REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Solutions de quelques EDP linéaires et régularité

Présentée par :

M^{elle} Ben Alia Soumia

ABDELKEBIR SAAD	M.C.B,	Université de M'sila	**Président**.
BOUGHERARA BRAHIM	M.C.A,	Université de M'sila	**Encadreur**.
BOUAFIA DAHMANE	M.C.A,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Nous aimerions au premier lieu remercier notre dieu **Allah** qui nous donne la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens tout à remercier Monsieur **Bougherrara Brahim** d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beaucoups de patience, le serieux et la compétence. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes. Je le remercie vivement pour ses conseils, ses corrections et ses orientations.

Nous tenons aussi à exprimer mes remerciements les plus respectueux à **messieurs les membres de jury**.

Mes sincères remerciements à **mes parents** qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements qu'ils trouvent dans la réalisation de ce travail.

Enfin, mes remerciements vont aussi à tous les **membres du département de Mathématiques** de l'université Mohammed Boudiaf de M'sila, les **enseignants**, ainsi que tous **mes collègues**, **amis**.

اهداء

بعد الحمد و الشكر لله سبحانه و تعالى اهدي ثمرة جهدي المتواضع إلى

أغلى الناس سندي في الحياة إلى الذي رباني وأحاطني برعايته وحبه ودعواته الى أبي الغالي "*محمد* ".

الى منبع الحنان التي غمرتني بحبها وعطفها وحنانها إلي الحضن الدافئ

إلى من زرعت الأمل في قلبي إليك يا أمي الحبيبة "*أمباركة* ".

إلى أقرب الناس إلى قلبي و روحي اخوتي (عبد القادر، *بلال*، *يوسف*) والى من تقاسمت معهم حلو الحياة ومرها حبيباتي قلبي أختاي الغاليتين " *اسماء* و *فاطمة* " .

الى من كان سندا وعونا لي جدتي وخالتي و خالي أطال الله في عمرهم و إلى كل الأحباب دون استثناء من قريب وبعيد

أعبر عن خالص شكري وتقديري لمشرفي الفاضل " *بوغرارة إبراهيم* "

الذي تفضل بالإشراف على هذا العمل, فأولاه كامل العناية والاهتمام, راعيا وموجها وجزاه الله عني خير الجزاء

إلى رفيقات دربي إلى الأخوات التي لم تلدهن أمي إلى من كانوا معي في طريق النجاح إلى من تحلو بهم الحياة : لمياء ، خنساء ، ايمان ، صبرين ، منى ، سلاف ، منار ، روزا ، سعاد.

إلى صديقاتي وأصدقائي في هذا المشوار ورسموا في عقلي أجمل الذكريات .

إلى جميع من علمني وساندني في مشواري الدراسي إلى جميع أساتذتي خاصة استاذي " سعد عبد الكبير " .

إلى كل من مد يد العون أهديكم هذا العمل المتواضع. أسأل الله أن يوفقني ويوفقكم في تحقيق الأماني والنجاحات.

Table des matières

Notations

▶ n	Entier naturel, dimension de l'espace de travail.
▶ $\mathbb{R}^n$	Espace euclidien muni de sa norme usuelle notée $\lvert . \rvert$.
▶ α	est un multi-indice $:\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}$
▶ $\lvert\alpha\rvert$	Longueur de α : $\lvert\alpha\rvert = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$
▶ $D^\alpha u$	Dérivée d'ordre α : $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$
▶ Ω	Un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$.
▶ $\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω.
▶ $\partial\Omega$	La frontière régulière de Ω.
▶ $p > 1 (ou\ q\ ou\ r)$	Exposant de Lebesgue.
▶ $p' \geq 1$	L'exposant conjugué de p : $p' = \dfrac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$.
▶ $p^\star = \dfrac{np}{n-p}$	L'exposante conjugué de Sobolev.
▶ $p.p.$	Presque partout.
▶ $\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n})^T$	Gradient de u.
▶ $C^k(\overline{\Omega})$	Espace des fonctions de classe k sur $\overline{\Omega}$.
▶ $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$	Laplacien de u.
▶ $\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à supports compacts dans Ω.
▶ $\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace Espace des distributions sur Ω
▶ $\mathcal{E}'(\Omega)$	Espace Espace des distributions sur Ω à supports compacts
▶ $L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue standards sur Ω d'exposants p.
▶ $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$	Espace des fonction intégrable sur tout compact de Ω.
▶ $W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev standard sur Ω d'exposant p.
▶ $W_0^{1,p}(\Omega)$	L'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
▶ $W^{-1,p'}(\Omega)$	Duale de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Introduction

La théorie des distributions est l'une des théories récentes apparues en mathématiques pures, créée par le mathématicien Laurent Schwartz au milieu du XXe siècle, ce qui lui a valu la médaille Fields en 1950.

L'objectif de cette théorie est de généraliser le concept de fonction afin de donner une signification mathématique aux solutions des équations aux dérivées partielles et autres types d'équations. Ce qui garantit l'existence de ces solutions, c'est que la distribution accepte des dérivées de n'importe qu'elle degré. Ce qui signifier que la condition de condition de continuité et de dérivabilité ne sont pas non nécessaires pour la résolution des équations. Ainsi, les fruits de cette théorie ont émergé dans de nombreux domaines, notamment en analyse mathématique et en analyse spectrale en physique ...etc.

Afin de mettre en évidence l'utilité scientifique de cette théorie, je présente dans ce mémoire des exemples d'équations aux dérivées partielles dans le cadre des distributions générales, en donnant leur solution générale car se limiter à l'aspect théorique risquerait de laisser certaines ambiguïtés dans l'esprit du lecteur, ce qui entraverait sa véritable compréhension du sujet.

Le travail de ce mémoire a été divisé en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous avons abordé quelques concepts généraux sur l'analyse complexe et les intégrales. Nous avons également abordé la théorie des distributions, en présentant la définition des distributions et ses propriétés de base. Nous avons également présenté les le produit de convolution et les transformations de Fourier.

- Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté une étude théorique concernant le problème d'existence et de la régularité de solution pour les équations linéaires aux dérivées partielles.

- Dans le troisième chapitre, nous avons présenté quelques applications de la théorie des distributions pour résoudre certaines équations telles que l'équation de Poisson, l'équation de la chaleur, l'équation des ondes et l'équation de Schrïnger, et dans toutes les cas on donne une expression explicite de la solution au sens des distributions.

1 Chapitre 1 : Introduction à la théorie des distributions

1.1 Rappels

Définition 1.1. *Une fonction $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe (analytique) si elle est $\mathbb{C}-$dérivable en chaque point de U et sa dérivée $f' : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue. On dit qu'elle est entière si elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

Les fonctions holomorphes sont donc des fonctions continument dérivables au sens complexe, sur tout leur domaine de définition.

Théorème 1.1 (des zéros isolés)**.** *Soient U un ouvert connexe, et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle.*

- *Chaque zéro de f est isolé. L'ensemble des zéros de f, soit*
$$Z(f) = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$$
est fermé dans U et discret.
- *Si $K \subset U$ est un compact, l'ensemble $Z(f) \cap K$ est fini.*
- *L'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est fini ou dénombrable.*

Théorème 1.2 (Formule de Cauchy)**.** *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soient γ un lacet (un chemin fermé) de U et $a \in U$ pris hors du support de γ. On a alors*

$$f(a)Ind(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{1.1}$$

où

$$Ind(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz$$

Théorème 1.3. *Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ mesurable et $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert .Soit $f : \Omega \times X \longrightarrow \mathcal{C}$ telle que*

1. *pour tout $x \in X$, la fonction $\Omega \ni z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe*
2. *pour tout $z \in \Omega$, la fonction $X \ni x \mapsto f(z, x)$ est mesurable*
3. *il existe une fonction ϕ sommable sur X telle que, pour tout $(z, x) \in \Omega \times X$, l'on ait $|f(z, x)| \leq \phi(x)$.*

Alors la fonction

$$F : \Omega \ni z \mapsto \int_X f(z, x)dx$$

est holomorphe sur Ω.

Définition 1.2 (détermination principale de la racine carré).

