N° d'ordre :

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère

Filière : Mathématiques

Option : Logique Mathématiques, Langages Formels et Analyse non Standard

Par

MILLES Soheyb

Sujet

Etude de quelques propriétés d'ordres flous intuitionnistes

Soutenue publiquement le 24/11/2010 devant le jury composé de :

Mr: AMROUNE Abdelaziz	Maître de Conférence(A),Univ. de M'sila	Président
Mr: Lemnaouar ZEDAM	Maître de Conférence(A),Univ. de M'sila	Rapporteur
Mr: BOUDAOUD Abdelmadjid	Professeur, Univ. de M'sila	Examinateur
Mr: BENABDERHMANE Benyatou	Professeur, Univ. de Laghouat	Examinateur
Mr: Midoune Nouredine	Maître de Conférence(B), Univ. de M'sila	Examinateur

Promotion: 2007/2008

Table des matières

0.1 Introduction

Aprés l'introduction de la théorie des ensembles flous par Lotfi Zadeh[35], plusieurs recherches ont été menées sur les généralisations de la notion d'ensemble flou.

Le concept de l'ensemble flou intuitionniste a été introduit par K.T.Atanassov[1] en 1983 dans son article "intuitionistic fuzzy set" comme une généralisation de la notion de l'ensemble flou, puis cette théorie à été développée par de nombreux auteurs [9,11,12,....].

Les relations floues intuitionnistes, qui sont des sous-ensembles flous intuitionnistes ce n'est qu'une partie de la logique flou intuitionniste, on s'interesse ici à l'étude des ordres flous intuitionnistes.

Le but de ce mémoire est d'étudier quelques propriétés des relations d'ordres floues intuitionnistes. La notion de "l'antisymétrie" et la "transitivité" sont généralisées au cas d'ordre flou intuitionniste, mais on note que plusieurs définitions de l'antisymétrie et la transitivité dans ce cas ont été abordées par les chercheurs selon la qualité de leurs objectifs, autrement dit quelques définitions sont fortes et autres sont faibles.

Le mémoire est subdivisé en quatre chapitres:

Dans le premier chapitre nous donnons les concepts fondamentales de la théorie des sous-ensembles flous intuitionnistes; sa position par rapport à la théorie flou des ensembles, les propriétés fondamentales des ensembles flous intuitionnistes et les règles de calculs algébriques, les -coupes, produit cartésien et projection d'un sous-ensemble flou intuitionniste.

Dans le deuxième chapitre on étudie les relations floues intuitionniste, "l'antisymétrie" , "transitivité" et "la composition" de relation floue intuitionniste et l'ordre flou intuitionniste

Dans le troisième chapitre on étudie les relations d'ordres floues intuitionnistes, d'abord nous établirons quelques résultats qui nous permettent de construire des ordres flous intuitionnistes de relation d'ordre flou, ensuite on donne un résultat consernant les relations ordres flous intuitionniste définit sur les éspaces véctorièls réèles qui sont compatibles avec la structure des espaces vectorielles. Aussi nous caractérisons une sous-catégorie des relations totales qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication usuels sur la ligne des réels.

Dans le quatrième chapitre on entamera que chaque relation d'ordre flou intuitionniste sur un ensemble non vide X peut être extens à une relation d'ordre flou intuitionniste totale sur X. Nous donnons un algorithme qui permet d'obtenir cette extension linèaire dans le cas fini. Ce théorème d'extension considéré comme une version flou intuitionniste du théorème de Szpilrajn [29]. Ainsi, on caractérise chaque ordre flou intuitionniste sur un ensemble non vide X par l'intersection flou intuitionniste de ordres flous intuitionnistes linèaires sur X qui les extent.

Chapitre 1

Généralités sur Les sous-ensembles flous intuitionnistes

Les ensembles flous intuitionnistes (en brèf EFIs)constituent une généralisation de notion d'ensemble flou (EF) et ont été introduits par Atanassov en 1983 [1](1).

Dans ce chapitre, nous présentons le concept de base de sous-ensemble flou intuitionniste; sa position par rapport à la théorie des sous-ensembles flous et à la théorie classique des ensembles, les propriétés fondamentales des ensembles flous intuitionniste et les règles de calculs algébriques dans un ensemble flou intuitionniste.

1.1 Généralités sur les sous-ensembles flous

Avant d'entamer la définition de sous-ensemble flou intuitionniste on procède à définir l'ensemble classique et le sous-ensemble flou.

Définition 1.1.1 *(Ensemble classique) Un ensemble est une collection non ambigue d'objets tous distincts, appelés éléments de l'ensemble.*

Pour dire que a *est un élément d'un ensemble* A*, On écrit* $a \in A$*, dans le cas contraire, on écrit* $a \notin A$*.*

Un ensemble peut être écrit :

(1) [1] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, *VII ITKR's Session*, Sofia, june 1983, Deposed in Central Sci. *Techn. Library of Bulg. Acad. of Sc*, 1984 (in Bulgarian).

En extension: On donne la liste de ses éléments, Par exemple: Si $a_{1,}a_2, a_3..., a_n$ sont les éléments de l'ensemble A, on écrit:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}.$$

En compréhension: On donne la ou les propriétées qui caractérisent ses éléments. Par exemple, si les éléments de l'ensemble B satisfaisant les conditions $P_1, P_2, ..., P_n$ alors l'ensemble B est définie par :

$$B = \left\{b \ / \ b \text{ satisfait } P_1, P_2, ..., P_n\right\}.$$

Dans ce cas, le symbole "/" implique le sens de « tels que ».

En Fonction caractéristique: Un sous-ensemble classique A de X est défini par une fonction caractéristique χ_A qui prend la valeur 0 pour les éléments de X n'appartenant pas à A et la valeur 1 pour ceux qui appartiennent à A :

$$\begin{array}{lll} \chi_A & : & X \longrightarrow \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si et seulement si } x \in A \\ 0 & \text{si et seulement si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Soit X un ensemble (classique) de référence, un sous ensemble flou A de X est défini par une fonction d'appartenance [35][(1)], qui associe à chaque élément x de X le degré $\mu_A(x)$ compris entre 0 et 1.

$$A = \{< x, \mu_A(x) > \ / \ x \in X\}$$

1.1.2 Opérations algébriques des sous-ensembles flous

On définit en théorie des sous-ensembles flous, les mêmes notions qu'en théorie des ensembles classiques.

Etant donné deux sous-ensembles flous A et B de X

- **L'égalité**

On dit que les deux sous-ensembles flous A et B sont égaux si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tout élément de X.

(1) [35] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Computation*, vol. 8 (1965), 338–353.

$$A = B \text{ ssi } \mu_A(x) = \mu_B(x),\ \forall x \in X.$$

Si $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$ pour certains éléments x, alors $A \neq B$

- **L'inclusion**

Si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad \forall x \in X$ alors $A \subseteq B$.
Si $\mu_A(x) < \mu_B(x), \quad \forall x \in X$ alors $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ et } A \neq B$$

- **Le Complément**

Le complément A^c d'un sous-ensemble flou A de X est défini comme le sous-ensemble flou de X de fonction d'appartenance:$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X$

- **L'intersection**

L'intesection de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou C, que l'on note $A \cap B$, tel que:

$$\forall x \in X, \mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

min; désignant l'opérateur de minimisation.

- **L'union**

L'union de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou D, que l'on note $A \cup B$ tel que:

$$\forall x \in X, \mu_D(x) \ = \ \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

max désignant l'opérateur de maximisation.

1.2 Généralités sur les sous-ensembles flous intuitionnistes

Le concept de le sous-ensemble flou intuitionniste a été introduit par K.T.Atanassov [1](1)comme une généralisation de la notion de l'ensemble flou.

Définition 1.2.1 *(Ensemble flou intuitionniste)* [1] *Soit X un ensemble de référence, un sous-ensemble flou intuitionniste $A\,(EFI)$ de X est l'ensemble des triplets*

$$\{< x, \mu_A(x), \nu_A(x) > /\ x \in X\}$$

Avec $\mu_A(x), \nu_A(x)$ sont des applications de X dans $[0,1]$ vérifier la condition

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1.$$

$\mu_A(x)$ représente le degré d'appartenance de x à A.

$\nu_A(x)$ représente le degré de non-appartenance de x à A.

Définition 1.2.2 *Soit X un ensemble de référence et soit $A\,(EFI)$ de X on appellons*

$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$

index intuitionniste de l'élément x dans l'ensemble A.

Exemples 1.2.3 *cas fini*

Soit $X = \{x, y, z\}$et $A_1,\ A_2, A_3 \in (EFIs)$ données par:

$A_1 = \{< x, 0.2, 0.4 >< y, 0, 0.6 >< z, 0, 0.9 >\}$

$A_2 = \{< x, 0.1, 0.7 >< y, 0.7, 0.2 >< z, 0.3, 0.6 >\}$

$A_3 = \{< x, 0.1, 0.8 >< y, 0, 0.8 >< z, 0.9, 0.1 >\}$

Il est claire que:

$0 \leq \mu_{A_1}(x) + \nu_{A_1}(x) \leq 1$, $0 \leq \mu_{A_2}(x) + \nu_{A_2}(x) \leq 1$ *et* $0 \leq \mu_{A_3}(x) + \nu_{A_3}(x) \leq 1.$

Alors A_1, A_2 et A_3 sont des $EFIs$ de X.

(1) [1]K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, *VII ITKR's Session*, Sofia, june 1983, Deposed in central sci. *Techn. library of Bulg. Acad. of Sc*, 1984 (in Bulgarian).

Exemples 1.2.4 *cas infini*

1) Soit E l'ensemble de tous les pays dont les gouvernements sont élus.

Suppossons qu'on connait pour tous pays $x \in X$, le pourcentage des élécteurs qui ont voté pour le gouvernement correspondant, on la note par $M(x)$ et soit $\mu(x) = \frac{M(x)}{100}$ (*le degré d'appartenance*) et soit $\nu(x)$; cette valeur correspondt à la partie des électeurs qui n'ont pas voté pour le gouvernement, par la théorie des ensembles flous seulement, nous ne pouvons pas considérer cette valeur dans plus de détails, ce pondant si on définie $\nu(x)$ (*le degré de non appartenance*) comme la valeur des voix accordées aux partie ou les personnes extérieures le gouvernement, alors nous pouvons montrer la partie de l'électorat qui n'ont pas voté du tout ou ceux qui ont donné mauvaise vote-papier et la valeur correspondante sera $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ (*le degré d'indétermination*).

2) Soit $X = [a, b]$ tel que a, $b \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit A un sous-ensemble de X définie par:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < a - \alpha \ ou \ b + \beta < x \\ 1 \ si \ a < x < b \\ 1 + \left(\frac{x-a}{\alpha}\right) \ si \ \ a - \alpha < x < a \\ 1 - \left(\frac{b-x}{\beta}\right) \ si \ b < x < b + \beta \end{cases}$$

$$\nu_A(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x < a - \alpha \ or \ b + \beta < x \\ 0 \ si \ a < x < b \\ \frac{a-x}{\alpha} \ si \ \ a - \alpha < x < a \\ \frac{x-b}{\beta} \ si \ b < x < b + \beta \end{cases}$$

Alors A est un EFI de X.

En effet, il est claire que:$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$

Remarque 1.2.5 l'orsque $\nu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$ pour tout $x \in X$; A devient un ensemble flou.

1.3 Opérations sur les sous-ensembles flous intuitionnistes

On définit en théorie des sous-ensembles flous intuitionnistes les mêmes notions qu'en théorie des ensembles flous ([1] [2] [4])(1).

Etant donné deux sous-ensembles flous intuitionnistes A et B de X

- **Inclusion** $A \leq B$

$$A \leq B \Leftrightarrow (\forall x \in E)\left(\mu_A(x) \leq \mu_B(x)\right) et \left(\nu_A(x) \geq \nu_B(x)\right)$$

- **Egalité** $A = B$

$$A = B \Leftrightarrow A \leq B \; et \; B \leq A$$

- **Comlément** de A

$$A^c = \left\{\left(x, \nu_A(x), \mu_A(x)\right)/x \in E\right\}$$

- **Ensemble vide**

$$A = \phi \Leftrightarrow \mu_A(x) = 0 \text{ et } \nu_A(x) = 1$$

- **Intersection** $A \cap B$

$$A \cap B = \left\{< x, \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right), \max\left(\nu_A(x), \nu_B(x)\right) > /x \in E\right\}.$$

- **Union** $A \cup B$

$$A \cup B = \left\{< x, \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right), \min\left(\nu_A(x), \nu_B(x)\right) > /x \in E\right\}.$$

---

(1) [1] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, VII ITKR's session, Sofia, june 1983, Deposed in central sci. Techn. Library of Bulg. Acad. of Sc., 1984 (in Bulgarian).

[2] K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy sets and systems*,vol.20 (1986),87-96.

[4] K. T. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy sets*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

- **Addition** $A+B$

$$A+B=\{<x,\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x).\mu_B(x),\nu_A(x).\nu_B(x)>/x\in E\}.$$

- **Multiplication** $A\cdot B$

$$A\cdot B=\{<x,\mu_A(x).\mu_B(x),\nu_A(x)+\nu_B(x)-\nu_A(x).\nu_B(x)>/x\in E\}.$$

Exemple 1.3.1

Soit $X=\{1,2,3,4,5\}$ et soient A,B deux sous-ensembles flous intuitionnistes de X donnée par:

$A=\{<1,0.2,0.6>,<2,0.3,0.6>,<3,0.5,0.5>,<4,0.5,0.3>,<5,0.9,0.1>\}$

$B=\{<1,0.6,0.2>,<2,0.8,0.2>,<3,0.8,0.1>,<4,0.9,0.1>,<5,1,0>\}$

Alors on obtient:

$A^c=\{<1,0.6,0.2>,<2,0.86,0.3>,<3,0.9,0.5>,<4,0.95,0.5>,<5,1,0.9>\}$

$A\cup B=\{<1,0.6,0.2>,<2,0.8,0.2>,<3,0.8,0.1>,<4,0.9,0.1>,<5,1,0>\}.$

$A\cap B=\{<1,0.2,0.6>,<2,0.3,0.6>,<3,0.5,0.5>,<4,0.5,0.3>,<5,0.9,0.1>\}$

$A+B=\{<1,0.68,0.68>,<2,0.8,0.68>,<3,0.8,0.55>,<4,0.9,0.37>,<5,1,0.1>\}.$

$A\cdot B=\{<1,0.12,0.68>,<2,0.24,0.68>,<3,0.4,0.55>,<4,0.45,0.37>,<5,0.9,0.1>\}$

1.3.2 Noyau d'un sous-ensemble flou intuitionniste

Soit A un sous-ensemble flou intuitionniste dans l'univers X. le noyau d'un sous-ensemble flou intuitionniste A dans X est un sous-ensemble ordinaire de X dont chaque élément à un degré d'appartenance égale à 1 ou le degré de non-appartenance égale à 0. on note:

$$N(A)=\{x\in X\ /\ \mu_A(x)=1 \text{ et } \nu_A(x)=0\}$$

"les éléments vraiment dans A", on le note aussi $Noy(A)$.

