de la base et dont

la hauteur correspond à la hauteur du cylindre. Les génératrices sont alors reportées sur ce rectangle.

Étape 2 – Report des hauteurs d’intersection : Chaque point d’intersection entre le plan incliné et une génératrice, identifié sur la vue de face, est reporté horizontalement vers le développement. Ensuite, ces hauteurs sont transférées verticalement sur les génératrices correspondantes du développement. On obtient ainsi une série de points qui dessinent progressivement la ligne réelle de la coupe oblique une fois le cylindre déployé.

Étape 3 – Traçage de la courbe de coupe et finalisation du patron : Une fois l’ensemble des points reportés sur le développement, on les relie par une ligne douce et continue pour former la courbe précise de la section inclinée. Ce tracé représente la véritable ligne de coupe obtenue lorsque le cylindre est ouvert à plat. Enfin, il est possible d’ajouter les contours des bases (ou portions de bases) si elles doivent figurer dans le patron complet.

Les étapes de développement d’un cylindre coupé par un plan incliné à 30° sont illustrée dans la figure qui suit (figure 71).

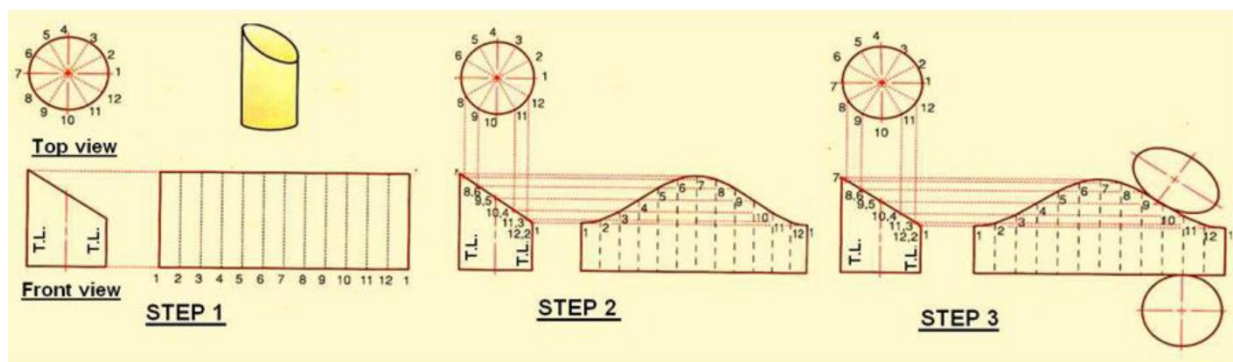


Figure 86 : Développement d’un cylindre tranché par un plan incliné

IV.4.12. Patron d’un cône régulier coupé par un plan incliné (à 30°) :

Le développement d’un cône coupé par un plan incliné consiste à représenter sur une surface plane l’ensemble des génératrices du cône et la ligne d’intersection formée par la coupe. Cette démarche permet d’obtenir un patron précis du tronc de cône résultant.

1. Division de la base et repérage des génératrices :

On commence par diviser la base circulaire du cône en un nombre égal de parties (ici 12 divisions), afin d’obtenir des points repères réguliers : 1, 2, 3...12.

Chaque point de la base est relié au sommet O' dans la vue de face, définissant ainsi les génératrices du cône (P1', P2', P3', etc.). Ces génératrices serviront à reporter la ligne de coupe sur le développement.

2. Détermination de la ligne de coupe dans la vue de face :

Le plan incliné intersecte les génératrices à différentes hauteurs.

Pour chaque génératrice, on repère le point d'intersection (P1', P2', P3', P7', etc.).

Ces points, obtenus dans la vue de face, correspondent à la véritable position de la coupe sur la surface du cône.

3. Mesure des longueurs vraies des génératrices :

À partir du sommet O', on mesure la longueur réelle de chaque génératrice (O'-1', O'-2', ..., O'-12') ainsi que la position des points de coupe le long de ces génératrices.

Ces longueurs vraies seront reportées dans la vue développée.

4. Construction du développement de la surface latérale :

À partir du sommet O, on trace un arc de cercle ayant pour rayon la longueur de la génératrice principale du cône.