- *On appelle détermination de la racine carrée sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ toute fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(z)^2 = z$.*

- *La détermination principale de la racine carrée est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ainsi définie : si z s'écrit sous forme trigonométrique $z = re^{i\varphi}$ avec $\breve{}\pi < \varphi \leq \pi$, alors on pose $f(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$.*

☞ **Remarque 1.1.**

- *Cette détermination principale n'est continue en aucun point de la demi-droite des réels strictement négatifs, et est holomorphe sur son complémentaire.*

- *Quand le nombre est dans sa forme algébrique $z = a + ib$, la définition précédente se traduit par :*

$$f(a + ib) = \sqrt{\frac{|a + ib| + a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{|a + ib| - a}{2}}$$

où le signe de la partie imaginaire de la racine est choisit comme suivant

  - *Si $b \neq 0$: le signe de b*
  - *Si $b = 0$ et $a < 0$: le signe $+$*

Théorème 1.4. *[Han-Banach] Soit $P : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant*

$$P(\lambda x) = \lambda P(x) \quad \forall x \in E \quad \forall \lambda > 0,$$

$$P(x + y) \leq P(x) + P(y) \quad \forall x, y \in E.$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous - espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \leq P(x) \qquad \forall x \in G.$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, i,e.

$$G(x) = f(x) \quad \forall x \in G$$

et telle que

$$f(x) \leq P(x) \ \forall x \in E.$$

Théorème 1.5. ***(Convergence domineé de Lebesgue)*** *Soit (f_n) une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que :*

1. *$f_n \to f$ p.p. sur Ω.*
2. *il existe une fonction $g \in L^1(\Omega), \forall n,\ |f_n(x)| \leqslant g(x)$ p.p. sur Ω. Alors*

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \to 0$$

Théorème 1.6. *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B(0,r)} f(x) dS \right) dr \tag{1.2}$$

$$= \int_0^{+\infty} r^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} f(rw) dw \right) dr \tag{1.3}$$

où

$$dS := r^{n-1} dw, \quad r = |x|, \; x = rw \tag{1.4}$$

et S^{n-1} est la sphère unité.

Théorème 1.7. *Soit $u, \; v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Alors*

1. $\int_\Omega \Delta u \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \overrightarrow{n} dS$.
2. $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \Delta v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \overrightarrow{n} dS$.

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normale extérieur unitaire en $x \in \partial\Omega$.

1.2 Distributions

Dans le chapitre 1, on a présenter

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.3 (Proposition)**.** *Le support d'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est le sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ noté suppφ et défini par l'une des assertions équivalentes suivantes :*

- *supp* $\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$
- $(supp\varphi)^c$*est le plus grand ouvert ou la fonction φ est nulle.*
- $x_0 \notin$ *supp* φ *si seulement s'il existe un voisinage V_{X_0} de x_0 tel que :*

$$\forall \; x \; \in \; V_{X_0}, \;\; \varphi(x) = 0$$

On a alors :

- $(supp \; \varphi = \phi) \Longleftrightarrow (\varphi \doteq 0 \; dans \; \Omega)$,
- $supp\,(\varphi \cdot \Psi) \subset supp\varphi \cap supp\Psi$,
- *si* $\varphi \in C^k(\Omega)$, *alors pour tout* $\alpha \in N^n$ *tell que* $|\alpha| \leq K$, $supp\partial^\alpha\varphi \subset supp \; \varphi$

Définition 1.4 (Espace des fonction tests)**.** *L'espace des fonctions teste, noté $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions φ de classe C^∞ à support compacts.*

☞ **Remarque 1.2.** *La fonction teste à support compact canonique ϕ_0 est définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \;\; \Phi_0(x) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{|x|^2}{1-|x|^2}) & si \; |x| \leq 1. \\ 0 & si \; |x| \geq 1. \end{cases}$$

1.2.2 Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.5. *Une suite $(\phi_n)_{n\in N}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers ϕ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :*

- *Il existe un compact fixe $K \subset \Omega$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$: supp $\phi_n \subset K$*
- *La suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et toutes les suites $(\partial^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément respectivement vers φ et $\partial^\alpha\varphi_n$ sur K*

☞ **Exemple 1.1.** *Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, Posons pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \varphi_n(x) = \phi(x + \frac{1}{n+1}) - \phi(x).$$

Alors $\varphi_n \to 0$ dans $D(\Omega)$. En effet, si supp$\phi \subset [-M, M]$, alors pour tout n supp $\varphi_n \subset [-M-1, M+1]$, puis par le théorème des accroissement finis, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi^{(k)}\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \varphi^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{n+1}\|\varphi^{(k+1)}\|_\infty \to 0$$

1.2.3 Distributions

Nous allons donner deux définitions équivalentes de la notion de distribution. L'une est fonctionnelle et théorique dans laquelle la continuité est exprimée topologiquement, une autre effective dans laquelle la continuité est exprimée directement par des estimations.

Définition 1.6 (Définition fonctionnelle)**.** *Une distribution sur l'ouvert Ω est une forme linéaire $T : D(\Omega) \to \mathbb{K}$ continue en 0 , i.e tell que , pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers 0 ,*

$$\langle T, \varphi_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω

Proposition 1.8. *Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution sur Ω si et seulement si, tout compact K de Ω, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $C_{k,m} > 0$ telle que, pour toute fonction test $\varphi\varepsilon D(\Omega)$ telle que supp$\varphi \subset K$,*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_{k,m} \max_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in k} |\partial^\alpha\varphi(x)|$$

☞ **Exemple 1.2** (Distribution de Dirac)**.** *Soit $a \in \Omega$. La forme linéaire $\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}$ définie par*

$$\forall\varphi \in (\Omega), \langle\delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$$

est une distribution sur Ω, s'appelle la distribution de Dirac. En effet. La linéarité est évidente . Soit K un compact de Ω et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que supp$\varphi \subset K$ alors

$$|\langle\delta_a, \varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

☞ **Exemple 1.3** (Distribution régulière). *Soit* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. *On peut lui associer une distribution, notée* T_f *telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi dx.$$

Cette distribution est appelée distribution régulière. En effet. Comme f *est* $L^1_{loc}(\Omega)$, *alors pour tout compact* $K \subset \mathbb{R}^n$, *on a* $f \in L^2(K)$. *Soit* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. *On pose* $K = supp\varphi$. *Alors on a*

$$|\int_\Omega f\varphi dx| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_K |f|dx = C\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

La forme linéaire $\varphi \longmapsto \int_\Omega f\varphi dx$ *est bien une distribution.*

☞ **Exemple 1.4** (distribution de Dirac dérivée). *Soient* $a \in \Omega$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Posons, pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle T, \varphi\rangle = \partial^\alpha \varphi(a).$$

Montrons que T *ainsi définie est une distribution. En effet on a*

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\partial^\alpha \varphi(a)| \leq \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

☞ **Exemple 1.5** (La valeur principale de$\frac{1}{x}$). *Soit* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. *On pose*

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Alors $vp(\frac{1}{x})$ *est une distribution sur* $\mathbb{R}$.

1.2.4 Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 1.7. *On dit qu' une suite* $(T_n)_{n\varepsilon N}$ *de distribution sur* Ω *converge vers* $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ *si, pour toute fonction* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

☞ **Exemple 1.6.** *La convergence presque partout n'implique pas la convergence dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *En effet considérons la suite de* $L^1_{loc}(\Omega)$ *définie par* $f_n : x \longmapsto \sqrt{n}e^{-nx^2}$. *Alors pour tout* $x \neq 0, f_n(x) \to 0$, *mais la suite* $(T_{f_n})_{n\geq 1}$ *converge dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *vers* $\sqrt{\pi}\delta_0$ *et non pas la distribution null. En effet, si* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *on a par le théorème de convergence dominée 1.5.*

$$\langle f_n, \varphi\rangle = \sqrt{\pi}\int_\mathbb{R} e^{-nx^2}\varphi(x)dx = \int_\mathbb{R} e^{-y^2}\varphi(\frac{y}{\sqrt{n}})dy \longrightarrow_{n\to\infty} \sqrt{\pi}\varphi(0) = \langle \sqrt{\pi}\delta_0, \varphi\rangle.$$

☞ **Exemple** **1.7.** *Soit* $(T_n = T_{f_n} avec f_n(x) = e^{+inx})$ *on a* $T_n \longrightarrow 0$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *et* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} e^{inx}\varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{in}e^{inx})'\varphi \\ &= [\frac{1}{in}e^{inx}\varphi]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{inx}\int_{\mathbb{R}} e^{inx}\varphi'(x)dx \\ &= \frac{1}{in}\int_{\mathbb{R}} e^{inx}\varphi'(x)dx \longrightarrow 0_{n\to+\infty}\end{aligned}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = 0$.