1.3.3 Support d'un sous-ensemble flou intuitionniste

Le support d'un sous-ensemble flou intuitionniste est un sous-ensemble ordinaire de X, dont chaque élément a un degré d'appartenance non nul et le degré de non-appartenance différent de 1. on note:

$$Supp\,(A) = \{x \in X \ /\mu_A\,(x) \neq 0 \text{ et } \nu_A\,(x) \neq 1\}$$

"les éléments qui y sont à des degrés divers".

Exemple 1.3.4

Soit $X = [a, b]$ tel que $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit A un sous-ensemble de X définie par:

$$\mu_A\,(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < a - \alpha \ ou \ b + \beta < x \\ 1 \ si \ a < x < b \\ 1 + \left(\frac{x-a}{\alpha}\right) \ si \ \ a - \alpha < x < a \\ 1 - \left(\frac{b-x}{\beta}\right) \ si \ b < x < b + \beta \end{cases}$$

$$\nu_A\,(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < a - \alpha \ or \ b + \beta < x \\ 1 \ si \ a < x < b \\ \frac{a-x}{\alpha} \ si \ \ a - \alpha < x < a \\ \frac{x-b}{\beta} \ si \ b < x < b + \beta \end{cases}$$

Le noyau de A est $Noy\,(A) = [a, b]$, et le support de A est $Supp\,(A) = [a - \alpha, b + \beta]$.

Propriété 1.3.5

Le noyau et le support d'un sous-ensemble flou intuitionniste vérifient les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} Supp\,(A)^c &= X - Noy\,(A) \\ Noy\,(A)^c &= X - Supp\,(A) \end{aligned}$$

1.4 Représentation d'un sous-ensemble flou intuitionniste à partir des sous-ensemble ordinaires

En présence de connaissances imprécises représentées par les sous-ensembles flous intuitionnistes, plusieurs raisons conduisent à rechercher les sous-ensembles ordinaires qui leur sont associés.

1.4.1 Les α -coupes associées à un sous-ensemble flou intuitionniste

A. Amroune et L. Zedam ont généralisé la notion de α -coupes et α -coupes strictes pour les ensembles flous intuitionnistes.

Etant donné le sous-ensemble flou intuitionniste A de l'ensemble de référence X, on choisit un seuil α entre 0 et 1. on construit le sous-ensemble ordinaire A_α de X associé à A pour ce seuil.

Définition 1.4.1.1 [37](1) *Pour un seuil $\alpha \in [0,1]$, on définit la α -coupe du sous-ensemble flou intuitionniste A de X (ou sous-ensemble de niveau α associé à A) comme le sous-ensemble*

$$A_\alpha = \{x \in X \ / \ \mu_A(x) \geq \alpha \text{ et } \nu_A(x) \leq 1-\alpha\}.$$

dont la fonction caractéristique χ_{A^α} est telle que:

$\chi_{A^\alpha} = 1$ *si et seulement si* $\mu_A(x) \geq \alpha$ *et* $\nu_A(x) \leq 1-\alpha$.

Exemple 1.4.1.2

$A = \{<1, 0.6, 0.2>, <2, 0.8, 0.2>, <3, 0.8, 0.1>, <4, 0.1, 0.7>, <5, 1, 0>\}$

$A_{0.4} = \{x \in X \ / \ \mu_A(x) \geq 0.4 \text{ et } \nu_A(x) \leq 0.6\}$

Alors $A_{0.4} = \{<1, 0.6, 0.2>, <3, 0.8, 0.2>, <3, 0.8, 0.1>\}$.

$A_{0.7} = \{x \in X \ / \ \mu_A(x) \geq 0.7 \text{ et } \nu_A(x) \leq 0.3\}$

Alors $A_{0.7} = \{<3, 0.8, 0.2>, <3, 0.8, 0.1>\}$.

(1) [37] L. Zedam and A. Amroune, On the representation of L-M algebra by intuitionistic fuzzy subsets, *Arima,* vol.4(2006), 72-85

Propriétés 1.4.1.3 [37] (1) *Soient A, B deux ensembles flous intuitionnistes alors:*

1. *si $\alpha \geq \beta$ alors $A_\alpha \subseteq B_\alpha$*

2. $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$

3. $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$

4. *si $A \subseteq B$ alors $A_\alpha \subseteq B_\alpha$*

1.4.2 Les α -coupes strictes

On peut considérer le niveau α comme une limite stricte de représentativité d'un élément de X pour le sous-ensemble flou intuitionniste A de X donné.

Définition 1.4.2.1 [37] *Pour tout niveau $\alpha \in [0, 1[$, on définit la α -coupe stricte de A comme le sous-ensemble*

$$A_\alpha = \{x \in X \ / \ \mu_A(x) > \alpha \text{ et } \nu_A(x) < 1 - \alpha\}$$

Remarque 1.4.2.2

Les α -coupes strictes on les mêmes propriétés que les α -coupes.

1.4.3 Représentation d'un sous-ensemble flou intuitionniste à partir de ses α -coupes

La suite de toutes les α -coupes d'un sous-ensemble flou intuitionniste A le représente complètement. de façon imagée, on peut dire qu'il est "coupé en tranches" et qu'en possédant toutes les tranches, on en possède toute la substance.

Plus généralement, il est équivalent de connaître la famille de toutes les α -coupes d'un sous-ensemble flou intuitionniste ou de connaître le sous-ensemble flou intuitionniste lui-même.

---

(1) [37] L.Zedam and A.Amroune, On the representation of L-M algebra by intuitionistic fuzzy subsets, *Arima,* vol.4(2006), 72-85

Théorème 1.4.3.1 *(Théorème de décomposition): Tout sous-ensemble flou intuitionniste A de l'ensemble de référence X est défini à partir de ses α -coupes par:*

$$\forall x \in X \ \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha.\chi_{A^\alpha}(x) \ \ et \ \nu_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} (1-\alpha).\chi_{A^\alpha}(x)$$

Exemple 1.4.3.2

Soit X l'ensemble des pays

$$X = \{Allemagne, \ Be\lg ique, \ Espagne, \ France, \ G - Bretagne, \ Italie\},$$

On peut prendre le sous-ensemble flou intuitionniste associé à la propriété "méridional":

$M = \{< A, 0, 1 >, < B, 0, 1 >, < E, 1, 0 >, < F, 0.8, 0.2 >, < G, 0, 1 >, < I, 1, 0 >\}$,

et construire sa 1-coup $M_1 = \{E, I\}$, sa 0.8-coup $M_{0.8} = \{E, F, I\}$, et sa 0-coup $M_0 = X$.

On peut alors écrire les différents α -coupes de M comme:

$M_1 = \{< A, 0, 1 >, < B, 0, 1 >, < E, 1, 0 >, < F, 0, 1 >, < G, 0, 1 >, < I, 1, 0 >\}$

$M_{0.8} = \{< A, 0, 1 >, < B, 0, 1 >, < E, 1, 0 >, < F, 1, 0 >, < G, 0, 1 >, < I, 1, 0 >\}$

$M_0 = \{< A, 1, 0 >, < B, 1, 0 >, < E, 1, 0 >, < F, 1, 0 >, < G, 1, 0 >, < I, 1, 0 >\}$

On retrouve alors:

$\mu_M(A) = \max(1 \times 0, ...0.1 \times 0, 0 \times 1) = 0$

$\mu_M(B) = \max(1 \times 0, ...0, 1 \times 0, 0 \times 1) = 0$

$\mu_M(E) = \max(1 \times 1, ..., 0 \times 1) = 1$

$\mu_M(F) = \max(1 \times 0, 0.9 \times 0, 0.8 \times 1, ...0, 1 \times 1, 0 \times 1) = 0.8$

$\mu_M(G) = \max(1 \times 0, ...0, 1 \times 0, 0 \times 1) = 0$

$\mu_M(I) = \max(1 \times 1, ..., 0 \times 1) = 1$

et

$\nu_M(A) = \max(0 \times 0, ...0.9 \times 0, 1 \times 1) = 1$

$\nu_M(B) = \max(0 \times 0, ...0.9 \times 0, 1 \times 1) = 1$

$\nu_M(E) = \max(0 \times 1, ..., 1 \times 0) = 0$

$\nu_M(F) = \max(0 \times 0, 0.1 \times 0, 0.2 \times 1, ...0, 9 \times 0, 1 \times 0) = 0.2$

$\nu_M(G) = \max(0 \times 0, ...0.9 \times 0, 1 \times 1) = 1$

$\nu_M(I) = \max(0 \times 1, ..., 1 \times 0) = 0$

ce qui fourni bien la définition de M.

1.5 Produit cartésien des sous-ensembles flous intuitionnistes

La description de tout système, fait généralement intervenir plusieurs univers de référence. Lorsqu'on considère plusieurs ensembles de référence simultanément, on construit un univers globale dont les diverses composontes sont les ensembles de référence initiaux. Les caractérisations représentées par des sous-ensembles flous que l'on définit sur cet univers global sont construites à partir des classes floues des ensembles de référence initiaux.

Définition 1.5.1 *Soient des sous-ensembles flous intuitionnistes* $A_1, A_2, ..., A_n$ *réspèctivement définis sur* $X_1, X_2, .., X_n$, *on définit leur produit cartésien* $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *comme un sous-ensemble flou intuitionniste de* X *de fonction d'appartenance:*

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in X, \mu_A(x) = \min\left(\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\right).$$

et de fonction de non appartenance:

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in X, \nu_A(x) = \max\left(\nu_{A_1}(x_1), ..., \nu_{A_n}(x_n)\right).$$

Exemple 1.5.2

Soient $X_1 = \{x, y, z\}$, $X_2 = \{\alpha, \beta\}$ et soient A, B deux sous-ensembles flous intuitionnistes réspèctivement définis sur X_1, X_2donnée par:

$$A = \{< x, 0.2, 0.6 >, < y, 0.7, 0.1 >, < z, 0.5, 0.5 >\}$$

$$B = \{< \alpha, 0.6, 0.2 >, < \beta, 0.8, 0.1 >\}$$

Alors on obtient:

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{c} < (x, \alpha), 0.2, 0.2 >, < (x, \beta), 0.2, 0.6 >, < (y, \alpha), 0.6, 0.2 >, \\ < (y, \beta), 0.7, 0.1 >, < (z, \alpha), 0.5, 0.5 >, < (z, \beta), 0.5, 0.5 > \end{array} \right\}$$

1.6 Projection d'un sous-ensemble flou intuitionniste

Inversement, la connaissance d'une caractérisation floue intuitionniste globale définie sur un univers complexe doit permettre de donner des informations sur les différentes composantes de cet univers et de définir des caractérisations flous intuitionnistes sur chacune de ces composantes.

Soit un sous-ensemble flou intuitionniste A définie sur un univers $X_1 \times X_2$ produit cartésien de deux ensembles de référence X_1 et X_2.

Définition 1.6.1 *La projection sur X_1 du sous-ensemble flou intuitionniste A de $X_1 \times X_2$ est le sous-ensemble flou intuitionniste $\Pr oj_{X_1}(A)$ de X_1, dont la fonction d'appartenance est définit par:*

$$\forall x_1 \in X_1, \mu_{\Pr oj_{X_1}(A)}(x_1) = \sup_{x_2 \in X_2} \mu_A(x_1, x_2)$$

et la fonction de non appartenance est définit par:

$$\forall x_1 \in X_1, \nu_{\Pr oj_{X_1}(A)}(x_1) = \inf_{x_2 \in X_2} \nu_A(x_1, x_2)$$

On définit de façon analogue la projection de A sur X_2.

Exemple 1.6.2

Soient les univers $X_1 = \{x, y, z\}$, $X_2 = \{\alpha, \beta\}$, et soit le sous-ensemble flou intuitionniste suivant de $X_1 \times X_2$

$$S = \left\{ \begin{array}{c} < (x,\alpha), 0.2, 0.2 >, < (x,\beta), 0.2, 0.6 >, < (y,\alpha), 0.6, 0.2 >, \\ < (y,\beta), 0.7, 0.1 >, < (z,\alpha), 0.5, 0.5 >, < (z,\beta), 0.5, 0.5 > \end{array} \right\}$$

$$proj_{X_2}(S) = \left\{ \begin{array}{c} < \alpha, \max(0.2, 0.6, 0.5), \min(0.2, 0.6, 0.5) >, \\ < \beta, \max(0.2, 0.7, 0.5), \min(0.2, 0.6, 0.5) > \end{array} \right\}$$

$$= \{< \alpha, 0.6, 0.2 >, < \beta, 0.7, 0.2 >\}.$$

$$proj_{X_1}(S) = \left\{ \begin{array}{c} < x, \max(0.2, 0.2), \min(0.2, 0.6) >, \\ < y, \max(0.6, 0.7), \min(0.2, 0.1) > \\ < z, \max(0.5, 0.5), \min(0.5, 0.5) > \end{array} \right\}$$

$$= \{< x, 0.2, 0.2 >, < y, 0.7, 0.1 >, < z, 0.5, 0.5 >\}$$

1.7 L'opérateur d'Atanassov

En 1986, K.T. Atanassov établies différentes manière de changer l'ensemble flou intuitionniste dans un ensemble flou et il a défini l'opérateur suivant [2][(1)]:

Si $A \in EFIs$ Alors:

$$D_p(A) = \{< x, \mu_A(x) + p \cdot \pi_A(x), 1 - \mu_A(x) - p \cdot \pi_A(x) > /x \in X\}$$

Avec $p \in [0, 1]$, il est claire que $D_p(A) \in EFIs$.

Exemples 1.7.2

Soit $X = \{x, y, z\}$ et $A_1, A_2, A_3 \in (EFIs)$ données par:

$A_1 = \{< x, 0.2, 0.4 >, < y, 0, 0.6 >, < z, 0.9, 0 >\}$

$A_2 = \{< x, 0.1, 0.7 >, < y, 0.7, 0.2 >, < z, 0.3, 0.6 >\}$

$A_3 = \{< x, 0.1, 0.8 >, < y, 0, 0.8 >, < z, 0.9, 0.1 >\}$

Alors

$\pi_{A_1} = \{< x, 0.4 >, < y, 0.4 >, < z, 0.1 >\}$

$\pi_{A_2} = \{< x, 0.2 >, < y, 0.1 >, < z, 0.1 >\}$

$\pi_{A3} = \{< x, 0.1 >, < y, 0.2 >, < z, 0 >\}$

Si on prend $p = 0.6$ on obtient

$D_{0.6}(A_1) = \{< x, 0.44, 0.56 >, < y, 0.24, 0.76 >, < z, 0.06, 0.04 >\}$

$D_{0.6}(A_2) = \{< x, 0.22, 0.78 >, < y, 0.76, 0.24 >, < z, 0.36, 0.64 >\}$

$D_{0.6}(A_3) = \{< x, 0.16, 0.84 >, < y, 0.12, 0.88 >, < z, 0.9, 0.1 >\}$

(1) [2] K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, vol.20 (1986),87-96.

