

المسيلة في: 2024-03-17

رقم: 30 / ق.ر / 2024

مستخلص محضر اللجنة العلمية ليوم: 2024/03/17
بخصوص اعتماد مطبوعة دروس

وافقت اللجنة العلمية على اعتماد مطبوعة الدروس الخاصة بالأستاذ
جربوعيسى المعنونة بـ:

COURS D'ALGEBRE MULTILINEAIRE

كمرجع للدروس لطلبة السنة الأولى ماستر رياضيات، تخصص تحليل دالي.
وهذا بعد الاطلاع على التقارير الإيجابية للأستاذ الخبير المكلف بالمطبوعة.

رئيس اللجنة العلمية



رئيس اللجنة العلمية
لقسم الرياضيات
مرزوقي عبد الكريم



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



COURS D'ALGEBRE MULTILINEAIRE

Par

DJERIOU Aissa

**COURS DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ANNÉE MASTER
ANAYSE FONCTIONNELLE
FILIÈRE MATHÉMATIQUES**

Année: 2023/2024

Avant-propos

Ce polycopié est le fruit des années d'enseignement de modules d'Algèbre multilinéaire pour la première année master Analyse fonctionnel domain mathématique et Informatique filière mathématique.

Chaque chapitre est subdivisé en rappel complet, un cours et des exemples, suivis par une série d'exercices avec des solutions détaillée. Le but de ce polycopié est de donnée des initiations de l'Algèbre linéaire et de l'Algèbre multilinéaire.

Au début, je parlerai de la structure d'espaces et sous-espaces vectoriels qui sont des structures algébriques que l'on retrouve quasiment partout en mathématiques et qui sont la structure de base en algèbre linéaire. La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale en mathématiques modernes.

Dans le deuxième chapitre, on aborde la notion des applications multilinéaires et les formes bilinéaires et les formes quadratiques (définition, et toutes leurs propriétés).

Dans le troisième chapitre nous rappelons les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski, la notion d'orthogonalisation, les bases orthogonale, la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmid et les définitions et propriétés de produit scalaire.

Dans le quatrième chapitre on rappelons les notions préliminaire de formes sesquilinéaires hermitiennes, formes quadratiques, et le produit scalaire hermitien ; Leurs définitions et propriétés. A la fin du chapitre on expose la notion d'espace hermitien, et les endomorphismes d'un espace hermitien, en particulier les endomorphismes adjoints, les endomorphismes unitaires, les endomorphismes normaux, et les endomorphismes hermitiens.

Enfin, j'espère que l'étudiant et l'enseignant des mathématiques trouvent leurs besoins dans ce polycopié.

Table des matières

Avant-propos	3
1 Rappels sur les espaces vectoriels et les applications linéaires	7
1.1 Structure d'espace vectoriel	7
1.1.1 Structure de corps.	7
1.1.2 Définition d'un espace vectoriel	7
1.1.3 Définition d'un sous-espace vectoriel	8
1.1.4 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie.	9
1.1.5 Famille liée et famille libre.	10
1.2 Bases et dimension d'un espace vectoriel.	11
1.3 Rang d'une famille finie de vecteurs	13
1.4 Produit d'espaces vectoriels	13
1.5 Somme et somme directe des sous espaces vectoriels de E .	14
1.6 Les applications linéaires	15
1.6.1 Définitions	15
1.6.2 Image et noyau d'une application linéaire	18
1.6.3 Application linéaire en dimension finie	19
1.6.4 Orthogonalité	23
1.7 Transposée d'une application linéaire	25
1.8 Série d'exercices avec solution	28
2 Les applications Multilinéaires	31
2.1 Définitions	31

2.1.1	Groupes symétriques: quelques propriétés	32
2.1.2	Applications multilinéaires alternées et antisymétriques	37
2.2	Les formes bilinéaires et quadratiques	38
2.2.1	Les formes bilinéaires	38
2.2.2	Représentation matricielle d'une forme bilinéaire	41
2.2.3	Formes bilinéaires non dégénérées	45
2.2.4	Formes quadratiques	46
2.2.5	Représentation matricielle d'une forme quadratique	48
2.3	Série d'exercices avec solution	49
3	Les espaces euclidiens	56
3.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz et Minkowski	56
3.2	Orthogonalité, noyau et rang d'une forme bilinéaire	58
3.3	Produit scalaire	61
3.4	Norme associée à un produit scalaire	63
3.5	Distance associée à un produit scalaire	64
3.6	Orthogonalité, orthogonalisation de Gram-Schmidt	65
3.6.1	Bases orthonormées	65
3.6.2	L'orthogonale d'une partie de E	67
3.6.3	Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	68
3.7	L'adjoint d'un endomorphisme et ses propriétés	69
3.8	L'application orthogonale (isométries)	71
3.9	Matrice orthogonale	72
3.10	Série d'exercices avec solution	76
4	Les espaces hermitiens	83
4.1	Forme sesquilinéaire	83
4.1.1	Définitions et exemples	83
4.1.2	Forme sesquilinéaire hermitienne	85
4.1.3	Représentation matricielle d'une forme sesquilinéaire hermitienne	87
4.1.4	Changement de base	88

4.2	Forme quadratique hermitienne	88
4.2.1	Définitions et propriétés	88
4.2.2	Représentation Matricielle d'une forme quadratique	90
4.2.3	Inégalité de Cauchy-Schwarz et Minkowski	92
4.2.4	Produit scalaire hermitien	94
4.3	Espaces hermitiens	94
4.3.1	Définition et exemples	94
4.3.2	Norme associée à un produit scalaire hermitien	95
4.3.3	Endomorphisme d'un espace hermitien	96
4.4	Série d'exercices avec solution	105
	Bibliographie	109

Djeriou Aissa

Chapitre 1

Rappels sur les espaces vectoriels et les applications linéaires

1.1 Structure d'espace vectoriel

1.1.1 Structure de corps.

Définition 1.1.1 Un ensemble structuré $(K, *, T)$ est un corps si:

- 1) $(K, *, T)$ est un anneau unitaire.
- 2) Tout élément de $K \setminus \{e_1\}$ admet un inverse pour la loi T dans K .

$$\forall x \in K \setminus \{e_1\} \exists x' \in K : xTx' = x'Tx = e_2.$$

1.1.2 Définition d'un espace vectoriel

Définition 1.1.2 Soit \mathbb{K} un corps (commutatif) et soit E un ensemble muni de deux lois de composition, l'une interne et notée additivement :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

l'autre externe et notée multiplicativement :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, y) &\longmapsto \lambda \cdot y \end{aligned}$$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} (ou E est un \mathbb{K} -espace vectoriel) si :

A)- $(E, +)$ est un groupe commutatif,

B)- Pour $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$(b1) \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$$

$$(b2) (\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$$

$$(b3) \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) \cdot x,$$

$$(b4) 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x,$$

Remarque 1.1.1 Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et les éléments de \mathbb{K} sont appelés **scalaires**.

Exercice 1.1.1 Montrer que tout corps \mathbb{K} est un espace vectoriel sur lui même. Montrer également que pour tout entier n , \mathbb{K}^n est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

1.1.3 Définition d'un sous-espace vectoriel

Définition 1.1.3 Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -e.v. et F une partie non vide de E alors on dit que F est un sous espace vectoriel de E ssi

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } \forall (x, y) \in F^2 \implies \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$$

Remarque 1.1.2 Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -e.v.

1- E et $\{0_E\}$ sont des s.e.v. de E

2- Soit F un s.e.v. de $E \implies 0_E \in F$.

Exemple 1.1.1 Soit \mathbb{R}^2 un \mathbb{R} -e.v., alors l'ensemble

$$A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

est un s.e.v. de \mathbb{R}^2 . En effet,

1)- $A \neq \emptyset$ car $(0, 0) \in A$.

2)- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (a, b) \in A^2 \stackrel{?}{\implies} \alpha \cdot a + \beta \cdot b \in A?$

$$\text{on a } \begin{cases} a \in A \implies a = (x, 0), & x \in \mathbb{R} \\ b \in A \implies b = (y, 0), & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}\alpha \cdot a + \beta \cdot b &= \alpha \cdot (x, 0) + \beta \cdot (y, 0) \\ &= (\alpha \cdot x, 0) + (\beta \cdot y, 0) \\ &= \underbrace{(\alpha \cdot x + \beta \cdot y, 0)}_{\in \mathbb{R}} \in A.\end{aligned}$$

Théorème 1.1.1 (exercice) Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de s.e.v. de E \mathbb{K} -e.v. Alors $\bigcap_{1 \leq i \leq n} F_i$ est un s.e.v. de E .

Démonstration. L'intersection d'une famille de s.e.v. de E est un s.e.v. de E ?

posons $F = \bigcap_{1 \leq i \leq n} F_i$, F s.e.v. de E .

1- $F \neq \emptyset$ car $0_E \in F_i \forall i = 1 \dots n \implies 0_E \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} F_i = F$.

2- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall (x, y) \in F^2 \stackrel{?}{\implies} \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$?

Soit $(x, y) \in F^2 \implies x$ et $y \in F_i \forall i = 1 \dots n$ car $F = \bigcap_{1 \leq i \leq n} F_i$

$\implies \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F_i \forall i = 1 \dots n$ car F_i s.e.v. de E

$\implies \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} F_i = F$. ■

Remarque 1.1.3 Si F_1, F_2 deux sous espace vectoriel de \mathbb{K} -e.v E . Alors $F_1 \cup F_2$ n'est pas toujours un sous espace vectoriel de E .

Exemple 1.1.2 Soit

$$F_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

deux s.e.v \mathbb{R}^2 sur le corps \mathbb{R} , on a $(1, 0) \in A_1$ et $(0, 1) \in A_2$ mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin A_1 \cup A_2$.

1.1.4 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie.

Définition 1.1.4 (Combinaison linéaire) Soient E un \mathbb{K} -e.v. et $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $v \in E$ est un combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, \dots, v_m s'il existe un m -uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ d'éléments de \mathbb{K} tel que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$$

Exemple 1.1.3 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (2, -1, 1)\}$ alors $v = (2, -2, -1)$ est un combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, v_3 car il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que

$$\begin{aligned} (v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) &\Leftrightarrow ((2, -2, -1) = \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 2, 3) + \lambda_3(2, -1, 1)) \\ &\Leftrightarrow (2, -2, -1) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

on trouve $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$. Donc $v = v_1 - v_2 + v_3$.

Définition 1.1.5 Soient E un \mathbb{K} -e.v. et $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset E$. On appelle sous-espace engendré par la famille \mathcal{F} et on note $\text{Vect}(\mathcal{F})$ ou $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m)$ ou $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, \dots, v_m . Autrement dit

$$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m) = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m : \lambda_i \in \mathbb{K} \forall i = 1, \dots, m\}.$$

Inversement, la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ est dit génératrice du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m)$ de E .

Propriétés 1.1.1 (Exercice)

- 1) $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i) = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m)$
- 2) $\text{Vect}(v_1, \dots, \alpha \cdot v_i, \dots, v_m) = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m), (\forall i = 1, \dots, m)$
- 3) $\text{Vect}(v_1, \dots, v_i + \sum_{j=1, i \neq j}^m \lambda_j v_j, \dots, v_m) = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m), (\forall i = 1, \dots, m)$.

1.1.5 Famille liée et famille libre.

Définition 1.1.6 Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ une famille d'un un \mathbb{K} -e.v. E .

- On dit que $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ est libre (ou linéairement indépendante) si

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0_E \right) \implies (\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0_{\mathbb{K}})$$

- On dit que $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ est liée (ou linéairement dépendante) si elle n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe un m -uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0_E$.

Propriétés 1.1.2

- 1) $(\mathcal{F} = \{v_1\} \text{ est libre}) \iff (v_1 \neq 0_E)$
- 2) Si $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ est libre alors toute sous-famille de \mathcal{F} est libre.
- 3) Si $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ est liée alors toute sur-famille de \mathcal{F} est liée.

1.2 Bases et dimension d'un espace vectoriel.

Définition 1.2.1 (Base) Soient E un \mathbb{K} -e.v. et $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une famille d'éléments de E . On dit que \mathcal{B} est une base de E si et seulement si :

- 1) \mathcal{B} est une famille libre.
- 2) \mathcal{B} est une famille génératrice de E .

Exemple 1.2.1 La famille $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$ est une base de \mathbb{R}^3 . On effectue

- 1) la famille \mathcal{B} est génératrice de \mathbb{R}^3 , puisque tout vecteur $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) \\ &= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) \\ &= x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \end{aligned}$$

- 2) la famille \mathcal{B} est libre, puisque pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \lambda_3v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

alors

$$\begin{aligned} [\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)] &\iff [(\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3) = (0, 0, 0)] \\ &\iff [(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)] \\ &\iff [\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_3 = 0] \end{aligned}$$

cette base on l'appelle la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Par la même manière de démonstration on démontre que

$$\mathcal{B} = \left\{ e_1 = (1, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-eme}}, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 1) \right\}$$

est une base canonique de \mathbb{R}^n .

Théorème 1.2.1 Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base de E , alors pour tous scalaires $\lambda_i \neq 0$ $\forall i = 1, \dots, n$, la partie $\mathcal{B}' = \{\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n\}$ est aussi une base de E .

Théorème 1.2.2 Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une partie finie d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

Les 4 propriétés suivantes sont équivalentes:

- 1) \mathcal{B} est une base de E .
- 2) \mathcal{B} est une partie libre maximale de E .
- 3) \mathcal{B} est une partie génératrice minimale de E .
- 4) Tout vecteur $v \in E$ est une combinaison linéaire unique des vecteurs de \mathcal{B} .

Définition 1.2.2 (Dimension) On appelle dimension d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E le cardinal de l'une de ses bases. On note cette dimension

$$\dim_{\mathbb{K}} E \quad \text{ou simplement} \quad \dim E.$$

Si ce cardinal est fini, on dit que E est de dimension finie.

Si ce cardinal est infini, on dit que E est de dimension infinie.

Remarque 1.2.1 La notation $\dim_{\mathbb{K}} E$ met en évidence l'importance du corps \mathbb{K} dans le calcul de la dimension de E . On a par exemple

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$$

Théorème 1.2.3 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie contenant deux parties finies $A \subset B \subset E$, A libre et B génératrice de E .

Alors il existe une partie L de E , $A \subset L \subset B$, qui forme une base de E .

Démonstration. Considérons l'ensemble $D = \{L_i \text{ libres} : A \subset L_i \subset B\}$. Les parties A et B étant finies, l'ensemble D est fini. D étant ordonné par inclusion, soit L une partie

maximale de D ; c'est donc une partie libre maximale; soit $L = \{v_1, \dots, v_n\}$; alors L engendre le sous espace vectoriel $F = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \alpha_i \in \mathbb{K}\}$ de E .

Si $F = E$, alors L est une base de E ; le théorème 1.2.3 est démontré. Si $F \neq E$, il existe un vecteur $v \in E \setminus F$.

Puisque L est une partie libre maximale, il s'en suit que $L \cup \{v\}$ est une partie liée; d'où $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$; par suite $v \in E$ et $v \in F$. On en déduit $E \subset F$ et $E = F$.

Donc L est une base de E . ■

Corollaire 1.2.1 Soit $A = \{v_1, \dots, v_r, 1 \leq r \leq n\}$ une partie libre d'un \mathbb{K} -e.v. E de dimension finie n . Alors on peut trouver $n-r$ vecteurs $v_{r+i} \in E, 1 \leq i \leq n-r$, tels que $\{v_1, \dots, v_n\}$ soit une base de E .

Corollaire 1.2.2 Soit G une partie génératrice finie d'un \mathbb{K} -e.v. E de dimension finie n . Alors il existe une partie B de G qui forme une base de E .

Corollaire 1.2.3 Soit F un sous espace vectoriel d'un \mathbb{K} -e.v. E finie. Alors

- 1) F est de dimension finie $\dim F \leq \dim E$.
- 2) Si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

1.3 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 1.3.1 Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie n et $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une famille finie de E . On appelle **rang** de \mathcal{F} , et l'on note $rg(\mathcal{F})$, la dimension du sous-espace de E engendré par \mathcal{F} . En d'autres termes:

$$rg(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}} (\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)).$$

1.4 Produit d'espaces vectoriels

Définition 1.4.1 • Soient E_1, E_2, \dots, E_n des espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} . On peut mettre sur l'ensemble produit

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in E_i, \forall i = 1, \dots, n\},$$

une structure d'espace vectoriel. On définit l'addition par

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

et la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ par

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)$$

- Si $\dim_{\mathbb{K}} E_i$ est finie pour $\forall i = 1, \dots, n$ alors $\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times \dots \times E_n) = \sum_{i=1}^n \dim_{\mathbb{K}} E_i$.
En particulier, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

1.5 Somme et somme directe des sous espaces vectoriels de E .

Définition 1.5.1 Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et F, G deux sous-espaces de E . La somme de F et G est le sous-espace de E , noté $F + G$, définie par

$$F + G = \{x_F + x_G : x_F \in F, x_G \in G\} = \text{vect}(F, G).$$

Théorème 1.5.1 (Exercice *) Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E , alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Définition 1.5.2 Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E . On dit que E étant somme directe de F et G ou que F est un **supplémentaire** de G dans E et on note $E = F \oplus G$ si:

- 1) $E = F + G$,
- 2) $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemple 1.5.1

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}.$$

Théorème 1.5.2 Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E . Si $E = F \oplus G$, alors

$$\dim(E) = \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Démonstration. $E = F \oplus G$ alors $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$ d'après le Théorème présidente on a $\dim(E) = \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$, mais $\dim(F \cap G) = \dim(\{0_E\}) = 0$, alors $\dim(E) = \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$. ■

Proposition 1.5.1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace de E . Alors F admet un supplémentaire dans E .

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ est une base de F . C'est une famille libre donc, on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, \dots, v_n\}$ de E . Posons $G = Vect(v_{r+1}, \dots, v_n)$. On a $E = F \oplus G$. ■

1.6 Les applications linéaires

1.6.1 Définitions

Définition 1.6.1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps commutatif \mathbb{K} et f une application de E dans F . On dit que f est linéaire si on a

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Exemple 1.6.1 1) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , S un ensemble non vide et t un élément de S . Considérons l'application δ_t définie par

$$\begin{aligned} \delta_t : E^S &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

δ_t est une application linéaire du \mathbb{K} .e.v. E^S dans E , appelée forme de Dirac au point t . E^S l'ensemble des applications de S vers E .

2) L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (x + z, x + y) \end{aligned}$$

est une application linéaire.

3) L'application

$$\begin{aligned} I : C^0([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto I(f) = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

est linéaire.

Remarque 1.6.1 Soit f une application linéaire de E dans F .

- Si f est bijective alors on dit que f est isomorphisme
- Si $E = F$, alors on dit que f est endomorphisme.
- Si $E = F$ et f bijective, alors on dit que f est automorphisme.

Notation 1.6.1

- On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F , muni des lois induites $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .
- On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Définition 1.6.2 On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans \mathbb{K} . L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est aussi noté E^* . C'est un \mathbb{K} -e.v appelé espace dual de E .

Notation 1.6.2 Si $x \in E$ et $f \in E^*$, on note parfois $f(x) = \langle f, x \rangle$.

Définition 1.6.3 On appelle **bidual** de E l'espace dual de E^* , noté E^{**} .

Théorème 1.6.1 (Exercice) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie et muni d'une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Alors $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ des éléments de E^* définie par

$$v_j^*(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

est une base de E^* , on l'appelle base duale de la base \mathcal{B} . En particulier, $\dim(E) = \dim(E^*)$.

Démonstration. \mathcal{B}^* est une base de E^* ssi:

1) \mathcal{B}^* est une génératrice de E^* .

On a $\forall v \in E : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ alors

$$\begin{aligned} v_j^*(v) &= v_j^*(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 v_j^*(v_1) + \lambda_2 v_j^*(v_2) + \dots + \lambda_n v_j^*(v_n) \\ &= \lambda_j. \end{aligned}$$

$\forall v^* \in E^*$:

$$\begin{aligned} v^*(v) &= v^*(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 v^*(v_1) + \lambda_2 v^*(v_2) + \dots + \lambda_n v^*(v_n) \\ &= v_1^*(v) v^*(v_1) + v_2^*(v) v^*(v_2) + \dots + v_n^*(v) v^*(v_n) \\ &= (v^*(v_1) v_1^* + v^*(v_2) v_2^* + \dots + v^*(v_n) v_n^*)(v), \end{aligned}$$

donc $v^* = \underbrace{v^*(v_1)}_{\alpha_1} v_1^* + \underbrace{v^*(v_2)}_{\alpha_2} v_2^* + \dots + \underbrace{v^*(v_n)}_{\alpha_n} v_n^*$, alors $E^* = Vect(v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$

2) \mathcal{B}^* est libre: Soit $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$:

$$\beta_1 v_1^* + \beta_2 v_2^* + \dots + \beta_n v_n^* = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \beta_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$$

alors on a

$$[(\beta_1 v_1^* + \beta_2 v_2^* + \dots + \beta_n v_n^*)(v_i) = 0(v_i) = 0] \Rightarrow [\beta_i = 0, \forall i = 1, \dots, n]$$

■

Exemple 1.6.2 1- Soit $E = \mathbb{R}^3$ un \mathbb{R} .e.v et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Alors $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ d'éléments de E^* définie par

$$\begin{aligned} v_j^* : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto v_j^*(x_1, x_2, x_3) = x_j \end{aligned}$$

est une base de E^* pour $j = 1, 2, 3$.