1.2.5 Dérivation d'une distribution

Définition **1.8.** *Soit* $T \in D'(\Omega)$ *et soit* $i \in \{1 \cdots, n\}$. *la forme linéaire* $\partial_{xi}T$ *défini sur* $\mathcal{D}(\Omega)$ *par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \partial_{xi}T, \varphi\rangle = -\langle T, \ \partial_{xi}\varphi\rangle$$

est une distribution sur Ω *appelée i-ième dérivée partielle de* T.
Le fait que $\partial_{xi}T$ *soit une distribution est évident. La définition* $\partial_{xi}T$ *peut être itérée autant de fois que voulu, on peut donc défini, pour multi - indice* $\alpha \in \mathbb{N}^n, \partial^\alpha T$ *par*

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle.$$

Proposition 1.9. *Soit* $(T_n)_{n\geq 0}$ *une suite dans* $D'(\Omega)$ *qui converge vers* $T \in D'(\Omega)$. *Alors, pour tout* $\alpha \in N^n, (\partial^\alpha T_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* $\partial^\alpha T$ *dans* $D'(\Omega)$.

☞ **Exemple** **1.8.** *Soit* H *la fonction de Heaviside qui vaut* 0 *sur* $]-\infty, 0[$, *et vaut* 1 *sur* $]0, +\infty[$. *Alors* $H' = \delta_0$. *En effet,*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

1.3 Convolution des distributions

1.3.1 Produit de convolution entre distribution et fonction

On sais déjà la définition du produit de convolution de deux fonction dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Regardons le cas particulier du produit de convolution d'une fonction intégrable par une fonction dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
Soient $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$et $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$(u \star \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(x-y)dy = \langle u, \varphi(x-.)\rangle$$

Définition 1.9. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Le produit de convolution entre T et φ est la fonction définie en chaque point par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (T \star \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - .)\rangle,$$

et on a $T \star \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.10. *Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et $\alpha \in N^n$. Alors*

$$\partial^\alpha (T \star \varphi) - (\partial^\alpha T) \star \varphi = T \star (\partial^\alpha \varphi).$$

Plus généralement, pour toute décomposition du multi- indice $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, on a

$$\partial^\alpha (T \star \varphi) = (\partial^{\alpha_1} T) \star (\partial^{\alpha_2} \varphi).$$

1.3.2 Produit tensoriel de deux distribution

Définition 1.10 (Produit tensoriel de deux distribution)**.** *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Le produit tensoriel noté $S \otimes T$ sur l'ouvert $\Omega_1 \times \Omega_2$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ est la distribution définie par la formule*

$$\langle S \otimes T, \phi\rangle = \langle S, \langle T, \phi(x_1, .)\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

On aurait pu également définit $T \otimes S$ par la formule

$$\langle T \otimes S, \phi\rangle = \langle T, \langle S, \phi(., x_2)\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Ces deux définitions saut équivalentes, comme le montre la

Proposition 1.11. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T \in (\Omega_2)$. Pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, on a*

$$\langle S \otimes T, \phi\rangle = \langle S, \langle T, \phi(x_1, .)\rangle\rangle = \langle T, \langle S, \phi(., x_2)\rangle\rangle.$$

1.3.3 Produit de convolution de deux distributions

Notation. L'espace des distributions à support compact sur Ω est noté $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Définition 1.11. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. La forme linéaire notée $T \star S$ définie sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \langle T \star S, \varphi\rangle = \langle T \otimes S, \varphi^\vartriangle\rangle$$

est une distribution appelée convolution des distributions Tet S, où $\varphi^\vartriangle : (y, z) \mapsto \varphi(y + z)$.

Proposition 1.12. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $S, U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. On a*

1 Associativité : $T \star (S \star U) = (T \star S) \star U$.

2 Commutativité : $T \star S = S \star T$.

3 élément neutre : $T \star \delta_0 = \delta_0 \star T = T$.

Proposition 1.13. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Alors*

$$\partial^\alpha (T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S = T \star (\partial^\alpha S).$$

En particulier $(\partial^\alpha \delta_0) \star T = \partial^\alpha T$. Plus généralement pour tout décomposition du multi-indice $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, on a

$$\partial^\alpha (T \star \varphi) = (\partial^{\alpha_1} T) \star (\partial^{\alpha_2} \varphi).$$

1.4 Transformés de Fourier

1.4.1 Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.12. *(L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)*
On définit l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées . Autrement dit, une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in N^n$$

☞ **Remarque 1.3.** *La topologie de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ n'est par une norme, mais par une famille dénombrable de norme, définies comme suit : pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on pose*

$$\mathcal{N}_p(\phi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq p} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|, \quad p \in \mathbb{N}$$

Grâce à la famille de normes $\mathcal{N}_p$, on peut définir ce qu'est une suite convergente dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

☞ **Exemple 1.9.** *(Quelques fonctions de $\mathcal{S}$) Évidemment $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*
Toutes les fonctions de la forme

$$\phi(x) = P(x)e^{-a|x|^2}$$

sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.13 (Convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)**.** *Une suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge vers une fonction $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace $S(\mathbb{R}^n)$ si*

$$\mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \to 0, \ lorsque\ n \longrightarrow \infty, \quad \forall p > 0$$

1.4.2 Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$

Définition 1.14. *A toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on associe sa transformés de Fourier*

$$\mathcal{F}(\phi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi.x}\phi(x)dx, \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

.

Proposition 1.14 (Transformés de Fourier et opérations)**.** *Soit ϕ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors*

(a) *La fonction $\mathcal{F}(\phi)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et on a, pour tout, $j = 1, \dots n$*

$$\partial_{\xi j}\mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}(-ix_j\phi)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n;$$

(b) *Pour tout $j = 1, \dots n$, on a*

$$\mathcal{F}(\partial_{xj}\phi)(\xi) = i\xi_j\mathcal{F}(\phi)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n;$$

(c) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, la fonction $(\tau_a) \star \phi = \phi \circ \tau_{-a} : x \mapsto \phi(x-a)$ a pour transformée de Fourier

$$\mathcal{F}((\tau_a) \star \phi)(\xi) = e^{-i\xi.a}\mathcal{F}\phi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n;$$

(d) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathcal{F}(e^{-iax}\phi)(\xi) = (\tau_a) \star (\mathcal{F}\phi)(\xi) = \mathcal{F}\phi(\xi - a), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème 1.15 (Formule d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}$.)**.** *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriels de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même. L'inverse de cet isomorphisme est donné par la formule*

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\psi(\xi)d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 1.16 (Transformée de Fourier de Gaussienne)**.** *Soit une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = A^T > 0$. posons*

$$G_A(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(A)}} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x|x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors $G_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\mathcal{F}G_A(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(A\xi|\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

1.4.3 Distributions tempérées

Définition 1.15 (Distributions tempérées)**.** *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $S(\mathbb{R}^n)$, c'est -à- dire une forme linéaire T sur $S(\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe un entier $P \geq 0$ et $C > 0$ pour lesquels*

$$|\langle T, \phi\rangle| \leq C\mathcal{N}_p(\phi) \quad \text{pour tout} \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

L'ensemble des distribution tempérées est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, que l'on note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$, toute distribution tempérée $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ définit par restriction une forme linéaire

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ni \phi \longmapsto \langle T, \phi\rangle$$

qui est un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$ ($\mathcal{S}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$).

☞ **Exemple 1.10.**

- *Toute distribution à support compact est tempérée :*

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

- *Toute fonction appartenant à l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ définit une distribution tempérée :*

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } p \text{ tel que } 1 \leq p \leq \infty.$$

- *La distribution sur* $\mathbb{R}$
$$T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$$
est tempérée si la suite $(a_k)_{k\in Z}$ *est à croissance polynômiale, c'est -à-dire s'il existe un entier* $p \geq 0$ *tel que*
$$a_k = O(|k|^p) \text{ lorsque } |k| \longrightarrow \infty.$$

- *Les distributions définie par les fonction s*
$$x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \sinh x \quad on \quad coshx$$
ne sont pas des distributions tempérées.

Théorème 1.17 (caractérisation des distribution de $S'(\mathbb{R}^n)$). *Tout distribution* $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ *est de la forme*
$$T = \partial_x^\alpha((1+|x|^2)^n f) au\ sens\ des\ distributions$$
ou $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *où* n *est un entier naturel, et ou* f *est une fonction continue bornée sur* $\mathbb{R}^n$.