1.8 Normes et conormes triangulaires

Les opérations d'intersection, d'union et de complémentation de sous-ensembles flous intuitionnistes habituellement employées peuvent être remplacées par d'autres opérations construites à l'aide d'opérateurs ont été introduits dans le domaine des espaces métrique aléatoires [25, 28][(1)] et on fait appel à eux lorsque les opérateurs habituelles ne s'avèrent pas satisfaisantes.

Définition 1.8.1 *Une norme triangulaire (t-norme) est une fonction*

$T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *vérifiant:*

i) $T(x,1) = x \quad \forall x \in [0,1] \quad (\textit{élément neutre } 1)$

ii) $T(x,y) \leq T(z,t)$ *si* $x \leq z$ *et* $y \leq t \quad (Monotonie)$.

iii) $T(x,y) = T(y,x) \quad \forall x,y \in [0,1] \quad (Commutativité)$.

iv) $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z)) \quad \forall x,y,z \in [0,1] \quad (Associativité)$.

Définition 1.8.2 *Une conorme triangulaire (t-conorme) est une fonction*

$S : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ vérifiant:

i) $S(x,0) = x \quad \forall x \in [0,1] \quad (\textit{élément neutre } 0)$

ii) $S(x,y) \leq S(z,t)$ *si* $x \leq z$ *et* $y \leq t \quad (Monotonie)$

iii) $S(x,y) = S(y,x) \quad \forall x,y \in [0,1] \quad (Commutativité)$

iv) $S(S(x,y),z) = S(x,S(y,z)) \quad \forall x,y,z \in [0,1] \quad (Associativité)$

(1) [25] K. Menger, Statistical metrics, *Proc.Nat.Acad. Sci*, vol.28(1942), 535-537.

[28] B. Schweizer, A. Sklar, Associative functions and abstract semigroups, *Publications mathematicae Debrecen*, vol.10(1963), 69-81

1.8.3 D'ifférentes normes et conrmes triangulaires

t-norme	t-conorme	nom
$\min(x,y)$	$\max(x,y)$	Zadeh
$\max(x+y-1,0)$	$\min(x+y,1)$	Lukasiewicz
$\frac{xy}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy)}$	$\frac{x+y+xy-(1-\gamma)xy}{1-(1-\gamma)xy}$	$Hamacher$ $(\gamma>0)$
xy	$x+y-xy$	probabiliste
$\max\left(1-((1-x)^p+(1-y)^p)^{\frac{1}{p}},0\right)$	$\min\left((x^p+y^p)^{\frac{1}{p}},1\right)$	$Yager$ $(p>0)$
$\max((x+y-1+\lambda xy)/(1+\lambda),0)$	$\min(x+y+\lambda xy,1)$	$Weber$ $(\lambda>-1)$
$x\ si\ y=1$ y si $x=1$ 0 sinon	$x\ si\ y=0$ y si $x=0$ 1 sinon	drastique

Remarque 1.8.4

Soit T Une norme triangulaire, l'pplication S définit comme:

$$\begin{aligned} S &: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1] \\ S(x,y) &= 1-T(1-x,1-y) \end{aligned}$$

Est le dual t-conorme de T.

Remarque 1.8.5

Toute t-norme est un opérateur d'intersection, c'est-à-dire on peut définir $A\cap_T B$ par sa fonction d'appartenance de la manière suivante:

$$\forall x\in X,\ \mu_{A\cap_T B}(x)=T(\mu_A(x),\mu_B(x)).$$

Toute t-conorme est un opérateur d'union, c'est-à-dire on peut définir $A\cup_S B$ par sa fonction d'appartenance ainsi:

$$\forall x\in X,\ \mu_{A\cup_S B}(x)=S(\mu_A(x),\mu_B(x))$$

Exemple 1.8.6 On définit réspèctivement l'intersection et l'union par:
$\forall x \in X,\ \mu_{A\cap B}(x) = \max\left(\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1, 0\right).$
$\forall x \in X,\ \mu_{A\cup B}(x) = \min\left(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1\right).$

Chapitre 2

Les relations floues intuitionnistes

Parmi les concepts flous intuitionnites les plus importants du point de vue des applications qu'ils peuvent avoir, les relations floues intuitionnistes généralisent la notion de relation floue, par conséquent la notion de relation classique.

La première étude sur les relations floues intuitionnistes (intuitionistic fuzzy relation), est apparue dans [1](1) et développée par plusieurs auteurs [11][13][20](2).

2.1 Définition de relation floue intuitionniste

Définition 2.1.1[1] *Soient* X, Y *deux ensembles de référence. une relation floue intuitionniste* R *entre* X *et* Y *est un sous-ensemble flou intuitionniste de* $X \times Y$, *de fonction d'appartenance* $\mu_R : X \times Y \to [0,1]$ *et de fonction de non appartenance* $\nu_R : X \times Y \to [0,1]$ *tel que:*$0 \leq \mu_R(x,y) + \nu_R(x,y) \leq 1$ *pour tout* $(x,y) \in X \times Y$.

(1) [1] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, *VII ITKR's Session*, Sofia, june 1983, Deposed in *Central Sci. Techn. Library of Bulg. Acad. of Sc*, 1984 (in Bulgarian).

(2) [11] R. Biswas, On fuzzy sets and intuitionistic fuzzy sets, *NIFS*, 3(1997), 3-11.

[13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part I), *Mathware and computing* , vol.2(1995),5-38.

[20] L. A. Fano, G.N. Nana, M. Salles et H. Gwet, A Binary intuitionistic fuzzy relation, some new results,a general factorization, and two properties of strict components, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol.2009(2009), 580918-38.

Cas particuliers: Si $X = Y$, une relation floue intuitionniste R, définie sur les deux univers X et Y est une relation binaire floue intuitionniste définie sur X.

Si X et Y sont finis, une relation floue intuitionniste R, définie sur les deux univers X et Y, peut être décrite par la matrice μ_R des valeurs de sa fonction d'appartenance, les coefficients de μ_R indiqués sur la ligne x et la colonne y ayant pour valeur $\mu_R(x, y)$, et par la matrice ν_R des valeurs de sa fonction de non appartenance, les coefficients de ν_R indiqués sur la ligne x et la colonne y ayant pour valeur $\nu_R(x, y)$ pour tout x de X et y de Y.

Exemple 2.1.2 Soit $X = \{x, y, z\}$ et R une relation binaire floue intuitionniste définie sur X comme:

μ_R	x	y	z
x	0.3	0.7	0.2
y	0.5	0.8	0.5
z	0.1	0.4	0.1

ν_R	x	y	z
x	0.6	0.1	0.8
y	0.2	0	0.4
z	0.6	0.2	0.7

Notation On note par $RFI\,(X \times Y)$ l'ensemble de toutes les relations floues intuitionnistes entre X et Y.

Remarques 2.1.3

1. Les relations floues intuitionnistes étant des cas particuliers des sous-ensembles flous intuitionnistes, toutes les propriétés et définitions concernant les ensembles flous intuitionnistes restent applicables, ainsi par example la définition de la hauteur, le support ou le noyau d'une relation floue intuitionniste.

2. Toute relation floue (respectivement relation classique) est une relation floue intuitionniste

En effet: si R est une relation floue sur $X \times Y$ alors $\nu_R\,(x, y) = 1 - \mu_R\,(x, y)$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$.

Définition 2.1.4 *Soit R une relation binaire floue intuitionniste entre X et Y, nous pouvons définir R^{-1} entre Y et X par:*

$$\begin{aligned} \mu_{R^{-1}}\,(y, x) &= \mu_R\,(x, y) \\ \nu_{R^{-1}}\,(y, x) &= \nu_R\,(x, y) \;\; \forall\,(x, y) \in X \times Y. \end{aligned}$$

On dit que R^{-1} est la relation inverse de R.

2.2 Opérations sur les relations floues intuitionnistes

On sait maintenant que la relation floue intuitionniste n'est qu'un ensemble floue intuitionniste. Donc on peut appliquer les opérations sur les ensembles aux relations.

Définition 2.2.1 [13, 14](1) *Soit R et P deux relations floues intuitionnistes entre X et Y, pour tout $(x, y) \in X \times Y$ on peut définir:*

1. $R \leq P \Leftrightarrow \mu_R(x, y) \leq \mu_P(x, y)$ *et* $\nu_R(x, y) \geq \nu_P(x, y)$
2. $R \preceq P \Leftrightarrow \mu_R(x, y) \leq \mu_P(x, y)$ *et* $\nu_R(x, y) \leq \nu_P(x, y)$
3. $R \vee P = \{< (x, y), \mu_R(x, y) \vee \mu_P(x, y), \nu_R(x, y) \wedge \nu_P(x, y) >\}$.
4. $R \wedge P = \{< (x, y), \mu_R(x, y) \wedge \mu_P(x, y), \nu_R(x, y) \vee \nu_P(x, y) >\}$.
5. $R_c = \{< (x, y), \nu_R(x, y), \mu_R(x, y) > x \in X, y \in Y\}$.

Propriétés 2.2.2 [13]*Soient R, P, Q trois éléments de $RFI(X \times Y)$ alors:*

$i)$ $R \leq P \Rightarrow R^{-1} \leq P^{-1}$

$ii)$ $(R \vee P)^{-1} = R^{-1} \vee P^{-1}$

$iii)$ $(R \wedge P)^{-1} = R^{-1} \wedge P^{-1}$

$iv)$ $(R^{-1})^{-1} = R$

$v)$ $R \wedge (P \vee Q) = (R \wedge P) \vee (R \wedge Q)$ *et* $R \vee (P \wedge Q) = (R \vee P) \wedge (R \vee Q)$.

$vi)$ $R \vee P \geq R$, $R \vee P \geq P$, $R \wedge P \leq R$, $R \wedge P \leq P$

$vii)$ *si* $R \geq P$ *et* $R \geq Q$ *alors* $R \geq P \vee Q$

si $R \leq P$ *et* $R \leq Q$ *alors* $R \leq P \wedge Q$.

Preuve. $i)$ Si $R \leq P$, alors $\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y) \leq \mu_P(x, y) = \mu_{P^{-1}}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$

Aussi $\nu_{R^{-1}}(y, x) = \nu_R(x, y) \geq \nu_P(x, y) = \nu_{P^{-1}}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$.

$ii)$ $\mu_{(R \vee P)^{-1}}(y, x) = \mu_{(R \vee P)^{-1}}(x, y) = \mu_R(x, y) \vee \mu_P(x, y) =$

$= \mu_{R^{-1}}(y, x) \vee \mu_{P^{-1}}(y, x) = \mu_{R^{-1} \vee P^{-1}}(y, x)$

de la même façon on démontre que: $\nu_{(R \vee P)^{-1}}(y, x) = \nu_{R^{-1} \vee P^{-1}}(y, x)$

(1)[13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part I), Mathware and Computing , vol.2(1995),5-38.

[14] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part II), Effect of Atanassov's operators on the properties of the intuitionistic fuzzy relations, *Mathware and computing*, vol.2(1995),117-148.

$v)$ Nous emploierons que les opérateures $\vee, \wedge$ satisfait les proprietés de disribution on obtient

$$\begin{aligned}
\mu_{R\wedge(P\vee Q)}(x,y) &= \mu_R(x,y) \wedge \left\{\mu_P(x,y) \vee \mu_Q(x,y)\right\} \\
&= \{\mu_R(x,y) \vee \mu_P(x,y)\} \wedge \left\{\mu_R(x,y) \vee \mu_Q(x,y)\right\} \\
&= \mu_{R\wedge P}(x,y) \vee \mu_{R\wedge Q}(x,y) \\
&= \mu_{(R\wedge P)\vee(R\wedge Q)}(x,y).
\end{aligned}$$

De la même façon on démontre que:

$\nu_{R\wedge(P\vee Q)}(x,y) = \nu_{(R\wedge P)\vee(R\wedge Q)}(x,y)$. ■

On utilise la même façon pour démontrer les proprietés qui restes .

Nous pouvons généraliser les opérateurs entre les relations floues intuitionnistes binaires, nous employons les t-normes et les t-conormes sur $[0,1]$, Pour T un t-norme et son duale t-conorme S on a:

$$\begin{aligned}
T(R,Q) &= \left\{< (x,y), T\left(\mu_R(x,y), \mu_Q(x,y)\right), S(\nu_R(x,y), \nu_Q(x,y)) >\right\} \\
S(R,Q) &= \left\{< (x,y), S\left(\mu_R(x,y), \mu_Q(x,y)\right), T(\nu_R(x,y), \nu_Q(x,y)) >\right\}.
\end{aligned}$$

2.3 Composition de relations floues intuitionnistes:

Soient trois ensembles de référence X, Y et Z. La connaissance de deux relations floues, l'une entre X et Y, l'autre entre Y et Z permet d'établir une relation entre X et Z, comme dans le cas de relation flou et comme dans le cas de relation classique

Définition 2.3.1 [13][(1)] *Soient $\alpha, \beta, \lambda, \rho$ des t-normes, la composition de deux relationsR $\in RFI(X \times Y)$ et $P \in RFI(Y \times Z)$ définit une relation floues intuitionniste $P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R \in RFI(X \times Z)$ par:*

$$P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R = \left\{< (x,z), \mu_{P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z), \nu_{P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z) > / x \in X, z \in Z\right\}$$

(1) [13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part I), Mathware and Computing ,vol.2(1995),5-38.