2- Considérons la base suivante de $E = \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (2, 1), v_2 = (3, 1)\}$$

Nous allons déterminer la base \mathcal{B}^* de E^* qui est duale de \mathcal{B} , c'est-à-dire identifier les formes linéaires sur \mathbb{R}^2 , notées v_1^* et v_2^* , telles que :

$$v_1^*(v_1) = 1, \quad v_1^*(v_2) = 0, \quad v_2^*(v_1) = 0, \quad v_2^*(v_2) = 1$$

On écrit ces applications sous la forme :

$$v_1^*(x, y) = ax + by \quad \text{et} \quad v_2^*(x, y) = cx + dy.$$

Il s'agit donc de déterminer les réels a, b, c, d .

Les relations précédentes impliquent :

$$\begin{cases} v_1^*(v_1) = v_1^*(2, 1) = 2a + b = 1 \\ v_1^*(v_2) = v_1^*(3, 1) = 3a + b = 0 \end{cases}$$

d'où $a = -1$ et $b = 3$. Puis :

$$\begin{cases} v_2^*(v_1) = v_2^*(2, 1) = 2c + d = 1 \\ v_2^*(v_2) = v_2^*(3, 1) = 3c + d = 0 \end{cases}$$

d'où $c = 1$ et $d = -2$.

La base duale est donc :

$$\mathcal{B}^* = \{v_1^* : (x, y) \mapsto -x + 3y ; v_2^* : (x, y) \mapsto x - 2y\}$$

1.6.2 Image et noyau d'une application linéaire

Définition 1.6.4 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) On appelle image de f l'ensemble

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x) \in F : x \in E\}.$$

2) On appelle noyau de f l'ensemble

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$$

Propriétés 1.6.1 (Devoir maison) Soit f une application linéaire de E dans F .

1) $f(0_E) = 0_F$.

2) $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.

3) l'image d'un sous espace vectoriel est un sous espace vectoriel.

4) $\text{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de F .

5) l'image réciproque d'un sous espace vectoriel est un sous espace vectoriel.

6) $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E .

7) f est injective si et seulement $\ker(f) = \{0_E\}$.

8) f est surjective si et seulement $\text{Im}(f) = F$.

9) Le composé de deux applications linéaires est linéaire.

Démonstration. 1) Soit $x \in E$. Alors $f(x) = f(x + 0_E) = f(x) + f(0_E) \implies f(0_E) = f(x) - f(x) = 0_F$.

2) Soit $x \in E$. Alors $f(x) = f(x) + 0_F = f(x) + [f(-x) + (-f(-x))]$ et comme $+$ est associative alors

$$\begin{aligned} f(x) &= [f(x) + f(-x)] + (-f(-x)) \\ &= f(x - x) - f(-x) \\ &= f(0_E) - f(-x) \\ &= 0_F - f(-x) \\ &= -f(-x). \end{aligned}$$

3) soit H un s.e.v. de E on démontre que $f(H)$ est un s.e.v de F

soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, et soient $z, t \in f(H) : \alpha z + \beta t \in f(H)$

($z \in f(H) \implies \exists x \in H : z = f(x)$) et ($t \in f(H) \implies \exists x' \in H : t = f(x')$). Alors $\alpha z + \beta t = \alpha f(x) + \beta f(x') = f(\alpha x + \beta x')$ et comme H un s.e.v de E donc $\alpha x + \beta x' \in H$ implique que $\alpha z + \beta t \in f(H)$. ■

1.6.3 Application linéaire en dimension finie

Théorème 1.6.2 Si E et F sont des dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \dim(F)$.

Corollaire 1.6.1 Si E de dimension finie, alors E^* est de dimension finie et

$$\dim(E^*) = \dim(E).$$

Démonstration. on a $\dim(E)$ est finie et $\dim(\mathbb{K}) = 1$, alors

$$\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E) \dim(\mathbb{K}) = \dim(E).$$

■

Théorème 1.6.3 (dimension) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie alors $f(E) = \text{Im}(f)$ est de dimension finie et

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

Démonstration. Posons $\dim(E) = n$ et $\dim(\ker(f)) = r$. Montrons alors que $\dim(\text{Im}(f)) = n - r$.

Soit $\{w_1, \dots, w_r\}$ une base de $\ker(f)$ et $\{v_1, \dots, v_{n-r}\}$ une famille de vecteurs de E telle que $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_{n-r}\}$ soit une base de E .

On pose $\mathcal{B} = \{f(v_1), \dots, f(v_{n-r})\}$. Montrons que \mathcal{B} est une base de $\text{Im}(f)$.

- Montrons que \mathcal{B} engendre $\text{Im}(f)$.

Soit $y = f(x) \in \text{Im}(f)$. x s'écrit (de manière unique) $x = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_1 v_1 + \dots + b_{n-r} v_{n-r}$. En utilisant la linéarité de f et le fait que les w_i appartiennent à $\ker(f)$, on obtient que y est combinaison linéaire des $f(v_i)$ donc \mathcal{B} engendre $\text{Im}(f)$.

- Montrons que \mathcal{B} est une famille libre de F .

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_{n-r} f(v_{n-r}) = 0$. Par linéarité de f , on en déduit que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-r} v_{n-r} \in \ker(f)$ donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-r} v_{n-r} = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r$. Comme la famille $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_{n-r}\}$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$ et \mathcal{B} est libre. ■

Corollaire 1.6.2 Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\dim(E) = \dim(F)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes

- f est injective
- f est surjective
- f est bijective.

Démonstration. Si f est bijective, alors elle est injective. On a alors $\ker(f) = \{0\}$ et, d'après le théorème du dimension, $\dim(E) = \dim(\text{Im}(f))$. Comme $\text{Im}(f) \subset F$ et que $\dim(E) = \dim(F)$, on en déduit que $\text{Im}(f) = F$ et f est surjective. De même, si f est

surjective, alors $\dim(E) = \dim(\text{Im}(f))$ donc $\dim(\ker(f)) = 0$ et $\ker(f) = \{0\}$, ce qui veut dire que f est injective. Comme on l'a supposé surjective, on a montré qu'elle est bijective.

■

Corollaire 1.6.3 *Si $f \in \mathcal{L}(E)$. On les équivalences suivantes :*

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = E$$

Définition 1.6.5 (rang) *i) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit le rang de f par*

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

ii) Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors le rang de A est le rang de l'application f associée à la matrice A , noté par

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f).$$

Propriétés 1.6.2 (Propriétés de rang) *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$, alors*

- 1) $\text{rg}(f) \leq \min(n, p)$.
- 2) $(\text{rg}(f) = n) \Leftrightarrow (f \text{ est injective})$.
- 3) $(\text{rg}(f) = p) \Leftrightarrow (f \text{ est surjective})$.
- 4) $(\text{rg}(f) = n = p) \Leftrightarrow (f \text{ est isomorphisme})$.

Théorème 1.6.4 *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ est une application linéaire associée à la matrice A . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- 1) f est bijective.
- 2) A est inversible.
- 3) $\text{rg}(A) = n$.
- 4) les vecteurs colonnes de A , considérés comme vecteurs de \mathbb{K}^n , sont linéairement indépendants.

Proposition 1.6.1 *Si E de dimension finie, alors E^{**} est isomorphe à E .*

*Ceci veut dire que l'on peut construire un isomorphisme de E sur E^{**} sans faire appel à des choix de bases*

Démonstration. Soit l'application

$$\begin{aligned}\varphi: E &\rightarrow E^{**} \\ x &\mapsto \varphi(x) = \varphi_x\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\varphi: E^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto \varphi_x(f) = f(x).\end{aligned}$$

Montrons d'abord que l'on a bien $\varphi_x \in E^{**}$, c'est-à-dire que $\varphi_x \in \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$.

On a, pour f_1, f_2 dans E^* :

$$\varphi_x(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi_x(f_1) + \varphi_x(f_2)$$

et, si $f \in E^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\varphi_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi_x(f).$$

Donc $\varphi_x \in E^{**}$.

Montrons maintenant que φ est linéaire.

Soient $x, y \in E$ et $f \in E^*$, on a

$$\varphi_{x+y}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \varphi_x(f) + \varphi_y(f)$$

donc $\varphi_{x+y} = \varphi_x + \varphi_y$. De même, si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour $f \in E^*$

$$\varphi_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi_x(f)$$

c'est-à-dire que $\varphi_{\lambda x} = \lambda \varphi_x$. L'application φ est donc linéaire.

Il reste à montrer que φ est bijective. Comme $\dim(E^*) = \dim(E)$, il suffit de montrer qu'elle est injective. Soit $x \in E$ tel que $\varphi_x = 0$. Alors, pour $f \in E^*$, $\varphi_x(f) = 0$. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ la base duale. On a $\varphi_x(e_i^*) = 0$ c'est-à-dire $e_i^*(x) = 0$. Or, par définition d'une base duale, on a, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $e_i^*(x) = x_i$ où x_i est la i -ème composante de x dans la base $\{e_i\}$. On en déduit que $x = 0$ et φ est injective. ■

Remarque 1.6.2 *En dimension infinie, on peut montrer que φ est injectif, mais il n'est pas nécessairement surjectif. Donc, si la dimension est infinie, E n'est en général pas isomorphe à E^{**} , mais uniquement à son image par φ .*

1.6.4 Orthogonalité

Définition 1.6.6 Des éléments $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dit orthogonaux si $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle = 0$.

- Si $F \subset E$, on note $F^\perp = \{\varphi \in E^* : \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$. L'ensemble F^\perp est un s.e.v de E^* appelé orthogonal de F .
- Si $G \subset E$, on note $G^\circ = \{x \in E : \forall \varphi \in G, \varphi(x) = 0\}$. L'ensemble G° est un s.e.v de E appelé orthogonal de G .

Proposition 1.6.2 (Exercice)

- i) Si $F_1 \subset F_2 \subset E$, alors $F_2^\perp \subset F_1^\perp$.
- ii) Si $G_1 \subset G_2 \subset E^*$, alors $G_2^\circ \subset G_1^\circ$.
- iii) Si $F \subset E$, alors $F^\perp = (\text{Vect}(F))^\perp$.
- iv) Si $G \subset E^*$, alors $G^\circ = (\text{Vect}(G))^\circ$.

Démonstration. (i) Supposons que $F_1 \subset F_2$. Soit $g \in F_2^\perp$. Alors, pour tout $x \in F_2$, $g(x) = 0$. Or $F_1 \subset F_2$, donc pour tout $x \in F_1$, $g(x) = 0$. On en déduit que $g \in F_1^\perp$.

(ii) Supposons que $G_1 \subset G_2$. Soit $x \in G_2^\circ$. Alors, pour tout $g \in G_2$, $g(x) = 0$. Or $G_1 \subset G_2$, donc pour tout $g \in G_1$, $g(x) = 0$. On en déduit que $x \in G_1^\circ$.

(iii) On a $F \subset \text{Vect}(F)$ alors $(\text{Vect}(F))^\perp \subset F^\perp$. Soit $g \in F^\perp$, alors, pour tout $x \in F$, $g(x) = 0$. Soit $y \in \text{Vect}(F)$ alors $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ tel que $\lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in F$, donc $g(y) = g(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i g(x_i) = 0$. On en déduit que $g \in (\text{Vect}(F))^\perp$.

(iv) On a $G \subset \text{Vect}(G)$ alors $(\text{Vect}(G))^\circ \subset G^\circ$. Soit $x \in G^\circ$, alors, pour tout $f \in G$, $f(x) = 0$. Soit $g \in \text{Vect}(G)$ alors $g = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^*$ tel que $\lambda_i \in \mathbb{K}, x_i^* \in G$, donc $g(x) = (\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^*)(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^*(x) = 0$. On en déduit que $x \in (\text{Vect}(G))^\circ$. ■

Théorème 1.6.5 Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie. Alors :

- i) Si F est un s.e.v de E , $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $(F^\perp)^\circ = F$.
- ii) Si G est un s.e.v de E^* , $\dim(G) + \dim(G^\circ) = \dim(E)$ et $(G^\circ)^\perp = G$.

Démonstration. (i) Soit $r = \dim(F)$ et $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de F , que nous complétons en une base $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$ de E . On a $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ donc d'après la proposition précédente, $F^\perp = \{e_1, \dots, e_r\}^\perp$. Soit $\varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$. Alors

$$\left(\varphi \in \{e_1, \dots, e_r\}^\perp \right) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad 0 = \varphi(e_i) = \lambda_i).$$

Ainsi, $\varphi \in F^\perp$ si et seulement si $\varphi \in \text{Vect}(e_{r+1}^*, \dots, e_n^*)$ d'où la première égalité de (i).

Maintenant, toujours d'après la proposition précédente, on a $(F^\perp)^\circ = \{e_{r+1}^*, \dots, e_n^*\}^\circ$.

Donc

$$\left(x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in (F^\perp)^\circ \right) \Leftrightarrow (\forall i \in \{r+1, \dots, n\}, \quad 0 = e_i^*(x) = \alpha_i),$$

ce qui prouve $(F^\perp)^\circ = F$.

(ii) Soit $r = \dim(G)$ et $\{w_1, \dots, w_r\}$ une base de G , complétée en une base $\{w_1, \dots, w_n\}$ de E^* .

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base duale de cette dernière, de sorte que $\forall i, w_i = e_i^*$. On a $G = \text{Vect}(e_1^*, \dots, e_r^*)$ et en procédant comme plus haut, on trouve $G^\circ = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ et $(G^\circ)^\perp = \text{Vect}(e_1^*, \dots, e_r^*) = G$. ■

Proposition 1.6.3 Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie et F_1, F_2 deux s.e.v de E . Alors

i) $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

ii) $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.

Soient G_1, G_2 deux s.e.v de E^* . Alors

iii) $(G_1 + G_2)^\circ = G_1^\circ \cap G_2^\circ$.

iv) $(G_1 \cap G_2)^\circ = G_1^\circ + G_2^\circ$.

Démonstration. La preuve est simple. Pour montrer chaque assertion, on montre une inclusion triviale puis l'égalité des dimensions grâce au théorème 1.6.5. ■

1.7 Transposée d'une application linéaire

Théorème et définition 1.7.1 (application transposée) Soient E et F deux \mathbb{K} espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit :

$$\begin{aligned} f^t : F^* &\longrightarrow E^* \\ y^* &\longmapsto f^t(y^*) = y^* \circ f \end{aligned}$$

f^t est linéaire et est appelée application transposée de f .

Démonstration. Soit $y^* \in F^* = \mathcal{L}(F, \mathbb{K})$. Comme $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $y^* \circ f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, c'est-à-dire $f^t(y^*) \in E^*$.

Soient $y_1^*, y_2^* \in F^*$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f^t(\lambda_1 y_1^* + \lambda_2 y_2^*) &= (\lambda_1 y_1^* + \lambda_2 y_2^*) \circ f \\ &= (\lambda_1 y_1^*) \circ f + (\lambda_2 y_2^*) \circ f \\ &= \lambda_1 (y_1^* \circ f) + \lambda_2 (y_2^* \circ f) \\ &= \lambda_1 f^t(y_1^*) + \lambda_2 f^t(y_2^*). \end{aligned}$$

Donc $f^t \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$. ■

Théorème et définition 1.7.2 (transposition) L'application $f \mapsto f^t$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F^*, E^*)$. On l'appelle transposition.

Démonstration. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $y^* \in F^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)^t(y^*) &= y^* \circ (\lambda f + g) \\ &= y^* \circ (\lambda f) + y^* \circ g \\ &= \lambda (y^* \circ f) + y^* \circ g \\ &= \lambda f^t(y^*) + g^t(y^*) \\ &= (\lambda f^t + g^t)(y^*). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.7.1 Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v. Si E et F sont de dimension finie, on a

$$i) \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^t)$$

$$ii) \operatorname{im}(f^t) = (\ker(f))^\perp,$$

et en dimension quelconque

$$iii) \ker(f^t) = (\operatorname{Im}(f))^\perp.$$

Démonstration. (i) Voir le théorème suivant.

(ii) Soit $h \in \operatorname{Im}(f^t)$. Il existe $y^* \in F^*$ tel que $h = y^* \circ f$, donc pour tout $x \in \ker(f)$, $h(x) = 0$, et donc $h \in (\ker(f))^\perp$. On vient donc de montrer que $\operatorname{Im}(f^t) \subset (\ker(f))^\perp$. Or $\dim(\operatorname{Im}(f^t)) = \operatorname{rg}(f^t) = \operatorname{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = \dim((\ker(f))^\perp)$, d'où (ii).

(iii) Il suffit de remarquer que

$$(g \in \ker(f^t)) \Leftrightarrow (g \circ f = 0) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(f) \subset \ker(g)) \Leftrightarrow (g \in (\operatorname{Im}(f))^\perp).$$

■

Théorème 1.7.1 Si \mathcal{B} est une base de E , \mathcal{B}' une base de F , et \mathcal{B}^* , \mathcal{B}'^* les bases duales, alors

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'^*}(f) = \left(M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}'}(f^t) \right)^t.$$

En d'autres termes, la matrice dans les bases duales de \mathcal{B} et \mathcal{B}' de f est la transposée de la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

Notamment si f est un endomorphisme, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left(M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^t) \right)^t$. Ainsi, si P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} , celle de \mathcal{B}^* à \mathcal{C}^* est $(P^t)^{-1}$. Donc $M_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{C}}(f) = \left(P^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) P \right)^t$.

Ce théorème permet de calculer facilement la base duale d'une base de E .

Exercice 1.7.1 Soit E un \mathbb{R} -e.v de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E . Soit $w_1^*, w_2^*, w_3^* \in E^*$ définis par

$$w_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, \quad w_2^* = -e_1^* + 2e_3^*, \quad w_3^* = e_1^* + 3e_2^*.$$

Montrer que $\{w_1^*, w_2^*, w_3^*\}$ est une base de E^* et calculer la base $\{w_1, w_2, w_3\}$ (en l'exprimant dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$) de E dont elle est la duale.

Solution 1.7.1 Les colonnes de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

sont les coordonnées des w_i^* dans la base $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$. Pour montrer que $\{w_1^*, w_2^*, w_3^*\}$ est une base de E^* , il faut montrer que $\det(M) \neq 0$, comme $\det(M) = -13 \neq 0$, alors $\{w_1^*, w_2^*, w_3^*\}$ est donc bien une base de E^* .

On a vu (voir le théorème 1.7.1) que la matrice M de passage de $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ à $\{w_1^*, w_2^*, w_3^*\}$ est $(P^t)^{-1}$, P étant la matrice de passage de $\{e_1, e_2, e_3\}$ à $\{w_1, w_2, w_3\}$. Donc $M = (P^t)^{-1}$, ce qui entraîne $P = (M^{-1})^t$. On calcule facilement $(M^{-1})^t$ on trouve

$$P = (M^{-1})^t = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $\{w_1, w_2, w_3\}$ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ sont les vecteurs colonnes de $P = (M^{-1})^t$.

Propriétés 1.7.1 Soient E, F et G des \mathbb{K} espaces vectoriels.

- i) Pour tous $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a $(g \circ f)^t = f^t \circ g^t$.
- ii) $(Id_E)^t = Id_{E^*}$ (dans le cas $E = F$).
- iii) Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, alors f^t est bijective et $(f^{-1})^t = (f^t)^{-1}$.

Démonstration. i) Soit $z^* \in G^*$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)^t(z^*) &= z^* \circ (g \circ f) \\ &= (z^* \circ g) \circ f \\ &= g^t(z^*) \circ f \\ &= f^t(g^t(z^*)) \\ &= (f^t \circ g^t)(z^*). \end{aligned}$$

ii) Soit $x^* \in E^*$.

$$\begin{aligned} (Id_E)^t(x^*) &= x^* \circ Id_E \\ &= x^* \\ &= Id_{E^*}(x^*) \end{aligned}$$

iii) On suppose f est bijective.

$f \circ f^{-1} = Id_E$ donc $(f \circ f^{-1})^t = (Id_E)^t$. Or $(f \circ f^{-1})^t = (f^{-1})^t \circ f^t$ et $(Id_E)^t = Id_{E^*}$ donc $(f^{-1})^t \circ f^t = Id_{E^*}$.

On montre de même que $f^t \circ (f^{-1})^t = Id_{E^*}$. Par conséquent, f^t est bijective et $(f^{-1})^t = (f^t)^{-1}$. ■

1.8 Série d'exercices avec solution

Exercice 01. Soient E un \mathbb{K} -e.v. Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base de E , alors pour tous scalaires $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$, la partie $\mathcal{B}' = \{\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n\}$ est aussi une base de E .

Exercice 02.1) Soit $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ un sous ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Montrer que V est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension.
- Trouver le sous espace vectoriel U tel que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$.

2) Soit φ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi(M) = AM - MA, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).
- Déterminer une base de son noyau $\ker(\varphi)$.
- Déterminer la matrice A associée à φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 03. Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n et f une application linéaire de E dans E . Montrer que

$$(rg(f) = n) \iff (f \text{ est bijective})$$

Solution: On a $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$ et $rg(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

(\Rightarrow) 1) Supposons que $rg(f) = n$, alors $\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = n - n = 0$, donc $\ker(f) = \{0_E\}$, alors f est injective.