1.4.4 La Transformation de Fourier des distributions tempérées

Définition 1.16. *A toute distribution tempérée* $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, *on associe sa transformée de Fourier* $\mathcal{F}T$ *qui est la distribution tempérée définie par*
$$\langle \mathcal{F}T, \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\phi \rangle$$
pour tout fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

☞ **Exemple 1.11.** *(Transformation de Fourier des masse de Dirac) On a*
$$\mathcal{F}\delta_0 = 1 \quad dans\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$
et plus généralement que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,
$$(\mathcal{F}\delta_0)(\xi) = e^{-i\xi.a}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$
Appliquant ensuite la proposition 1.14, on trouve que
$$(\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_0)(\xi) = (i\xi)^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$
et plus généralement que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,
$$(\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_a)(\xi) = (i\xi)^\alpha e^{-i\xi.a}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème **1.18** (Formule inverse de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $S'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, dont l'inverse est donné par la formule*

$$\mathcal{F}^{-1}T = \frac{1}{(2\pi)^n}\tilde{\mathcal{F}T},$$

ou, pour tout distribution S sur $\mathbb{R}^n$, on a noté

$$\tilde{S} = S \circ (-Id_{\mathbb{R}^n}),$$

c'est -à-dire que, pour tout fonction test $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \tilde{S}, \phi\rangle = \langle S, \phi \circ (-Id_{\mathbb{R}^n})\rangle = \langle S, \phi(-.)\rangle.$$

Définition **1.17** (Transformation de Fourier partielle sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$). *Soit $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$. On définit la transformée de Fourier partielle en x de la distribution T par la formule*

$$\langle \mathcal{F}_x T, \phi\rangle = \langle T, \mathcal{F}_x \phi\rangle, \textit{pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x).$$

Proposition 1.19 (Inversion de Fourier partielle dans $\mathcal{S}'$). *La Transformation de Fourier partielle en x est un isomorphisme de $S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$ sur lui-même dont l'inverse est donné par la formule*

$$\langle \mathcal{F}_x^{-1}T, \psi\rangle = \langle T, \mathcal{F}_x^{-1}\psi\rangle, \textit{pour tout } \psi \in S(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x).$$

Autrement dit

$$\mathcal{F}_x^{-1}T = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}_x T \circ J$$

ou $J : (t, x) \mapsto (t, -x)$.

Théorème **1.20.** *(Transformation de Fourier et convolution) Soient deux distribution $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$; alors*

$$\mathcal{F}(S \star T) = \mathcal{F}S \cdot \mathcal{F}T \textit{ dans } S'(\mathbb{R}^n).$$

Dans le cas particulier ou $T = T_f$ avec $\mathcal{F} \in S(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\mathcal{F}(S \star f)(\xi) = \mathcal{F}S(\xi)\mathcal{F}f(\xi), \quad \textit{pour tout } \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 1.21 (Transformation $\mathcal{F}_x$ et opérations). *La transformation de Fourier partielle en x sur $S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$ vérifie les propriétés suivantes :*

(a) Pour tout $T \in S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\partial_t^n \partial_\xi^\alpha \mathcal{F}_x T = (-1)^{|\alpha|}\mathcal{F}_x(x^\alpha \partial_t^n T),$$

(b) Pour tout $T \in S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\mathcal{F}_x(\partial_t^n \partial_x^\alpha T) = i^{|\alpha|}\mathcal{F}_x(\xi^\alpha \partial_t^n T).$$

2 Chapitre 2 : Existence et régularité de la solution élémentaire des EDP linéaires

2.1 Généralités

Définition 2.1. *Un opérateur différentielle linéaire L définie sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ à coefficients constante d'ordre m est une application*

$$\begin{aligned} L : \mathcal{D}'(\Omega) &\longrightarrow D'(\Omega) \\ u &\longmapsto Lu = \sum_{|a|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha u \end{aligned}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

☞ **Exemple 2.1.** *1) Le laplacien Δ est un opérateur différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 car*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

2) L'opérateur de la chaleurs

$$L = \partial_t - \Delta$$

est un opérateur différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2.

3) L'opérateur des ondes

$$L = \partial_{tt}^2 - \Delta$$

est un opérateur différentielle linéaire à coefficients d'ordre 2.

4) l'opérateur des constants Schrödinger

$$L = i\partial_t T - \Delta$$

est un opérateur différentielle linéaire à coefficients d'ordre 2.

Définition 2.2. *On appelle équation aux dérivées partielles (en abrégé : EDP) linéaire à coefficients constants de degré m, toute équation de la forme $LT = F$ où L est un opérateur différentielle linéaire définie sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ à coefficients constante d'ordre m, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est l'inconnue et $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est le second membre et*

Définition 2.3. *Soit L un opérateur différentielle linéaire définie sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ à coefficients constante d'ordre m. On dit qu'une distribution $E \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une solution élémentaire de L si $LE = \delta$, où δ est la distribution de Dirac. On parle aussi de "solution fondamentale de L."*

☞ **Remarque 2.1.** *La distribution F est appelée second membre de l'EDP, lorsque $F = 0$, on dit que l'EDP est homogène, et enfin l'équation $LT = 0$ est appelée équation homogène associée à $LT = F$.*

2.2 Existence de la solution élémentaire

On donne dans cette partie, un résultat d'existence concernant les solution élémentaires

Théorème 2.1 (Existence de la solution élémentaire)**.** *Toute opérateur différentiel linéaire à coefficients constants L admet une solution élémentaire. C-à-d l'équation $LE = \delta$ admet une solution $E \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Pou démontrer ce théorème, on a besoin de ce résultat.

Théorème 2.2 (de Paley-Wiener)**.** *Une fonction analytique entière à n variables complexes $g(\xi)$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dont le support est dans la boule $\{x| : |x| \leq R\}$ si et seulement si pour chaque N il existe un C_N tel que*

$$|g(\xi)| \leq \frac{C_N e^{R|\mathcal{I}m\xi|}}{(1+|\xi|)^N} \tag{2.1}$$

pour tous $\xi \in \mathbb{C}^n$

Démonstration. (du Théorème 2.1) On pose $L^*(x) = L(-x)$ et $q(x) = L^*(ix)$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(L^*(\varphi))(\xi) &= \mathcal{F}\left(\sum_\alpha a_\alpha D^\alpha(-\varphi)\right)(\xi) \\
&= \sum_\alpha a_\alpha \mathcal{F}\left(D^\alpha(-\varphi)\right)(\xi) \\
&= \sum_\alpha a_\alpha (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi) \\
&= L^*(i\xi)\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = q(\xi)\mathcal{F}(\varphi)(\xi)
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Paley-Wiener 2.2, on sait que pour chaque $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(L^*\varphi)(y+\xi) := \mathcal{F}(\varphi)(y+\xi)q(y+\xi)$$

est une fonction entière en ξ sur $\mathbb{C}^n$. On pose

$$Q(x) = \sum_\alpha |D^\alpha q(x)|$$

Observant que Q est positif et borné loin de zéro. La première étape de la preuve utilise la formule intégrale de Cauchy pour montrer que

$$\begin{aligned}
|Q(x)\varphi(x)| &\leq C_1 \int_{|\xi|\leq\varepsilon} |L^*(D)\varphi(x+\xi)| d^{2n}\xi \\
&= C_1 \int_{|\xi|\leq\varepsilon} |L^*(D)\varphi(x+\xi)| d^{2n}\xi
\end{aligned}$$

ou C_1 dépend de ε mais est indépendant de φ et $d^{2n}\xi$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{C}^n$. cet argument de variable complexe est décrit dans la problème 41. en utilisant l'estimation ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned} |\varphi(0)| &\leq (2\pi)^{-\pi/2}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y)|dy \\ &\leq C_2\int_{\mathbb{R}^*}\left(\int_{|\xi|\leq\varepsilon}|L^*(D)\varphi(y+\xi)||Q(y)|^{-1}d^{2n}\xi\right)dy \\ &= C_2\int_{\mathbb{R}^*}\int_{|\lambda|^2+|\mu|^2\leq\varepsilon^2}|L^*(D)\varphi(y+\lambda+i\mu)||Q(y)|^{-1}d\lambda d\mu dy \end{aligned} \tag{2.2}$$

pour $|\lambda|\leq\varepsilon,\quad Q(y+\lambda)(Q(y))^{-1}\leq C_3$ indépendamment de y, donc

$$\begin{aligned} |\varphi(0)| &\leq C_4\int_{\mathbb{R}^*}\int_{|\lambda|^2+|\mu|^2\leq\varepsilon^2}|L^*(D)\varphi(y+\lambda+i\mu)||Q(y+\lambda)|^{-1}d\lambda d\mu dy \\ &\leq C_4\int_{\mathbb{R}^*}\int_{|\mu|^2\leq\varepsilon^2}|L^*(D)\varphi(y+i\mu)||Q(y)|^{-1}d\mu dy \end{aligned}$$

Soit

$$\|\varphi\|_Q=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|\mu|^2\leq\varepsilon^2}|\varphi(y+i\mu)(Q))^{-1}|$$

Nous montrons d'abord que $\|\cdot\|_Q$ est une norme continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Comme Q est borné inférieurement.