L'arc complet correspond au déroulement de toute la circonférence.

Les divisions obtenues sur la base (1, 2, 3...12) sont reportées successivement le long de l'arc, en utilisant l'arc de longueur équivalente à chaque segment de base.

5. Report des points de coupe :

Pour chaque division, on reporte sur la génératrice développée la longueur correspondante du point de coupe (mesurée dans la vue de face).

Ainsi, les points P1, P3, P5, P7, P9, P11... sont placés sur les génératrices du patron selon leurs distances respectives au sommet.

6. Tracé de la courbe d'intersection développée :

Après avoir placé tous les points de coupe sur le développement, on relie ces points par une ligne courbe fluide.

Cette courbe représente la ligne développée de la coupe oblique du cône.

Elle forme la limite supérieure du patron du tronc de cône.

7. Fermeture du patron :

La base circulaire développée est fermée en reliant les points extrêmes (1 et 12). Le patron complet comprend :

- L'arc correspondant à la base,
- La courbe de coupe,
- Les génératrices développées convergeant vers le sommet O.

Ce patron permet de matérialiser en 2D la surface réelle du cône après découpe, et il peut être utilisé pour des applications de maquettes, de tôlerie, d'architecture ou de géométrie descriptive.

Les figures qui suivent (figures 72 - 73) illustrent les étapes de développement d'un cône régulier coupé par un plan incliné à 30° .

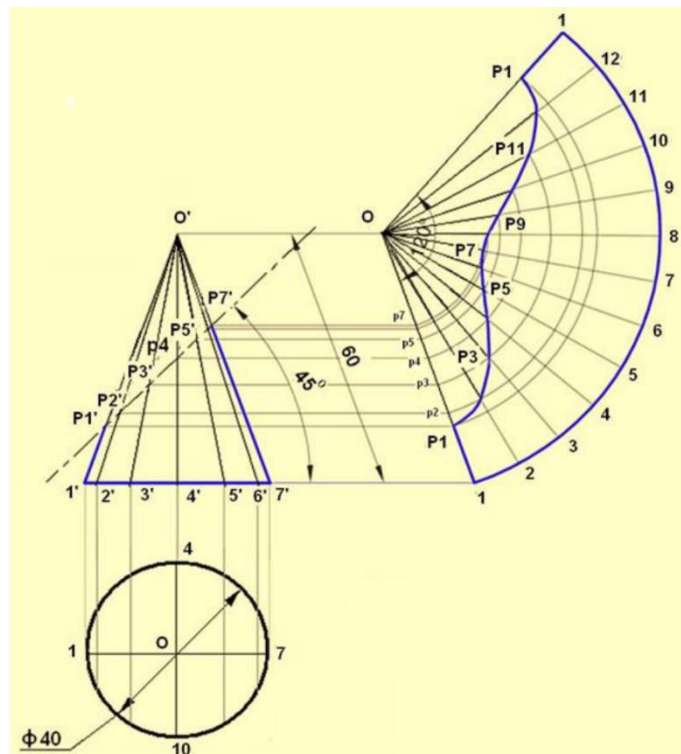


Figure 87 : Patron d'un cône régulier coupé par un plan incliné à 30° (1er cas)