2) Pour démontrer que f est surjective, on a $rg(f) = \dim(\text{Im}(f)) = n$ et comme $\text{Im}(f)$ est un s.e.v de E , alors $\text{Im}(f) = E$. Donc f est surjective. de (1) et (2) on a f est bijective.

(\Leftarrow) Supposons que f est bijective, alors $\text{Im}(f) = E$, donc $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) = n = rg(f)$.

Exercice 04. Soient f et g deux applications linéaires d'un espace vectoriel E dans E de dimension finie n tels que $f \circ g = 0$.

1°) Montrer que $\text{Im}(g) \subset \ker(f)$.

2°) En déduire que $rg(g) + rg(f) \leq n$.

Solution: 1) $\text{Im}(g) \subset \ker(f)$? Soit $y \in \text{Im}(g) \Rightarrow \exists x \in E, g(x) = y$, alors $f(g(x)) = (f \circ g)(x) = 0 = f(y)$, donc $y \in \ker(f)$.

2) On a $rg(g) = \dim(\text{Im}(g)) \leq \dim(\ker(f)) = \dim(E) - rg(f) \Rightarrow rg(g) + rg(f) \leq n$.

Exercice 05. Montrer qu'une forme linéaire φ sur E non identiquement nulle est surjective.

Solution: Soit $x_0 \in E, \varphi(x_0) = \lambda \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{K}$ on pose $x = \frac{y}{\lambda}x_0$, alors

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{y}{\lambda}x_0\right) = \frac{y}{\lambda}\varphi(x_0) = y.$$

Exercice 06. 1) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie et muni d'une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Montrer que $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ d'éléments de E^* définie par

$$v_j^*(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

est une base de E^* .

2) Soit $E = \mathbb{R}^2$ un \mathbb{R} .e.v et $\mathcal{B} = \{v_1 = (2, 1), v_2 = (3, 1)\}$ une base de E . Déterminer la base \mathcal{B}^* de E^*

Exercice 07. Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base de E . Montrer que:

- 1) (f est surjective) \Leftrightarrow $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est une génératrice de F
- 2) (f est injective) \Leftrightarrow $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est libre
- 3) (f est bijective) \Leftrightarrow $\mathcal{B}' = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est une base de F

Solution: \Rightarrow) Supposons que f est surjective, pour tout $w \in F$, $\exists v \in E$, tel que $f(v) = w$. Comme \mathcal{B} est une base de E , alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tel que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, donc $f(v) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i) = w$. Alors $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est une génératrice de F (\Leftarrow) Supposons que $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est une génératrice de F , alors pour tout $w \in F$ il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tel que $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i)$, on pose $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Donc f est surjective.

2)(\Rightarrow) Supposons que f est injective ($\forall v, v' \in E$, si $f(v) = f(v')$ alors $v = v'$).

$\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0_F \stackrel{?}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

Comme f est linéaire on a $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = 0_F = f(0_E)$. Or f est injective, alors $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$ car $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est libre. On obtient $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est libre.

(\Leftarrow) Supposons que $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est libre. Soit $v \in \ker(f) = \{v \in E : f(v) = 0_F\}$, comme \mathcal{B} est une base de E , alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tel que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, alors $f(v) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i) = 0$, mais $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est libre, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, alors $\ker(f) = \{0_E\}$. Donc f est injective.

Chapitre 2

Les applications Multilinéaires

2.1 Définitions

Définition 2.1.1 Soit $p \in \mathbb{N} \geq 2$. Soient E_1, E_2, \dots, E_p et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels; une application

$$f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \rightarrow F$$

est dite p -linéaire ou multilinéaire (si $p = 2$, on dit bilinéaire) si elle est linéaire par rapport à chacune des variables (les autres variables étant fixées), c.-à-d., si pour tout $i = 1, \dots, p$, on a :

$$f(X_1, X_2, \dots, t_i \cdot X_i + X'_i, \dots, X_p) = t_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_p) + f(X_1, X_2, \dots, X'_i, \dots, X_p)$$

où chaque X_i est dans E_i (et $X'_i \in E_i$), et $t_i \in \mathbb{K}$.

Exemple 2.1.1 1) L'application $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(X, Y, Z) = (x_1 y_2 z_2, x_2 y_1 z_1),$$

est une application 3 linéaire.

2) Soient $E_i = \mathbb{K}$, pour $\forall i = 1, \dots, p$, $F = \mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}$.

L'application $\varphi : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^p x_i$$

est une forme p linéaire.

En effet, pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, l'application partielle

$$x_i \longmapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

est linéaire car de la forme $x_i \longmapsto ax_i$.

Notation 2.1.1 1) On notera $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_p; F)$ l'ensemble des applications p linéaire, et si tous les E_i sont égaux à un même espace E , on le notera simplement $\mathcal{L}_p(E; F)$.

2) Lorsque l'espace d'arrivée F est le corps \mathbb{K} , l'ensemble $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_p; \mathbb{K})$ s'appelle l'ensemble des forme p -linéaire sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$.

Proposition 2.1.1 1) L'ensemble $(\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_p; F), +, \cdot)$ muni des lois induites

$$\begin{aligned} \forall X_i \in E_i, \quad (f + g)(X_1, X_2, \dots, X_p) &= f(X_1, X_2, \dots, X_p) + g(X_1, X_2, \dots, X_p), \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall X_i \in E_i, \quad (\lambda \cdot f)(X_1, X_2, \dots, X_p) &= \lambda \cdot f(X_1, X_2, \dots, X_p), \end{aligned}$$

est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

2) Si chacun des E_i est de dimension finie n_i et si F est de dimension k , alors $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_p; F)$ est de dimension finie et on a

$$\dim(\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_p; F)) = k \times n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$$

Remarque 2.1.1 Si $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_p; F)$ et on a $X_i = 0$, alors $f(X_1, X_2, \dots, X_p) = 0$.

2.1.1 Groupes symétriques: quelques propriétés

On note $S(E)$ (ou parfois $\mathcal{G}(E)$) l'ensemble des bijections de E sur lui même.

Théorème 2.1.1 (Devoir maison) $S(E)$ est un groupe pour la composition des applications.

Définition 2.1.2 Le groupe $S(E)$ est appelé groupe des permutations de E .

Remarque 2.1.2 Dans le cas où E est réduit à un élément, on peut quand même définir $S(E)$ et il est réduit à $\{Id_E\}$.

Définition 2.1.3 (Groupe symétrique S_n) Pour $E = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, on note S_n le groupe $S(E)$ et on l'appelle groupe symétrique à n éléments, et il est de cardinal $n!$, car une permutation σ est déterminée par la donnée de $\sigma(1)$, pour lequel il y a n choix, puis de $\sigma(2)$, pour lequel il reste $n - 1$ choix, etc.

Notation 2.1.2 On représente en général un élément σ de S_n par son écriture «à deux lignes» sur la première ligne, on écrit $1, 2, 3, \dots, n$, dans cet ordre, et sur la seconde on écrit les nombres $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n)$. Ainsi, par exemple,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{pmatrix}$$

Exemple 2.1.2 1) désignent les éléments de S_4 tels que $\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 1$ et, respectivement, $\tau(1) = 3, \tau(2) = 2, \tau(3) = 1, \tau(4) = 4$.

2) désignent les éléments de $\sigma \circ \tau$ et $\tau \circ \sigma$.

3) désignent les éléments de σ^{-1}

Solution 2.1.1 1)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{aligned} \sigma \circ \tau &= \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) & \sigma(\tau(4)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(3) & \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \circ \sigma &= \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \tau(\sigma(3)) & \tau(\sigma(4)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \tau(4) & \tau(3) & \tau(2) & \tau(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3)

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma$$

Support et orbites d'une permutation

Définition 2.1.4 *Le support d'une permutation $\sigma \in S(E)$ est le complémentaire dans E de l'ensemble de ses points fixes, soit l'ensemble :*

$$\text{Supp}(\sigma) = \{x \in E : \sigma(x) \neq x\}$$

Remarque 2.1.3 *Id_E est l'unique permutation de support vide.*

Théorème 2.1.2 *Soient σ, τ dans $S(E)$.*

- 1) $\sigma(\text{Supp}(\sigma)) = \text{Supp}(\sigma)$
- 2) $\text{Supp}(\sigma) = \text{Supp}(\sigma^{-1})$
- 3) Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a $\text{Supp}(\sigma^r) \subset \text{Supp}(\sigma)$
- 4) Si $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = \Phi$ alors $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$

Démonstration. 1) Soit $x \in \text{Supp}(\sigma)$, alors $\sigma(x) \neq x$. Comme σ est injective, on déduit que $\sigma(\sigma(x)) \neq \sigma(x)$ et $\sigma(x) \in \text{Supp}(\sigma)$. On a donc $\sigma(\text{Supp}(\sigma)) \subset \text{Supp}(\sigma)$ (dans le cas où E est fini, on a l'égalité puisque ces ensembles ont le même nombre d'éléments). Comme σ est surjective, tout $x \in \text{Supp}(\sigma)$ s'écrit $x = \sigma(x')$ et $\sigma(x) = \sigma(\sigma(x')) \neq x = \sigma(x')$ impose $\sigma(x') \neq x'$, donc $x' \in \text{Supp}(\sigma)$ et $x = \sigma(x') \in \sigma(\text{Supp}(\sigma))$. On a donc $\text{Supp}(\sigma) \subset \sigma(\text{Supp}(\sigma))$ et $\sigma(\text{Supp}(\sigma)) = \text{Supp}(\sigma)$.

2) De $\sigma(x) = x$ équivalent à $x = \sigma^{-1}(x)$, on déduit que $x \in \text{Supp}(\sigma)$ si, et seulement si, $x \in \text{Supp}(\sigma^{-1})$ et donc $\text{Supp}(\sigma) = \text{Supp}(\sigma^{-1})$.

3) Soit $x \notin \text{Supp}(\sigma) \Rightarrow \sigma(x) = x \Rightarrow \sigma^r(x) = x$ donc $x \notin \text{Supp}(\sigma^r)$, alors $\text{Supp}(\sigma^r) \subset \text{Supp}(\sigma)$.

4) Soient σ, τ telles que $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = \Phi$ et $x \in E$.

Si $\sigma(x) = x = \tau(x)$, on a alors $\tau \circ \sigma(x) = \tau(x) = x = \sigma(x) = \sigma \circ \tau(x)$.

Si $x \in \text{Supp}(\sigma)$, alors $x \notin \text{Supp}(\tau)$ et $\tau(x) = x$, donc $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(x)$. Mais on a aussi $\sigma(x) \in \text{Supp}(\sigma)$, donc $\sigma(x) \notin \text{Supp}(\tau)$ et $\tau \circ \sigma(x) = \sigma(x) = \sigma \circ \tau(x)$.

De manière analogue, on vérifie que $\tau \circ \sigma(x) = \tau(x) = \sigma \circ \tau(x)$ pour tout $x \in \text{Supp}(\tau)$ (on permute les rôles de σ et τ). On a donc $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. ■

Définition 2.1.5 *Le fixe d'une permutation $\sigma \in S(E)$ est l'ensemble :*

$$\text{Fix}(\sigma) = \{x \in E : \sigma(x) = x\}$$

Exemple 2.1.3 *Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ alors $\text{Supp}(\sigma) = \{1, 3, 4, 5\}$ et $\text{Fix}(\sigma) = \{2\}$.*

Définition 2.1.6 *Soit $\sigma \in S_n$. On dit que σ est une cycle d'ordre r si $\text{Supp}(\sigma) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ et $2 \leq r \leq n$ telle que :*

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, 2, \dots, r-1\}, \sigma(x_k) = x_{k+1} \\ \sigma(x_r) = x_1 \\ \forall x \in E \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_r\}, \sigma(x) = x \end{cases}$$

On notera :

$$\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_r).$$

Remarque 2.1.4 *Si $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ est un r -cycle, on a alors pour tout entier k compris entre 1 et r :*

$$x_k = \sigma^{k-1}(x_1).$$

En effet, c'est vrai pour $k = 1$ et supposant le résultat acquis pour $1 \leq k-1 \leq r-1$, on a :

$$x_k = \sigma(x_{k-1}) = \sigma(\sigma^{k-2}(x_1)) = \sigma^{k-1}(x_1).$$

Exemple 2.1.4 1) *Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (17324)$ et $\text{Supp}(\sigma) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, alors σ est une 5-cycle;*

2) *Soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (152)(346)$ et $\text{Supp}(\tau) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, alors τ n'est pas une cycle.*

Remarque 2.1.5 1) *Les r permutations circulaires :*

$$\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_r), \sigma = (x_2, x_3, \dots, x_r, x_1), \sigma = (x_r, x_1, \dots, x_{r-1})$$

définissent le même r -cycle.

2) *L'inverse d'un r -cycle est un r -cycle de même support. Précisément, on a :*

$$(x_1, x_2, \dots, x_r)^{-1} = (x_1, x_r, x_{r-1}, \dots, x_2)$$

Définition 2.1.7 On appelle *transposition*, une cycle d'ordre 2.

Théorème 2.1.3 (Décomposition en produit de cycles de supports disjoints) Soit $\sigma \in S_n$. Alors il existe des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$ de supports disjoints, tels que $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_d$. Cette décomposition est unique.

Exemple 2.1.5 Soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (152)(346) = \sigma_1 \cdot \sigma_2$.

Remarque 2.1.6 Si $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_r)$ une r -cycle. Alors σ est une produit de $r - 1$ transpositions tels que

$$\sigma = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdot \dots \cdot (i_{r-1} i_r).$$

Exemple 2.1.6 Soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (152)(346) = (15)(52)(34)(46)$.

Définition 2.1.8 (Inversion et signature d'une permutation) Soit $\sigma \in S_n$.

1. On dit qu'un couple (i, j) avec $i < j$ est une *inversion* de σ si $\sigma(i) > \sigma(j)$; on introduit le nombre d'inversions de σ :

$$\ell(\sigma) = |\{(i, j) : i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}|.$$

2. On définit la *signature* de σ par :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}.$$

Exemple 2.1.7 Soit

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

alors

$$\ell(\tau) = |\{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}| = 8$$

et

$$\varepsilon(\tau) = (-1)^{\ell(\tau)} = 1.$$

Définition 2.1.9 On dit qu'une permutation $\sigma \in S_n$ est paire, resp. impaire, si $\varepsilon(\sigma) = 1$, resp. $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Proposition 2.1.2 (Signature d'un cycle) Tout r -cycle est de signature $(-1)^{r-1}$.

Lemme 2.1.1 Pour toute permutation $\sigma \in S_n$ et toute transposition $\tau \in S_n$, on a :

$$\varepsilon(\tau\sigma) = -1\varepsilon(\sigma).$$

Théorème 2.1.4 Si $\sigma \in S_n$ est produit de p transpositions, on a alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$

Exercice 2.1.1 Déterminer la signature de :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Solution: On a : $\sigma = (15432)(67)$ et $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{5-1}(-1) = -1$.

On peut aussi écrire σ comme produit de transpositions : $\sigma = (15)(54)(43)(32)(67)$ et $\varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$.

2.1.2 Applications multilinéaires alternées et antisymétriques

Définition 2.1.10 (et proposition) Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_p(E, F)$.

1) On dit que f est alternée si elle vérifie :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0 \text{ si } x_1, x_2, \dots, x_p \text{ ne sont pas tous distincts.}$$

2) On dit que f est antisymétrique si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

2.1)

$$\forall i \neq j, \quad f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

2.2)

$$\forall \sigma \in S_p, \quad f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_p)$$

3) Si f est alternée, elle est antisymétrique.

4) L'ensemble des applications p -linéaires alternées $f : E^p \rightarrow F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_p(E, F)$, on le notera $\mathcal{A}_p(E, F)$.

2.2 Les formes bilinéaires et quadratiques

2.2.1 Les formes bilinéaires

Définition 2.2.1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} . f est une **forme bilinéaire** sur $E \times F$ si f est une application de $E \times F$ dans \mathbb{K} est linéaire " par rapport à chacune des variables", ce qui signifie:

Pour tous u, u' de E et v, v' de F et tout λ de \mathbb{K} on a:

$$\begin{aligned} 1) \forall u, u' \in E, \forall v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \quad f(u + \lambda u', v) = f(u, v) + \lambda f(u', v), \\ 2) \forall u \in E, \forall v, v' \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \quad f(u, v + \lambda v') = f(u, v) + \lambda f(u, v'). \end{aligned}$$

Exemple 2.2.1 1) Si $E = F = \mathbb{R}$. La multiplication $(x, y) \rightarrow xy$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2) Si $E = F = \mathbb{R}^n$. L'application

$$\begin{aligned} f : E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto f(X, Y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire.

3) $E = F = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. L'application

$$\begin{aligned} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire sur $E \times E$.

4) Soit A une matrice $n \times n$ sur \mathbb{K} . L'application $f(X, Y) = X^t A Y$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$.

5) L'application f défini sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} par

$$f(A, A') = \text{tr}(A \cdot A')$$

est une forme bilinéaire sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$.

Remarque 2.2.1 Si f est une forme bilinéaire sur $E \times E$, alors $\forall u \in E, f(u, 0) = f(0, u) = 0$.

Notation 2.2.1 • L'ensemble $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$ muni des lois induites $(\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

- On note par $\text{Bil}(E) = \mathcal{L}_2(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times E$.

Définition 2.2.2 (Formes bilinéaires symétrique) Une forme bilinéaire f sur un espace vectoriel $E \times E$ est dite **symétrique** si, pour tous u et v de E , on a

$$f(u, v) = f(v, u).$$

Exemple 2.2.2 1) Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E . Pour tous X et Y de E , il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que:

$$X = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

Donnons-nous n nombres réels fixes a_1, a_2, \dots, a_n . L'application f de E^2 dans \mathbb{R} définie par:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$$

est bilinéaire symétrique.

2) Si $\ell_1, \ell_2 \in E^*$, alors l'application

$$f(u, v) = \frac{1}{2} (\ell_1(u)\ell_2(v) + \ell_2(u)\ell_1(v))$$

est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$.

Définition 2.2.3 (Formes bilinéaires symétrique positives) Une forme bilinéaire symétrique f sur un espace vectoriel $E \times E$ est dite **positive** si, pour tout u de E on a:

$$f(u, u) \geq 0.$$

Définition 2.2.4 (Formes bilinéaires symétrique définie positives) Une forme bilinéaire symétrique f sur un espace vectoriel $E \times E$ est dite **définie positive** si, pour tout u de $E - \{0\}$ on a:

$$f(u, u) > 0.$$

Remarque 2.2.2 f est définie positive si, et seulement si, elle est positive et si $\forall u \in E$, $f(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Définition 2.2.5 (Formes bilinéaires antisymétrique) Une forme bilinéaire f sur un espace vectoriel $E \times E$ est dite **antisymétrique** si, pour tous u et v de E , on a

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad f(u, v) = -f(v, u).$$

Définition 2.2.6 (Formes bilinéaire alterne) Une forme bilinéaire f sur $E \times E$ est dite **alterne** si

$$\forall u \in E \quad f(u, u) = 0.$$

Théorème 2.2.1 Soit f une forme bilinéaire sur $E \times E$. Alors on a :

- 1) $(f \text{ est alterne}) \iff (f \text{ est antisymétrique})$
- 2) Si f est alterne, alors
 - i) $\forall (u, v) \in E^2 \quad f(u + v, v) = f(u, v).$
 - ii) Si u, v sont linéairement dépendante alors

$$f(u, v) = 0.$$

Démonstration. 1) \implies) Supposons que f est alterne, alors

$$\begin{aligned} f(u + v, u + v) &= f(u, u + v) + f(v, u + v) \\ &= f(u, u) + f(u, v) + f(v, u) + f(v, v) \\ &= f(u, v) + f(v, u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $f(u, v) = -f(v, u)$, alors f est antisymétrique.

\impliedby) (exercice) Soit u un élément quelconque de E . En appliquant f est antisymétrique au couple (u, u) on obtient $f(u, u) = -f(u, u)$.

Comme le corps de base est \mathbb{R} ou \mathbb{C} , cela entraîne $f(u, u) = 0$.

2) i)

$$f(u + v, v) = f(u, v) + f(v, v) = f(u, v)$$

ii) $f(u, v) = f(\lambda v, v) = \lambda f(v, v) = 0$. ■

Proposition 2.2.1 Soit $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire telle que pour tous $u, v \in E$, $f(u, v) = 0 \iff f(v, u) = 0$. Alors f est symétrique ou alternée.

Démonstration. Soit $u, v \in E$, alors

$$\begin{aligned}
 f(u, u)f(u, v) &= f(u, f(u, v)u) = f(u, f(u, u)v) \\
 &\Leftrightarrow f(u, f(u, v)u - f(u, u)v) = 0 \\
 &\Leftrightarrow f(f(u, v)u - f(u, u)v, u) = 0 \\
 &\Leftrightarrow f(u, v)f(u, u) - f(u, u)f(v, u) = 0 \\
 &\Leftrightarrow f(u, u)[f(u, v) - f(v, u)] = 0. \tag{2.2.1}
 \end{aligned}$$

Supposons que f n'est pas alternée. Soit $u_0 \in E$ tel que $f(u_0, u_0) \neq 0$. Alors d'après 2.2.1, on a :

$$f(u_0, v) = f(v, u_0)$$

pour tout $v \in E$.