Tel que

$$\mu_{P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z) = \underset{y}{\alpha}\{\beta[\mu_R(x,y),\mu_P(y,z)]\}$$
$$\nu_{P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z) = \underset{y}{\lambda}\{\rho[\nu_R(x,y),\nu_P(y,z)]\}$$

Avec la condition:

$$0 \leq \mu_{P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z) + \nu_{P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z) \leq 1 \quad \forall (x,z) \in X \times Z.$$

Proposition 2.3.2 [13](1) *dans les conditions de Définition 2.1.5 si* λ^* *et* ρ^**sont réspectivememt les formes duales de* λ *et* ρ *et* $\alpha \leq \lambda^*, \beta \leq \rho^*$ *Alors:*

$$0 \leq \mu_{P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z) + \nu_{P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z) \leq 1 \quad \forall (x,z) \in X \times Z.$$

Preuve. On sait que:

$$\mu_R(x,y) \leq 1 - \nu_R(x,y) \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$
$$\mu_P(y,z) \leq 1 - \nu_P(y,z) \quad \forall (y,z) \in Y \times Z.$$

Et par hypothèse $\alpha \leq \lambda^*$ *et* $\beta \leq \rho^*$ on a:

$$\beta[\mu_R(x,y),\mu_P(y,z)] \leq \rho^*[1-\nu_R(x,y), 1-\nu_P(y,z)]$$

$$\begin{aligned} \underset{y}{\alpha}\{\beta[\mu_R(x,y),\mu_P(y,z)]\} &\leq \underset{y}{\lambda^*}\{\rho^*[1-\nu_R(x,y),1-\nu_P(y,z)]\} = \\ &= 1 - \underset{y}{\lambda}\{1-\rho^*[1-\nu_R(x,y),1-\nu_P(y,z)]\} \\ &= 1 - \underset{y}{\lambda}\{\rho[\nu_R(x,y),\nu_P(y,z)]\} \end{aligned}$$

Donc

$$\underset{y}{\alpha}\{\beta[\mu_R(x,y),\mu_P(y,z)]\} + \underset{y}{\lambda}\{\rho[\nu_R(x,y),\nu_P(y,z)]\} \leq 1$$

■

Théorème 2.3.3 [13] *Pour tout* $(x,z) \in X \times Z, \alpha = \vee, \lambda = \wedge,$ β *et* ρ *deux t-normes on a*

$$0 \leq \mu_{P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z) + \nu_{P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z) \leq 1 \quad \forall y \in Y \quad \exists y' \text{tel que}$$
$$\beta[\mu_P(x,y),\mu_R(y,z)] \leq \rho^*[1-\nu_P(x,y'), 1-\nu_R(y',z)].$$

(1)[13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations.(Part I), Mathware and Computing , vol.2(1995),5-38.

2.3.4 La relation identité:[13][1]

i)La relation $\Delta \in RFI\,(X \times Y)$ *est appelée la relation identité si:*

$$\mu_{\Delta}(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x = y \\ 0 & si \quad x \neq y \end{cases}$$

$$\nu_{\Delta}(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases} \quad \forall (x,y) \in X \times X.$$

ii) La relation complémantaire Δ_c *définit par:*

$$\mu_{\Delta_c}(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases}$$

$$\nu_{\Delta_c}(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x = y \\ 0 & si \quad x \neq y \end{cases} \quad \forall (x,y) \in X \times X.$$

On la noté par $\bigtriangledown$.

Il est évident que $\Delta = \Delta^{-1}$ *et* $\triangledown = \bigtriangledown^{-1}$.

Théorème 2.3.5 [13] *Soient* $\alpha, \beta, \lambda, \rho$ *des t-normes et* $R \in RFI\,(X \times Y)$.

$i)R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} \Delta = \Delta \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R = R$ *si et seulement si* α *est t-conorme,* β *est t-norme,* λ *est t-norme et* ρ *est* t-conorme.

2.4 La réflexivité et la antiréflexivité:

Définition 2.4.1 [13] [14][2] *La relation* $R \in RFI\,(X \times Y)$ *est appellée :*

i) Réflexive si pour tout $x \in X$ $\mu_R(x,x) = 1$ [il est claire que $\nu_R(x,x) = 0$].

ii) Antiréflexive si pour tout $x \in X$ $\begin{cases} \mu_R(x,x) = 0 \\ \nu_R(x,x) = 1 \end{cases}$ *on peut dire que son complémantaire* R_c *est réflexive.*

---

(1) [13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part I), *Mathware and Computing* , vol.2(1995),5-38.

(2) [14] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part II), Effect of Atanassov's operators on the properties of the intuitionistic fuzzy relations, *Mathware and Computing, vol.*2(1995), 117-148.

Théorème 2.4.2 [13][(1)] *pour tout* $R \in RFI(X)$ *on a:*

i) Si R *rèflexive alors* $\Delta \leq R$.

ii) Si R *antirèflexive alors* $\nabla \geq R$.

Preuve. La preuve est une conséquence directe des Définitions 2.1.8 et 2.2.1. ■

Théorème 2.4.3 [13] *Pour* $R \in RFI(X)$, α,ρ *des t-conormes et* ,β,λ *des t-normes alors:*

i) R *est rèflexive* $\Rightarrow R \leq R \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R$.

ii) R *est antirèflexive* $\Rightarrow R \geq R \underset{\alpha,\beta}{\overset{\lambda,\rho}{\circ}} R$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mu_{R \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z) &= \underset{y}{\alpha}\left\{\beta\left[\mu_R(x,y),\mu_R(y,z)\right]\right\} \\
&= \underset{y\neq x}{\alpha}\left\{\beta\left[\mu_R(x,x),\mu_R(x,z)\right],\beta\left[\mu_R(x,y),\mu_R(y,z)\right]\right\} \\
&= \underset{y\neq x}{\alpha}\left\{\mu_R(x,z),\beta\left[\mu_R(x,y),\mu_R(y,z)\right]\right\} \geq \mu_R(x,z)
\end{aligned}$$

car α est t-conorme.

$$\begin{aligned}
\nu_{R \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R}(x,z) &= \underset{y}{\lambda}\left\{\rho\left[\nu_R(x,y),\nu_R(y,z)\right]\right\} \\
&= \underset{y\neq x}{\lambda}\left\{\rho\left[\nu_R(x,x),\nu_R(x,z)\right],\rho\left[\nu_R(x,y),\nu_R(y,z)\right]\right\} \\
&= \underset{y\neq x}{\lambda}\left\{\nu_R(x,z),\rho\left[\nu_R(x,y),\nu_R(y,z)\right]\right\} \leq \nu_R(x,z)
\end{aligned}$$

car λ est t-conorme.

La démonstration de *ii)* se fait de la même façon comme *i)*. ■

Exemple 2.4.4 Soit $X = \{x, y, z\}$ et $R \in RFI(X \times X)$ donnée par:

μ_R	x	y	z
x	0.3	0.7	0.2
y	0.5	0.8	0.5
z	0.1	0.4	0.1

ν_R	x	y	z
x	0.6	0.1	0.8
y	0.2	0	0.4
z	0.6	0.2	0.7

(1) [13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations.(Part I), *Mathware and Computing* ,vol.2(1995),5-38.

Pour $\alpha = \vee, \beta = \wedge, \lambda = \wedge$ et $\rho = \vee$ on a:

$\mu_{R \overset{\vee,\wedge}{\underset{\wedge,\vee}{\circ}} R}$	x	y	z
x	0.5	0.7	0.5
y	0.5	0.8	0.5
z	0.4	0.4	0.4

$\nu_{R \overset{\vee,\wedge}{\underset{\wedge,\vee}{\circ}} R}$	x	y	z
x	0.2	0.1	0.4
y	0.2	0	0.4
z	0.2	0.2	0.4

On obtient que $R \leq R \overset{\vee,\wedge}{\underset{\wedge,\vee}{\circ}}$ donc R n'est pas réflexive.

Théorème 2.4.5 [13](1) *Si $R \in RFI\,(X \times X)$ est réflexive, α, β sont des t-conormes et λ, ρ sont des t-normes alors:*

i) $R \leq R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R$.

ii) $R \leq R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R$ est une relation binaire ordinaire sur $X \times X$.

Preuve. $i)$

$$\begin{aligned} \mu_{R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R}(x,z) &= \underset{y \neq x}{\alpha} \left\{ \beta\left[1, \mu_R(x,z)\right], \beta\left[\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)\right] \right\} \\ &= \underset{y \neq x}{\alpha} \left\{ 1, \beta\left[\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)\right] \right\} = 1 \geq \mu_R(x,z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R}(x,z) &= \underset{y \neq x}{\lambda} \left\{ \rho\left[0, \nu_R(x,z)\right], \rho\left[\nu_R(x,y), \nu_R(y,z)\right] \right\} \\ &= \underset{y \neq x}{\lambda} \left\{ 0, \rho\left[\nu_R(x,y), \nu_R(y,z)\right] \right\} = 0 \leq \nu_R(x,z) \end{aligned}$$

donc$\mu_{R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R}(x,z) \geq \mu_R(x,z)$ et $\nu_{R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R}(x,z) \leq \nu_R(x,z)\, \forall (x,z) \in X \times X$ Alors $R \leq R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R$.

•La démonstration de $ii)$ se fait de la même façon comme $i)$. ■

(1)[13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part I), Mathware and Computing , vol.2(1995),5-38.

Théorème 2.4.6 [13][1] *Soit $R \in RFI(X \times Y)$, pour α est un t-conorme, λ est un t-norme alors:*

i) si R est réflexive alors $R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R$ est réflexive.

ii)si R est antiréflexive alors $R \overset{\lambda,\rho}{\underset{\alpha,\beta}{\circ}} R$ est antiréflexive.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mu_{R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R}(x,x) &= \underset{y}{\alpha}\{\beta[\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)]\} \\
&= \underset{y \neq x}{\alpha}\{\beta[\mu_R(x,x), \mu_R(x,x)], \beta[\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)]\} \\
&= \underset{y \neq x}{\alpha}\{\beta[1,1], \beta[\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)]\} \\
&= \underset{y \neq x}{\alpha}\{1, \beta[\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)]\} = 1
\end{aligned}$$

de la même manière nous pouvons prouver que $\nu_{R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R}(x,x) = 0 \;\; \forall x \in X.$

*ii)*la preuve de cette propriété est semblable à celle a fait pour la reflexivité ■

Corollaire 2.4.7 [13] [16][2] *Soit $R \in RFI(X \times Y)$,pour α est un t-conorme,λ est un t-norme alors*

$$R^{(n)} = \overbrace{R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R ... \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R}^{n\ fois}$$

Avec $n = 1, 2, ...,$ est réflexive.

Théorème 2.4.8 [13] *Soit R_1 une relation floue intuitionniste réflexive sur $X \times X$ alors:*

i) $(R_1)^{-1}$ est réflexive.

ii)$R_1 \vee R_2$ est réflexive pour tout $R_2 \in RFI(X \times X)$.

iii)$R_1 \wedge R_2$ est réflexive$\Longleftrightarrow$ $R_2 \in RFI(X \times X)$ est réflexive.

(1) [13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part I), *Mathware and Computing* , vol.2(1995),5-38.

(2) [16] H.Bustince et P.Burillo, Structures on intuitionistic fuzzy relations, *Fuzzy Sets and Systems*, vol.78(3)(1996), 293-303.

Preuve. Il suffit de voire que:

$$\begin{aligned}
\mu_{R_1^{-1}}(x,x) &= \mu_{R_1}(x,x)=1,\ \nu_{R_1^{-1}}(x,x)=\nu_{R_1}(x,x)=0 \\
\mu_{R_1\vee R_2}(x,x) &= \mu_{R_1}(x,x)\vee\mu_{R_2}(x,x)=1\vee\mu_{R_2}(x,x)=1 \\
\nu_{R_1\vee R_2}(x,x) &= \nu_{R_1}(x,x)\wedge\nu_{R_2}(x,x)=0\wedge\nu_{R_2}(x,x)=0 \\
\mu_{R_1\wedge R_2}(x,x) &= \mu_{R_1}(x,x)\wedge\mu_{R_2}(x,x)=1\wedge\mu_{R_2}(x,x)=\mu_{R_2}(x,x) \\
\nu_{R_1\wedge R_2}(x,x) &= \nu_{R_1}(x,x)\vee\nu_{R_2}(x,x)=0\vee\nu_{R_2}(x,x)=\nu_{R_2}(x,x)
\end{aligned}$$

■

Comme conséquence immédiate, le résultat est celui $R\overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}}\Delta$ est rèflexive pour tout $R\in RFI\left(X\times Y\right).$

2.5 La symétrie et l'antisymétrie:

Définition 2.5.1 *Soient X,Y deux ensembles de références*

$i)$La relation $R\in RFI\left(X\times X\right)$ est appellée symétrique si:

$$\begin{cases}\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)\\ \nu_R(x,y)=\nu_R(y,x)\end{cases}$$

De manière contraire on dit q'il est asymétrique.

$ii)$ Soit R un élément de $RFI\left(X\times X\right)$ on dit que R est antisymétrique si:

$$\forall x,y\in X\times X,\quad x\neq y\Rightarrow\begin{cases}\mu_R(x,y)\neq\mu_R(y,x)\\ \nu_R(x,y)\neq\nu_R(y,x)\\ \pi_R(x,y)=\pi_R(y,x)\end{cases}$$

Cette définition de l'antisymétrie floue intuitionniste n'assure pas l'antisymétrie dans le cas ou R est une relation flou seulement ($x\neq y$ et $\mu_R(x,y)>0$ alors $\mu_R(y,x)=0$) c'est pour cela, plusieurs auteurs $[11,12]$ utilisent la définition de l'antisymétrie suivant:

Définition 2.5.2 *Soit R un élément de $RFI(X \times X)$ on dit que R est anti-symétrique si:*

$$\forall x, y \in X \times X, \quad x \neq y \text{ et } [\mu_R(x,y) > 0 \text{ ou } (\mu_R(x,y) = 0 \text{ et } \nu_R(x,y) < 1)]$$
$$\text{alors } (\mu_R(y,x) = 0 \text{ et } \nu_R(y,x) = 1)$$

Dans le reste de ce mémoire on utilise la dexieume définition de l'antisymétrie floue intuitionniste.

Exemple 2.5.3 L'exemple suivant est d'une relation floue intuitionniste anti-symétrique:

μ_R	x	y	z
x	0.4	0.3	0.1
y	0	0.5	0
z	0	0	0.1

ν_R	x	y	z
x	0.5	0.7	0.4
y	1	0.3	0.6
z	1	1	0.7

Théorème 2.5.4 [13](1) *Soit R un élément de $RF(X \times X)$, R est antisymétrique au sens de Définition 2.5.1 si et seulement si :*

$$\forall (x,y) \in X \times X, \quad x \neq y \text{ Alors } \mu_R(x,y) \neq \mu_R(y,x).$$

Preuve. Comme $\nu_R(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$ et $\pi_R(x,y) = 0$ pour tout $\forall (x,y) \in X \times X$

Alors:$\mu_R(x,y) \neq \mu_R(y,x)$ si et seulement si $\begin{cases} \mu_R(x,y) \neq \mu_R(y,x) \\ \nu_R(x,y) \neq \nu_R(y,x) \\ \pi_R(x,y) = \pi_R(y,x) \end{cases}$ ■

Théorème 2.5.5 [13] *Soient R, P deux relations floues intuitionnistes symétriques Alors:*

$$R \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} P = \left(P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R \right)^{-1}$$

Preuve. $R = R^{-1}, P = P^{-1}$ Alors $R \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} P = R^{-1} \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} P^{-1} = \left(P \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} R \right)^{-1}$ ■

Si R est évidemment symétrique Alors $R \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} P$ est symétrique.