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_Q &\leq C_6\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|\mu|\leq\varepsilon}|\varphi(y+i\mu)|d\mu dy \\ &\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^*\ \|\mu|\leq\varepsilon}|(1+y^2)^{n+1}\varphi(y+i\mu)| \\ &\leq C_7\sup_{|\mu|\leq\varepsilon}\|(I-\Delta)^{n+1}e^{\mu x}\varphi(x)\|_1 \end{aligned}$$

le membre de droite est une norme continue sur $\mathcal{D}(K)$ pour chaque ensemble compact $K\subset\mathbb{R}^n$. depuis $\mathcal{D}$ a la topologie limite inductive, $\|\cdot\|_Q$ est une norme continue sur $\mathcal{D}$. L'estimation de (2.2), montre que l'application

$$\tilde{E}: L^*(\varphi)\longmapsto\varphi(0)$$

est bien défini, c'est -à-dire si $L^*(\varphi_1)=L^*(\varphi_2)$ alors $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$. E est continue puisque $\|\cdot\|_Q$ est une norme continue. donc par le théorème de Hahn-Banach 1.4 il existe une application E dans $\mathcal{D}'$ qui prolonge E. Comme

$$\langle L(E),\varphi\rangle=\langle E,(L*(\varphi)\rangle=\varphi(0)$$

nous avons trouvé une solution fondamentale pour L. $\square$

Proposition 2.3. *Soit E une solution élémentaire de L . Alors*

1. *Pour toute $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact, il existe au moins une solution de $Lu = F$ appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T = E * F$ en est une .*

2. *Pour toute $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact il existe au plus une solution de $Lu = F$ appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact et s'il en existe une c'est $T = E * F$.*

Démonstration. En effet. D'après les propriétés du produit de convolution, On peut écrire :

$$L(E \star F) = (LE) \star F = \delta_0 \star F = F.$$

Cela démontre le premier point. Si on suppose ensuite que T est une solution à support compact, alors

$$\begin{aligned} T &= \delta_0 \star T = (LE) \star T = E \star LT \quad (\text{ car T est à support compact}) \\ &= E \star F \end{aligned}$$

d'où la seconde assertion. □

2.3 Régularité de la solution

Nous allons maintenant énoncer un théorème de régularité des solution d'une EDP linéaires à coefficients constants.

Théorème 2.4. *Soit L un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants qui possède une solution élémentaire $E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ alors pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et pour toute $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une solution de $LT = T_F$, il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $T = T_u$.*

Démonstration. Soit L un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants de la forme

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathcal{D}^\alpha u.$$

avec $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Si L possède une solution élémentaire E qui est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une solution de $L \star T = T_F$ alors T est associée à une fonction dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une solution de $LT = T_F$ et soit $x_0 \in \Omega$. On veut montrer que T est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x_0 . Soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction plateau au voisinage de x_0 (i.e elle vaut 1 au voisinage de x_0) .On a alors $\chi T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ (c'est une distribution à support compact) et on peut considérer χT comme un élément de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Alors, par associativité du produit de convolution, on a :

$$\chi T = \delta \star (\chi T) = LE \star (\chi T) = E \star L(\chi T)$$

Comme χ vaut 1 au voisinage de de x_0, par la formule de Leibniz , on a :

$$L(\chi T) = \chi T_F + R$$

où $R \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est un reste tel que $x_0 \notin suppR$. (car elle est nulle en dehors de $supp\chi$). On a alors ,

$$\chi T = E \star (\chi T_f + R) = E \star (\chi T_F) + E \star R$$

Quitte à considérer par prolongement que $\chi F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $E \star (\chi F) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ par les propriétés de régularité de la convolution . Il nous reste à montrer que $E \star R$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x_0. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction plateau au voisinage de 0. Comme $x_0 \ltimes suppR$, on peut choisir θ de sorte que $x_0 \notin supp\theta + suppR$. De plus,

$$E \star R = (\theta E) \star R + ((1-\theta)E) \star R$$

et $((1-\theta)E) \star R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ puisque $(1-\theta)E \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ puisque par hypothèse, $E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$. Soit enfin $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dont le support est dans un voisinage suffisamment proche de x_0 . Alors

$$supp\varphi \cap supp((\theta E) \star R) \subset supp\varphi \cap (supp\theta + suppR) = \emptyset$$

de telle sorte que $(\theta E) \star R = 0$ dans un voisinage suffisamment proche de x_0 . Cela termine la preuve . $\square$

3 Chapitre 03 : Application aux équations aux dérivées partielles

Dans cette chapitre , nous allons présenter quelques solutions élémentaire à certaines équations bien connues .

3.1 Solution élémentaire du laplacien

On considère l'opérateur Laplacien définie par

$$\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

où

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},$$

On pose

- Pour $n = 1$: $E_1 = -\frac{1}{2}|x|, \; x \in \mathbb{R}.$
- Pour $n = 2$: $E_2 = -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$
- Pour $n \geq 3$: $E_n = \frac{1}{C_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \; , \; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$

avec

$$C_n = (n-2)|S^{n-1}|, \quad n \geq 3 \tag{3.1}$$

et $|S^{n-1}|$ et le volume de sphère unité dans $\mathbb{R}^n$:

$$|S^{n-1}| = \int_{S^{n-1}} dw.$$

On va montrer le résultat suivant

Proposition 3.1. *Pour tout $n \in N^*$, la distribution E_n est une solution élémentaire du laplacien dans $\mathbb{R}^n$. C-à-d :*

$$-\Delta E_n = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration. • Pour $n = 1$. On $E_1(x) = -\frac{1}{2}|x|$ et $\Delta E_1 = E_1''$.

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta E_1, \varphi\rangle &= \langle -E_1'', \varphi\rangle \\
&= \langle -E_1, \varphi''\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} E_1(x)\varphi''(x)dx \\
&= +\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} -x\varphi'' dx + \int_0^{+\infty} x\varphi'' dx\right) \\
&= +\frac{1}{2}\left([-x\varphi']_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \varphi' dx + [x\varphi']_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi' dx\right) \\
&= +\frac{1}{2}\left(\varphi(0) + \varphi(0)\right) \\
&= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

Donc $-\Delta E_1 = \delta$.

• Pour $n = 2$, On a E_2 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on a

$$E_2(x,y) = -\frac{1}{2\pi} ln\sqrt{x^2+y^2}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \{(0,0)\}$$

et on a

$$\partial_x E_2(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

et on a

$$\partial_x^2 E_2(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

de la même façons on a :

$$\partial_y^2 E_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

D'où

$$\Delta E(x,y) = \partial_x^2 E_2(x,y) + \partial_y^2 E_2(x,y) = 0 \quad sur \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \tag{3.2}$$

Calculons ΔE dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ une fonction teste : On a

$$\langle -\Delta E_2, \varphi\rangle = \langle E_2, -\Delta\varphi\rangle$$

On a E_2 est localement intégrable : En effet :
Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ alors $K \subset B(0,R)$, $R > 0$. On a

$$\int_K |E_2(x,y)|dxdy \leqslant \int_{B(0,R)} |E_2(x,y)|dxdy$$

On pose

$$\begin{cases} x = r\ cos\ \theta \\ y = r\ sin\ \ \theta \end{cases} \quad , \quad dxdy = rdrd\theta.$$

$$\begin{aligned}
\int_K |E_2(x,y)|dxdy &\leqslant \int_0^R \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{2\pi} lnr) r\ dr\ d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R rlnrdr \\
&= \int_0^R r\ lnrdr \\
&\leqslant \int_0^R c\ \ dr, (car\ \ \ |rlnr|\ \ \ \leqslant c\ \forall r \in]0, R[) \\
&= cR < \infty
\end{aligned}$$

D'où en appliquant la formule de Green 1.7, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta E_2, \varphi \rangle &= \langle E_2, -\Delta\varphi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} E_2(x,y)(-\Delta\varphi)dxdy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,\varepsilon)} E_2(-\Delta\varphi)dxdy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int \nabla E_2 . \nabla\varphi dxdy + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} E_2 \nabla\varphi . \overrightarrow{n} ds \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon(0,\varepsilon)} -\Delta E_2 \varphi dxdy - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \nabla E_2 . \overrightarrow{n} \varphi ds + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} E_2 \nabla\varphi . \overrightarrow{n} ds \right]
\end{aligned}$$

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normale extérieur sur $\partial B(0,\varepsilon)$ définie par

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)^t = \frac{1}{\varepsilon}(x,y)^t$$

On a d'après (3.2), $\Delta E_2 = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus B(0,\varepsilon)$ D'où

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,\varepsilon)} -\Delta E_2 \varphi dxdy = 0$$