Soit $u, v \in E$. Si $f(u, u) \neq 0$, alors $f(u, v) = f(v, u)$. Si $f(u, u) = 0$, soit $f(u, u_0) = 0$ et alors $f(u + u_0, u + u_0) = f(u_0, u_0) \neq 0 \Rightarrow f(u + u_0, v) = f(v, u + u_0) \Rightarrow f(u, v) = f(v, u)$; soit $f(u, u_0) \neq 0$ et alors si $t = -\frac{f(u, u_0)}{f(u_0, u_0)}$, on a

$$f(u + tu_0, u + tu_0) = -t^2 f(u_0, u_0) \neq 0$$

donc

$$f(u + tu_0, v) = f(v, u + tu_0) \Rightarrow f(u, v) = f(v, u)$$

et dans tous les cas $f(u, v) = f(v, u)$ i.e. f est symétrique. ■

2.2.2 Représentation matricielle d'une forme bilinéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension fini n et $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base de E . Soit F un espace vectoriel de dimension fini m et $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ une base de F et f une forme bilinéaire sur $E \times F$.

Soient $X \in E, \exists x_i \in \mathbb{K}, \text{tel que } X = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ et $Y \in F, \exists y_j \in \mathbb{K}, \text{tel que } Y = \sum_{j=1}^m y_j w_j$.

alors

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, Y\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f(v_i, Y) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m y_j \underbrace{f(v_i, w_j)}_{a_{ij}}\right). \end{aligned}$$

En introduisant la matrice

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} = \begin{pmatrix} f(v_1, w_1) & \cdots & f(v_1, w_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n, w_1) & \cdots & f(v_n, w_m) \end{pmatrix}.$$

Alors A la matrice représentative a la forme bilinéaire f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

• Inversement si $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ alors, la forme bilinéaire associée à la matrice A dans les bases canoniques de \mathbb{K}^n et \mathbb{K}^m est

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m &\rightarrow \mathbb{K} \\ (X, Y) &\mapsto f(X, Y) = X^t A Y \end{aligned}$$

Exemple 2.2.3 Soit la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto f(X, Y) \end{aligned}$$

tel que

$$f(X, Y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_3 y_1 - x_3 y_2.$$

Déterminer la matrice associée à f dans $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 0, 1), \dots, v_3 = (2, 1, 0)\}$ la base de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{B}' = \{w_1 = (1, 0), w_2 = (2, -1)\}$ la base de \mathbb{R}^2 .

Solution 2.2.1 La matrice associée à f dans \mathcal{B} et \mathcal{B}' est

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2} = \begin{pmatrix} f(v_1, w_1) & f(v_1, w_2) \\ f(v_2, w_1) & f(v_2, w_2) \\ f(v_3, w_1) & f(v_3, w_2) \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{aligned}
 f(v_1, w_1) &= f \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 1, & f(v_1, w_2) &= f \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0 \\
 f(v_2, w_1) &= f \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 4, & f(v_2, w_2) &= f \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 7 \\
 f(v_3, w_1) &= f \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 3, & f(v_3, w_2) &= f \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 4.
 \end{aligned}$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2.2 Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base de E et f une forme bilinéaire sur $E \times E$. Si f est symétrique, alors la matrice A associée à f dans la base \mathcal{B} est symétrique

Démonstration. On a $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ tel que $a_{ij} = f(v_i, v_j)$, donc A est symétrique si f est symétrique. ■

Théorème 2.2.2 Une application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire (respectivement symétrique) sur $E \times E$ si, et seulement si, il existe une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ (respectivement symétrique) et des formes linéaires $v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^* \in E^*$ linéairement indépendantes telles que

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_i^*(x) v_j^*(y).$$

Démonstration. Si f est bilinéaire, on a dans une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, pour tout $(x, y)^2 \in E$

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j v_i^*(x) v_j^*(y).$$

où $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ est la base duale de \mathcal{B}^* : $v_i^*(x) = x_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. De plus la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est symétrique si, et seulement si, f est symétrique. La réciproque est immédiate. ■

Définition 2.2.7 (Matrice de passage) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , et soient $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ deux bases de E .

- La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' noté : P est la matrice définie par

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Soit $x \in E$, ayant pour coordonnées les matrices colonne X, X' respectivement dans $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Alors

$$X = PX'$$

Théorème 2.2.3 (Changement de bases) Soit f une forme bilinéaire sur $E \times F$, \mathcal{B} est une base de E et \mathcal{B}_1 est une base de F . Soient \mathcal{B}' une nouvelle base de E , \mathcal{B}'_1 une nouvelle base de F . On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et Q la matrice de passage de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}'_1 . Alors

$$M_{\mathcal{B}'_1}^{\mathcal{B}'_1}(f) = P^t \cdot M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(f) \cdot Q.$$

En particulier, le rang r de la matrice associée ne change pas car P et Q sont inversibles. On dit que r est le rang de la forme bilinéaire f .

Remarque 2.2.3 La matrice de changement de base de \mathcal{B} à $\mathcal{B}_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ est la matrice inversible P dont la j -ème colonne est formée des coordonnées de w_j dans la base \mathcal{B} .

2.2.3 Formes bilinéaires non dégénérées

Définition 2.2.8 On dit qu'une forme bilinéaire $f : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ est régulière ou non dégénérée si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- 1) $f(u, v) = 0$ pour tout $u \in E$ entraîne $v = 0$,
- 2) $f(u, v) = 0$ pour tout $v \in F$ entraîne $u = 0$.

Exemple 2.2.4 Si $E = F = \mathbb{K}^n$, alors la forme bilinéaire $f(u, v) = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$ est non dégénérée.

Proposition 2.2.3 Une forme bilinéaire symétrique définie positive est non dégénérée.

Démonstration. En effet, si f était dégénérée, il existerait $v \neq 0 \in E$ tel que $f(v, w) = 0$ pour tout $w \in E$. En particulier on aurait $f(v, v) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

■

Théorème 2.2.4 Supposons E, F de dimension finie. Si $f : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire régulière, alors $\dim(E) = \dim(F)$ et pour chaque base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de E , il existe une unique famille $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ de F telle que :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \quad f(v_i, w_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (*)$$

de plus, les w_j forment une base de F . On dit que deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E et F qui vérifient (*) sont duales l'une de l'autre.

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} \psi : F &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ w &\mapsto \psi(w) = (f(v_1, w), \dots, f(v_n, w)). \end{aligned}$$

C'est une application linéaire injective car

$$(\psi(w) = 0) \Leftrightarrow (\forall v \in E, f(v, w) = 0) \Rightarrow (w = 0).$$

Donc $\dim(F) \leq n = \dim(E)$. De même, $\dim(E) \leq \dim(F)$. Donc $\dim(E) = \dim(F) = n$.
Donc ψ est surjective. Soit e_1, e_2, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{K}^n . Soient $w_1, w_2, \dots, w_m \in F$
tels que $\psi(w_j) = e_j$. On a alors :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \quad f(e_i, w_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Les w_i forment une base de F car ils sont linéairement indépendants (car leurs images le sont). Si $\{w'_1, w'_2, \dots, w'_n\}$ vérifient aussi:

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \quad f(e_i, w'_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Alors $\forall i, j, f(e_i, w_j - w'_j) = 0$ donc $\forall j, w_j - w'_j = 0$. D'où l'unicité. ■

2.2.4 Formes quadratiques

Définition 2.2.9 Une application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ est appelée forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique f sur $E \times E$ telle que

$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = f(x, x).$$

La forme quadratique φ est dite **associée à la forme bilinéaire symétrique f** .

Exemple 2.2.5 1) Pour $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, l'application

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i^2,$$

est une forme quadratique sur \mathbb{R}^n associée à la forme bilinéaire

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i.$$

2) Si $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. L'application

$$f \mapsto \int_{-1}^1 f^2(x) dx,$$

est une forme quadratique sur E associée à la forme bilinéaire symétrique

$$(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

est une forme bilinéaire.

Exercice 2.2.1 Une forme quadratique φ sur E est une application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- 1) $\forall v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \varphi(\alpha v) = \alpha^2 \varphi(v)$.
- 2) L'application $(u, v) \mapsto \frac{1}{2} [\varphi(u + v) - \varphi(u) - \varphi(v)]$ est bilinéaire symétrique.

Exemple 2.2.6 L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

n'est pas quadratique car $\varphi(\alpha A) = \alpha^3 \det(A) \neq \alpha^2 \varphi(A)$.

Remarque 2.2.4 A priori, il n'y a pas unicité des formes bilinéaires associées à une forme quadratique. Par exemple sur \mathbb{R}^2 , les formes bilinéaires

$$f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \text{et} \quad g(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2$$

définissent la même forme quadratique $\varphi(x) = f(x, x) = x_1^2 + x_2^2 = g(x, x)$.

L'unicité de f est assurée par le résultat suivant :

Théorème 2.2.5 Si φ est une forme quadratique sur E , alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique f telle que $\varphi(x) = f(x, x)$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. La forme quadratique φ est définie par $\varphi(x) = f_0(x, x)$ pour $x \in E$ où f_0 est une forme bilinéaire sur E (qui n'est pas forcément symétrique). L'application f définie sur $E \times E$ par

$$f(x, y) = \frac{1}{2} [f_0(x, y) + f_0(y, x)]$$

est bilinéaire et symétrique avec $\varphi(x) = f(x, x)$ pour $x \in E$, ce qui prouve l'existence de f .

Comme f est bilinéaire symétrique, on a pour tout $x, y \in E$

$$\varphi(x + y) = f(x + y, x + y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y)$$

de sorte que

$$f(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y)]$$

ce qui prouve l'unicité. ■

Proposition 2.2.4 Soit φ une forme quadratique sur E et f la forme bilinéaire symétrique associée. On a

$$1) \forall v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \varphi(\alpha v) = \alpha^2 \varphi(v).$$

$$2) \forall u, v \in E, \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) + 2f(u, v) + \varphi(v).$$

$$3) \forall u, v \in E, \quad f(u, v) = \frac{1}{2} [\varphi(u + v) - \varphi(u) - \varphi(v)].$$

$$4) \forall u, v \in E, \quad f(u, v) = \frac{1}{2} [\varphi(u) + \varphi(v) - \varphi(u - v)].$$

$$5) \forall u, v \in E, \quad f(u, v) = \frac{1}{4} [\varphi(u + v) - \varphi(u - v)].$$

$$6) \forall u, v \in E, \quad \varphi(u + v) + \varphi(u - v) = 2[\varphi(u) + \varphi(v)].$$

Démonstration. Il suffit d'expliciter le calcul de $\varphi(u + \beta v) = f(u + \beta v, u + \beta v)$ en tenant compte de la bilinéarité et de la symétrie de f .

$$\begin{aligned} \varphi(u + \beta v) &= f(u + \beta v, u + \beta v) \\ &= f(u, u) + \beta f(u, v) + \beta f(v, u) + \beta^2 f(v, v) \\ &= \varphi(u) + 2\beta f(u, v) + \beta^2 \varphi(v) \end{aligned}$$

Tous les points (de (1) à (6)) se déduisent de cette dernière formule. ■

2.2.5 Représentation matricielle d'une forme quadratique

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ et φ la forme quadratique associée à f , alors la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ la matrice de sa forme polaire.

Proposition 2.2.5 Soit E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canonique de E .

- Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} et φ la forme quadratique sur \mathbb{R}^n dont la matrice associée dans la base \mathcal{B} est égale à A . Donc φ est définie par :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

- Si φ la forme quadratique sur \mathbb{R}^n associée à f , alors la matrice associée à φ dans la base canonique \mathcal{B} de E peut s'écrire

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(e_1) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(e_2) & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(e_n) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(e_1) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(e_2) & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(e_1) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(e_2) & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(e_n) \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.2.7 Soit la forme quadratique

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

la matrice associée à φ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= 2x_1 + 2x_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= 2x_1 - 4x_3 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= -2x_3 - 4x_2 \end{aligned}$$

donc

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(e_1) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(e_2) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(e_3) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(e_1) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(e_2) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(e_3) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(e_1) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(e_2) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Série d'exercices avec solution

Exercice 01. Dans \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique, on considère les applications ω et α suivantes :

$$\begin{aligned} \omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} & \alpha : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto x_1y_2 - x_2y_1 & \text{et} & (X) \mapsto x_3 \end{aligned}$$

1°) Montrer que ω est antisymétrique et bilinéaire.

À l'aide de ω et α , on définit une nouvelle application, notée $\omega \wedge \alpha$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \omega \wedge \alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y, Z) &\mapsto \omega(X, Y)\alpha(Z) + \omega(Y, Z)\alpha(X) + \omega(Z, X)\alpha(Y) \end{aligned}$$

2°) Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est alternée.

3°) Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est trilineaire.

4°) Calculer $\omega \wedge \alpha(e_1, e_2, e_3)$.

Solution: 1°) ω est antisymétrique et bilinéaire.

$$*) \forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \omega(X, Y) = x_1y_2 - x_2y_1 = y_2x_1 - y_1x_2 = -(y_1x_2 - y_2x_1) = -\omega(Y, X)$$

$$*) \forall (X, X', Y) \in (\mathbb{R}^3)^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \omega(\lambda X + X', Y) = (\lambda x_1 + x'_1)y_2 - (\lambda x_2 + x'_2)y_1 = (\lambda x_1y_2 - \lambda x_2y_1) + (x'_1y_2 - x'_2y_1) = \lambda\omega(X, Y) + \omega(X', Y).$$

$$*) \forall (X, Y, Y') \in (\mathbb{R}^3)^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \omega(X, \lambda Y + Y') = -\omega(\lambda Y + Y', X) = -(\lambda\omega(Y, X) + \omega(Y', X)) = -(-\lambda\omega(X, Y) - \omega(X, Y')) = \lambda\omega(X, Y) + \omega(X, Y').$$

$$2^\circ) \omega \wedge \alpha \text{ est alternée: } \forall X \in \mathbb{R}^3, \omega \wedge \alpha(X, X, X) = 3\omega(X, X)\alpha(X) = 0.$$

3°) $\omega \wedge \alpha$ est trilineaire.

$$\begin{aligned} \text{i) } \forall (X, X', Y) \in (\mathbb{R}^3)^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \omega \wedge \alpha(\lambda X + X', Y, Z) &= \omega(\lambda X + X', Y)\alpha(Z) + \omega(Y, Z)\alpha(\lambda X + X') + \\ \omega(Z, \lambda X + X')\alpha(Y) &= (\lambda\omega(X, Y) + \omega(X', Y))\alpha(Z) + \omega(Y, Z)(\lambda\alpha(X) + \alpha(X')) + (\lambda\omega(Z, X) + \\ \omega(Z, X'))\alpha(Y) &= (\lambda(\omega(X, Y)\alpha(Z) + \omega(Y, Z)\alpha(X) + \omega(Z, X)\alpha(Y)) + (\omega(X', Y)\alpha(Z) + \\ \omega(Y, Z)\alpha(X') + \omega(Z, X')\alpha(Y)) &= \lambda\omega \wedge \alpha(X, Y, Z) + \omega \wedge \alpha(X', Y, Z). \end{aligned}$$

$$4^\circ) \omega \wedge \alpha(e_1, e_2, e_3) = 1.$$

Exercice 02. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la signature de la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution: On note $\ell(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation σ

$$\ell(\sigma) = |\{(i, j) : i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}|$$

on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$ et $\ell(\sigma)$ se calcule en dénombrant, pour chaque de terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suit.

$$\ell(\sigma) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{don } \varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Exercice 03. Soit L'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto f(X, Y) = x_1y_2 - x_2y_1 \end{aligned}$$

Montrer que f est une forme bilinéaire alternée.

Solution: f est une forme bilinéaire?

i) Soit $X = (x_1, x_2), X' = (x'_1, x'_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(X + \lambda X', Y) &= f((x_1 + \lambda x'_1, x_2 + \lambda x'_2), (y_1, y_2)) = (x_1 + \lambda x'_1)y_2 - (x_2 + \lambda x'_2)y_1 \\ &= x_1y_2 - x_2y_1 + \lambda x'_1y_2 - \lambda x'_2y_1 \\ &= f(X, Y) + \lambda f(X', Y). \end{aligned}$$

ii) Soit $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2), Y' = (y'_1, y'_2) \in \mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(X, Y + \lambda Y') &= f((x_1, x_2), (y_1 + \lambda y'_1, y_2 + \lambda y'_2)) = x_1(y_2 + \lambda y'_2) - x_2(y_1 + \lambda y'_1) \\ &= x_1y_2 - x_2y_1 + \lambda x_1y'_2 - \lambda x_2y'_1 \\ &= f(X, Y) + \lambda f(X, Y'). \end{aligned}$$

de (i) et (ii) f est une forme bilinéaire.

iii) f est alternée? Soit $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$f(X, X) = f((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1x_2 - x_2x_1 = 0,$$

donc f est alternée.

Exercice 04. Soit L'application f définie par

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p(x), q(x)) &\longmapsto \int_0^1 p(x)q(x)dx \end{aligned}$$

1°) Montrer que f est une forme bilinéaire

2°) Déterminer la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

Solution: 1°) f est une forme bilinéaire. i) Soient $p_1(x), p_2(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(p_1(x) + \lambda p_2(x), q(x)) &= \int_0^1 (p_1(x) + \lambda p_2(x)) q(x) dx \\ &= \int_0^1 p_1(x) q(x) dx + \lambda \int_0^1 p_2(x) q(x) dx \\ &= f(p_1(x), q(x)) + \lambda f(p_2(x), q(x)) \end{aligned}$$

ii) f est symétrique.

$$f(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 q(x)p(x)dx = f(q(x), p(x))$$

Comme f est symétrique alors

$$f(p_1(x) + \lambda p_2(x), q(x)) = f(q(x), p_1(x) + \lambda p_2(x)) = f(q(x), p_1(x)) + \lambda f(q(x), p_2(x))$$

de (i) et (ii) f est une forme bilinéaire.

2°) D'après la définition, la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B} est définie par:

$$A = (f(e_i(x), e_j(x)))_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad \text{tel que } e_i(x) = x^{i-1}, \text{ où } 1 \leq i \leq n+1$$

On calcule successivement:

$$\begin{aligned} A &= (f(e_i(x), e_j(x)))_{1 \leq i, j \leq n+1} = (f(x^{i-1}, x^{j-1}))_{1 \leq i, j \leq n+1} = \left(\int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} dx \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} \\ &= \left(\int_0^1 x^{i+j-2} dx \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} \\ &= \left(\frac{1}{i+j-1} x^{i+j-1} \Big|_0^1 \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} \\ &= \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} \end{aligned}$$

et donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}$$

Exercice 05. Soit L l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto f(X, Y) = 33x_1y_1 - 14(x_1y_2 + x_2y_1) + 6x_2y_2 \end{aligned}$$

1°) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.

2°) Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

3°) Déterminer la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}' = \{w_1 = (2, 5), w_2 = (1, 2)\}$ de \mathbb{R}^2 .

4°) Déterminer la forme quadratique φ associée à f .

Solution: 1°) f est une forme bilinéaire

2°) Soit $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . D'après la définition, la

matrice représentative de f dans la base \mathcal{B} est définie par :

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq 2} \\ &= \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On calcule successivement:

$$\begin{aligned} f(e_1, e_1) &= f((1, 0), (1, 0)) = 33, & f(e_1, e_2) &= f((1, 0), (0, 1)) = -14, \\ f(e_2, e_1) &= f((0, 1), (1, 0)) = -14, & f(e_2, e_2) &= f((0, 1), (0, 1)) = 6 \end{aligned}$$

et donc

$$A = \begin{pmatrix} 33 & -14 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}$$

3°) On utilise la formule de changement de base $A' = P^t A P$ où P la matrice de La matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' , alors

$$\begin{aligned} w_1 &= (2, 5) = (2, 0) + (0, 5) = 2(1, 0) + 5(0, 1) = 2e_1 + 5e_2 \\ w_2 &= (1, 2) = (1, 0) + (0, 2) = (1, 0) + 2(0, 1) = e_1 + 2e_2 \end{aligned}$$

donc la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} A' &= P^t A P \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33 & -14 \\ -14 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}}_{P^t A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}_P \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4°) La forme quadratique φ associée à f est

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto \varphi(X) = f(X, X) = 33x_1^2 - 28x_1x_2 + 6x_2^2 \end{aligned}$$

Exercice 06. Soit la forme quadratique $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\varphi(x_1, x_2) = 33x_1^2 - 28x_1x_2 + 6x_2^2.$$

1°) Déterminer la matrice A associée à φ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

2°) Déterminer l'application bilinéaire f associée à φ .