(1) [13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part I), *Mathware and Computing*, vol.2(1995),5-38.

Il est évident que la composition de deux relations symétriques n'est pas toujours symétrique.

2.6 La transitivité et la c-transitivité:

Définition 2.6.1 [13][(1)] *Pour α est t-conorme, β est t-norme, λ est t-norme, ρ est t-conorme on a:*

1. $R \in RFI\,(X \times X)$ est transitive si $R \geq R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} R$.

2. $R \in RFI\,(X \times X)$ est c-transitive si $R \leq R \overset{\lambda,\rho}{\underset{\alpha,\beta}{\circ}} R$.

Noter que non seulement le sens de l'inégalité change dans (1) *mais aussi l'ordre de α, β, λ et ρ.*

Définition 2.6.2 [13] *Soit R un élément de $RFI\,(X \times X)$.*

1. La fermeture-transitive de R , est la relation floue intuitionniste $\hat{R}$ définie sur $X \times X$ contient R et q' il est transitive.

a)$R \leq \hat{R}$

b)$\hat{R} \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} \hat{R} \leq \hat{R}$

c)Si $R, P \in RFI\,(X \times X)\,, R \leq P$ et P est transitive alors $\hat{R} \leq P$.

2. On dit que R est c-fermeture transitive, si la plus grande relation c-transitive $\overset{\vee}{R} \in RFI\,(X \times X)$contient R.

Théorème 2.6.3 [13] *Pour tout $R \in RFI\,(X \times X)$*

Si $\alpha = \vee, \lambda = \rho, \beta = \wedge, \rho = \vee$ Alors:

1. $\hat{R} = R \vee R \overset{\vee,\wedge}{\underset{\wedge,\vee}{\circ}} R \vee R \overset{\vee,\wedge}{\underset{\wedge,\vee}{\circ}} R \overset{\vee,\wedge}{\underset{\wedge,\vee}{\circ}} R \vee ... \vee R^n$.

2. $\overset{\vee}{R} = R \wedge R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \wedge R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \wedge ... \wedge R^n$.

Avec $n = card\,(X)$.

(1)[13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations.(Part I), *Mathware and Computing* ,vol.2(1995),5-38.

Preuve. $i)$ a) facillement de voire que $R \leq \hat{R}$.

b) Nous emploierons maintenant la propriété de la composition avec l'union:
$(R \vee S) \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} Q = \left(R \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} Q\right) \vee \left(S \underset{\lambda,\rho}{\overset{\alpha,\beta}{\circ}} Q\right) \Longleftrightarrow \alpha = \vee$ et $\lambda = \wedge$
$\left(R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee ... \vee R^n\right) \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} \left(R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee ... \vee R^n\right)$
$= R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} \left(R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee ... \vee R^n\right) \vee$
$\vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} \left(R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee ... \vee ...\right) ...$
$\leq \left(R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee ... \vee R^n\right)$.

c) Nous verrons maintenant qu'est la relation transitive minimum qui contient R ainsi nous emploierons la notation suivante

$$R^2 = R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R, \ R^3 = R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R, ...$$

On prend $R \leq P$,étant que P est transitive donc $P \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} P \leq P$ car composition est monotone on obtient:

$$\begin{aligned} R &\leq P \\ R^2 &\leq P^2 \leq P \\ R^3 &\leq P \end{aligned}$$

$Alors \underset{n=1}{\vee} R^n = P \Rightarrow \hat{R} \leq P \ \ donc \ \hat{R} = R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \underset{\wedge,\vee}{\overset{\vee,\wedge}{\circ}} R \vee ... \vee R^n.$

$ii)$ a) $R \geq \overset{\vee}{R}$ est évident.

b) dans l'ordre pour voir cela $\overset{\vee}{R} \underset{\vee,\wedge}{\overset{\wedge,\vee}{\circ}} \overset{\vee}{R} \leq \overset{\vee}{R}$ nous emploierons maintenant la propriété de la composition avec l'intersection:

$$
\begin{aligned}
(R \wedge P) \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} Q &= \left(R \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} Q\right) \wedge \left(P \overset{\alpha,\beta}{\underset{\lambda,\rho}{\circ}} Q\right) \Longleftrightarrow \alpha = \wedge et \lambda = \vee \\
& \left(R \wedge R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \wedge R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \wedge ... \vee \wedge R^n\right) \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} \\
& \left(R \wedge R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \wedge R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \wedge ... \wedge R^n\right) \\
&= R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} \left(R \wedge R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \wedge R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \wedge ... \wedge R^n\right) \wedge \\
& \wedge \left(R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R\right) \wedge ... \wedge R^n \\
&= R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \wedge R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \wedge ... \wedge R^n \geq \overset{\vee}{R}
\end{aligned}
$$

c) finalement nous verrons qu'est la relation c-transitive maximum qui contenu dans R.

On prend$P \leq R$,étantque P est c-transitive donc $P \leq P \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} P$

$$
\begin{aligned}
P &\leq R \\
P &\leq P \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} P \leq R \overset{\wedge,\vee}{\underset{\vee,\wedge}{\circ}} R \\
& ...
\end{aligned}
$$

Alors $P \leq \underset{n=1}{\wedge} R^n = \overset{\vee}{R} \leq R.$ ■

Théorème 2.6.4 [13](1) *Soient* $R, P \in RFI\,(X \times X)$ *si* $\alpha = \vee$, $\lambda = \wedge$, $\beta = \wedge$ *et* $\rho = \vee$ *donc: si* $R \leq P$ $Alors \hat{R} \leq \hat{P} et \overset{\vee}{R} \leq \overset{\vee}{P}$

Preuve. Il est semblable à ceux faits dans c) de i) et ii) dans la théorème précédent.

■

(1) [13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part I), *Mathware and Computing* , vol.2(1995),5-38.

2.7 L'ordre flou intuitionniste

L'autre grande classe de relation floue intuitionniste possédant des propriétés spécifiques constitue une extension des relations d'ordres floues.

Définition 2.7.1 *Soit X un ensemble non vide, un ordre flou intuitionniste sur X est une relation floue intuitionniste R de $X \times X$ tels que les conditions suivantes sont vérifier:*

1. $\forall x \in X \quad \mu_R(x,x) = 1 \ (FI - Réflexivité);$

2.$\forall x, y \in X \times X, \quad x \neq y \ et \ [\mu_R(x,y) > 0 \ ou \ (\mu_R(x,y) = 0 \ et \ \nu_R(x,y) < 1)]$

$$Alors \ (\mu_R(y,x) = 0 \ et \ \nu_R(y,x) = 1) \ (FI - Antisymétrie);$$

3.$\forall (x,y,z) \in X \times X \times Z, \begin{cases} \mu_R(x,z) \geq \bigvee_y [\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)] \ et \\ \nu_R(x,z) \leq \bigwedge_y [\nu_R(x,y) \vee \nu_R(y,z)] \ (FI - Transitivité). \end{cases}$

Exemples 2.7.2

Soient r_1, r_2 deux relations d'ordres flous intuitionnistes sur $X = \{x, y, z\}$ données par:

μ_{r_1}	x	y	z
x	1	0.6	0.6
y	0	1	0.4
z	0	0.3	1

ν_{r_1}	x	y	z
x	0	0	0
y	0.6	0	0.2
z	0.6	0.3	0

μ_{r_2}	x	y	z
x	1	0	0.6
y	0	1	0
z	0	0	1

ν_{r_2}	x	y	z
x	0	0.3	0.2
y	0.3	0	0.2
z	0.1	0.3	0

Remarques 2.7.3

1. La relation d'ordre classique $\leq$ est une relation d'ordre flou intuitionniste

$$\mu_{\leq}(x,y) = \begin{cases} 1 & si \ x \leq y \\ 0 & si \ x \nleq y \end{cases} \qquad \nu_{\leq}(x,y) = \begin{cases} 0 & si \ x \leq y \\ 1 & si \ x \nleq y \end{cases}$$

2. La relation d'ordre flou est une relation d'ordre flou intuitionniste

$\mu_R(x,y) = \mu_R(x,y), \ \nu_R(x,y) = 1 - \mu_R(x,y).$

Le Théorème suivant montre qu'on peut définir un ordre classique à partir d'un ordre flou intuitionniste.

Théorème 2.7.4 [17]

Soit R une relation d'ordre floue intuitionniste. Alors la relation $\leq_R$définie par

$$x \leq_R y \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_R(y,x) \leq \mu_R(x,y) \\ \nu_R(y,x) \geq \nu_R(x,y) \end{cases}$$

est une relation d'ordre classique sur X.

Preuve. *i)* $\leq_R$est réflexive:

En effet, on a$\begin{cases} \mu_R(x,x) \leq \mu_R(x,x) \\ \nu_R(x,x) \geq \nu_R(x,x) \end{cases} \Rightarrow x \leq_R x$

D'où $\leq_R$est réflexive.

ii) $\leq_R$est antisymétrique:

En effet, soit $x, y \in X$ tel que $x \neq y$, et on démontre que soit $x \leq_R y$ ou $y \leq_R x$

On a deux cas possible:

1ère cas: si $\mu_R(x,y) > 0$, alors d'aprés l'antisymétrie flou intuitionniste de R on obtient que: $\mu_R(y,x) = 0$ *et* $\nu_R(y,x) = 1$

Donc

$$\begin{cases} \mu_R(y,x) \leq \mu_R(x,y) \\ \qquad et \\ \nu_R(y,x) \geq \nu_R(x,y) \end{cases}$$

D'ou, $x \leq_R y$.

2ème cas: si $\mu_R(x,y) = 0$ alors on a deux sous-cas possible

1ère sous-cas: si $\nu_R(x,y) < 1$, alors d'aprés l'antisymétrie flou intuitionniste de R on obtient que: $\mu_R(y,x) = 0$ *et* $\nu_R(y,x) = 1$

Donc

$$\begin{cases} \mu_R(y,x) \leq \mu_R(x,y) \\ \qquad et \\ \nu_R(y,x) \geq \nu_R(x,y) \end{cases}$$

D'ou, $x \leq_R y$.

2ème sous-cas: si $\nu_R(x,y) = 1$, alors on obtient que

$$\begin{cases} \mu_R(y,x) \leq \mu_R(x,y) \\ \qquad et \\ \nu_R(y,x) \geq \nu_R(x,y) \end{cases}$$

D'ou, $y \leq_R x$.

Par conséquent, $\leq_R$est antisymétrique.

iii) $\leq_R$est transitive:

En effet, soit $x, y, z \in X$ tel que $x \leq_R y$ et $y \leq_R z$, et on démontre que $x \leq_R z$ si

$$\begin{cases} x \preceq_R y \text{ avec } x \neq y \\ y \preceq_R z \text{ avec } y \neq z \end{cases}$$

on obtient $\begin{cases} \mu_R(y,x) \leq \mu_R(x,y) \\ \nu_R(y,x) \geq \nu_R(x,y) \end{cases}$ et $\begin{cases} \mu_R(z,y) \leq \mu_R(y,z) \\ \nu_R(z,y) \geq \nu_R(y,z) \end{cases}$

Tout d'abord, voyons qu'ils ne peuvent pas se produire en même temps

$$\begin{cases} \mu_R(z,x) \leq \mu_R(x,y) \\ \nu_R(z,x) \geq \nu_R(y,z) \end{cases}$$

on a :

$\mu_R(x,y) = \mu_R(x,z) \wedge \mu_R(x,y) \leq \bigvee_t [\mu_R(z,t) \wedge \mu_R(t,y)] = \mu_R(z,y)$.

$\mu_R(y,z) = \mu_R(y,z) \wedge \mu_R(z,x) \leq \bigvee_t [\mu_R(y,t) \wedge \mu_R(t,x)] = \mu_R(y,x)$.

Alors

$$\begin{aligned} \mu_R(y,x) &\leq \mu_R(x,y) \leq \mu_R(z,y) \leq \mu_R(y,z) \leq \mu_R(y,x). \\ \mu_R(z,y) &\leq \mu_R(y,z) \leq \mu_R(y,x) \leq \mu_R(x,y) \leq \mu_R(z,y). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mu_R(y,x) &= \mu_R(x,y) = \mu_R(z,y) = \mu_R(y,z) = \mu_R(y,x). \\ \mu_R(z,y) &= \mu_R(y,z) = \mu_R(y,x) = \mu_R(x,y) = \mu_R(z,y). \end{aligned}$$

On peut dire que: $\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x) = \mu_R(z,y) = \mu_R(y,z)$ et comme R est antisymétrique on obtient $x = y$ et $y = z$ dans l'hypothèse d'opposition, d'où on déduit que seule l'une des possibilités suivantes peut se produire

$$i)\ \mu_R(z,x) < \mu_R(x,y) \quad ou \quad ii)\ \mu_R(z,x) < \mu_R(y,z)$$

D'aprés $i)$ on déduit que

$$\begin{aligned}\mu_R(z,x) &= \mu_R(z,x) \wedge \mu_R(x,y) \leq \\ &\leq \bigvee_t [\mu_R(z,t) \wedge \mu_R(t,y)] = \mu_R(z,y) \leq \mu_R(z,y).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mu_R(z,x) &\leq \mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z) \leq \\ &\leq \bigvee_t [\mu_R(x,t) \wedge \mu_R(t,z)] \leq \mu_R(x,z).\end{aligned}$$

D'aprés $ii)$ on déduit que

$$\begin{aligned}\mu_R(z,x) &= \mu_R(z,x) \wedge \mu_R(y,z) \leq \\ &\leq \bigvee_t [\mu_R(y,t) \wedge \mu_R(t,x)] = \mu_R(y,x) \leq \mu_R(x,y)\end{aligned}$$

Donc

$$\mu_R(z,x) \leq \mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z) \leq \mu_R(x,z)$$

De même manier on obtient

$$\begin{cases} \nu_R(z,x) \leq \nu_R(x,y) \\ \qquad\quad et \\ \nu_R(z,x) \leq \nu_R(y,z) \end{cases}$$

il ne peuvent pas se produire en même temps donc:

$$i)\ \nu_R(z,x) > \nu_R(x,y) \quad ou\ ii)\ \nu_R(z,x) > \nu_R(y,z)$$

D'apres $i)$ on déduit que

$$\begin{aligned}\nu_R(z,x) &= \nu_R(z,x) \vee \nu_R(x,y) \geq \\ &\geq \bigwedge_t [\nu_R(z,t) \wedge \nu_R(t,y)] = \nu_R(z,y) \geq \nu_R(z,y).\end{aligned}$$

Alors

$$\nu_R(z,x) \geq \nu_R(x,y) \wedge \nu_R(y,z) \geq \nu_R(x,z)$$

D'apres ii) et de même manier on déduit que

$$\nu_R(z,x) > \nu_R(x,z)$$

■

Proposition 2.7.5 *Si R est une relation d'ordre floue intuitionniste, alors* μ_R *est une relation d'ordre floue*

Preuve. Il suffit de voire que:

i) $\forall x \in X,\ \mu_R(x,x) = 1$

ii)$\forall x, y \in X,\ x \neq y$ et $\mu_R(x,y) > 0 \Rightarrow \mu_R(y,x) = 0$

iii)$\forall x, y, z \in X,\ \mu_R(x,z) \geq \max_{y \in X}\left[\min\left\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)\right\}\right].$ ■

Chapitre 3

Propriéties des relations d'ordres floues intuitionnistes

Dans ce chapitre nous étudierons les relations d'ordres flous intuitionnistes, d'abord; nous établirons quelques résultats qui nous permettent de construire les relations d'ordres floues intuitionniste à partir d'une relation d'ordre floue, ensuite, on donne un résultat concernant les relations d'ordres floues intuitionnistes définis sur les éspaces véctorièls réels et qui sont compatibles avec la structure des éspaces véctorièls, Finalement nous caractérisons une sous-catégorie des relations d'ordres floues intuitionnistes totales qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication usuelle.