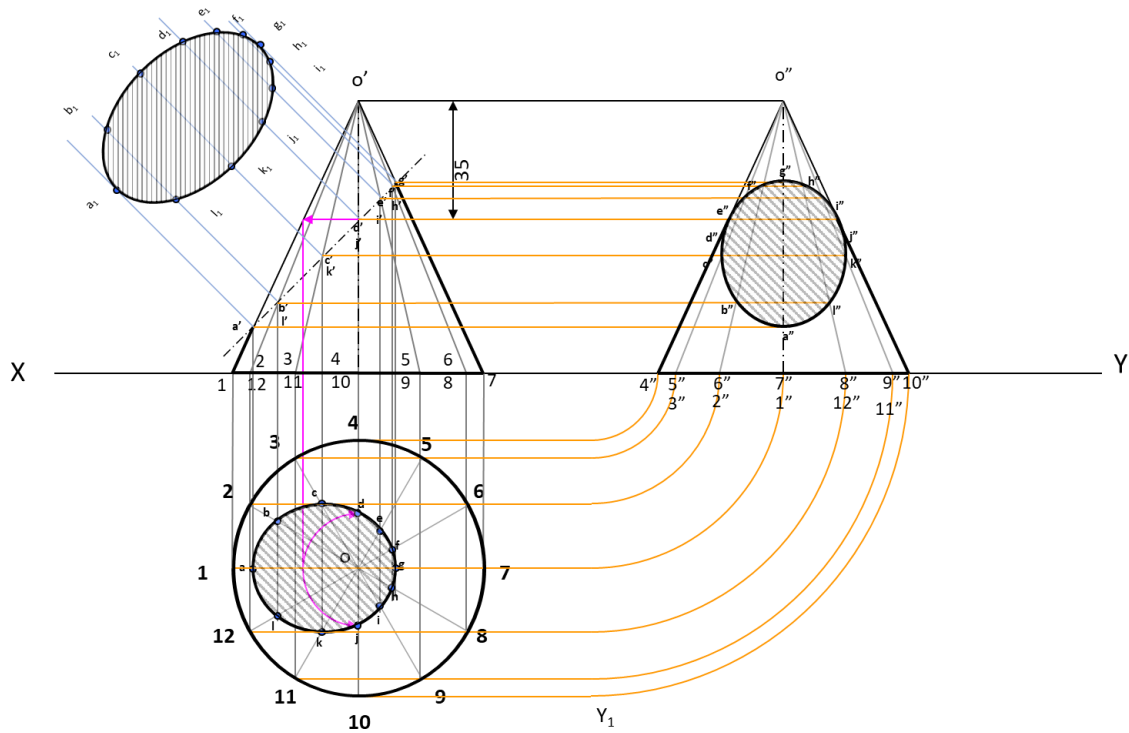


Figure 88 : Patron d'un cône régulier coupé par un plan incliné à 30° (2ème cas)

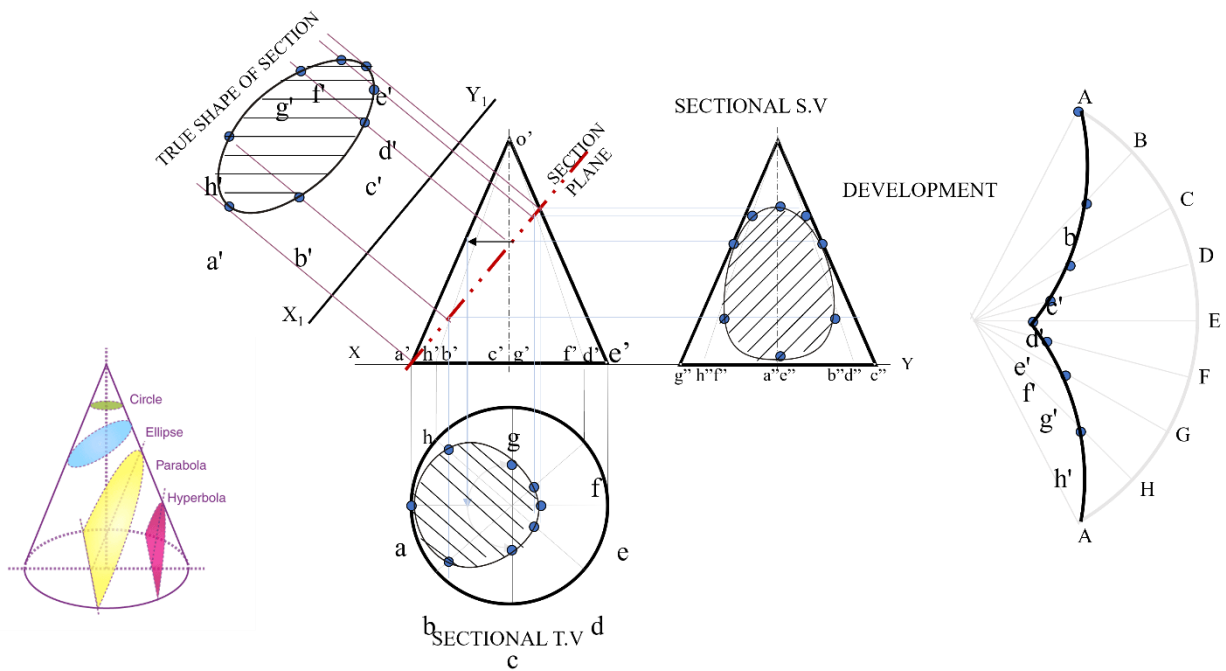


Figure 89 : Patron d'un cône régulier coupé par un plan incliné à 30° (3ème cas)