Et on a d'après 1.6

$$\nabla E_2 = (\partial_x E_2, \partial_y E_2)^t = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{x^2+y^2}(x,y)^t = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon^2}(x,y)^t$$

$$\nabla E_2 . \overrightarrow{n} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}$$

On a

$$ds = \varepsilon\ d\theta.$$

D'où
$$-\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \nabla E_2.\overrightarrow{n}\varphi ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\varepsilon}\varphi(x,y)\varepsilon d\theta$$
(avec $(x,y)=\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta)$). donc
$$-\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \nabla E_2.\overrightarrow{n}\varphi ds = +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta$$
On applique le théorème de convergence la dominée 1.5, on obtient
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)=\varphi(0,0)$$
Et on a
$$|\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)| \leqslant c \in L^1(0,2\pi)$$
D'où
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon cos\theta,\varepsilon sin\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\varphi(0,0)d\theta = \varphi(0,0)\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi\varphi(0,0)$$
Donc
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int_{B(0,\varepsilon)} \nabla E_2.\overrightarrow{n}\varphi ds\right] = \varphi(0,0) = \langle\delta,\varphi\rangle$$
Et o na
$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} E_2\nabla\varphi.\overrightarrow{n}ds &= lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2\pi}\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon}\nabla\varphi.(x,y)^t\varepsilon d\theta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\varepsilon\nabla\varphi.(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)^t d\theta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{\varepsilon\ln\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\nabla\varphi\cdot(\cos\theta,\sin\theta)^t d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$
Donc
$$\langle -\Delta E_2,\varphi\rangle = \langle\delta,\varphi\rangle$$

- Pour $n\geq 3$ de la même façons du cas $n=2$ On a

$$\langle -\Delta E_n,\varphi\rangle = lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} -\Delta E_n\varphi dxdy - \int_{\partial B(0,\varepsilon)}\nabla E_n.\overrightarrow{n}\varphi ds + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} E_n\nabla\varphi.\overrightarrow{n}ds\right]$$
où
$$\overrightarrow{n} = \frac{x}{|x|} = \frac{1}{\varepsilon}x, \quad ds = \varepsilon^{n-1}dw, \quad x=\varepsilon w$$

D'autre part, on a pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, E_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_n}{\partial x_i}(x) &= \frac{1}{C_n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)^{(2-n)/2}\right] \\
&= \frac{1}{C_n}(2x_i)\frac{2-n}{2}(x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)^{-n/2} \\
&= \frac{2-n}{C_n}x_i((x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)^{-n/2} \\
&= \frac{2-n}{C_n}|x|^{-n}x_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_n}{\partial x_i^2} = \frac{2-n}{C_n}|x|^{-n} + (\frac{2-n}{C_n})x_i(-\frac{n}{2})(2x_i)(x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)^{(-n/2)-1} \\
= \frac{2-n}{C_n}|x|^{-n} - \frac{(2-n)}{n}C_n|x|^{-n-2}x_i^2.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\Delta E(x) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 E_n}{\partial x_i^2} \\
&= n(\frac{2-n}{n})|x|^{-n} - \frac{2-n}{C_n}n|x|^{-n-2}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2) \\
&= n\frac{(2-n)}{n}|x|^{-n} - \frac{(2-n)}{C_n}n|x|^{-n} \\
&= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n/\{0\}
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \Delta E_n \varphi dxdy = 0$$

On a

$$\nabla E_n = \nabla\left(\frac{1}{c_n}|x|^{2-n}\right) = \frac{(2-n)}{c_n}|x|^{-n}x.$$

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \nabla E_n.\overrightarrow{n}\varphi ds &= \int_{s^{n-1}}\frac{2-n}{C_n}|x|^{-n}\frac{xx}{|x|}\varepsilon^{n-1}\varphi dw \\
&= \frac{2-n}{C_n}\int_{s^{n-1}}\varepsilon^{1-n}\varepsilon^{n-1}\varphi(x)dw \quad (s^n = \partial B(0,\varepsilon))
\end{aligned}$$

On applique le théorème de convergence la dominée 1.5, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(x) = \varphi(0)$$

Et on a

$$|\varphi(x)| \leq C \in L^1(s^{n-1})$$

D'où, en appliquant le théorème de la convergence dominé, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0}\left(-\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \nabla E_n.\overrightarrow{n}\varphi ds\right) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2-n}{c_n}\int_{s^{n-1}} \varphi(x)dw \\
&= \frac{2-n}{c_n}\int_{s^{n-1}} \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(x)dw \\
&= \varphi(0)\frac{2-n}{c_n}\int_{s^{n-1}} dw \\
&= \varphi(0)\frac{2-n}{(n-2)|s^{n-1}|}|s^{n-1}| \\
&= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

□

3.2 Solution élémentaire de l'équation de la chaleur

3.2.1 Équation de la chaleur en dimension 1

On considère l'opérateur de la chaleur suivant $L = \partial_t - \Delta_x$. Dans ce paragraphe, on donne une expression explicite de la solution élémentaire de l'opérateur L.

Théorème 3.2. *L'opérateur de la chaleur L admet sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour solution élémentaire*

$$E(t,x) = \frac{H(x)}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}$$

c-à-d

$$\partial_t E - \partial_x^2 E = \delta \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Démonstration. Nous voulons obtenir ce résultat $\langle LE, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ i.e.

$$\langle \partial_t E - \partial_{xx}^2 E, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

On montre d'abord que $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. On a

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq E(t,x) \leq \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}}$$

Il suffit de montrer donc que

$$\int_k \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} dt dx < \infty$$

pour tout compact K de $\mathbb{R}^2$ Soit K un compacte de $\mathbb{R}^2$. C-à-d K est fermé et borné . D'où

$K \subset [a,b] \times [a',b']$ avec $a < b$ et $a' < b'$ On a :

$$\begin{aligned}
\int_K \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} dtdx &\leq \int_a^b \int_{a'}^{b'} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} dtdx \\
&\leq \int_a^b \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} dt \int_{a'}^{b'} dx \\
&\leq \int_a^b \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} dt \int_{a'}^{b'} dx \\
&= \left[\frac{\sqrt{4\pi t}}{2\pi} \right]_a^b [x]_{a'}^{b'} < \infty
\end{aligned}$$

Donc $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et E définit une distribution régulière sur $\mathbb{R}^2$. Un calcul simple de dérivées partielles nous conduit ensuite à l'égalité

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \partial_t E(t,x) = \partial^2_{xx} E(t,x)$$

En effet

$$E(t,x) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

On a $\forall t > 0$: E est de classe C^∞

$$\begin{aligned}
\partial_t E(t,x) &= 2\pi (4\pi t)^{-3/2} e^{-x^2/4t} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\frac{x^2}{4t^2}) e^{-x^2/4t} \\
&= \left(-\frac{2\pi}{(4\pi t)^{-3/2}} + \frac{x^2}{4t^2\sqrt{4\pi t}} \right) e^{-x^2/4t}
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\partial_x E(t,x) &= \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} (-\frac{2x}{4t}) e^{-x^2/4t} \\
&= -\frac{2x}{4t\sqrt{4\pi t}} (e^{-x^2/4t})
\end{aligned}$$

et , on a

$$\begin{aligned}
\partial^2_{xx} E(t,x) &= -\frac{2}{4t\sqrt{4\pi t}} \left(e^{-x^2/4t} \right) + -\frac{2x}{4t\sqrt{4\pi t}} (\frac{-2x}{4t}) (e^{-x^2/4t}) \\
&= e^{-x^2 4t} \left(-\frac{2}{4t\sqrt{4\pi t}} + \frac{4x^2}{16t^2\sqrt{4\pi t}} \right)
\end{aligned}$$

d'où $\forall t > 0$:

$$\partial_t E(t,x) = \partial^2_{xx} E(t,x)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Posons :

$$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}}\int_{\varepsilon}^{+\infty} E(t,x)\partial_t\varphi(t,x)dtdx$$

$$J_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}}\int_{\varepsilon}^{+\infty} E(t,x)\partial_{xx}^2\varphi(t,x)dtdx$$

Alors , par l'intégrale par parties à la première ligne , en utilisant l'égalité sur les dérivées partielles précédente à la deuxième ligne et deux l'intégrale par parties et Fubini àla troisième ligne , on obtient