3.1 Quelques Propriétiées des ordres flous intuitionnistes

Dans cette section, nous allons essayer de prouver que le minimum d'une famille d'ordres flous intuitionnistes est un ordre flou intuitionniste.

Théorème 3.1.1 *Soit X un ensemble de référence et soit $(r_i)_{i\in I}$ une famille des ordres flous intuitionnistes, alors la relation définit par:*

$$R(x,y) = \underset{i\in I}{min}\ r_i(x,y) = \left\{ < (x,y), \min_{i\in I}\mu_{r_i}(x,y); \max_{i\in I}\upsilon_{r_i}(x,y) > /x,y \in X \right\}$$

Est une relation d'ordre floue intuitionniste.

Preuve. 1) R est reflexive:

En effet, On sait que r_i est reflexive, alors par definition $\mu_{r_i}(x,x) = 1,\ \forall x \in X$. Donc

$$\begin{aligned} \underset{i\in I}{min}\ \mu_{r_i}(x,x) &= 1,\ \forall x \in X \\ \text{par conséquent } \mu_R(x,x) &= 1,\ \forall x \in X \end{aligned}$$

D'ou R est réflexive.

2) R est antisymétrique: en effet, Soit $x, y \in X$ tel que $x \neq y$

On suppose que

$$\mu_R(x,y) > 0\ ou\ \ (\mu_R(x,y) = 0\ et\ \nu_R(x,y) < 1)$$

Et on démontre que

$$\mu_R(y,x) = 0\ et\ \nu_R(y,x) = 1$$

On considère 2 cas possible

1ère cas: on suppose que $\mu_R(x,y) > 0$ alors:

$$\begin{aligned} \mu_R(x,y) &> 0 \Rightarrow \min_{i\in I} \mu_{r_i}(x,y) > 0 \\ &\Rightarrow \mu_{r_i}(x,y) > 0, \forall i \in I \end{aligned}$$

D'aprés l'antisymétrie de r_i on obtient que $\mu_{r_i}(y,x) = 0$ et $\nu_{r_i}(y,x) = 1$, $\forall i \in I$

$$\begin{aligned} \min_{i\in I} \mu_{r_i}(y,x) &= 0\ et\ \max_{i\in I} \nu_{r_i}(y,x) = 1 \\ &\Rightarrow \mu_R(y,x) = 0\ et\ \nu_R(y,x) = 1. \end{aligned}$$

2ème cas: on suppose que $\mu_R(x,y) = 0\ et\ \nu_R(x,y) < 1$ alors:

$$\min_{i\in I} \mu_{r_i}(x,y) = 0\ et\ \max_{i\in I} \nu_{r_i}(x,y) < 1$$

Donc

$$\exists i_0 \in I /\ \mu_{r_{i_0}}(x,y) = 0\ et\ \forall i \in I,\ \nu_{r_i}(x,y) < 1$$

D'aprés l'antisymétrie de r_{i_0} on obtient que

$$\mu_{r_{i_0}}(x,y) = 0\ et\ \nu_{r_{i_0}}(y,x) = 1$$

Donc

$$\min_{i\in I}\mu_{r_i}(y,x)=0 \ et \ \max_{i\in I}\nu_{r_i}(y,x)=1$$

Par conséquent

$$\mu_R(y,x)=0 \ et \ \nu_R(y,x)=1$$

d'ou R est antisymétrique.

3)R est transitive:

3-1) En effet: soit $x,y,z\in X$, on démontre que:

$$\mu_R(x,z)\geq\sup_{y\in X}(\min(\mu_R(x,y);\mu_R(y,z)))$$

On a

$$\mu_R(x,y)\leq\mu_{r_i}(x,y) \quad et \quad \mu_R(y,z)\leq\mu_{r_i}(y,z) \ \ \forall i\in I$$

Alors

$$\min(\mu_R(x,y),\mu_R(y,z))\leq\min\left(\mu_{r_i}(x,y),\mu_{r_i}(y,z)\right)$$

On a aussi

$$\min\left(\mu_{r_i}(x,y),\mu_{r_i}(y,z)\right)\leq\mu_{r_i}(x,z),\forall y\in X \ \forall i\in I$$

Donc

$$\min\left(\mu_{r_i}(x,y),\mu_{r_i}(y,z)\right)\leq\min\mu_{r_i}(x,z)$$

Par conséquent

$$\mu_R(x,z)\geq\min(\mu_R(x,y);\mu_R(y,z))$$

D'où

$$\mu_R(x,z)\geq\sup_{y\in X}(\min(\mu_R(x,y);\mu_R(y,z)))$$

3-2) On démontre que

$$\nu_R(x,z)\leq\inf_{y\in X}(\max(\nu_R(x,y);\nu_R(y,z)))$$

On a

$$\nu_R(x,y) \geq \nu_{r_i}(x,y) \quad et \quad \nu_R(y,z) \geq \nu_{r_i}(y,z) \ \ \forall i \in I$$

Alors

$$\max(\nu_R(x,y), \nu_R(y,z)) \geq \max(\nu_{r_i}(x,y), \nu_{r_i}(y,z))$$

On a aussi

$$\max(\nu_{r_i}(x,y), \nu_{r_i}(y,z)) \geq \nu_{r_i}(x,z), \forall y \in X \ \forall i \in I$$

Donc

$$\max(\nu_{r_i}(x,y), \nu_{r_i}(y,z)) \geq \max \nu_{r_i}(x,z)$$

Par conséquent

$$\nu_R(x,z) \leq \max(\nu_R(x,y); \nu_R(y,z))$$

D'où

$$\nu_R(x,z) \leq \inf_{y \in X} (\max(\nu_R(x,y); \nu_R(y,z)))$$

Alors R est transitive.

D'où R est une relation d'ordre floue intuitionniste. ■

Exemple 3.1.2 Soient r_1, r_2 deux relations d'ordres floues intuitionnistes sur $X = \{x, y, z\}$ données par:

μ_{r_1}	x	y	z
x	1	0.6	0.6
y	0	1	0.4
z	0	0.3	1

ν_{r_1}	x	y	z
x	0	0	0
y	0.6	0	0.2
z	0.6	0.3	0

μ_{r_2}	x	y	z
x	1	0	0.6
y	0	1	0
z	0	0	1

ν_{r_2}	x	y	z
x	0	0.3	0.2
y	0.3	0	0.2
z	0.1	0.3	0

Alors $R(x,y) = min\ \{r_1(x,y), r_2(x,y)\}$ définie par:

μ_R	x	y	z
x	1	0	0.6
y	0	1	0
z	0	0	1

ν_R	x	y	z
x	0	0.3	0.2
y	0.6	0	0.2
z	0.6	0.3	0

Corrolaire 3.1.3 *Soit R une relation d'ordre floue intuitionniste sur X, alors la relation S définit par:*

$$S(x,y) = \min\left\{R(x,y), R^{-1}(x,y)\right\}$$

est une relation d'ordre floue intuitionniste.

Théorème 3.1.4 [31][(1)]

Soit$(X_i, r_i)_{i\in\{1...n\}}$ une famille finis non vide des ordres flous intuitionnistes, alors la relation R définit sur $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ par:

$$R((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = \underset{i\in I}{min}\ \{r_i(x_i,y_i) : i = 1...n\} = \left\{< (x_i,y_i), \min_{i\in I}\mu_{r_i}(x_i,y_i); \max_{i\in I}\nu_{r_i}(x_i,y_i) >\right\}$$

est une relation d'ordre floue intuitionniste sur $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Preuve. 1) R est reflexive:

En effet, On sait que r_i est reflexive, alors par definition $\mu_{r_i}(x_i,x_i) = 1,\ \forall x_i \in X_i$. Donc

$$\begin{aligned} \underset{i\in I}{min}\ \mu_{r_i}(x_i,x_i) &= 1,\ \forall x_i \in X_i \\ \text{par conséquent } \mu_R(x_i,x_i) &= 1,\ \forall x_i \in X_i \end{aligned}$$

D'ou R est réflexive.

2) R est antisymétrique: en effet, Soit $x_i, y_i \in X_i$ tel que $x_i \neq y_i$

On suppose que

$$\mu_R(x_i,y_i) > 0\ ou\ \ (\mu_R(x_i,y_i) = 0\ et\ \nu_R(x_i,y_i) < 1)$$

(1) [31] A. Stouti et L. Zedam, On α-fuzzy Orders, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, vol.18(1)(2010), 171-192.

Et on démontre que

$$\mu_R(y_i, x_i) = 0 \; et \; \nu_R(y_i, x_i) = 1$$

On considère 2 cas possible

1ère cas: on suppose que $\mu_R(x_i, y_i) > 0$ alors:

$$\begin{aligned} \mu_R(x_i, y_i) &> 0 \Rightarrow \min_{i \in I} \mu_{r_i}(x_i, y_i) > 0 \\ &\Rightarrow \mu_{r_i}(x_i, y_i) > 0, \forall i \in I \end{aligned}$$

D'aprés l'antisymétrie de r_i on obtient que $\mu_{r_i}(y_i, x_i) = 0$ et $\nu_{r_i}(y_i, x_i) = 1$, $\forall i \in I$

$$\begin{aligned} \min_{i \in I} \mu_{r_i}(y_i, x_i) &= 0 \; et \; \max_{i \in I} \nu_{r_i}(y_i, x_i) = 1 \\ &\Rightarrow \mu_R(y_i, x_i) = 0 \; et \; \nu_R(y_i, x_i) = 1. \end{aligned}$$

2ème cas: on suppose que $\mu_R(x_i, y_i) = 0 \; et \; \nu_R(x_i, y_i) < 1$ alors:

$$\min_{i \in I} \mu_{r_i}(x_i, y_i) = 0 \; et \; \max_{i \in I} \nu_{r_i}(x_i, y_i) < 1$$

Donc

$$\exists i_0 \in I / \; \mu_{r_{i_0}}\left(x_{i_0}, y_{i_0}\right) = 0 \; et \; \forall i \in I, \; \nu_{r_i}(x_i, y_i) < 1$$

D'aprés l'antisymétrie de r_i on obtient que

$$\mu_{r_{i_0}}\left(x_{i_0}, y_{i_0}\right) = 0 \; et \; \nu_{r_{i_0}}\left(y_{i_0}, x_{i_0}\right) = 1$$

Donc

$$\min_{i \in I} \mu_{r_i}(y_i, x_i) = 0 \; et \max_{i \in I} \nu_{r_i}(y_i, x_i) = 1$$

Par conséquent

$$\mu_R(y_i, x_i) = 0 \; et \; \nu_R(y_i, x_i) = 1$$

d'ou R est antisymétrique.

3)R est transitive:

3-1) En effet: soit $x_i, y_i, z_i \in X_i$, on démontre que:

$$\mu_R(x_i, z_i) \geq \sup_{y_i \in X_i} \left(\min\left(\mu_R(x_i, y_i); \mu_R(y_i, z_i)\right)\right)$$

On a

$$\mu_R(x_i, y_i) \leq \mu_{r_i}(x_i, y_i) \quad et \quad \mu_R(y_i, z_i) \leq \mu_{r_i}(y_i, z_i) \ \ \forall i \in I$$

Alors

$$\min(\mu_R(x_i, y_i), \mu_R(y_i, z_i)) \leq \min\left(\mu_{r_i}(x_i, y_i), \mu_{r_i}(y_i, z_i)\right)$$

On a aussi

$$\min\left(\mu_{r_i}(x_i, y_i), \mu_{r_i}(y_i, z_i)\right) \leq \mu_{r_i}(x_i, z_i), \forall y_i \in X_i \ \forall i \in I$$

Donc

$$\min\left(\mu_{r_i}(x_i, y_i), \mu_{r_i}(y_i, z_i)\right) \leq \min \mu_{r_i}(x_i, z_i)$$

Par conséquent

$$\mu_R(x_i, z_i) \geq \min(\mu_R(x_i, y_i); \mu_R(y_i, z_i))$$

D'où

$$\mu_R(x_i, z_i) \geq \sup_{y_i \in X_i}(\min(\mu_R(x_i, y_i); \mu_R(y_i, z_i)))$$

3-2) On démontre que

$$\nu_R(x_i, z_i) \leq \inf_{y_i \in X_i}(\max(\nu_R(x_i, y_i); \nu_R(y_i, z_i)))$$

On a

$$\nu_R(x_i, y_i) \geq \nu_{r_i}(x_i, y_i) \quad et \quad \nu_R(y_i, z_i) \geq \nu_{r_i}(y_i, z_i) \ \ \forall i \in I$$

Alors

$$\max(\nu_R(x_i, y_i), \nu_R(y_i, z_i)) \geq \max(\nu_{r_i}(x_i, y_i), \nu_{r_i}(y_i, z_i))$$

On a aussi

$$\max(\nu_{r_i}(x_i, y_i), \nu_{r_i}(y_i, z_i)) \geq \nu_{r_i}(x_i, z_i), \forall y_i \in X_i \ \forall i \in I$$

Donc

$$\max(\nu_{r_i}(x_i, y_i), \nu_{r_i}(y_i, z_i)) \geq \max \nu_{r_i}(x_i, z_i)$$

Par conséquent

$$\nu_R(x_i,z_i) \leq \max(\nu_R(x_i,y_i);\nu_R(y_i,z_i))$$

D'où

$$\nu_R(x_i,z_i) \leq \inf_{y_i\in X_i}(\max(\nu_R(x_i,y_i);\nu_R(y_i,z_i)))$$

Alors R est transitive.