IV.4.13. Patron d'un prisme pentagonal coupé par un plan incliné (à 30°) :

Le développement d'un prisme pentagonal tranché par un plan incliné consiste à représenter en 2D la surface latérale dépliée du prisme après découpe. Cette démarche permet de visualiser la forme réelle de la section inclinée lorsqu'elle est reportée sur le patron. La méthode ci-dessous décrit les étapes essentielles, depuis les vues orthogonales jusqu'à la construction finale du tracé développé.

1. Analyse des vues et repérage des sommets :

On commence par examiner les deux vues :

- Vue de face (où apparaît l'inclinaison du plan de coupe),
- Vue de dessus (où se lit le contour du pentagone de base).

Chaque sommet du pentagone est identifié (A, B, C, D, E). Ces sommets sont projetés verticalement et horizontalement pour établir des correspondances exactes entre les deux vues.

2. Détermination des points d'intersection du plan incliné :

Dans la vue de face, le plan incliné coupe les arêtes du prisme.

On repère alors, pour chaque arête verticale, le point précis où le plan la tranche.

Ces points sont projetés horizontalement sur la vue de dessus, afin d'obtenir la position exacte des points de coupe sur le contour du pentagone.

Ce travail de projection garantit que la ligne de section est déterminée avec précision dans les deux vues.

3. Construction du développement latéral du prisme :

On déroule ensuite les cinq faces latérales du prisme pour former une bande rectangulaire composée de cinq panneaux successifs, représentant les faces A–B, B–C, C–D, D–E et E–A.

Les largeurs de ces panneaux correspondent aux longueurs réelles des côtés du pentagone, relevées dans la vue de dessus.

La hauteur de la bande correspond à la hauteur du prisme.

4. Report des points de coupe sur le développement :

Pour tracer la ligne inclinée sur le patron, on procède ainsi :

1. Les hauteurs des points de coupe, mesurées dans la vue de face, sont reportées verticalement sur les panneaux correspondants du développement.
2. Simultanément, l'ordre de succession des points (A', B', C', D', E') est respecté selon le déroulement du pentagone.
3. On obtient ainsi, sur chaque face développée, un point dont la hauteur est déterminée par le plan de coupe.

Lorsque tous les points sont placés, on les relie par une ligne continue : cette ligne constitue la véritable trace du plan incliné sur le patron.

5. Fermeture du patron :

Enfin, le dernier panneau est ajusté pour rejoindre le premier, afin de fermer le patron complet du prisme.

La ligne inclinée obtenue représente la section développée, tandis que la partie inférieure du patron correspond aux arêtes de base du pentagone.