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= -\int_{\mathbb{R}}\left[[E(t,x)\varphi(t,x)]_\varepsilon^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty}\partial_t E(t,x)\varphi(t,x)dt\right]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\partial_{xx}E(t,x)\varphi(t,x)dtdx \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\partial_{xx}E(t,x)\varphi(t,x)dtdx &= \int_\varepsilon^{+\infty}\left[[\partial_x E(t,x)\varphi(t,x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}}\partial_x E(t,x)\partial_x\varphi(t,x)dx\right]dt \\ &= -\int_\varepsilon^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\partial_x E(t,x)\partial_x\varphi(t,x)dxdt \\ &= \int_\varepsilon^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E(t,x)\partial_{xx}\varphi(t,x)dxdt \\ &= -J_\varepsilon \end{aligned}$$

D'où

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx - J_\varepsilon$$

$$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx$$

En posons $y = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, On a $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{\varepsilon}} \Longrightarrow dx = \sqrt{\varepsilon}dy$

$$\begin{aligned} I_\varepsilon + J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}} E(\sqrt{\varepsilon y},\varepsilon)\varphi(\sqrt{\varepsilon y},\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}e^{-\varepsilon y^2/4\varepsilon}\varphi(\sqrt{\varepsilon y},\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon y},\varepsilon)dy \end{aligned}$$

On applique le théorème de convergence dominée 1.5

$$e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon y},\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} e^{-y^2/4}\varphi(0,0).$$

Et on a :

$$|e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon y},\varepsilon)| \leq ce^{-y^2/4} \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(I_\varepsilon + J_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4}\varphi(0,0)dy.$$

On pose $\frac{y}{2} = t \to dy = 2dt$

$$\frac{\varphi(0,0)}{\sqrt{4\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4}dy = \frac{2\varphi(0,0)}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \langle\delta,\varphi\rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\langle(\partial_t - \partial_{xx}^2)E,\varphi\rangle &= \langle\partial_t E - \partial_{xx}^2 E,\varphi\rangle \\
&= -\langle E, \partial_t\varphi + \partial_{xx}^2\varphi\rangle\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2}\frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}(\partial_t + \partial_{xx}^2)\varphi dxdt \\
&= \int_{\mathbb{R}\times]0,\infty[}\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}(\partial_t + \partial_{xx}^2)\varphi(t,x)dxdt \\
&= \int_{\mathbb{R}\times]0,\infty[}\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\partial_t\varphi(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}\times]0,\infty[}\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\partial_{xx}^2\varphi(t,x)dxdt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}(I_\varepsilon + J_\varepsilon) \\
&= \varphi(0,0) = \langle\delta,\varphi\rangle
\end{aligned}$$

Donc

$$\partial_t E - \partial_{xx}^2 E = \delta$$

□

3.2.2 Équation de la chaleur en dimension n

Pour $n > 1$, posons

$$E_n(t,x) = \frac{H_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{(2\pi t)^{n/2}}e^{|x|^2/2t}$$

Théorème 3.3. *La distribution E_N est l'unique distribution tempérés sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ vérifiant*

$$(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)E_n = \delta_{(0,0)} \ \ dans \ \ S'(\mathbb{R}_t,\mathbb{R}_x^n)$$

$$Supp(E_n) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$$

Sa transformée de Fourier partielle en la variable x est la fonction :

$$\mathcal{F}(E_n)(t,\xi) = H_{\mathbb{R}_+^*}(t)e^{(1/2)t|\xi|^2}, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Commençons par montrer que E_n vérifie les conditions annoncées tout d'abord , la formule définissant E_n montre qu'il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n_x$, à support dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. On montre que E_n est une distribution tempérés Et on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} E_n(t,x)dx = 1 \quad si \quad t > 0.$$

En effet

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} E_n(t,x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/2t} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2t} dx\end{aligned}$$

On pose $y = \dfrac{x}{\sqrt{2t}}, \quad x = \sqrt{2t}y \Longrightarrow dx = (2t)^{n/2}dy$ donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} E_n(t,x)dx &= \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2}(2t)^{n/2} dy \\ &= 1\end{aligned}$$

On a pour $t < 0$: $E_n(t,x) = 0$
D'où

$$E_n \in L^\infty(\mathbb{R}; L^1(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$$

Pour $t \geq 0$ on applique la transformée de Fourier partielle en x de Gaussienne 1.16 avec , $A = tI, \ A^{-1} = \dfrac{1}{t}I$ ou I est la matrice d'identité . D'où

$$(A^{-1}x, x) = \frac{1}{t}(Ix,x) = \frac{1}{t}(x,x) = \frac{|x|^2}{t}, \ detA = t^n$$

donc

$$\begin{aligned}E_n(t,x) &= \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x,x)} \\ &= \frac{1}{(2\pi detA)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x,x)} \\ &= G_A(x)\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{F}(E_n)(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(tI\xi,\xi)} = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}$$

Et pour

$$t < 0 : \quad E_n(t,x) = 0$$

et

$$\mathcal{F}(E_n)(t,\xi) = 0$$

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \quad \mathcal{F}(E_n)(t,\xi) = H(t)e^{-\dfrac{1}{2}t|\xi|^2}$$

On applique la transformée de Fourier à l'équation de la chaleur :

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t \mathcal{F}(E) + \frac{1}{2}|\xi|^2\mathcal{F}(E), \varphi\rangle \quad &= \langle \partial_t \mathcal{F}(E), \varphi\rangle + \langle \frac{1}{2}|\xi|^2\mathcal{F}(E), \varphi\rangle \\
&= \langle \mathcal{F}(E), \partial_t\varphi\rangle + \langle \mathcal{F}(E), \frac{1}{2}|\xi|^2\varphi\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} H(t)e^{-1/2t|\xi|^2}\partial_t\varphi dtd\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} H(t)e^{-1/2t|\xi|^2}\frac{1}{2}|\xi|^2\varphi dtd\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty} e^{-1/2t|\xi|^2}\partial_t\varphi dtd\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty} e^{-1/2t|\xi|^2}\frac{1}{2}|\xi|^2\varphi dtd\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} -\left[e^{-1/2t|\xi|^2}\varphi(t,\xi)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}(-\frac{1}{2}|\xi|^2)e^{-1/2t|\xi|^2}\varphi dtd\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty} e^{-1/2t|\xi|^2}\frac{1}{2}|\xi|^2\varphi dtd\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(0,\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i0.\xi}\varphi(0,\xi)d\xi \\
&= \mathcal{F}(\varphi)(0,0) = \langle \mathcal{F}(\delta), \varphi\rangle
\end{aligned}$$

On applique la transformée de Fourier inverse on optent

$$\langle E_n - \frac{1}{2}\Delta E_n, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle$$

□

3.3 Solution élémentaire de l'équation des ondes

On considère l'opérateur des ondes en dimension 1 : $L = \partial^2_{tt} - \partial^2_{xx}$. On le résultat suivant

Théorème 3.4. *Soit la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction intégrable :*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \; E(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \quad si \quad t-|x| > 0. \\ 0 \quad si \quad t-|x| \leq 0. \end{cases}$$

Alors, E est une solution élémentaire de l'opérateur des ondes.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et soit $A > 0$ tel que $supp\varphi \subset [-A, A]^2$. On a, en utilisant Fubini,

$$\begin{aligned}
\langle (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)E, \varphi\rangle &= \langle E, (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)\varphi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^A \int_x^A \partial_{tt}^2\varphi(t,x)dtdx + \int_{-A}^0 \int_{-x}^A \partial_{tt}^2\varphi(t,x)dtdx \right.\\
&\qquad \left. - \int_0^A \int_{-t}^t \partial_{xx}^2\varphi(t,x)dtdx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^A -\partial_t\varphi(x,x)dx + \int_{-A}^0 -\partial_t\varphi(x,-x)dx \right.\\
&\qquad \left. - \int_0^A \partial_x\varphi(t,t) - \partial_x\varphi(-t,t)dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \partial_t\varphi(u,u)du - \int_0^A \partial_x\varphi(u,u)du \right.\\
&\qquad \left. - \int_0^A \partial_t\varphi(-u,u)du + \int_0^A \partial_x\varphi(-u,u)du\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \phi_1'(u)du - \int_0^A \phi_2'(u)du\right] \; avec \;\; \phi_1(u) = \varphi(u,u) \;\; et\phi_2(u) = \varphi(-u,u) \\
&= \frac{1}{2}[\phi_1(0) + \phi_2(0)] = \varphi(0,) = \langle \delta_{(0,0)}, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)E = \delta_{(0,0)}.$$

□

3.4 Solution élémentaire de l'équation Schrödinger

Pour tout $n \geq 1$, cherchons une distribution $E_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ qui satisfait l'équation de Schrödinger suivante

$$i\partial_t E_n + \frac{1}{2}\Delta_x E_n = i\delta_{(0,0)} \;\; dans \;\; \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n),$$

et comme on l'a fait pour l'équation de la chaleur, ajoutons la condition de support

$$supp(E_n) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n.$$

Une idée naturelle consiste à effectuer le changement de variables $s = it$ qui transforme l'opérateur de Schrödinger

$$i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x \quad \text{en} \quad \text{l'opérateur} \quad \text{de la chaleur } \partial_s - \frac{1}{2}\Delta_x.$$

Ceci suggère de prendre

$$E_n(t,x) = \frac{H_{\mathbb{R}_+^*(t)}}{(\sqrt{2\pi i t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{2it}}.$$

Cette approche soulève deux question :
a) Quelle racine carrée de i doit - on choisir dans cette formule ?
b) Cette fonction définit - elle une distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n)$?