Solution: 1°) La matrice A associée à φ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(e_1) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(e_2) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(e_1) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(e_2) \end{pmatrix}$$

On calcule successivement:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 66x_1 - 28x_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 12x_2 - 28x_1,$$

alors

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 66 & -28 \\ -28 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -14 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}$$

2°) **Méthode 1:** Soient $X^t = (x_1, x_2), (Y)^t = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= X^t A Y = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 33 & -14 \\ -14 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= 33x_1y_1 - 14(x_1y_2 + x_2y_1) + 6x_2y_2. \end{aligned}$$

Méthode 2:

$$f(X, Y) = \frac{1}{2} [\varphi(X + Y) - \varphi(X) - \varphi(Y)].$$

Exercice 07. Soit l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$. Montrer que

$$(\varphi \text{ forme quadratique}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} i) \varphi(2v) = 4\varphi(v) \\ ii) \text{l'application } g : E \times E \rightarrow \mathbb{K} \\ \quad (u, v) \mapsto \varphi(u + v) - \varphi(u) - \varphi(v) \\ \text{est une forme bilinéaire} \end{array} \right)$$

Solution: \Rightarrow) Supposons que φ est une forme quadratique. Soit $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ la forme bilinéaire symétrique associée à φ .

i) On a $\varphi(2v) = f(2v, 2v) = 4f(v, v) = 4\varphi(v)$.

ii) On a

$$f(u, v) = \frac{1}{2} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - \varphi(v)] = \frac{1}{2}g(u, v) \implies g(u, v) = 2f(u, v)$$

Comme f est bilinéaire, donc g est bilinéaire.

\Leftarrow) Supposons (i) et (ii). On pose

$$\begin{aligned} f : E \times E &\rightarrow \mathbb{K} \\ (u, v) &\mapsto f(u, v) = \frac{1}{2}g(u, v) \end{aligned}$$

a) f est bilinéaire car g est bilinéaire

b) f est symétrique car

$$f(u, v) = \frac{1}{2} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - \varphi(v)] = f(v, u)$$

c)

$$\begin{aligned} f(u, u) &= \frac{1}{2} [\varphi(u+u) - \varphi(u) - \varphi(u)] \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(2u) - 2\varphi(u)] \\ &= \frac{1}{2} [4\varphi(u) - 2\varphi(u)] \\ &= \varphi(u) \end{aligned}$$

Donc φ est une forme quadratique associée à f .

Chapitre 3

Les espaces euclidiens

Définition 3.0.1 Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel. Tout $f \in \text{Bil}(E, \mathbb{R})$ se nomme alors forme bilinéaire réelle sur $E \times E$ et son associée φ se nomme forme quadratique réelle sur E .

3.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz et Minkowski

Théorème 3.1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit f une forme bilinéaire symétrique positive sur $E \times E$ et φ la forme quadratique associée. Alors

$$\forall u, v \in E, \quad |f(u, v)| \leq \sqrt{\varphi(u) \varphi(v)}.$$

Dans le cas où f est définie positive, on a égalité si, et seulement si, (u, v) est une famille liée dans E .

Démonstration. Soit $(u, v) \in E^2$, l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} $0 \leq P(\alpha) = \varphi(u + \alpha v) = \varphi(u) + 2\alpha f(u, v) + \alpha^2 \varphi(v)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 dont les valeurs sont positives.

- Si $\varphi(v) \neq 0$, alors $\varphi(v) > 0$ et le discriminant réduit du trinôme $P(\alpha)$ est $(f(u, v))^2 - \varphi(u) \varphi(v) \leq 0$. D'où le résultat.
- Si $\varphi(v) = 0$, on a $\forall \alpha \in \mathbb{R}, P(\alpha) = \varphi(u) + 2\alpha f(u, v) \geq 0$. Si $f(u, v) \neq 0$, $\alpha \mapsto P(\alpha)$ est une fonction polynomiale de degré un et donc change de signe, d'où $f(u, v) = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

Supposons que f est définie positive. Si les deux vecteurs u, v sont liés, alors $u = \beta v$ où $\beta \in \mathbb{R}$ donc

$$(f(u, v))^2 = \beta^2 f(u, u) = \beta^2 (\varphi(u))^2 = \varphi(u) \varphi(\beta u) = \varphi(u) \varphi(v).$$

Réciproquement, si $(f(u, v))^2 = \varphi(u) \varphi(v)$, alors dans le cas où $\varphi(v) = 0$, on a $v = 0$ et (u, v) est liée, dans le cas où $\varphi(v) \neq 0$, on a la fonction polynomiale $P(\alpha)$ a un discriminant nul, d'où l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Comme $P(\lambda) = \varphi(u + \lambda v)$, $u + \lambda v = 0$ puisque f est définie positive. ■

Théorème 3.1.2 (Inégalité de Minkowski) *Soit f une forme bilinéaire symétrique positive sur $E \times E$ et φ la forme quadratique associée. Alors*

$$\forall u, v \in E, \quad \sqrt{\varphi(u+v)} \leq \sqrt{\varphi(u)} + \sqrt{\varphi(v)}.$$

Démonstration. On à

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + 2f(u, v) + \varphi(v) \geq 0,$$

comme

$$f(u, v) \leq |f(u, v)| \leq \sqrt{\varphi(u) \varphi(v)},$$

alors

$$\begin{aligned} \varphi(u+v) &\leq \varphi(u) + 2\sqrt{\varphi(u) \varphi(v)} + \varphi(v) \\ &= \left(\sqrt{\varphi(u)} + \sqrt{\varphi(v)} \right)^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{\varphi(u+v)} \leq \sqrt{\varphi(u)} + \sqrt{\varphi(v)}$$

■

Exemple 3.1.1 *Si $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Soit la forme bilinéaire*

$$\begin{aligned} f : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx \end{aligned}$$

la forme quadratique associée à f est

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varphi(u) = \int_a^b u^2(x) dx. \end{aligned}$$

Alors l'inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski sont respectivement

$$\left| \int_a^b u(x)v(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b u^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b v^2(x) dx}$$

et

$$\sqrt{\int_a^b (u(x) + v(x))^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b u^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b v^2(x) dx}.$$

3.2 Orthogonalité, noyau et rang d'une forme bilinéaire

Définition 3.2.1 Soit φ une forme quadratique sur E . On suppose E de dimension finie. Le rang de φ est le rang de sa forme bilinéaire f c-à-d le rang de la matrice $(f(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ pour une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de E quelconque. C'est indépendant de la base choisie.

Définition 3.2.2 Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$. On dit que deux vecteur $u, v \in E$ sont orthogonaux relativement à f ou encore f -orthogonaux si, et seulement si

$$f(u, v) = 0.$$

Exemple 3.2.1 Sur \mathbb{R}^2 le produit scalaire usuel

$$(x, y) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$$

définit une forme bilinéaire symétrique, alors $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$ sont orthogonaux relativement à la produit scalaire usuel.

Définition 3.2.3 On dit que la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de E est orthogonale si $f(v_i, v_j) = 0$ dès que $i \neq j$.

Définition 3.2.4 Un vecteur $u \in E$ est f -orthogonal à une partie F de E si, et seulement si,

$$\forall v \in F, \quad f(u, v) = 0.$$

On note $F^{\perp f}$ le f -orthogonal de F , c'est-à-dire

$$F^{\perp f} = \{u \in E : f(u, v) = 0, \quad \forall v \in F\}.$$

On vérifie assez facilement les propriétés suivante

Proposition 3.2.1 (Exercice) 1) Pour toute partie $F \subset E$, $F^{\perp f}$ est un sous espace vectoriel de E .

2) Pour toutes parties F et G de E , on a $G \subset F \Rightarrow F^{\perp f} \subset G^{\perp f}$.

3) Pour toute partie $F \subset E$, $F^{\perp f} = (\text{vect}(F))^{\perp f}$.

4) $\{0_E\}^{\perp f} = E$ et $E^{\perp f} = \{0_E\}$.

5) Pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$, $F^{\perp f}$, on a $F \subset (F^{\perp f})^{\perp f}$.

Définition 3.2.5 On appelle **noyau** de la forme bilinéaire symétrique f le sous-espace vectoriel

$$\ker(f) = E^{\perp f} = \{u \in E : f(u, v) = 0, \forall v \in E\}.$$

Remarque 3.2.1 1) Si φ la forme quadratique sur E associée à f , alors le noyau de φ est le noyau de sa forme bilinéaire f i.e. :

$$\ker(\varphi) = \{u \in E : f(u, v) = 0, \forall v \in E\}.$$

2) Il ne faut pas confondre le noyau de φ et son cône isotrope :

$$C(\varphi) = \{u \in E : \varphi(u) = 0\}.$$

On a toujours $\ker(\varphi) \subset C(\varphi)$ mais attention, en général $C(\varphi)$ n'est pas un sous-espace de E .

Exemple 3.2.2 1) On considère la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ le produit scalaire usuel

$$(x, y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

$x \in \ker(f)$ signifie que $f(x, y) = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}^3$ et en particulier pour les vecteurs de la base canonique e_1, e_2, e_3 et par suite

$$0 = f(x, e_1) = x_1, \quad 0 = f(x, e_2) = x_2 \quad \text{et} \quad 0 = f(x, e_3) = x_3.$$

On en déduit que $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

2) Si $\varphi(x_1, x_2) = x_1x_2$, $\ker(\varphi) = \{(0, 0)\}$ et $C(\varphi) = \{(1, 0) \text{ ou } (0, 1)\}$

Théorème 3.2.1 Soit f une forme bilinéaire symétrique positive et φ la forme quadratique associée à f . Alors

$$\ker(f) = E^{\perp f} = \{u \in E : \varphi(u) = 0\}.$$

Démonstration. Soit $E^{\perp f} = \{u \in E : f(u, v) = 0, \forall v \in E\}$ et $A = \{u \in E : \varphi(u) = 0\}$ on démontre que $E^{\perp f} = A$.

1) $E^{\perp f} \subset A$?

Soit $u \in E^{\perp f}$, alors $f(u, v) = 0$, pour tout $v \in E$. Donc pour $u = v$ on a $f(u, u) = 0 = \varphi(u)$ ce qui donne $u \in A$, alors $E^{\perp f} \subset A$.

2) $A \subset E^{\perp f}$?

Soit $u \in A$, alors $\varphi(u) = f(u, u) = 0$, pour tout $v \in E$ on a

$$|f(u, v)| \leq \sqrt{\varphi(u) \varphi(v)} = \sqrt{0 \varphi(v)} = 0.$$

Comme f est positive alors $f(u, v) = 0$. Donc $u \in E^{\perp f}$ ce qui donne $A \subset E^{\perp f}$.

de (1) et (2) on a $E^{\perp f} = A$.

■

Corollaire 3.2.1 Soit f une forme bilinéaire symétrique positive sur $E \times E$. Alors

$$(f \text{ alterne}) \Leftrightarrow (E = E^{\perp f}).$$

Théorème 3.2.2 Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ non dégénérée et A la matrice à associée à f dans \mathcal{B} . Soit g l'endomorphisme de E ayant A pour matrice dans la base \mathcal{B} . On a

1) $\ker(f) = \ker(g)$.

2) $rg(f) = rg(A)$.

3) $(\ker(f) = \{0\}) \Leftrightarrow (rg(f) = n) \Leftrightarrow (A \in GL_n(\mathbb{K}))$.

Démonstration. Soit $x \in E$ et $X \in \mathbb{K}^n$ la matrice colonne formée des coordonnées de x dans la base \mathcal{B} . On a

$$\begin{aligned} x \in \ker(f) &\iff \forall y \in E, \quad f(x, y) = 0 \iff \forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \quad X^t AY = 0 \\ &\iff X^t A = 0 \\ &\iff AX = 0 \\ &\iff X \in \ker(A) \\ &\iff X \in \ker(g) \end{aligned}$$

D'où (1). Les points (2) et (3) découlent du théorème du rang. ■

3.3 Produit scalaire

Dans toute la suite E est un \mathbb{R} espace vectoriel.

Définition 3.3.1 *Un produit scalaire sur $E \times E$ est une forme bilinéaire symétrique que nous noterons*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

ayant les propriétés suivantes:

- i) $\forall u \in E, \quad \langle u, u \rangle \geq 0.$
- ii) $\forall u \in E, \quad \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0_E.$

Remarque 3.3.1 *En générale, on appelle produit scalaire sur $E \times E$ une forme bilinéaire symétrique telle que la forme quadratique associée soit définie positive.*

Exemple 3.3.1 *Si $E = \mathbb{R}^n$, pour tout $X^t = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y^t = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ l'application*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \langle X, Y \rangle = X^t Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $E \times E$ (produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n), car est une forme bilinéaire symétrique et on a

$$i) \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0,$$

$$ii) \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow X = 0_n.$$

Propriétés 3.3.1 Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $E \times E$. Alors on a les propriétés suivantes:

$$1) \forall u \in E, \quad \langle u, 0_E \rangle = 0.$$

$$2) \forall u \in E, \quad \langle u, w \rangle = 0 \Rightarrow w = 0_E.$$

$$3) \forall u, v, w \in E, \quad \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle \Rightarrow u = v.$$

Démonstration. 1) Vient de la bilinéarité.

2) Se montre en remarquant que l'hypothèse fait donner en particulier $\langle w, w \rangle = 0$.

3) Pour tout $w \in E$, alors si $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$ on a

$$\begin{aligned} \langle u - v, w \rangle &= 0 \Rightarrow u - v = 0 \\ &\Rightarrow u = v. \end{aligned}$$

■

Définition 3.3.2 (Espace euclidien) On appelle espace euclidien tout espace vectorielle réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Les espaces suivants sont ceux dans lesquels on travaillera la plupart du temps.

Exemple 3.3.2 1. \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire usuel ;

2. $\mathbb{R}^n[X]$ muni d'un des produits scalaires usuels ;

3. Des espaces de fonctions comme $C([0, 1])$ munis de produits scalaires définis avec une intégrale ;

4. Plus rarement : $M_n(\mathbb{R})$ muni de : $\langle A, B \rangle = \text{tr}(tA \cdot B)$.

3.4 Norme associée à un produit scalaire

Définition 3.4.1 Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $E \times E$. On appelle norme associée à cet produit scalaire que nous noterons

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \end{aligned}$$

ayant les propriétés suivantes:

- i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|,$
- ii) $\forall u \in E, \quad \|u\| \geq 0$
- iii) $\forall u \in E, \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$
- iv) $\forall u, v \in E, \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$

Proposition 3.4.1 On a $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ si et seulement si (u, v) est positivement liée, i.e. si et seulement si $u = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $u = \lambda v$.

Démonstration. Si $u = 0$ on a égalité. Si $v = \lambda u$ avec $\lambda \geq 0$, on a $\|u + v\| = \|u + \lambda u\| = \|(1 + \lambda)u\| = (1 + \lambda)\|u\| = \|u\| + \lambda\|u\| = \|u\| + \|v\|$.

Réciproquement, si on a égalité alors $\|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \|u + v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$ et donc $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|$. On a donc égalité dans Cauchy-Schwarz, ce qui implique que (u, v) est liée. Donc $u = 0$ ou $v = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $\lambda\|u\|^2 = \langle u, v \rangle = \|u\|\|v\| \geq 0$, ce qui implique $\lambda \geq 0$. ■

Propriétés 3.4.1 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E$, on a

- i) $\|\lambda u + \mu v\|^2 = \lambda^2 \|u\|^2 + 2\lambda\mu \langle u, v \rangle + \mu^2 \|v\|^2$ (Formule de Taylor),
- ii) $\langle u + v, u - v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2,$
- iii) $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2),$
- iv) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ (Egalité du parallélogramme),

$$v) \langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

Démonstration.

i) S'obtient en développant $\langle \lambda u + \mu v, \lambda u + \mu v \rangle$,

ii) S'obtient de manière analogue,

les autres résultats se déduisent de (i). ■

3.5 Distance associée à un produit scalaire

Définition 3.5.1 Soit l'application

$$\begin{aligned} d: E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

On a pour tous $x, y, z \in E$:

$$i) d(x, y) = d(y, x) \geq 0,$$

$$ii) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$iii) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

On dit que d est une distance.

Si F est un sous-espace de E , on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ la distance de x à F .

Exemple 3.5.1 Si $E = \mathbb{R}^n$, l'application

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \end{aligned}$$

est une distance.

3.6 Orthogonalité, orthogonalisation de Gram-Schmidt

3.6.1 Bases orthonormées

Définition 3.6.1 Soit E un espace euclidien. L'ensemble $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de E est dit

i) Orthogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \quad \forall i \neq j$ (on écrit $v_i \perp v_j$)

ii) Unitaire si $\langle v_i, v_i \rangle = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

iii) Orthonormée si $\langle v_i, v_i \rangle = \begin{cases} 1, & \forall i = j \\ 0, & \forall i \neq j \end{cases}$.

Théorème 3.6.1 Soit E un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base orthonormée de E et $u \in E$. Alors

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

Démonstration. Comme \mathcal{B} est une base, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

On a

$$\langle u, v_i \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v_i \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_n, v_i \rangle.$$

Or, comme $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ si $j \neq i$ et $\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1$, on a

$$\langle u, v_i \rangle = \lambda_i$$

et par conséquent

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

■

On appelle les scalaires

$$\langle u, v_1 \rangle, \langle u, v_2 \rangle, \dots, \langle u, v_n \rangle$$

les coordonnées de u par rapport à la base orthonormée $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Théorème 3.6.2 Soit E un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base orthogonale de E et $u \in E$. Alors

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n.$$

Démonstration. La base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$$

est orthonormée. Par le théorème précédent, on a donc

$$u = \left\langle u, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \left\langle u, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\rangle \frac{v_2}{\|v_2\|} + \dots + \left\langle u, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\rangle \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

et alors

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n.$$

■

Proposition 3.6.1 Soit E un espace euclidien. Toute famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ orthogonale de E non nuls est une famille libre.

Démonstration. Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ une famille orthogonale de m vecteurs non nuls de E . Montrons qu'ils forment une famille libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0.$$

On a, d'une part $\langle v_j, \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \rangle = 0$ car $\langle u, 0 \rangle = 0$ pour tout $u \in E$ et, d'autre part, $\langle v_j, \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle = \lambda_j \|v_j\|^2 = 0$ car les vecteurs sont orthogonaux. Or $v_j \neq 0$, donc $\lambda_j = 0$. ■

Théorème 3.6.3 (Pythagore) $\forall (u, v) \in E^2$. u et v sont orthogonaux si et seulement si

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Démonstration. En utilisant $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$ pour prouver l'équivalence.

■

3.6.2 L'orthogonale d'une partie de E

Définition 3.6.2 Soit E un espace vectoriel euclidien. Si $A \subset E$,

$$A^\perp = \{u \in E : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall v \in A\}$$

est appelé **l'orthogonal** de A .

Propriétés 3.6.1 Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $A \subset E$. Alors on a les propriétés suivantes:

i) A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

ii) $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

iii) $A \subset (A^\perp)^\perp$.

iv) $B \subset A \implies A^\perp \subset B^\perp$.

v) $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.

vi) $A^\perp = \{0_E\} \implies (\text{Vect}(A)) = E$.

Démonstration. Exercice. ■

Théorème 3.6.4 Soit E un espace euclidien. Alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a

$$E = F \oplus F^\perp.$$

On dit que E est **somme-orthogonale** de F et F^\perp . On a $F = (F^\perp)^\perp$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ une base de F que l'on complète en une base de E . Un vecteur $v = \sum_{i=1}^r v_i e_i$ de E est orthogonal à F si $\langle v, e_j \rangle = 0$ pour $j = 1, \dots, r$, soit

$$\sum_{i=1}^r v_i \langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

1) On sait d'après la propriété 3.6.1/(i) que F^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

2) Vérifions que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Si $v \in F \cap F^\perp$, alors $\langle v, v \rangle = 0$, ce qui signifie que $v = 0_E$.

3) Prouvons que $(F \oplus F^\perp)^\perp = \{0_E\}$.

Comme $F \subset F \oplus F^\perp$, alors $(F \oplus F^\perp)^\perp \subset F^\perp$ et que $F^\perp \subset F \oplus F^\perp$, on trouve que $(F \oplus F^\perp)^\perp \subset F \cap F^\perp = \{0_E\}$: d'où : $(F \oplus F^\perp)^\perp = \{0_E\}$. Ce qui signifie d'après la propriété 3.6.1/(ii) que $F \oplus F^\perp = E$. ■

3.6.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est un algorithme permettant de fabriquer une famille orthonormée à partir d'une famille libre dans un espace euclidien.

Théorème 3.6.5 Soit E un espace vectoriel euclidien, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base de E . Alors il existe une unique base orthonormale $\{v''_1, v''_2, \dots, v''_n\}$ de E telle que :

- Pour tout m de $\{1, \dots, n\}$, $\text{Vect}(v''_1, \dots, v''_m) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$.
- Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, $\langle v_i, v''_i \rangle \geq 0$

Démonstration. On construit la famille $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ étape par étape. Posons

$$\begin{cases} v'_1 = v_1 \\ v'_2 = v_2 + a_{12}v'_1 \\ v'_3 = v_3 + a_{13}v'_1 + a_{23}v'_2 \\ \vdots \\ v'_n = v_n + a_{1n}v'_1 + a_{2n}v'_2 + \dots + a_{(n-1)n}v'_{(n-1)} \end{cases}$$

Plus simplement

$$v'_i = v_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji}v'_j \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

Pour trouver les a_{ij} , il suffit de supposer que les v'_i sont orthogonaux pour $\forall i \neq j$. Nous allons trouver

$$a_{ij} = -\frac{\langle v'_i, v_j \rangle}{\|v'_i\|^2}.$$

Finalement nous obtenons un ensemble orthonormée

$$\left\{ v''_1 = \frac{v'_1}{\|v'_1\|}, v''_2 = \frac{v'_2}{\|v'_2\|}, \dots, v''_n = \frac{v'_n}{\|v'_n\|} \right\}.$$

■

Exemple 3.6.1 Considérons la base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 donnée une base orthonormées de \mathbb{R}^3 à partir de \mathcal{B} .