D'où R est une relation d'ordre floue intuitionniste sur $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.. ■

Corrolaire 3.1.5 [31][(1)] *Soit(X,r) une relation d'ordre floue intuitionniste non vide alors la relation R definit sur X^n comme:*

$$R((x_1,...,x_n),(y_{1,}...,y_n)) = min\ \{r(x_i,y_i) : i = 1...n\}$$

est une relation d'ordre floue intuitionniste sur X^n.

Le Théorème suivante est une généralisation du Théorème 3.3 [31]

Théorème 3.1.6 *Soit X un ensemble de référence et soit $r_1$et r_2 deux relations d'ordres floues intuitionnistes, alors la relation R définit comme:*

$$R(x,y) = ar_1(x,y) + br_2(x,y)$$

Avec $a,b \in [0,1]$ tel que:$a+b=1$ est une relation d'ordre floue intuitionniste.

Preuve. $i)$ R est reflexive:(i.e:$\mu_R(x,x) = 1 \quad \forall x \in X)$

On a r_1 est reflexive alors :$\mu_{r_1}(x,x) = 1$ alors $a\mu_{r_1}(x,x) = a$

On a aussi r_2 est reflexive alors :$\mu_{r_2}(x,x) = 1$ alors $b\mu_{r_2}(x,x) = b$

Donc

$$a\mu_{r_1}(x,x) + b\mu_{r_2}(x,x) = a+b = 1$$

D'ou R est reflexive.

$ii)$ R est antisymétrique: en effet, soit $x,y \in X$ tel que $x \neq y$ *et*

$$[\mu_R(x,y) > 0 \ ou \ (\mu_R(x,y) = 0 \ et \ \nu_R(x,y) < 1)]$$

(1)[31] A. Stouti et L. Zedam, On α-fuzzy Orders, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, vol.18(1)(2010), 171-192.

et on démontre que($\mu_R(y,x)=0$ et $\nu_R(y,x)=1$)

$ii.1$) On suppose que $\mu_R(x,y)>0$ et on démontre que:

a) $\mu_R(y,x)=0$.

En effet, $\mu_R(x,y)>0$ implique que $a\mu_{r_1}(x,y)+b\mu_{r_2}(x,y)>0$

Alors, puisque $a,b\in[0,1]$ et $a+b=1$ on obtient

$$\mu_{r_1}(x,y)>0 \ et \ \mu_{r_2}(x,y)>0$$

Donc d'apres l'antisymétrie de $r_1 et$ r_2 on obtient

$$\mu_{r_1}(y,x)=0 \ et \ \mu_{r_2}(y,x)=0$$

D'ou,

$$\mu_R(y,x)=a\mu_{r_1}(y,x)+b\mu_{r_2}(y,x)=0$$

b)$\nu_R(y,x)=1$.

En effet, on a $\nu_{r_1}(y,x)=1$ et $\nu_{r_2}(y,x)=1$

Alors,

$$\nu_R(y,x)=a\nu_{r_1}(y,x)+b\nu_{r_2}(y,x)=a+b=1$$

$ii.2$) On suppose que $\mu_R(x,y)=0$ et $\nu_R(x,y)<1$ et on démontre que:

a) $\mu_R(y,x)=0$.

En effet, on a

$$\mu_R(x,y)=a\mu_{r_1}(x,y)+b\mu_{r_2}(x,y)=0$$

implique que $\mu_{r_1}(x,y)=0$ et $\mu_{r_2}(x,y)=0$

Donc

$$\mu_R(y,x)=a\mu_{r_1}(y,x)+b\mu_{r_2}(y,x)=0$$

b) $\nu_R(y,x)=1$.

En effet, on a

$$\nu_R(x,y)=a\nu_{r_1}(x,y)+b\nu_{r_2}(x,y)<1$$

Alors $\nu_{r_1}(x,y)<1$ et $\nu_{r_2}(x,y)<1$

Donc $\nu_{r_1}(y,x)=1$ et $\nu_{r_2}(y,x)=1$

D'ou,

$$\nu_R(y,x)=a\nu_{r_1}(y,x)+b\nu_{r_2}(y,x)=1$$

D'ou R est antisymétrique.

$iii)$ R est transitive:

En effet soit $x,y,z\in X$ on démontre la première inégalité

$$\mu_R(x,z)\geq\sup_{y\in X}\left(\min\left(\mu_R(x,y)\,;\mu_R(y,z)\right)\right)$$

On a r_1 et r_2 sont transitive alors:

$$\begin{aligned}\mu_{r_1}(x,z) &\geq \left(\min\left(\mu_{r_1}(x,y)\,;\mu_{r_1}(y,z)\right)\right)\\ & et\\ \mu_{r_2}(x,z) &\geq \left(\min\left(\mu_{r_2}(x,y)\,;\mu_{r_2}(y,z)\right)\right)\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}a\mu_{r_1}(x,z) &\geq \left(\min\left(a\mu_{r_1}(x,y)\,;a\mu_{r_1}(y,z)\right)\right)\\ & et\\ b\mu_{r_2}(x,z) &\geq \left(\min\left(b\mu_{r_2}(x,y)\,;b\mu_{r_2}(y,z)\right)\right)\end{aligned}$$

Donc

$a\mu_{r_1}(x,z)+b\mu_{r_2}(x,z)\geq\left(\min\left(a\mu_{r_1}(x,y)\,;a\mu_{r_1}(y,z)\right)\right)+\left(\min\left(b\mu_{r_2}(x,y)\,;b\mu_{r_2}(y,z)\right)\right)$

Alors

$$\mu_R(x,z)\geq\left(\min\left(a\mu_{r_1}(x,y)+b\mu_{r_2}(x,y)\,;a\mu_{r_1}(y,z)+b\mu_{r_2}(y,z)\right)\right)$$

Alors

$$\mu_R(x,z)\geq\left(\min\left(\mu_R(x,y)\,;\mu_R(y,z)\right)\right)\ \ \forall y\in X$$

Donc

$$\mu_R(x,z)\geq\sup_{y\in X}\left(\min\left(\mu_R(x,y)\,;\mu_R(y,z)\right)\right)$$

on démontre la second inégalité

$$\nu_R(x,z)\leq\inf_{y\in X}\left(\max\left(\nu_R(x,y)\,;\nu_R(y,z)\right)\right)$$

On a r_1 et r_2 sont transitive alors:

$$\begin{aligned}\nu_{r_1}(x,z) &\leq (\max(\nu_{r_1}(x,y);\nu_{r_1}(y,z))) \\ & et \\ \nu_{r_2}(x,z) &\leq (\max(\nu_{r_2}(x,y);\nu_{r_2}(y,z)))\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}a\nu_{r_1}(x,z) &\leq (\max(a\nu_{r_1}(x,y);a\nu_{r_1}(y,z))) \\ & et \\ b\nu_{r_2}(x,z) &\leq (\max(b\nu_{r_2}(x,y);b\nu_{r_2}(y,z)))\end{aligned}$$

Donc

$$a\nu_{r_1}(x,z)+b\nu_{r_2}(x,z) \leq (\max(a\nu_{r_1}(x,y);a\nu_{r_1}(y,z)))+(\max(b\nu_{r_2}(x,y);b\nu_{r_2}(y,z)))$$

Alors

$$\nu_R(x,z) \leq (\max(a\nu_{r_1}(x,y)+b\nu_{r_2}(x,y);a\nu_{r_1}(y,z)+b\nu_{r_2}(y,z)))$$

Alors

$$\nu_R(x,z) \leq (\max(\nu_R(x,y);\nu_R(y,z))) \ \ \forall y \in X$$

Donc

$$\nu_R(x,z) \leq \inf_{y\in X}(\max(\nu_R(x,y);\nu_R(y,z)))$$

Donc R est antisymétrique.

D'ou R est une relation d'ordre floue intuitionniste sur X. ■

3.2 les relations d'ordres floues intuitionnistes qui sont compatibles avec les structures des espaces vectorielles réels.

Dans cette section, nous allons étudier la propriété de la compatibilite avec les structures des espaces vectorielles réels consernant les ordres flous intuitionnistes.

Définition 3.2.1 (*Ordre flou intuitionniste total) Soit X un ensemble non vide et soit R une relation d'ordre floue intuitionniste sur X.*

On dit que R est total (linéaire) si $a \neq b$ et:

$$(\mu_R(a,b) > 0 \text{ et } \nu_R(a,b) = 0) \text{ ou } (\mu_R(b,a) > 0 \text{ et } \nu_R(b,a) = 0)$$

Définition 3.2.2 *Soit X un espace vectoriel et r une relation d'ordre floue intuitionniste sur X*

i)On dit que r est compatible avec l'addition si pour tout $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X^2$ on a:

$$\begin{aligned}
\mu_R(x_1, y_1) &> 0 \text{ et } \mu_R(x_2, y_2) > 0 \Rightarrow \mu_R(x_1 + x_2, y_1 + y_2) > 0 \\
&\text{et} \\
\nu_R(x_1, y_1) &= 0 \text{ et } \nu_R(x_2, y_2) = 0 \Rightarrow \nu_R(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = 0
\end{aligned}$$

ii)On dit que r est compatible avec la multiplication par des scalaires si pour tout $(x, y) \in X^2$ et $\lambda > 0$ on a:

$$\begin{aligned}
\mu_R(x, y) &> 0 \Rightarrow \mu_R(\lambda x, \lambda y) > 0 \\
&\text{et} \\
\nu_R(x, y) &= 0 \Rightarrow \nu_R(\lambda x, \lambda y) = 0
\end{aligned}$$

Théorème 3.2.3 *Soit $(X_i, r_i)_{i \in \{1...n\}}$ une famille des ordres floues intuitionnistes sur les espaces vectorieles et soit la relation flou R definie sur $X_1 \times X_2, ... \times X_n$ comme:*

$$R((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \min\{r_i(x_i, y_i), i = 1....n\}$$

Alors on a:

i) Si r_i est compatible avec l'addition sur X_i pour tout $i \in \{1.....n\}$ alors R est compatible avec l'addition sur l'espace vectoriel $X_1 \times X_2, ... \times X_n$.

ii) Si r_i est compatible avec la multiplication par des scalaires sur X_i pour tout $i \in \{1.....n\}$ alors R est compatible avec la multiplication par des scalaires sur l'espace vectoriel $X_1 \times X_2, ... \times X_n$.

Preuve. D'apres le théorème précédent R est une relation d'ordre floue intuitionniste sur l'espace vectoriele $X_1 \times X_2, ... \times X_n$ on démontre que R est compatible avec l'addition sur $X_1 \times X_2, ... \times X_n$.

$1-i$) En effet Soit $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n), (t_1, ..., t_n) \in X_1 \times X_2, ... \times X_n$ tel que:

$$\mu_R((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) > 0 \; et \; \mu_R((z_1, ..., z_n), (t_1, ..., t_n)) > 0$$

Alors d'apres notre définition du R et pour tout $i \in \{1.....n\}$ on a:

$$\mu_{r_i}(x_i, y_i) > 0 \; et \; \mu_{r_i}(z_i, t_i) > 0$$

Par la compatibilité de r_i ($i \in \{1.....n\}$) on obtient

$$\mu_{r_i}(x_i + z_i, y_i + t_i) > 0$$

Alors

$$\mu_R((x_1 + z_1, ..., x_n + z_n), (y_1 + t_1, ..., y_n + t_n)) = \min\left\{\mu_{r_i}(x_i + z_i, y_i + t_i)\right\} > 0$$

D'ou μ_R est compatible avec l'addition sur l'espace vectoriel $X_1 \times X_2, ... \times X_n$.

$1-ii$) Soit $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n), (t_1, ..., t_n) \in X_1 \times X_2, ... \times X_n$ tel que:

$$\nu_R((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = 0 \; et \; \nu_R((z_1, ..., z_n), (t_1, ..., t_n)) = 0$$

Alors d'apres notre définition du R et pour tout $i \in \{1.....n\}$ on a:

$$\nu_{r_i}(x_i, y_i) = 0 \; et \; \nu_{r_i}(z_i, t_i) = 0$$

Par la compatibilité de r_i ($i \in \{1.....n\}$) on obtient

$$\nu_{r_i}(x_i + z_i, y_i + t_i) = 0$$

Alors

$$\nu_R((x_1 + z_1, ..., x_n + z_n), (y_1 + t_1, ..., y_n + t_n)) = \max\{\nu_{r_i}(x_i + z_i, y_i + t_i)\} = 0$$

D'ou R est compatible avec l'addition sur l'espace vectoriel $X_1 \times X_2, ... \times X_n$.

$2-i)$ On démontre que R est compatible avec la multiplication par des scalaires sur $X_1 \times X_2, ... \times X_n$.en effet, soit $\lambda > 0$ et $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in X_1 \times X_2, ... \times X_n$ tel que:

$$\mu_R((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) > 0$$

Alors d'apres notre définition du R et pour tout $i \in \{1.....n\}$ on a:

$$\mu_{r_i}(x_i, y_i) > 0.$$

Puisque r_i est compatible avec la multiplication par des scalaires sur X_i alors:

$$\mu_{r_i}(\lambda x_i \lambda y_i) > 0, \quad \forall i \in \{1.....n\}.$$

Donc

$$\mu_R((\lambda x_1, ..., \lambda x_n), (\lambda y_1, ..., \lambda y_n)) = \min\left\{\mu_{r_i}(\lambda x_i, \lambda y_i)\right\} > 0$$

D'ou μ_R est compatible avec la multiplication par des scalaires sur l'espace vectoriel $X_1 \times X_2, ... \times X_n$.

$2-ii)$ Soit $\lambda > 0$ et $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in X_1 \times X_2, ... \times X_n$ tel que:

$$\nu_R((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = 0$$

Alors d'apres notre définition du R et pour tout $i \in \{1.....n\}$ on a:

$$\nu_{r_i}(x_i, y_i) = 0$$

Puisque r_i est compatible avec la multiplication par des scalaires sur X_i alors:

$$\nu_{r_i}(\lambda x_i, \lambda y_i) = 0 \quad \forall i \in \{1.....n\}$$

Donc

$$\nu_R((\lambda x_1, ..., \lambda x_n), (\lambda y_1, ..., \lambda y_n)) = \max\{\nu_{r_i}(\lambda x_i, \lambda y_i)\} 0$$

D'ou R est compatible avec la multiplication par des scalaires sur l'espace vectoriel $X_1 \times X_2, ... \times X_n$. ■

corollaire 3.2.4 *Soit r un ordre flou intuitionniste sur l'espace vectoriel X, r est compatible avec l'addition et la multiplication par des scalaires sur X. Alors la relation R définit sur X^npar:*

$$R((x_1, ..., x_n), (y_{1,}..., y_n)) = min\{r(x_i, y_i),\ i = 1...n\}$$

est une relation d'ordre floue intuitionniste compatible avec l'addition et la multiplication par des scalaires sur X^n.