Comme on va le voir, ces deux question sont intimement liées.

Théorème 3.5 (Solution élémentaire de l'équation Schrödinger). *Pour tout $n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, posons*

$$E_n^\varepsilon(t,x) = \frac{H_{\mathbb{R}_+^*(t)}}{(2\pi(\varepsilon+i)t)^{n/2}} e^{-\dfrac{|x|^2}{2(\varepsilon+i)t}}$$

Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, où $\sqrt{\cdot}$ désigne la détermination principale de la racine carrée (voir définition 1.2). Alors

$$E_n^\varepsilon \to E_n \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0^+$$

où E_n est l'unique distribution tempérée sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$(i\partial_t + \frac{1}{2}\triangle_x)E_n = i\partial_{(t,x)=(0,0)} \quad \text{dans} \quad S'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n),$$

$$supp(E_n) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n.$$

Sa transformée de Fourier partielle en x est la fonction

$$\mathcal{F}(E)_n(t,\xi) = H_{\mathbb{R}_+^*}(t) e^{-\dfrac{1}{2}it|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Pour démontrer le théorème, on commence par le lemme suivant :

Lemme 3.6. *(Transformée de Fourier des gaussiennes complexes)*
Soit $z \in \mathbb{C}$ telle que $\Re(z) > 0$, et posons

$$G_n(z,x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi z)}^n} e^{\dfrac{|x|^2}{2z}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

où le symbole $\sqrt{}$ désigne la détermination principale de la racine carrée (Voir définition 1.2). Alors la transformée de Fourier en x de G_n est la fonction définie par la formule

$$\mathcal{F}(G_n)(z,\xi) = e^{\frac{1}{2}z|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. La fonction $(z,x) \mapsto G_n(z,x)$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \times \mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

$$|G_n(z,x)| = \frac{1}{(2\pi|z|)^{n/2}} \left| e^{\dfrac{\overline{z}|x|^2}{2|z|^2}} \right| = \frac{1}{(2\pi|z|)^{n/2}} e^{\dfrac{\Re z|x|^2}{2|z|^2}}$$

de sorte, en posant $\Re z = a$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{|z|\leq \mathbb{R} \\ \Re(z)>a}} |G_n(z,x)|dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi a)^{n/2}} e^{-\dfrac{a|x|^2}{2R^2}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi a)^{n/2}} \frac{2^{n/2}R^n}{a^{n/2}} e^{-|y|^2}\mathrm{d}y, \quad (y = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}R}x,\ dy = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}R}\right)^n dx) \\
&= \frac{R^n}{a^n}.
\end{aligned}$$

Comme par ailleurs la fonction $z \mapsto G_n(z,x)$ est holomorphe sur le domaine $\{z \in \mathcal{C} \mid \Re(z) > 0\}$. On déduit du théorème 1.3 que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\xi.x} G_n(z,x)dx \quad \text{est holomorphe sur} \quad \{z \in \mathcal{C}|\Re(z) > 0\}.$$

On sait d' autre part (voir la proposition 1.16) que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, cette fonction coïncide avec la fonction

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\dfrac{1}{2}z|\xi|^2} \quad \text{également holomophe sur} \quad \{z \in \mathcal{C}|\Re(z) > 0\}.$$

lorsque z décrit $\mathbb{R}_+^*$. On déduit du théorème des zéros isolés 1.1 que ces deux fonctions holomorphes coïncident sur l'ouvert connexe $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$. □

Démonstration. **(du théorème)** Appliquons à chaque membre de l'équation de schodinger la transformation de Fourier partielle en la variable x. Ainsi, d'après la proposition 1.21

$$i\partial_t E_n + \frac{1}{2}|\xi|^2 E_n = i\delta_{t=0} \otimes 1 \ \ dans \ \ \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n),$$

$$supp(E_n) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n.$$

Multiplions chaque membre de l'équation ci- dessus par $(t,\xi) \mapsto e^{-\dfrac{1}{2}it|\xi|^2}$ qui est une fonction de classe C^∞ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées. On trouve que

$$i\partial_t \left(e^{\dfrac{1}{2}it|\xi|^2} E_n \right) = e^{\dfrac{1}{2}it|\xi|^2} \left(i\partial_t E_n + \frac{1}{2}|\xi|^2 E_n \right)$$

$$= ie^{\dfrac{1}{2}it|\xi|^2} \delta_{t=0} \otimes 1 = i\delta_{t=0} \otimes 1 \ \ dans \ \ \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

Cette relation, jointe à la condition portant sur le support de E_n, équivaut au fait que

$$e^{\dfrac{1}{2}it|\xi|^2} E_n = H_{\mathbb{R}_+^*} \otimes 1 \ \ dans \ \ \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

Multipliant chaque membre de cette égalité par la fonction $(t,\xi) \mapsto e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ qui est de classe C^∞ et à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées, on en conclut que l'unique solution du probléme de Cauchy ci-dessus pour E_n est la fonction donnée par

$$E_n(t,\xi) = H_{\mathbb{R}_+^*}(t)e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}, \quad (t,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Cette fonction est mesurable et bornée ; la distribution E_n qu'elle définit est donc tempérée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
En appliquant la transformation de Fourier inverse partielle en la variable x dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ à la fonction mesurable bornée E_n définie ci-dessus, on obtient donc une solution du problème de Cauchy d'inconnue E_n en variables physiques. Il ne reste plus qu'à montrer que E_n est la limite de E_n^ε pour $\varepsilon \to 0^+$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|E_n^\varepsilon(t,x)| = \frac{H_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{\sqrt[n]{2\pi(\varepsilon^2+1)^{1/2}t}} e^{-\dfrac{\varepsilon|x|^2}{2(\varepsilon^2+1)t}}$$

d'où on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |E_n^\varepsilon(t,x)|dx = \frac{(\varepsilon^2+1)^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} H_{\mathbb{R}_+^*}(t).$$

Donc $E_n^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^n))$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui entraine en particulier que $E_n^\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.
D'après le lemme

$$E_n^\varepsilon(t,\xi) = H_{\mathbb{R}_+^*}(t)e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon+i)t|\xi|^2}.$$

de sorte que, par convergence dominée,

$$E_n^\varepsilon \to E_n \quad dans \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_\xi^n) \quad lorsque \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Or la transformation de Fourier inverse partielle en la variable x est continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_\xi^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_x^n)$. On déduit de la convergence ci-dessus que

$$E_n^\varepsilon \to E_n \quad dans \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_\xi^n) \quad lorsque \quad \varepsilon \to 0^+,$$

d'où le résultat annoncé.

$\square$

Références

[1] J.-M. Bony, Cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier, Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001.

[2] H. Boumaza, Théorie des distributions, 2015.

[3] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Universitext, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[4] L. C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[5] F. Golse , Distributions, analyse de Fourier, equations aux dérivées partielles, 2012.

[6] A. Lesfari , Distributions, Analyse de Fourier et transformation de Laplace, Ellipses Edition Marketing S.A. France, 2012.

[7] Micheal Reed et Barry Simon, Methods of modern mathematical physics, Academic press, INC, 1972.

[8] W. Rudin , Real and complexe analysis, McGRW-HILL international edition, Mathematics series, 1987.

[9] L. Schwartz, Théorie des distributions, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg. Hermann, Paris 1966.

[10] C. Zuily, Distributions et équations aux dérivées partielles, 2 ème édition. Collection Méthodes. Hermann, Paris, 1986.

Résumé

On présente dans ce mémoire quelques applications de la théorie des distribution pour la résolution des equations aux dérivées partielles linéaires (EDP). Ce travail a été divisé en trois chapitres dont le premier est consacré à présenter les propriétés de base de la théorie des distributions ainsi le produit de convolution et les transformations de Fourier. Dans le deuxième chapitre on donner un résultat d'existence et de régularité de la solution des EDP linéaire dans l'espace des distribution. Dans le dernier chapitre on a construit des solutions explicites au sens des distributions de quelques équations remarquables comme l'équation de Poisson, de chaleur, des ondes...ect.