Le processus d'orthonormalisation de Schmidt donne

$$\begin{cases} v'_1 &= v_1, \\ v'_2 &= v_2 + a_{12}v'_1, \\ v'_3 &= v_3 + a_{13}v'_1 + a_{23}v'_2. \end{cases}$$

Donc on trouve

$$\begin{cases} a_{12} = -\frac{\langle v'_1, v_2 \rangle}{\|v'_1\|^2} = \frac{-2}{3} \\ a_{13} = -\frac{\langle v'_1, v_3 \rangle}{\|v'_1\|^2} = \frac{-1}{3} \\ a_{23} = -\frac{\langle v'_2, v_3 \rangle}{\|v'_2\|^2} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v'_1 = v_1, & \|v'_1\| = \sqrt{3} \\ v'_2 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), & \|v'_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ v'_3 = \left(0, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right), & \|v'_3\| = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

alors la base orthonormées est:

$$\left\{ w''_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}w_1, \quad w''_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}w_2, \quad w''_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}w_3 \right\}$$

Remarque 3.6.1 Géométriquement, la matrice de passage de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ à $\{v''_1, v''_2, \dots, v''_n\}$ est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.

3.7 L'adjoint d'un endomorphisme et ses propriétés

Théorème 3.7.1 (Définition) Soit E un espace vectoriel euclidien.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$, appelé **adjoint** de f et défini par la relation

$$\forall v, w \in E : \langle w, f(v) \rangle = \langle f^*(w), v \rangle.$$

Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base orthonormée de E , et si $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ alors $A^* = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*)$ où $A^* = A^t$ est la matrice transposée de A .

Définition 3.7.1 Si un endomorphisme f vérifie $f^* = f$, on dit que f est symétrique ou *auto-adjoint*.

Le théorème suivant caractérise les endomorphismes auto-adjoints.

Théorème 3.7.2 Soit E un espace vectoriel euclidien, et f un endomorphisme de E . Alors f est auto-adjoint si et seulement s'il existe une base orthonormée de E de vecteurs propres pour f , les valeurs propres étant réelles.

Théorème 3.7.3 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes

- (1) f est auto-adjoint
- (2) $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$
- (3) La matrice de f dans une base orthonormale est symétrique.
- (4) La matrice de f dans toute base orthonormale est symétrique.

Démonstration. (1) \Rightarrow (4) : Soit \mathcal{B} une base orthonormale de E , f un endomorphisme auto-adjoint de E . On a alors $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))^t$, donc $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.

(4) \Rightarrow (3): ok (il existe des bases orthonormales)

(3) \Rightarrow (1) : Soit \mathcal{B} une base orthonormale telle que $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.

Alors $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = A^t = A$ car \mathcal{B} est orthonormale. Donc $f^* = f$ ■

Propriétés 3.7.1

- 1) $(\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^*$,
- 2) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$,
- 3) Si f est bijective, alors f^* est bijective et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$,
- 4) $(f^*)^* = f$,
- 5) $rg(f) = rg(f^*)$,

$$6) \ker(f^*) = (\operatorname{Im}(f))^\perp \text{ et } \operatorname{Im}(f^*) = (\ker(f))^\perp.$$

Démonstration. Les 5 premières propriétés découlent facilement de l'égalité $\langle w, f(v) \rangle = \langle f^*(w), v \rangle$. Enfin, $f^*(v) = 0$ si et seulement si pour tout $w \in E$, $0 = \langle f^*(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$ si et seulement si $v \in (\operatorname{Im}(f))^\perp$, Enfin $(\ker(f))^\perp = (\ker((f^*)^*))^\perp = ((\operatorname{Im}(f^*))^\perp)^\perp = \operatorname{Im}(f^*)$.

■

3.8 L'application orthogonale (isométries)

Définition 3.8.1 Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : E \rightarrow E$ une application, on dit que f est orthogonale ou (isométries) si:

$$\forall v, w \in E : \|f(v) - f(w)\| = \|v - w\| \quad (f \text{ conserve les distances}).$$

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie, on dit que f est une **isométrie linéaire**.

Définition 3.8.2 (Exercice) Soit $v_0 \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie linéaire. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} g : E &\rightarrow E \\ v &\mapsto g(v) = v_0 + f(v) \end{aligned}$$

est aussi une isométrie, qu'on appelle une **isométrie affine**.

Le théorème suivant caractérise les endomorphismes orthogonaux.

Théorème 3.8.1 (Exercice) Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a les équivalences suivantes.

1) f est une isométrie linéaire:

$$\forall v, w \in E : \|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|.$$

2) f conserve la norme:

$$\forall v \in E : \|f(v)\| = \|v\|.$$

3) f conserve le produit scalaire:

$$\forall v, w \in E : \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

4) Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base orthonormée de E , alors $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est aussi une base orthonormée de E .

5) f est orthogonal:

$$f^*f = id_E.$$

3.9 Matrice orthogonale

Définition 3.9.1 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonale si

$$AA^t = A^tA = I_n.$$

Proposition 3.9.1 Soit A une matrice orthogonale. Alors elle est inversible et $A^{-1} = A^t$. De plus, son déterminant est égal à 1 ou à -1.

Démonstration. Comme $A^tA = I_n = AA^t$, la matrice A est inversible et son inverse est égal à sa transposée. De plus, $\det(A^tA) = \det(A)^2 = \det(I_n) = 1$ donc $\det(A) = \pm 1$. ■

Exemple 3.9.1 Les matrices de rotation sont orthogonales. Soit θ un angle. Alors la matrice de la rotation d'angle θ de \mathbb{R}^2 est

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est orthogonale. En effet, l'identité

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

montre que l'on a

$$AA^t = A^tA = I.$$

Proposition 3.9.2 Si P est la matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ à la base $\mathcal{B}' = \{u_1, \dots, u_n\}$ de E , alors \mathcal{B}' est une base orthonormée si et seulement si $P^tP = I_n$.

Démonstration. Démonstration : le jème vecteur colonne de la matrice P représente les coordonnées du vecteur u_j dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Le coefficient $(P^t P)_{ij}$ représente donc le produit scalaire du vecteur u_i par le vecteur u_j . D'où le résultat. ■

Corollaire 3.9.1 Soit E un espace vectoriel euclidien. La matrice de passage P de la base orthonormée \mathcal{B} à la base orthonormée \mathcal{B}' de E est orthogonale ($P^{-1} = P^t$).

Théorème 3.9.1 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes.

- 1) A est orthogonale.
- 2) $\{A^1, A^2, \dots, A^n\}$ les vecteurs colonne de la matrice A forment une bases orthonormée de l'espace euclidien usuel \mathbb{R}^n .

Démonstration. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

alors

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{matrix}$$

donc

$$A^t A = \begin{pmatrix} A^1 A^1 & A^1 A^2 & \cdots & A^1 A^n \\ A^2 A^1 & A^2 A^2 & \cdots & A^2 A^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n A^1 & A^n A^2 & \cdots & A^n A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \text{ est orthogonale}) \Leftrightarrow (A^t A = I_n) \Leftrightarrow A^i A^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \langle A^i, A^j \rangle.$$

■

Proposition 3.9.3 *L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noté O_n , est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles; on l'appelle groupe orthogonal. L'ensemble des matrices de O_n qui sont de déterminant 1, noté SO_n , est un sous-groupe de O_n ; on l'appelle groupe spécial orthogonal.*

Démonstration. On vérifie que le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale et que l'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale, ce qui permet de montrer que O_n est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.

- $O_n \subset GL_n(\mathbb{R})$
- Soit $A, B \in O_n$, le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale. En effet, on a

$$\begin{aligned}(AB)^t &= B^t A^t \\ &= B^{-1} A^{-1} \\ &= (AB)^{-1}\end{aligned}$$

- L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale. En effet, on a

$$\begin{aligned}A \text{ est orthogonale} &\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \\ &\Leftrightarrow (A^{-1})^{-1} = (A^t)^{-1} \\ &\Leftrightarrow (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^t \\ &\Leftrightarrow A^{-1} \text{ est orthogonale.}\end{aligned}$$

De même pour SO_n . ■

Théorème 3.9.2 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- A est orthogonale.*
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|Ax\| = \|x\|$.*
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$.*

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) Supposons A orthogonale. On a

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^t Ax \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

(ii) \Rightarrow (iii) Supposons que

$$\|Ax\| = \|x\|$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} \langle Ax, Ay \rangle &= \frac{1}{4} \|Ax + Ay\|^2 - \frac{1}{4} \|Ax - Ay\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \|A(x + y)\|^2 - \frac{1}{4} \|A(x - y)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (i) On considère (iii) avec $x = e_i$ et $y = e_j$ des vecteurs de la base standard. Alors $\langle x, y \rangle$ est soit 0 (si $i \neq j$) soit 1 (si $i = j$), et est le coefficient I_{ij} de la matrice identité. D'autre part,

$$\langle Ax, Ay \rangle = e_i^t A^t A e_j$$

est le coefficient (i, j) de la matrice $A^t A$. Il suit que $A^t A = I$, et donc que A est orthogonale.

■

Théorème 3.9.3 Soit E et F deux espaces vectoriels euclidiens et $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a les équivalences suivantes.

i) f est orthogonale

ii) Il existe une base orthonormale \mathcal{B} de E et il existe une base orthonormale \mathcal{B}' de F tel que $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale.

Démonstration. i) \Rightarrow ii) Supposon que f est orthogonale alors f est injective et comme $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est bijective. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base orthonormale de E , alors $\mathcal{B}' = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ est une base de F et on a

$$\langle f(v_i), f(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc \mathcal{B}' une base orthonormale de F et $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = I_n$ est orthogonale.

ii) \Rightarrow i) Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ deux bases orthonormales de E et de F . Soit la matrice orthogonale

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{aligned} f(v_i) &= a_{1i}v'_1 + a_{2i}v'_2 + \cdots + a_{ni}v'_n, & \forall i \\ f(v_j) &= a_{1j}v'_1 + a_{2j}v'_2 + \cdots + a_{nj}v'_n & \forall j \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle f(v_i), f(v_j) \rangle &= a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} \\ &= \langle A^i, A^j \rangle \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

et on a

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

alors

$$\langle f(v_i), f(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle, \quad \forall i, j$$

donc f est orthogonale. ■

3.10 Série d'exercices avec solution

Exercice 01. I) Soit L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B) \end{aligned}$$

1°) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

2°) Montrer que $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$.

II) Soit E un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base orthonormée de E et $u \in E$.

Alors

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

Solution: I 1°) On a $tr(A+B) = tr(A)+tr(B)$, $tr(A) = tr(A^t)$, $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$, $(A+B)^t = A^t + B^t$, $(AB)^t = B^t A^t$.

i) $\langle A, B \rangle = tr(A^t B) = tr((A^t B)^t) = tr(B^t A) = \langle B, A \rangle$

ii) $\langle (A + \lambda C), B \rangle = tr((A + \lambda C)^t B) = tr(A^t B + \lambda C^t B) = tr(A^t B) + \lambda tr(C^t B) = \langle A, B \rangle + \lambda \langle C, B \rangle$.

$\langle A, (B + \lambda C) \rangle = tr(A^t (B + \lambda C)) = tr(A^t B + \lambda A^t C) = tr(A^t B) + \lambda tr(A^t C) = \langle A, B \rangle + \lambda \langle A, C \rangle$.

iii) $\langle A, A \rangle = tr(A^t A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0$.

v) $(\langle A, A \rangle = tr(A^t A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 0) \Leftrightarrow (a_{ij} = 0, \forall 1 \leq i, j \leq n) \Leftrightarrow (A = 0_n)$.

2°) $|\text{tr}(A)| = |\langle I_n, A \rangle| \leq \sqrt{\langle I_n, I_n \rangle} \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{n} \|A\|$.

II) Comme \mathcal{B} est une base, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

On a

$$\langle u, v_i \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v_i \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_n, v_i \rangle.$$

Or, comme $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ si $j \neq i$ et $\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1$, on a

$$\langle u, v_i \rangle = \lambda_i$$

et par conséquent

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

Exercice 02. Soit l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel. Considérons la base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 donnée une base orthonormées de \mathbb{R}^3 a partir de \mathcal{B} .

Solution: Le processus d'orthonormalisation de Schmidt donne

$$\begin{cases} w'_1 &= w_1, \\ w'_2 &= w_2 + a_{12} w'_1, \\ w'_3 &= w_3 + a_{13} w'_1 + a_{23} w'_2. \end{cases}$$

Donc on trouve

$$\begin{cases} a_{12} = -\frac{\langle w'_1, w_2 \rangle}{\|w'_1\|^2} = \frac{-2}{3} \\ a_{13} = -\frac{\langle w'_1, w_3 \rangle}{\|w'_1\|^2} = \frac{-1}{3} \\ a_{23} = -\frac{\langle w'_2, w_3 \rangle}{\|w'_2\|^2} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} w'_1 = w_1, & \|w'_1\| = \sqrt{3} \\ w'_2 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), & \|w'_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ w'_3 = \left(0, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right), & \|w'_3\| = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

alors la base orthonormées est:

$$\left\{ w''_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}w'_1, \quad w''_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}w'_2, \quad w''_3 = \sqrt{2}w'_3 \right\}.$$

Exercice 03. Soit E un espace euclidien et F et G sont des sous espace de E . Montrer que:

1°) F^\perp est un sous espace de E .

2°) $G \subset F \implies F^\perp \subset G^\perp$.

3°) $\text{vect}(F^\perp) = (\text{vect}(F))^\perp$.

4°) $E = F^\perp \oplus F$.

5°) $(F^\perp)^\perp = F$.

6°) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

7°) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Solution: 1°) $F^\perp = \{u \in E : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall v \in F\}$ est un sous espace de E ssi

$$\begin{cases} i) F^\perp \neq \phi \\ ii) \forall s, w \in F^\perp, \forall \alpha \in \mathbb{K} \implies s + \alpha w \in F^\perp. \end{cases}$$

i) $F^\perp \neq \phi$ car $0 \in F^\perp$ ($\forall v \in F, \langle 0, v \rangle = 0$)

ii) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $s, w \in F^\perp$, alors

$$(s \in F^\perp \implies \forall v \in F, \langle s, v \rangle = 0) \text{ et } (w \in F^\perp \implies \forall v \in F, \langle w, v \rangle = 0).$$

pour tout $v \in F$ on a

$$\langle s + \alpha w, v \rangle = \langle s, v \rangle + \alpha \langle w, v \rangle = 0 + \alpha 0 = 0$$

alors $s + \alpha w \in F^\perp$. De (i) et (ii) F^\perp est un sous espace de E .

2°) Supposons que $G \subset F$ et on montrons que $F^\perp \subset G^\perp$.

Soit $w \in F^\perp \Rightarrow \forall v \in F, \langle v, w \rangle = 0$. Comme $G \subset F \Rightarrow \forall v \in G, \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow w \in G^\perp$. Donc $F^\perp \subset G^\perp$.

3°) $\text{vect}(F^\perp) = (\text{vect}(F))^\perp$. (on demontre que $\text{vect}(F^\perp) \subset (\text{vect}(F))^\perp$ et $(\text{vect}(F))^\perp \subset \text{vect}(F^\perp)$).

i) $\text{vect}(F^\perp) \subset (\text{vect}(F))^\perp$?

Soit $v \in \text{vect}(F^\perp) \Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{K}, \exists v_i \in F^\perp : v = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i$.

Soit $w \in \text{vect}(F) \Rightarrow \exists \alpha_j \in \mathbb{K}, \exists w_j \in F : w = \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j$.

$\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j \rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m \lambda_i \alpha_j \langle v_i, w_j \rangle = 0$. Donc $v \in (\text{vect}(F))^\perp$, alors $\text{vect}(F^\perp) \subset (\text{vect}(F))^\perp$.

ii) $(\text{vect}(F))^\perp \subset \text{vect}(F^\perp)$?

Comme $F \subset \text{vect}(F)$ de (2°) on a $(\text{vect}(F))^\perp \subset F^\perp \subset \text{vect}(F^\perp)$. De (i) et (ii) $\text{vect}(F^\perp) = (\text{vect}(F))^\perp$.

3°)

$$(E = F^\perp \oplus F) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} i) F^\perp \cap F = \{0_E\} \\ ii) E = F^\perp + F \end{array} \right)$$

i) Soit $v \in F^\perp \cap F$, alors $v \in F^\perp$ et $v \in F$, donc $\langle v, v \rangle = 0$ implique $v = 0$. Donc $F^\perp \cap F = \{0_E\}$.

ii) F est un sous espace de E alors il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ orthonormé de F , on peut trouver une base $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ orthonormale de E . Il suffit de démontrer que $F^\perp = \text{vect}(v_{p+1}, \dots, v_n)$.

Soit $v \in F^\perp \subset E$, alors $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ tel que $\lambda_i \in \mathbb{K}, v_i \in E \forall i = 1, \dots, n$.

Pour $i = 1, \dots, p$ on a

$$\begin{aligned} \langle v, v_j \rangle &= 0 \text{ (car } v \in F^\perp \text{ et } v_j \in F) \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \lambda_i \text{ (}\forall i = 1, \dots, p) \end{aligned}$$

implique que $v = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i v_i$. Alors $F^\perp = \text{vect}(v_{p+1}, \dots, v_n)$, donc $E = F^\perp + F$. De (i) et (ii) $E = F^\perp \oplus F$.

5°) $(F^\perp)^\perp = F$. On montre que $F \subset (F^\perp)^\perp$ et $\dim(F) = \dim((F^\perp)^\perp)$.

i) Soit $v \in F$ et $w \in F^\perp$, alors $\langle v, w \rangle = 0$, donc $v \in (F^\perp)^\perp$ ce qui donne $F \subset (F^\perp)^\perp$.

ii) on a $E = F^\perp \oplus F$, alors $\dim(E) = \dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim((F^\perp)^\perp) + \dim(F)$ implique $\dim(F) = \dim((F^\perp)^\perp)$. Donc de (i) et (ii) on a $F = (F^\perp)^\perp$.

6°) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. On montre que $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.

i) $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$?

On a $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$ donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F + G)^\perp \subset G^\perp$, alors $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

ii) $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$?

Soit $v \in F^\perp \cap G^\perp$ et soit $w \in F + G$, alors comme $v \in F^\perp \cap G^\perp$ implique que $v \in F^\perp$ et $v \in G^\perp$, et comme $w \in F + G$ implique que $\exists w_F \in F$ et $\exists w_G \in G$ tel que $w = w_F + w_G$.

Donc

$$\langle v, w \rangle = \langle v, w_F + w_G \rangle = \langle v, w_F \rangle + \langle v, w_G \rangle = 0,$$

alors $v \in (F + G)^\perp$ ce qui donne $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$. Donc de (i) et (ii) on a $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

7°) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$?

De (6°) on a $(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$, alors de (5°) on a $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$. Donc $(F^\perp + G^\perp) = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 04. Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a les équivalences suivantes.

1°) f est une isométrie linéaire:

$$\forall v, w \in E : \|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|.$$

2°) f conserve la norme:

$$\forall v \in E : \|f(v)\| = \|v\|.$$

3°) f conserve le produit scalaire:

$$\forall v, w \in E : \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Solution: (1°) \Rightarrow (2°) Supposons que f est une isométrie linéaire:

$$\forall v, w \in E : \|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|.$$

Alors pour $w = 0$ on a

$$\forall v \in E : \|f(v) - f(0)\| = \|f(v)\| = \|v - 0\| = \|v\|.$$

(2°) \Rightarrow (3°) Supposons que f est conservée la norme:

$$\forall v \in E : \|f(v)\| = \|v\|.$$

Soient $u, v \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle f(v), f(w) \rangle &= \frac{1}{2} (\|f(v) - f(w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|f(v - w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|v - w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2) \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

(3°) \Rightarrow (1°) Supposons que f est conservée le produit scalaire:

$$\forall v, w \in E : \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Soient $u, v \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|f(v) - f(w)\|^2 &= \langle f(v) - f(w), f(v) - f(w) \rangle \\ &= \langle f(v), f(v) \rangle - 2 \langle f(v), f(w) \rangle + \langle f(w), f(w) \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - 2 \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2 \langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\ &= \|v - w\|^2. \end{aligned}$$

Exercice 05. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est orthogonale alors f est injective.

Solution: Soit $v \in \ker(f)$, alors

$$(f(v) = 0) \Rightarrow (\|f(v)\| = \|0\| = \|v\|) \Rightarrow (v = 0).$$

Donc f est injective.

Exercice 06. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est une matrice orthogonale.

Solution: 1) *Méthode 1:* La matrice A est orthogonale. En effet, l'identité

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

montre que l'on a

$$\begin{aligned} AA^t &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^t A = I. \end{aligned}$$

Méthode 2: A est orthogonale ssi les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale de \mathbb{R}^2 .

$$\langle A^i, A^j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned} \langle A^1, A^1 \rangle &= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, & \langle A^1, A^2 \rangle &= -\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) = 0, \\ \langle A^2, A^1 \rangle &= -\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) = 0, & \langle A^2, A^2 \rangle &= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \end{aligned}$$

Chapitre 4

Les espaces hermitiens

Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel de dimension fini sur \mathbb{C} .