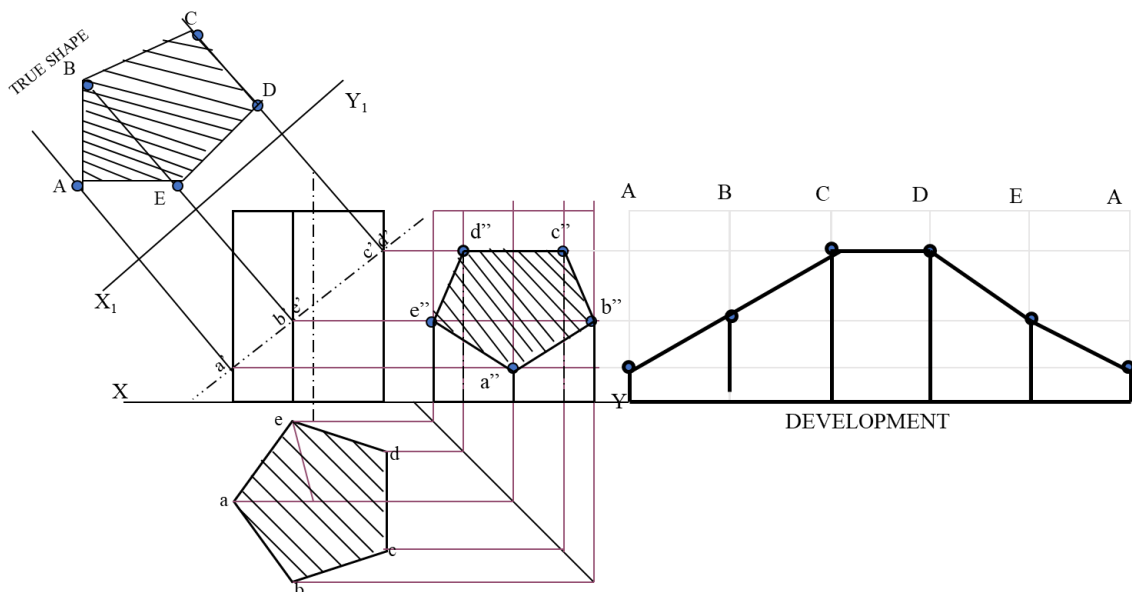


Figure 90 : Patron d'un prisme pentagonal coupé par un plan incliné à 30°

IV.4.14. Patron d'un prisme hexagonal coupé par un plan incliné :

La même démarche suivie précédemment est applicable pour le cas d'un prisme hexagonal coupé par un plan incliné (figure 76).