4.1 Forme sesquilinéaire

4.1.1 Définitions et exemples

Définition 4.1.1 On appelle une forme sesquilinéaire sur E une application f de $E \times E$ dans \mathbb{C} vérifiant les propriétés suivantes :

- f est linéaire à droite :

$$\forall x, y, y' \in E, \text{ et } \lambda \in \mathbb{C} \text{ on a : } f(x, y + \lambda y') = f(x, y) + \lambda f(x, y')$$

- f est semi-linéaire à gauche :

$$\forall x, x', y \in E, \text{ et } \lambda \in \mathbb{C} \text{ on a : } f(x + \lambda x', y) = f(x, y) + \bar{\lambda} f(x', y)$$

Exemple 4.1.1 1) Si h et g sont deux formes \mathbb{C} -linéaires sur E , l'application :

$$f : E \times E \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) \mapsto \overline{h(x)}g(y) + \overline{g(x)}h(y),$$

est une forme sesquilinéaire sur E^2 . En effet :

$$\begin{aligned} * \quad f(x, y + \lambda y') &= \overline{h(x)}g(y + \lambda y') + \overline{g(x)}h(y + \lambda y') \\ &= \overline{h(x)}[g(y) + \lambda g(y')] + \overline{g(x)}[h(y) + \lambda h(y')] \quad (h \text{ et } g \text{ sont linéaires}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D'o\grave{u}, f(x, y + \lambda y') &= \overline{h(x)}g(y) + \lambda \overline{h(x)}g(y') + \overline{g(x)}h(y) + \lambda \overline{g(x)}h(y') \\
&= \overline{h(x)}g(y) + \overline{g(x)}h(y) + \lambda \left[\overline{h(x)}g(y') + \overline{g(x)}h(y') \right] \\
&= f(x, y) + \lambda f(x, y').
\end{aligned}$$

alors, pour $x \in E$ fixé : $f(x, y)$ est linéaire par rapport à y .

$$\begin{aligned}
* \text{ On a : } f(x + \lambda x', y) &= \overline{h(x + \lambda x')}g(y) + \overline{g(x + \lambda x')}h(y) \\
&= \overline{h(x)}g(y) + \lambda \overline{h(x')}g(y) + \overline{g(x)}h(y) + \lambda \overline{g(x')}h(y) \\
&= \overline{h(x)}g(y) + \overline{g(x)}h(y) + \lambda \left[\overline{h(x')}g(y) + \overline{g(x')}h(y) \right] \\
&= f(x, y) + \lambda f(x', y).
\end{aligned}$$

Donc, f est semi-linéaire à gauche. Alors f est une forme sesquilinéaire.

2) Soit E le \mathbb{C} -espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} . L'application

$$\begin{aligned}
f : E \times E &\longrightarrow \mathbb{C} \\
(h, g) &\longmapsto \int_0^1 \overline{h(t)}g(t)dt
\end{aligned}$$

est une forme sesquilinéaire sur E^2 . En effet :

* Pour $g \in E$. Soient $h, h' \in E, \lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned}
f(h + \lambda h', g) &= \int_0^1 \overline{(h + \lambda h')(t)} \cdot g(t)dt \\
&= \int_0^1 \overline{h(t)}g(t)dt + \lambda \int_0^1 \overline{h'(t)}g(t)dt \\
&= f(h, g) + \lambda f(h', g).
\end{aligned}$$

D'où: Ψ est semi-linéaire par rapport à la première variable.

* Pour $h \in E$. Soient $g, g' \in E, \lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$f(h, g + \lambda g') = f(h, g) + \lambda f(h, g')$$

Alors, f est une forme linéaire par rapport à la deuxième variable. Donc f est une forme sesquilinéaire sur E .

3) Supposons E de dimension finie n , et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Soit $p \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$ sont des vecteurs de E , posons :

$$f(x, y) = \overline{\lambda_1} \mu_1 + \dots + \overline{\lambda_p} \mu_p.$$

On obtient ainsi une forme sesquilinéaire sur E^2 .

4.1.2 Forme sesquilinéaire hermitienne

Définition 4.1.2 On appelle forme hermitienne sur E une forme sesquilinéaire f de $E \times E$ dans \mathbb{C} telle que:

$$\forall x, y \in E : f(y, x) = \overline{f(x, y)}$$

.

Exemple 4.1.2 Soit E le \mathbb{C} -espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} .
L'application

$$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(h, g) \longmapsto \int_0^1 \overline{h(t)}g(t)dt$$

est une forme hermitienne sur E^2 . En effet: il est clair que f est une forme sesquilinéaire, alors on montre qu'elle est hermitienne. On a pour tous $h, g \in E$

$$\overline{f(h, g)} = \overline{\int_0^1 \overline{h(t)}g(t)dt} = \int_0^1 \overline{g(t)h(t)}dt = f(g, h).$$

D'où, f est hermitienne sur E^2 .

Proposition 4.1.1 si f est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E , Alors :

- $\forall (x, y) \in E^2 : f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(y, y) + 2 \operatorname{Re}(f(x, y))$
- $\forall (x, y) \in E^2 : f(x - y, x - y) = f(x, x) + f(y, y) - 2 \operatorname{Re}(f(x, y))$
- $\forall (x, y) \in E^2 : f(x + iy, x + iy) = f(y, y) + f(x, x) - 2 \operatorname{Im}(f(x, y))$
- $\forall (x, y) \in E^2 : f(x - iy, x - iy) = f(x, x) + f(y, y) + 2 \operatorname{Im}(f(x, y))$

Démonstration. Soient $x, y \in E$

$$\begin{aligned} - f(x + y, x + y) &= f(x, x) + f(y, y) + f(x, y) + f(y, x) \\ &= f(x, x) + f(y, y) + f(x, y) + \overline{f(x, y)} \quad (f \text{ hermitienne}) \end{aligned}$$

et comme on a:

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z).$$

Donc on aura:

$$\forall (x, y) \in E^2 : f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(y, y) + 2 \operatorname{Re}(f(x, y))$$

$$\begin{aligned}
- \quad f(x-y, x-y) &= f(x, x) + f(y, y) - f(x, y) - f(y, x) \\
&= f(x, x) + f(y, y) - f(x, y) - \overline{f(x, y)} \quad (f \text{ hermitienne}) \\
&= f(x, x) + f(y, y) - 2 \operatorname{Re}(f(x, y)). \\
- \quad f(x+iy, x+iy) &= f(x, x) + f(iy, iy) + f(x, iy) + f(iy, x) \\
&= f(x, x) - i^2 f(y, y) + f(x, iy) + \overline{f(x, iy)} \quad (f \text{ hermitienne}) \\
&= f(x, x) + f(y, y) + f(x, iy) + \overline{f(x, iy)} \\
&= f(x, x) + f(y, y) + 2 \operatorname{Re}(f(x, iy)) \\
&= f(x, x) + f(y, y) + 2 \operatorname{Re}(if(x, y))
\end{aligned}$$

et comme on a :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z).$$

Donc on aura :

$$\forall (x, y) \in E^2 : f(x+iy, x+iy) = f(x, x) + f(y, y) - 2 \operatorname{Im}(f(x, y)).$$

$$\begin{aligned}
- \quad f(x-iy, x-iy) &= f(x, x) + f(iy, iy) - f(x, iy) - f(iy, x) \\
&= f(x, x) - i^2 f(y, y) - f(x, iy) - \overline{f(x, iy)} \quad (f \text{ hermitienne}) \\
&= f(x, x) + f(y, y) - f(x, iy) - \overline{f(x, iy)} \\
&= f(x, x) + f(y, y) - 2 \operatorname{Re}(f(x, iy)) \\
&= f(x, x) + f(y, y) - 2 \operatorname{Re}(if(x, y))
\end{aligned}$$

Donc on aura :

$$\forall (x, y) \in E^2 : f(x-iy, x-iy) = f(x, x) + f(y, y) + 2 \operatorname{Im}(f(x, y)).$$

■

Définition 4.1.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est hermitienne si $A^t = \bar{A}$.

Notons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ cela signifie que : $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Exemple 4.1.3 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Donc H est hermitienne car : $A^t = \bar{A}$

4.1.3 Représentation matriciel d'une forme sesquilinéaire hermitienne

Définition 4.1.4 Soit f une forme hermitienne sur E , et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, une base de E . La matrice de f dans la base \mathcal{B} est la matrice :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ où } \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, a_{ij} = f(e_i, e_j).$$

Proposition 4.1.2 Soit f une forme hermitienne sur E , et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E . On a

- La matrice A est hermitienne.
- Soient $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, et $Y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$. On note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$f(X, Y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{x}_i y_j = \bar{X}^t A Y.$$

Démonstration. - Trivial.

- Soient $X, Y \in E$ on a : $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, et $Y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$. Donc

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{x}_i y_j \quad \text{où } a_{ij} = f(e_i, e_j) \\ &= \bar{X}^t A Y \end{aligned}$$

■

Exemple 4.1.4 Soit la forme hermitienne définie sur \mathbb{C}^2 par :

$$f(x, y) = \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_2 x_1.$$

La matrice de f dans la base canonique de \mathbb{C}^2 est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque

$$\bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_2 x_1 = (\bar{x}_1 \bar{x}_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

4.1.4 Changement de base

Proposition 4.1.3 Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n , f une forme sesquilinéaire sur E , et soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , A, A' sont respectivement les matrices de f par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Alors on a :

$$A' = \overline{P^t} A P = P^* A P$$

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}, \mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ deux bases de E . Alors $\forall X \in E$ avec $X = \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n x'_i w_i$. On a $X = P X'$. Comme on a

$$\forall (X, Y) \in E \times E : f(X, Y) = \overline{X^t} A' Y' = \overline{X^t} A Y = \overline{(P \cdot X')^t} A (P Y') = \overline{X'^t P^t} A P Y'.$$

Alors on aura

$$\forall (X', Y') \in E \times E : \overline{X'^t} \cdot A' \cdot Y' = \overline{X'^t} (\overline{P^t} A \cdot P) \cdot Y'.$$

D'où,

$$A' = \overline{P^t} A P$$

■

4.2 Forme quadratique hermitienne

4.2.1 Définitions et propriétés

Définition 4.2.1 Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel, f une forme sesquilinéaire hermitienne. Alors, l'application

$$q : E \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto f(x, x)$$

est appelée, la forme quadratique hermitienne associée à f .

Exemple 4.2.1 *L'application*

$$\begin{aligned} q : \quad \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, z) &\mapsto |x|^2 - |y|^2 + 3|z|^2 \end{aligned}$$

est une forme quadratique associée à la forme sesquilinéaire hermitienne :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C} \\ ((x_1, y_1, x_3), (x_2, y_2, y_3)) &\mapsto \overline{x_1}y_1 - \overline{x_2}y_2 + 3\overline{x_3}y_3 \end{aligned}$$

Définition 4.2.2 Soit q une forme quadratique hermitienne sur E . L'application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par :

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy))$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne appelée forme polaire hermitienne de q .

Exemple 4.2.2 Soit $E = \mathbb{C}^2$. On définit $q : E \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$q(x_1, x_2) = 4|x_1|^2 + 2\operatorname{Re}((2-i)\overline{x_1}x_2) - 5|x_2|^2$$

dont la forme hermitienne associée est :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2), (y_1, y_2) &\mapsto 4\overline{x_1}y_1 + (2-i)\overline{x_1}y_2 + (2+i)\overline{x_2}y_1 - 5\overline{x_2}y_2 \end{aligned}$$

Proposition 4.2.1 Soient f une forme hermitienne sur E , et q la forme quadratique hermitienne associée.

Alors, $\forall x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$.
- $f(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy))$.

Démonstration. Soient $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$

- On a

$$\begin{aligned} q(\lambda x) &= f(\lambda x, \lambda x) \\ &= \overline{\lambda}\lambda f(x, x) \\ &= |\lambda|^2 q(x). \end{aligned}$$

• D'après la proposition 4.1.1 on a :

$$\begin{aligned} - q(x+y) &= f(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + 2\operatorname{Re}(f(x, y)) \\ - q(x-y) &= f(x-y, x-y) = q(x) + q(y) - 2\operatorname{Re}(f(x, y)) \\ - q(x+iy) &= f(x+iy, x+iy) = q(x) + q(y) - 2\operatorname{Im}(f(x, y)) \\ - q(x-iy) &= f(x-iy, x-iy) = q(x) + q(y) + 2\operatorname{Im}(f(x, y)) \end{aligned}$$

Donc, on aura

$$\begin{aligned} q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy) &= 4(\operatorname{Re}(f(x, y)) + i\operatorname{Im}(f(x, y))) \\ &= 4f(x, y). \end{aligned}$$

Alors

$$\forall x, y \in E, \quad f(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy)).$$

■

Remarque 4.2.1 La forme polaire hermitienne montre que si deux formes sesquilineaires hermitiennes sont associées à une même forme quadratique hermitienne, alors elles sont égales.

Exemple 4.2.3 Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2$, avec $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ alors

$$f(z_1, z_2) = \overline{x_1}x_2 - \overline{y_1}y_2 + \frac{1}{2}\overline{y_1}x_2 + \frac{1}{2}\overline{x_1}y_2$$

est une forme sesquilineaire hermitienne de la forme quadratique

$$q : z = (x, y) \mapsto |x|^2 - |y|^2 + \frac{1}{2}\overline{y}x + \frac{1}{2}y\overline{x}.$$

4.2.2 Représentation Matricielle d'une forme quadratique

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension fini n , q une forme quadratique sur E et f la forme sesquilineaire hermitienne associée à q .

Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base de E . Alors $\forall X, Y \in E$ on a

$$f(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_j a_{ij}$$

où $a_{ij} = f(v_i, v_j) \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. D'où $\forall X \in E, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned}
 q(X) &= f(X, X) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i x_j a_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i a_{ii} + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \bar{x}_i x_j a_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 a_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\bar{x}_i x_j a_{ij} + \bar{x}_j x_i a_{ji}) \\
 &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 a_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\bar{x}_i x_j a_{ij} + x_i \bar{x}_j a_{ij}) \quad (f \text{ est hermitienne}).
 \end{aligned}$$

Et comme on a $\bar{x}_i x_j a_{ij} + \bar{x}_j x_i a_{ij} = 2 \operatorname{Re}(\bar{x}_i x_j a_{ij})$, donc

$$\forall X \in E, \quad q(X) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 a_{ii} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Re}(\bar{x}_i x_j a_{ij}).$$

Remarque 4.2.2 Les coefficients diagonaux $a_{ii}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, sont réels.

Définition 4.2.3 Soit f une forme hermitienne et q la forme quadratique hermitienne associée.

- On appelle rang de q le rang de la matrice de f dans n'importe quelle base de E .
- On dit que f ou q est non dégénérée si f est de rang n .

Exemple 4.2.4 La matrice de la forme quadratique

$$q : Z = (x, y) \mapsto |x|^2 - |y|^2 + 2i\bar{y}x - 2iy\bar{x}$$

est

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & -1 \end{pmatrix}$$

Son rang est 2.

4.2.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz et Minkowski

Théorème 4.2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit f une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur $E \times E$ et φ sa forme quadratique. Alors

$$\forall u, v \in E, \quad |f(u, v)| \leq \sqrt{\varphi(u) \varphi(v)}.$$

Dans le cas où f est définie positive, on a égalité si et seulement si x et y sont liées.

Démonstration. Soit $(u, v) \in E^2$, la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie pour tout complexe α par :

$$P(\alpha) = \varphi(\alpha u - v) = |\alpha|^2 \varphi(u) - 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha} f(u, v)) + \varphi(v) \geq 0,$$

est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 dont les valeurs sont positives puisque la forme quadratique φ est positive. En choisissant $\alpha = te^{i\theta}$, où t est un réel, et θ désigne un argument de f , on a :

$$P(\alpha) = t^2 \varphi(u) - 2t |f(u, v)| + \varphi(v)$$

Alors se présente deux cas :

- Si $\varphi(u) \neq 0$, alors $\varphi(u) > 0$ et le discriminant réduit du trinôme $P(\alpha)$ est $(f(u, v))^2 - \varphi(u) \varphi(v) \leq 0$. D'où le résultat.
- Si $\varphi(u) = 0$, on a $\forall \alpha \in \mathbb{R}, P(\alpha) = \varphi(v) - 2t f(u, v) \geq 0$. Si $f(u, v) \neq 0$, $\alpha \mapsto P(\alpha)$ est une fonction polynomiale de degré un et donc change de signe, d'où $f(u, v) = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

Supposons que f est définie positive. Si les deux vecteurs u, v sont liés, alors $u = \beta v$ où $\beta \in \mathbb{R}$ donc

$$(f(u, v))^2 = \beta^2 f(u, u) = \beta^2 (\varphi(u))^2 = \varphi(u) \varphi(\beta u) = \varphi(u) \varphi(v).$$

Réciproquement, si $(f(u, v))^2 = \varphi(u) \varphi(v)$, alors dans le cas où $\varphi(v) = 0$, on a $v = 0$ et (u, v) est liée, dans le cas où $\varphi(v) \neq 0$, on a la fonction polynomiale $P(\alpha)$ a un discriminant nul, d'où l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Comme $P(\lambda) = \varphi(u + \lambda v)$, $u + \lambda v = 0$ puisque f est définie positive.

■

Théorème 4.2.2 (Inégalité de Minkowski) *Soit f une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur $E \times E$ et φ sa forme quadratique. Alors*

$$\forall u, v \in E, \quad \sqrt{\varphi(u+v)} \leq \sqrt{\varphi(u)} + \sqrt{\varphi(v)}.$$

Il y a égalité si et seulement si u, v sont positivement liées; c'est à dire $u = 0$ ou $u \neq 0$, et $v = \alpha u$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration. On à

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + 2\operatorname{Re}(f(u, v)) + \varphi(v) \geq 0,$$

comme

$$\operatorname{Re}(f(u, v)) \leq |f(u, v)| \leq \sqrt{\varphi(u)\varphi(v)},$$

alors

$$\begin{aligned} \varphi(u+v) &\leq \varphi(u) + 2\sqrt{\varphi(u)\varphi(v)} + \varphi(v) \\ &= \left(\sqrt{\varphi(u)} + \sqrt{\varphi(v)}\right)^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{\varphi(u+v)} \leq \sqrt{\varphi(u)} + \sqrt{\varphi(v)}$$

■

Exemple 4.2.5 *Si $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Soit la forme sesquilinéaire hermitienne*

$$\begin{aligned} f : E \times E &\rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\mapsto f(u, v) = \int_0^{2\pi} \overline{u(x)}v(x)dx \end{aligned}$$

la forme quadratique hermitienne associée à f est

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow \mathbb{C} \\ u &\mapsto \varphi(u) = \int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Alors l'inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski sont respectivement

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{u(x)}v(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx} \sqrt{\int_0^{2\pi} |v(x)|^2 dx}$$

et

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} |u(x) + v(x)|^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx} + \sqrt{\int_0^{2\pi} |v(x)|^2 dx}.$$

4.2.4 Produit scalaire hermitien

Définition 4.2.4

- On appelle produit scalaire hermitien sur E une forme sesquilinéaire f de $E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ hermitienne et définie positive. On le note généralement par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou $f(\cdot, \cdot)$.
- Un espace vectoriel sur \mathbb{C} , muni d'un produit scalaire hermitien est appelé Espace préhilbertien complexe.

Exemple 4.2.6 Soit E le \mathbb{C} -espace vectoriel des applications continues de $[0, 2\pi]$ dans \mathbb{C} .

L'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (h, g) &\longmapsto \int_0^{2\pi} \overline{h(t)}g(t)dt \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur E^2 .

* On a déjà montré que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sesquilinéaire, alors il suffit de montrer qu'il est hermitien et défini positif.

* On a

$$\langle g, h \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{g(t)}h(t)dt = \langle h, g \rangle.$$

Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est hermitienne.

$$\langle h, h \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{h(t)}h(t)dt = \int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt \geq 0$$

et de plus

$$\langle h, h \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \overline{h(t)}h(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt = 0$$

et comme $|h(t)|^2$ continue positif sur E alors, $|h(t)|^2 = 0$ sur E . Donc on aura, $h(t) = 0$, $\forall t \in [0, 2\pi]$. Finalement $h = 0$. D'où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire hermitien sur E .

4.3 Espaces hermitiens

4.3.1 Définition et exemples

Définition 4.3.1 Soit E Un espace vectoriel de dimension fini sur \mathbb{C} , muni d'un produit scalaire hermitien. Alors E est appelé Espace vectoriel hermitien.

Exemple 4.3.1 L'espace vectoriel \mathbb{C}^n , muni du produit scalaire canonique défini, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, et $y = (y_1, \dots, y_n)$, par

$$\langle x, y \rangle = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \dots + \overline{x_n}y_n = \sum_{i=1}^n \overline{x_i}y_i,$$

est un espace hermitien appelé espace hermitien canonique de dimension n .