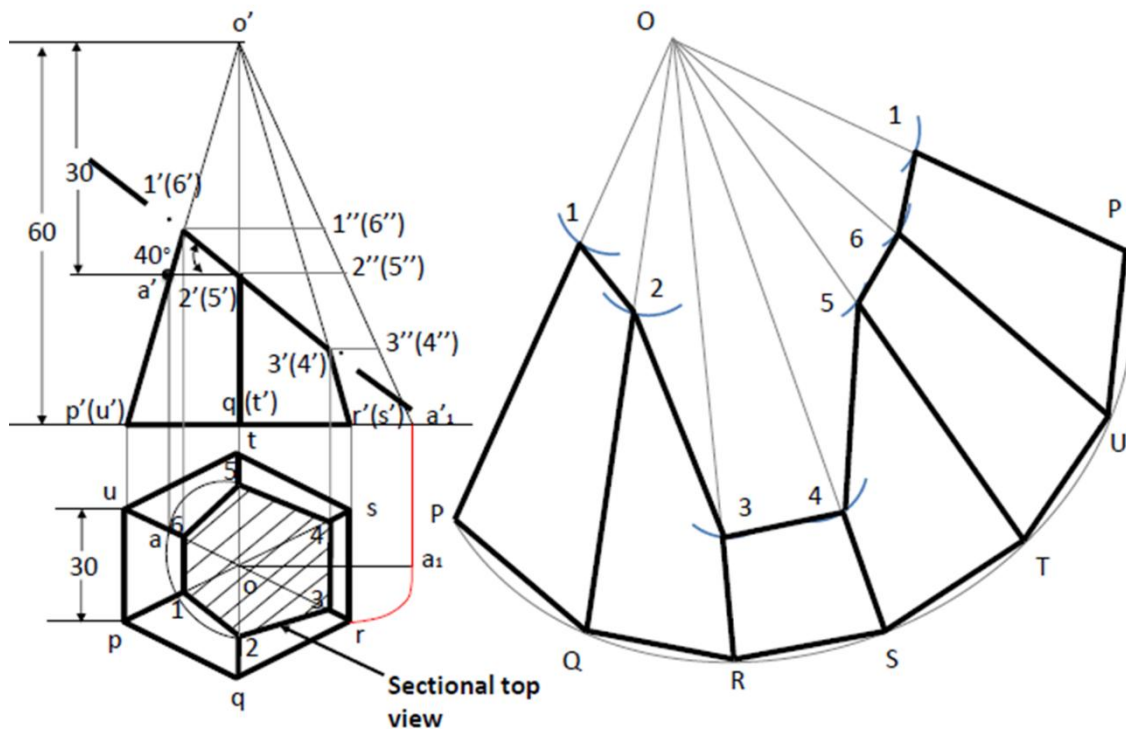


Figure 91 : Patron d'un prisme hexagonal coupé par un plan incliné

L'étude des surfaces développables et des méthodes de construction des patrons a permis de comprendre comment les volumes architecturaux — qu'ils soient simples, comme les prismes et cylindres, ou plus complexes, comme les pyramides et cônes tronqués — peuvent être rigoureusement dépliés en figures planes. Les différentes démarches présentées (vraies grandeurs, découpage en génératrices, repérage des sections, report des longueurs, raccordement des contours) ont mis en évidence la logique géométrique qui gouverne chaque transformation spatiale.

La construction graphique des patrons constitue un outil fondamental en architecture :

- Elle permet de comprendre la logique interne des formes complexes ;
- Elle facilite la conception de toitures, coques, enveloppes et revêtements ;
- Elle prépare au travail sur maquettes, structures métalliques, charpentes, origami architectural et fabrication numérique (CNC, découpe laser).

Ainsi, savoir développer une surface revient à savoir lier géométrie, représentation et construction, trois dimensions essentielles du métier d'architecte.

Bibliographie :

- Arustamov, K. (1972). *Problems In Descriptive Geometry*. (Translated by Oleg Meshkov). Mir Publishers.
- Aubert, J. (2017). *Cours de dessin d'architecture à partir de la géométrie descriptive* (7^e éd.). Éditions de la Villette.
- Beckh, M. (2015). *Hyperbolic structures: Shukhov's lattice towers – Forerunners of modern lightweight construction*. Wiley.
- Bensaada, S., & Felliachi, D. (1990). *Géométrie Descriptive - Cours*. Univ. Biskra. (p. 303)
- Ceccato, C., Hesselgren, L., Pauly, M., Pottmann, H., & Wallner, J. (2010). *Advances in Architectural Geometry 2010* (Vol. 17). Springer. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-7091-0309-8>
- Chahly, A. T. (1968). *Descriptive Geometry*. (Translated by A. E. Tchernukhin and Th.) The Higher School Publishing House. Moscow
- Donelli, A. (2014). **Fundamentals of descriptive geometry: Applications for architecture and engineering**. *International Journal of Structural and Civil Engineering*, 3(4). <http://www.ijscer.com/index.php?m=content&c=index&a=show&catid=126&id=148>
- EAN. (n.d.). *Géométrie Descriptive - Cours*.
- Faure, A. (2009). *Géométrie descriptive : Du point aux surfaces de révolution et aux ombres*. Ellipses.
- Gordon, V. . (1980). *A Course In Descriptive Geometry*. (Translated by Leonid Levant). MIR Publishers; Revised edition.
- Graefe, R. (1990). *Vladimir G. Shukhov 1853-1939: The Art of Construction*. University of Stuttgart.
- Hedges, K. E. (2017). *Architectural graphic standards*. John Wiley & Sons.
- Holliday, K. A. (1998). *Applied Descriptive Geometry* 2nd Edition. Cengage Learning.
- Ken, M., & Danjou, S. (2022). **Basic Concepts of Descriptive Geometry**. In *Geometric and Engineering Drawing* (4th Edition) (p. 59). Routledge. <https://doi.org/https://doi.org/10.1201/9781003001386>
- King, R. (2000). *Brunelleschi's Dome: How a Renaissance Genius Reinvented Architecture*. Walker & Company.
- Monge, G. (1799). *Géométrie descriptive : Leçons données aux Écoles normales, l'an 3 de la République*. Baudouin.
- Moyer, J. A. (1909). *Descriptive geometry for students of engineering*. Wiley.

- Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M., Kilian, A., & Bentley, D. (2007). *Architectural Geometry* First Edition. Bentley Institute Press.
- Pressley, A. (2010). *Elementary Differential Geometry* (2e éd.). Springer.
- Tariq, A. (2004), **Shade and shadow: course**. <https://fr.scribd.com/presentation/689124824/>
- Zamel, M., & Fakih, A. (2015). *Cours de Géométrie descriptive et perspective* (p. 49).