Remarque 4.3.1 On note que les bonnes propriétés du produit scalaire euclidien restent valables aussi pour la plupart pour le produit scalaire hermitien comme Inégalité de Cauchy-Schwarz, Inégalité de Minkowski, Algorithme de Gram-Schmidt, théorème de Pythagore et la projection orthogonale

4.3.2 Norme associée à un produit scalaire hermitien

Définition 4.3.2 Soit E est un espace vectoriel hermitien. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire hermitien et définie positive sur $E \times E$. On appelle norme associée à cet produit scalaire l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \end{aligned}$$

ayant les propriétés suivantes:

- i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall u \in E, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|,$
- ii) $\forall u, v \in E, \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2.$
- iii) $\forall u, v \in E, \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}) ;$
- iv) $\forall u \in E, \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$
- v) $\forall u, v \in E, \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$

4.3.3 Endomorphisme d'un espace hermitien

Isomorphisme sesquilinéaire entre E et E^*

Théorème 4.3.1 Soit E un espace hermitien de produit scalaire hermitien noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

L'application

$$\begin{aligned}\psi : E &\rightarrow E^* \\ x &\mapsto \langle \cdot, x \rangle\end{aligned}$$

est un isomorphisme sesquilinéaire entre E et son dual E^* .

Démonstration. Soit $x \in E$, si $\psi(x) = 0$, alors ($x \in \ker \psi$) on a

$$\begin{aligned}\langle \cdot, x \rangle = 0 &\Rightarrow \forall y \in E, \langle y, x \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \\ &\Rightarrow x = 0.\end{aligned}$$

Donc ψ est injective, et comme E et E^* ont même dimension, alors ψ est un isomorphisme sesquilinéaire. ■

Endomorphisme adjoint

Proposition 4.3.1 Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme u de E , il existe un unique endomorphisme v de E , tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

Dans ce cas, v s'appelle l'adjoint de u noté u^* .

Démonstration. Pour chaque $y \in E$, on considère la forme linéaire ϕ sur E définie par :

$$\forall x \in E, \phi_y(x) = \langle y, u(x) \rangle.$$

Puisque tout produit hermitien est non dégénéré et puisque E est de dimension finie, alors l'application

$$\begin{aligned}\psi : E &\rightarrow E^* \\ z &\mapsto \psi(z)\end{aligned}$$

Où $\forall x \in E, \psi(z)(x) = \langle z, x \rangle$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On $a : \phi_y \in E^*$, donc il existe un unique $z_y \in E$, tel que : $\psi(z_y) = \phi_y$, donc si pour chaque $y \in E, u^*(y) = z_y$, considérons l'application $u^* : E \rightarrow E$. Alors u^* , est linéaire, en effet, soient $y_1, y_2 \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \langle x, u^*(y_1 + \lambda y_2) \rangle &= \langle u(x), y_1 + \lambda y_2 \rangle \\ &= \langle x, u^*(y_1) \rangle + \lambda \langle x, u^*(y_2) \rangle \\ &= \langle x, u^*(y_1) \rangle + \langle x, \lambda u^*(y_2) \rangle \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in E, \langle x, u^*(y_1 + \lambda y_2) - \lambda u^*(y_2) - u^*(y_1) \rangle = 0,$$

par suite

$$u^*(y_1 + \lambda y_2) - \lambda u^*(y_2) - u^*(y_1) = 0.$$

Donc u^* est linéaire. Et on a

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \phi_y(x) = \psi(z_y)(x) &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle y, u(x) \rangle = \langle z_y, x \rangle \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle y, u(x) \rangle = \langle u^*(y), x \rangle \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \overline{\langle u(x), y \rangle} = \overline{\langle x, u^*(y) \rangle} \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle. \end{aligned}$$

Montrons l'unicité de u^* , soit w un autre endomorphisme de E , tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, w(y) \rangle$$

alors, on aura

$$\forall x, y \in E, \langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, w(y) \rangle,$$

ainsi on déduit que

$$\forall y \in E, w(y) = u^*(y).$$

■

Proposition 4.3.2 Soit E un espace hermitien. Alors on a

$$1) \forall u \in \mathcal{L}(E), u^{**} = u.$$

$$2) \forall u, v \in \mathcal{L}(E), (u + v)^* = u^* + v^*.$$

$$3) \forall u \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{C}, (\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*.$$

$$4) \forall u, v \in \mathcal{L}(E), (v \circ u)^* = u^* \circ v^*.$$

5) Si β est une base orthonormale de E et si $A = M_\beta(u)$, alors on a

$$M_\beta(u^*) = A^*$$

Démonstration.

1) Soit $w = u^{**} = (u^*)^*$, alors w est l'unique endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x, y \in E, \langle u^*(x), y \rangle = \langle x, w(y) \rangle,$$

or, par définition de l'adjoint, on a

$$\forall x, y \in E, \langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Donc $u^{**} = u$.

2) $\forall x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \langle (u + v)^*(x), y \rangle &= \langle x, (u + v)(y) \rangle \\ &= \langle x, u(y) \rangle + \langle x, v(y) \rangle \\ &= \langle u^*(x), y \rangle + \langle v^*(x), y \rangle \\ &= \langle (u^* + v^*)(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Donc $(u + v)^* = u^* + v^*$.

3) Se démontre de la même manière que 2.

$$\begin{aligned} 4) \forall x, y \in E, \text{ on a } \langle (v \circ u)^*(x), y \rangle &= \langle x, (v \circ u)(y) \rangle = \langle x, v(u(y)) \rangle = \langle v^*(x), u(y) \rangle = \\ &= \langle u^*(v^*(x)), y \rangle = \langle (u^* \circ v^*)(x), y \rangle \end{aligned}$$

Donc $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

5) Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, et $B = M(u^*, \beta) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on sait que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle, \text{ et } b_{ij} = \langle e_i, u^*(e_j) \rangle,$$

on aura

$$b_{ij} = \langle e_i, u^*(e_j) \rangle = \langle u(e_i), e_j \rangle = \overline{\langle e_j, u(e_i) \rangle} = \overline{a_{ij}}.$$

Donc, $B = \bar{A}^t = A^*$.

■

Proposition 4.3.3 Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E , alors

- 1) $\ker(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$.
- 2) $\text{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$.
- 3) Si F est un sous-espace de E stable par u , alors F^\perp est stable par u^* .

Démonstration.

1) Soit $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} y \in \ker(u^*) &\Leftrightarrow u^*(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \langle u^*(y), x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \langle y, u(x) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in \text{Im}(u)^\perp. \end{aligned}$$

Donc $\ker(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$.

2) D'après 1., on a $\ker(u) = \ker(u^*) = \text{Im}(u^*)^\perp$ Donc, on aura $\ker(u)^\perp = \text{Im}(u^*)$.

3) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Vérifions que F^\perp est stable par u^* , pour cela soient $y \in F^\perp$, et $x \in F$, alors on a $\langle u^*(y), x \rangle = \langle y, u(x) \rangle = 0$ (car $u(x) \in F$ et $y \in F^\perp$). Donc F^\perp est stable par u^* .

■

Endomorphisme unitaire

Dans ce paragraphe, n est un entier strictement positif. On suppose que \mathbb{C}^n est muni de son produit scalaire canonique .

Définition 4.3.3 Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E . On dit que u est unitaire, si $u^*u = Id_E$.

Remarque 4.3.2

- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire, si $A^*A = Id_n$.
- Soit \mathcal{B} une base orthonormale de E et soit $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, alors

$$(u \text{ est unitaire}) \Leftrightarrow (A \text{ est unitaire}).$$
- Tout endomorphisme unitaire est inversible et on a $u^{-1} = u^*$.

Proposition 4.3.4 Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) u est unitaire,
- 2) $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|,$
- 3) $\forall x \in E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$

Démonstration. 1) \Rightarrow 2). Supposons que u est unitaire, donc pour tout $x \in E, u^*(u(x)) = x$. Soit $x \in E$, alors on a

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^*(u(x)), x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

2) \Rightarrow 3). Supposons que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

Soient $x, y \in E$, alors, d'après l'identité de polarisation, on a :

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|u(x) + i^k u(y)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|u(x) + u(i^k y)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|u(x + i^k y)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2 = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

3) \Rightarrow 1). Supposons que

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Soient $x, y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle &\Rightarrow \forall x, y \in E, \quad \langle u^*(u(x)), y \rangle = \langle x, y \rangle \\ &\Rightarrow \forall x, y \in E, \quad \langle (u^*u)(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \\ &\Rightarrow \forall x, y \in E, \quad \langle (u^*u)(x) - x, y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Fixons $x \in E$, alors on aura

$$\forall y \in E, \langle (u^*u)(x) - x, y \rangle = 0.$$

Le produit hermitien est non dégénéré, donc on aura $x \in E, (u^*u)(x) - x = 0$. Donc pour tout $x \in E$, on a $(u^*u)(x) = x$. D'où le résultat ■

Remarque 4.3.3 Soit u un endomorphisme unitaire de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u , alors $|\lambda| = 1$. En effet

$$u(x) = \lambda x \implies \|u(x)\| = |\lambda| \|x\| = \|x\|.$$

D'où $|\lambda| = 1$.

Endomorphisme normal

Définition 4.3.4 Soit E un espace hermitien. On dit qu'un endomorphisme u de E est normal, si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Remarque 4.3.4

- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite normale, si $A^*A = AA^*$.
- Soient E un espace hermitien, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de E , u un endomorphisme de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, alors

$$(u \text{ est normal}) \Leftrightarrow (A \text{ est normal}).$$

- Si u est un endomorphisme normal, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda Id_E - u$ est normal.

Exercice 4.3.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ normale, $\lambda \in \mathbb{C}$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que

$$(AX = \lambda X) \Leftrightarrow (X^*A = \lambda X^*).$$

Démonstration. Supposons que $AX = \lambda X$. On a

$$\begin{aligned} \|A^*X - \bar{\lambda}X\|^2 &= (A^*X - \bar{\lambda}X)^*(A^*X - \bar{\lambda}X) \\ &= (X^*A - \lambda X^*)(A^*X - \bar{\lambda}X) \\ &= X^*AA^*X - \bar{\lambda}X^*AX - \lambda X^*A^*X + \lambda\bar{\lambda}X^*X \\ &= X^*A^*AX - \bar{\lambda}X^*AX - \lambda X^*A^*X + \lambda\bar{\lambda}X^*X \\ &= (X^*A^* - \bar{\lambda}X^*)(AX - \lambda X) \\ &= (AX - \lambda X)^*(AX - \lambda X) \\ &= \|AX - \lambda X\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

d'où $A^*X = \bar{\lambda}X$, puis $X^*A = A^*X = (\bar{\lambda}X)^* = \lambda X^*$.

Pour la réciproque, appliquer le résultat précédent à $(A^*, \bar{\lambda}, X)$ au lieu de (A, λ, X) . ■

Proposition 4.3.5 Soit u un endomorphisme normal de E , alors

- 1) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
- 2) $\ker(u) = \ker(u^*)$.
- 3) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ker(\lambda Id_E - u) = \ker(\lambda Id_E - u^*)$.

Démonstration.

1) Soit $x \in E$, alors on a

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^*(u(x)), x \rangle = \langle u(u^*(x)), x \rangle = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = \|u^*(x)\|^2.$$

2) Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in \ker(u) &\Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow \|u(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|u^*(x)\| = 0 \Leftrightarrow u^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(u^*). \end{aligned}$$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, puisque $u^*(u) = u(u^*)$, alors on voit facilement, par un simple calcul, qu'on a aussi $(\lambda Id_E - u)^*(\lambda Id_E - u) = (\lambda Id_E - u)(\lambda Id_E - u)^*$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'endomorphisme $(\lambda Id_E - u)$ est normal.

■

Exercice 4.3.2 Soient E un espace hermitien, f un endomorphisme normal de E , tel que

$$\text{im}(f) = (\ker(f))^\perp.$$

Si g est un autre endomorphisme normal de E , démontrer que

$$g \circ f = 0 \iff f \circ g = 0.$$

Démonstration. Il suffit clairement de démontrer une seule implication. On prend f et g normaux, et on suppose $f \circ g = 0$. Alors, $\text{im}(g) \subset \ker(f) = (\text{im}(f))^\perp$. On passe à l'orthogonal dans cette relation, ce qui inverse l'ordre de l'inclusion

$$\text{im}(f) \subset \text{im}(g)^\perp = \ker(g).$$

Donc $g \circ f = 0$. ■

Exercice 4.3.3 Soient E un espace hermitien, f un endomorphisme normal de E , λ, ν deux valeurs propres de f telles que $\lambda \neq \nu$, $x \in \text{SEP}(f, \lambda)$, $y \in \text{SEP}(f, \nu)$.

Montre $\langle x, y \rangle = 0$.

$\text{SEP}(f, \lambda)$ est le sous espace propre pour f associé à la valeur propre λ . $\text{SEP}(f, \nu)$ est le sous espace propre pour f associé à la valeur propre ν .

Démonstration. Puisque $f - \lambda e$ est normal, on a, d'après la proposition 4.3.5

$$\|(f - \lambda e)^*(x)\| = \|(f - \lambda e)(x)\| = 0,$$

d'où $f^*(x) = \bar{\lambda}x$.

$$\begin{cases} \langle f^*(x), y \rangle = \langle \bar{\lambda}x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle f^*(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \langle x, \nu y \rangle = \nu \langle x, y \rangle \end{cases},$$

d'où, puisque $\lambda \neq \nu$ alors $\langle x, y \rangle = 0$. ■

Théorème 4.3.2 Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme normal de E , il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u .

Endomorphisme hermitien

Définition 4.3.5 Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E . On dit que u est hermitien (ou auto-adjoint), s'il vérifié les conditions équivalents :

- $u^* = u$.
- $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Remarque 4.3.5 Soit β une base orthonormale de E , et soit $A = M_\beta(u)$, alors

$$(\text{ } u \text{ est hermitien }) \Leftrightarrow (A \text{ est hermitien } , \quad (A^* = A)).$$

Tout endomorphisme hermitien est normal.

Proposition 4.3.6 Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme hermitien de E . Alors toutes les valeurs propres de u sont réelles.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u , alors il existe $x_0 \in E$, tel que $u(x_0) = \lambda x_0$. Donc, on aura

$$\begin{aligned} \langle u(x_0), x_0 \rangle &= \langle x_0, u^*(x_0) \rangle \Rightarrow \langle u(x_0), x_0 \rangle = \langle x_0, u(x_0) \rangle \quad (\text{ car } u^* = u) \\ &\Rightarrow \langle \lambda x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, \lambda x_0 \rangle \\ &\Rightarrow \bar{\lambda} \|x_0\|^2 = \lambda \|x_0\|^2 \\ &\Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda \quad (\text{ car } \|x_0\|^2 \neq 0) \\ &\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

4.4 Série d'exercices avec solution

Exercice 01. Est-ce que les matrices hermitiennes forment un sous-C-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$?, montrer qu'elles forment un sous-espace vectoriel réel, et calculer la dimension (sur \mathbb{R}) de ce sous-espace.

Solution: L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$, contient la matrice nulle, stable par addition, mais n'est pas stable par multiplication par les scalaires complexes par exemple on a : I_n est une matrice hermitienne mais iI_n n'est pas hermitienne. Donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel complexe de $M_n(\mathbb{C})$. Par contre comme L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$ est stable par multiplication par les scalaires réels.

Donc c'est un sous-espace vectoriel réel. Notons $E_{k,l}$ la matrice élémentaire qui a le coefficient 1 en k-ème ligne et l-ème colonne, et des coefficients 0 partout .

Alors les $E_{k,k}$ pour $k = 1, \dots, n$, les $E_{k,l} + E_{l,k}$, et les $i(E_{k,l} - E_{l,k})$ pour $1 \leq k < l \leq n$, forment ensemble une base de L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$ sur \mathbb{R} .

En effet toute matrice hermitienne $H = (h_{k,l})$, (avec $h_{k,k}$ réel et $h_{k,l} = \overline{h_{l,k}}$, pour $k \neq l$) s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire à coefficients réels de ces matrices :

$$H = \sum_{k=1}^n h_{k,k} E_{k,k} + \sum_{1 \leq k < l \leq n} \operatorname{Re}(h_{k,l}) (E_{k,l} + E_{l,k}) + \sum_{1 \leq k < l \leq n} i \operatorname{Im}(h_{k,l}) (E_{k,l} - E_{l,k}).$$

Le décompte des éléments de la base montre que la dimension de L'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(\mathbb{C})$ est n^2 .

Exercice 02. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \quad \langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(\overline{A^t} B).$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire hermitien.

Solution:

- On a déjà montré que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est hermitien, alors il suffit de montrer qu'il est défini positif.

- Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ avec $A = (a_{ij}) \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle A, A \rangle &= \text{tr}(\overline{A^t} \cdot A) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_{ji}} \cdot a_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ji}|^2. \end{aligned}$$

Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positif. Supposons que $A \neq 0$ alors $\exists i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que : $a_{i_0 j_0} \neq 0$, et par suite $\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_{ji}} \cdot a_{ji} \neq 0$, d'où par on obtient que si $\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0$. Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien.

Exercice 03.

Soit $E = l^2$ ensemble des suites complexes, carrée sommables i.e. :

$$\sum |u_n|^2 \leq \infty,$$

l'application définie par :

$$\forall U, V \in E, \quad \langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{u_i} v_i$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit sur E un produit scalaire hermitien.

Solution:

En effet, on a déjà montré que $\sum_{i=1}^{+\infty} \overline{u_i} v_i$ est une forme sesquilinéaire hermitienne. Alors il suffit de montrer qu'elle est définie positive.

$$\forall U \in E, \quad \langle U, U \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \overline{u_i} u_i = \sum_{i=1}^{+\infty} |u_i|^2 \geq 0$$

donc elle est positive, et de plus

$$\langle U, U \rangle = 0 \Leftrightarrow u_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, \infty\}.$$

Alors est bien définie positive. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Exercice 04.

Soit E un espace vectoriel hermitien, $(u, v) \in E^2$. Montrer

$$\|u + v\| \|u - v\| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Étudier le cas d'égalité.

Solution:

En notant $x = u + v, y = u - v$, on a

$$\begin{aligned} \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u + v\| \|u - v\| &= \frac{1}{4} \|x + y\|^2 + \frac{1}{4} \|x - y\|^2 - \|x\| \|y\| \\ &= \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2 - \|x\| \|y\| \\ &= \frac{1}{2} (\|x\| - \|y\|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Il y'a égalité si et seulement si $\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) = 0$.

Exercice 05.

1. Soient E un espace hermitien, f endomorphisme de E , $x \in E$. Montrer

$$\langle x, f(x) \rangle^2 \leq \langle x, f^2(x) \rangle \|x\|^2.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(\mathbb{C}), X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer

$$|X^* A^* B Y|^2 \leq (X^* A^* A X)(Y^* B^* B Y)$$

Solution:

1. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle x, f(x) \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|f(x)\|^2 = \|x\|^2 \langle x, f^* \circ f(x) \rangle = \langle x, f^2(x) \rangle \|x\|^2.$$

2. En effet, On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à AX, BY dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$ muni de son produit scalaire canonique, ainsi,

$$|X^* A^* B Y|^2 \leq (X^* A^* A X)(Y^* B^* B Y)$$

Exercice 06.

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_p(\mathbb{C})$, $f \in \mathcal{L}(M_{n,p}(\mathbb{C}))$ défini par

$$\forall X \in (M_{n,p}(\mathbb{C})), f(X) = AX - XB$$

Déterminer f^* . ($M_{n,p}(\mathbb{C})$ est muni du produit scalaire hermitien canonique).

Solution:

Il est clair que f est linéaire. On a pour tout (X, Y) de $M_{n,p}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \langle f(X), Y \rangle &= \langle AX - XB, Y \rangle \\ &= \operatorname{tr}((AX - XB)^* Y) \\ &= \operatorname{tr}(X^* A^* Y) - \operatorname{tr}(B^* X^* Y) \\ &= \operatorname{tr}(X^* A^* Y - X^* Y B^*) \\ &= \operatorname{tr}(X^* (A^* Y - Y B^*)) \\ &= \langle X, A^* Y - Y B^* \rangle \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} g : M_{n,p}(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{C}) \\ X &\longrightarrow A^* X - X B^* \end{aligned}$$

il est clair que g est linéaire et

$$\forall (X, Y) \in (M_{n,p}(\mathbb{C}))^2, \langle f(X), Y \rangle = \langle X, g(Y) \rangle,$$

donc g est l'adjoint de f ainsi,

$$\begin{aligned} f^* : M_{n,p}(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{C}) \\ X &\longrightarrow A^* X - X B^* \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] J. M. Arnaudiès et H. Fraysse. Cours de mathématiques-1, Algèbre, Dunod, 1987.
- [2] J. M. Arnaudiès et J. Lelong-Ferrand. Cours de mathématiques, tome 1 (Algèbre), Dunod, 2003.
- [3] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet. Exercices d'algèbre, Librairie Armand Colin, 1971.
- [4] F. Dehame, D. Clénet. Algèbre générale exercices corrigés, Support Livre, 1995.
- [5] C. Deschamps et A. Warusfel. Mathématiques. Cours et exercices corrigés, Dunod.
- [6] J. Dixmier. Cours de mathématiques du premier cycle, Gauthier-Villars, 1976.
- [7] S. Gourari. Algèbre-linéaire cours et exercices résolus, OPU, 1988.
- [8] X. Gourdon. Les maths en tête: Algèbre, Ellipses, 2009.
- [9] S. Lipschutz. Algèbre linéaire, cours et problèmes, Série Schaum, 1973.
- [10] F. Liret et D. Martinais. Mathématiques pour le DEUG, Algèbre, 1ère année, Dunod, 1997.
- [11] J.-M. Monier. Algèbre et géométrie, 1ère année, Dunod, 1996.
- [12] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. Cours de mathématiques spéciales, algèbre, Vol. 1, Masson, 1993.