3.3 Caractérisation d'une sous-catégorie d'ordres floues intuitionnistes (totaux)qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication sur $\mathbb{R}$.

Dans cette section, on donne des définitions et propositions pour obtenir une caractérisation d'une sous-catégorie d'ordres floues intuitionnistes totaux qui sont compatibles avec l'addition et la multiplication par des scalaires sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.3.1 *Soit r une relation d'ordre floue intuitionniste sur $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ si $\mu_r(0, y) > 0$ et $\nu_r(0, y) = 0$ alors x appele $r -$ nombre réel positif.*
L'ensemble de tout les réels positif noté par $\mathbb{R}^+_{FI}$.
Aussi si $\mu_r(x, 0) > 0$ et $\nu_r(y, 0) = 0$ alors x appele $r -$ nombre réel negatif.
L'ensemble de tout les réels negatif noté par $\mathbb{R}^-_{FI}$.

Définition 3.3.2 *Soit C_{FI} l'ensemble de tout les relations d'ordres floues intuitionnistes R définie sur $\mathbb{R}$ et satisfait les deux conditions suivantes:*
i)

$$\begin{aligned} \mu_R(x, y) &\leq \mu_R(x + z, y + z) \\ \nu_R(x, y) &\geq \nu_R(x + z, y + z)\ \forall x, y, z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\mu_R(x,y) &\leq \mu_R(\lambda x,\lambda y)\\ \nu_R(x,y) &\geq \nu_R(\lambda x,\lambda y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}\forall\lambda>0\end{aligned}$$

Proposition 3.3.3[31] *Soit R un élément de C_{FI} alors*

i)

$$\begin{aligned}\mu_R(x_1+x_2,y_1+y_2) &\geq \min\{\mu_R(x_1,y_1),\mu_R(x_2,y_2)\}\\ \nu_R(x_1+x_2,y_1+y_2) &\leq \max\{\nu_R(x_1,y_1),\nu_R(x_2,y_2)\}\end{aligned}$$

ii)R est compatible avec l'addition et la multiplication par des scalaires sur$\mathbb{R}$

Proposition 3.3.4 [31](1)*Soit R un élément de C_{FI} alors*

1. *Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$:si $x<y$ alors*

$$\mu_R(x,y)=\mu_R(0,y-x)\,;\nu_R(x,y)=\nu_R(0,y-x)$$

2. *Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$:si $x>y$ alors*

$$\mu_R(x,y)=\mu_R(x-y,0)\,;\nu_R(x,y)=\nu_R(x-y,0)$$

3. *Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$:si $x<y$ alors*

$$\mu_R(x,y)=\mu_R(0,1)\,;\nu_R(x,y)=\nu_R(0,1)$$

4. *Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$:si $x>y$ alors*

$$\mu_R(x,y)=\mu_R(1,0)\,;\nu_R(x,y)=\nu_R(1,0)$$

5. $\mathbb{R}^+_{FI}\cap\mathbb{R}^-_{FI}=\{0\}$.

Proposition 3.3.5 *Soit R un élément de C_{FI}*

1. *R une relation d'ordre floue intuitionniste total sur $\mathbb{R}$ alors $\mathbb{R}=\mathbb{R}^+_{FI}\cup\mathbb{R}^-_{FI}$.*

(1)[31] A. Stouti et L. Zedam, On α-fuzzy Orders, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, vol.18(1)(2010), 171-192.

2. R est total sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$[\mu_R(0,1) > 0 \text{ et } \nu_R(0,1) = 0] \text{ ou } [\mu_R(1,0) > 0 \text{ et } \nu_R(1,0) = 0]$$

Le Théorème suivante est une conséquence direct de Proposition3.3.4 et Proposition3.3.5

Théorème 3.3.6 *Soit R un élément de C_{FI} alors R définie comme:*

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \mu_R(0,1) & \text{si } x < y \\ \mu_R(1,0) & \text{si } x > y \end{cases}$$

$$\nu_R(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \nu_R(0,1) & \text{si } x < y \\ \nu_R(1,0) & \text{si } x > y \end{cases}$$

Plus de ça si $\mu_R(0,1) > 0$ et $\nu_R(0,1) = 0$ ou $\mu_R(1,0) > 0$ et $\nu_R(1,0) = 0$ alors R est une relation d'ordre floue intuitionniste total sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 4

Extensions linéaires d'un ordre flou intuitionniste

Dans ce chapitre on constatera que chaque relation d'ordre flou intuitionniste sur un ensemble non vide X peut être étendu à une relation totale sur X, et nous donnera un algorithme qui permettera d'obtenir cette extension linèaire, comme on peut généraliser ce résultat dans le cas infini (version flou intuitionniste du théorème de SZPILRAJN) et on caractérise chaque ordre flou intuitionniste sur un ensemble non vide X par l'intersection flou intuitionniste de quelques ordres floues intuitionnistes linéaires sur X qui les éxtendt. premièrement, il faut identifier cette lemme.

Soit X un ensemble non vide et soit $r, r^{'}$ sont deux relations d'ordres floues intuitionnistes sur X on peut dire, que $r^{'}$ est une extension de r si r est un sous ensemble flou intuitionniste de $r^{'}$.c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \mu_r(x,y) \leq \mu_{r^{'}}(x,y) \\ \nu_r(x,y) \geq \nu_{r^{'}}(x,y) \end{pmatrix}$$

Ainsi, $r^{'}$ est apellée extension linéaire de r si; et seulement si; $r^{'}$est linéaire et extensie r.

4.1 Théorème d'extensions linéaires de l'ordre flou intuitionniste

Avant de passer à la théorème d'extensions nous devons donner cette lemme qui permet de faire retours les éléments non comparables à des éléments comparables.

Lemme 4.1.1 *Soit (X, r) un ensemble ordonné flou intuitionniste non vide et a, b deux éléments non comparables sur (X, r) Alors il existe un ordre flou intuitionniste $r^{'}$ sur X extension de r et vérifie que :*

$$(\mu_{r^{'}}(a, b) > 0 \ et \ \nu_{r^{'}}(a, b) = 0) \ \ ou \ \ (\mu_{r^{'}}(b, a) > 0 \ et \ \nu_{r^{'}}(b, a) = 0)$$

Théorème 4.1.2 *(Version flou intuitionniste du Théorème de Szpilrajn). Tout ordre flou intuitionniste sur un ensemble non vide X peut être étendu à un ordre flou intuitionniste total sur X.*

4.2 Preuve constructive des extensions lineaires des ordres flous intuitionnistes définis sur un ensemble fini.

Dans cette section on va voir comment peut construire un extension linéaire d'un ordre partiel flou intuitionniste définit sur un ensemble fini non vide X. Plus précésément, nous devons démontrer le résultat suivant:

Théorème 4.2.1 *toute relation d'ordre floue intuitionniste sur un ensemble fini X peut être étendu a une relation d'ordre floue intuitionniste totale(linéaire) sur X.*

Remarque 4.2.2 pour un ensemble classique fini X le nombre $L(X)$ d'extensions linèaire de X est fini et donnè par $L(X) = \sum_{p \ \min imale} L(X - \{p\})$ (voir [27] proposition7.1.4)mais pour un ordre flou intuitionniste il existe des éxtensions linéaires infinis.

Théorème 4.2.3

Chaque ordre flou intuitionniste sur un ensemble non vide X est un intersection flou intuitionniste de quelque ordres flous intuitionnistes qui l'étend.

Exemple 4.2.4 Soit $X = \{a, b, c\}$ alors l'ordre flou intuitionniste suivant

μ_r	a	b	c
a	1	0	0.6
b	0	1	0
c	0	0	1

ν_r	a	b	c
a	0	0.3	0.2
b	0.3	0	0.2
c	0.1	0.3	0

peut être réalisé comme intersection flou intuitionniste de deux ordres flous intuitionnistes

μ_r	a	b	c
a	1	1	1
b	0	1	1
c	0	0	1

ν_r	a	b	c
a	0	0	0
b	0.3	0	0
c	0.1	0.3	0

μ_r	a	b	c
a	1	0	0.6
b	0	1	0
c	0	0	1

ν_r	a	b	c
a	0	0.3	0.2
b	0.3	0	0.2
c	0.1	0.3	0

4.3 Algorithme et Exemples de construction des extensions linéaires

Soit $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un ensemble fini et r un ordre flou intuitionniste sur X, par utilisation du matrice A_r de $n \times n$ qui présente r on donne deux algorithmes, la première est une fonction boolean IFLO pour vérifier si r est un ordre flou intuitionniste ou non, la dexieume est une procédure LEIFO pour obtenir l'éxtension linéaire du r dans le cas ou r n'est pas linéaire.

Fonction IFLO(matrix1 matrix2:mat) :boolean;

(Commentaire: le but de cette algorithme est de vérifie la linéarité (la totalité) d'un ordre flou intuitionniste IFLO prend deux valeurs vrais si r est un ordre flou intuitionniste linéaire sinon, deux indices h et k de deux éléments de X l'orsque IFLO est faux).

Algorithme 4.3.1

```
 Var  i,j,h,k:integer
Begin
     i:=1
   While i<=n do
        j:=i
       While j<=n do
         If (matrix1[i;j]>0and matrix2[i;j]=0)or(matrix1[j;i]>0 and matrix2[j;i]=0)
then
             j:=j+1;
             IFLO:=true;
         Else
             IFLO:=false;
             h:=i;k:=j;{indices ou IFLO est faux}
         EndIf
        EndWhile
      i:=i+1;
   EndWhile
End.
```

Procedure LEIFO(Var P1 P2:mat)

(-commentaire : le but de cette procédure est d'obtenir l'extension linéaire d'ordre flou intuitionniste dans le cas où r n'est pas linéaire).

```
Var i,j integer;
Begin
 While not LEIFO(P,V) Do
   For i:=1 To n Do
```

For j:=1 To n Do

$P[i,j] := \max(P[i,j], \min(P[i,h], P[k,j]))$;

$V[i,j] := \min(V[i,j], \max(V[i,h], V[k,j]))$;

EndFor;

EndFor;

EndWhile;

End.

Exemple 4.3.2 Soit $X = \{a, b, c\}$ et r un ordre flou intuitionniste sur r définit par:

μ_r	a	b	c
a	1	0	0.6
b	0	1	0
c	0	0	1

ν_r	a	b	c
a	0	0.3	0.2
b	0.3	0	0.2
c	0.1	0.3	0

d'aprés cette procédure LEIFO réalisée étape par étape on obtient dans la première étape (i.e,la première application du lemme) un ordre flou intuitionniste $r_1$sur X qui éxtensie r défini comme:

$$\begin{cases} \mu_{r_1}(x,y) = \max\{\mu_r(x,y); \min\{\mu_r(x,a); \mu_r(b,y)\}\} \\ \nu_{r_1}(x,y) = \min\{\nu_r(x,y); \max\{\nu_r(x,a); \nu_r(b,y)\}\} \end{cases}$$

On peut présenter r_1 par le tabteau suivant:

μ_{r_1}	a	b	c
a	1	1	0.6
b	0	1	0
c	0	0	1

ν_{r_1}	a	b	c
a	0	0	0.2
b	0.3	0	0.2
c	0.1	0.3	0

Comme r_1 n'est pas linéaire on appliqe aussi le lemme avec $r_1$on obtient un ordre flou intuitionniste $r_2$sur X qui éxtensie r_1 (i.e, éxtensiée r aussi) défini comme:

$$\begin{cases} \mu_{r_2}(x,y) = \max\left\{\mu_{r_1}(x,y); \min\left\{\mu_{r_1}(x,b); \mu_{r_1}(c,y)\right\}\right\} \\ \nu_{r_2}(x,y) = \min\{\nu_r(x,y); \max\{\nu_{r_1}(x,b); \nu_{r_1}(c,y)\}\} \end{cases}$$

On peut présenter r_2 par le tabteau suivant comme suit:

μ_{r_2}	a	b	c
a	1	1	1
b	0	1	1
c	0	0	1

ν_{r_2}	a	b	c
a	0	0	0
b	0.3	0	0
c	0.1	0.3	0

La procédure s'arrête ici car r_2 est un ordre flou intuitionniste linéaire qui éxtensie r.

Dans cet éxemple le nombre d'applications du lemme est $k = 2$ on obtient aussi $k = \frac{m}{2}$tel que $m = card\,(A)$ avec $A = \{(a, b)\,, (b, a)\,, (b, c)\,, (c, b)\}\,.$

Exemple 4.3.3 Soit $X = \{a, b, c\}$ et r un ordre flou intuitionniste sur r défini par:

μ_r	a	b	c
a	1	0	0.5
b	0.1	1	0.3
c	0	0	1

ν_r	a	b	c
a	0	0.3	0.1
b	0.2	0	0.2
c	0.6	0.5	0

d'aprés cette procédure LEIFO réalisée pas à pas on obtient dans le premier pas (i.e, la première application du lemme) un ordre flou intuitionniste $r_1$sur X qui éxtensie r défini par:

$$\begin{cases} \mu_{r_1}(x, y) = \max\{\mu_r(x, y)\,; \min\{\mu_r(x, a)\,; \mu_r(b, y)\}\} \\ \nu_{r_1}(x, y) = \min\{\nu_r(x, y)\,; \max\{\nu_r(x, a)\,; \nu_r(b, y)\}\} \end{cases}$$

On peut présenter r_1 par le tabteau suivant :

μ_r	a	b	c
a	1	1	0.5
b	0.1	1	0.3
c	0	0	1

ν_r	a	b	c
a	0	0	0.1
b	0.2	0	0.2
c	0.6	0.5	0

Comme r_1 n'est pas linéaire on applique aussi le lemme avec $r_1$on obtient un ordre flou intuitionniste $r_2$sur Xqui éxtensie r_1 (i.e, éxtensie r aussi) défini par:

$$\begin{cases} \mu_{r_2}(x, y) = \max\left\{\mu_{r_1}(x, y)\,; \min\left\{\mu_{r_1}(x, b)\,; \mu_{r_1}(c, y)\right\}\right\} \\ \nu_{r_2}(x, y) = \min\{\nu_{r_1}(x, y)\,; \max\{\nu_{r_1}(x, b)\,; \nu_{r_1}(c, y)\}\} \end{cases}$$

On peut présenter r_2 par le tabteau suivant:

μ_r	a	b	c
a	1	1	1
b	0.1	1	0.3
c	0	0	1

ν_r	a	b	c
a	0	0	0
b	0.2	0	0.2
c	0.6	0.5	0

Comme r_2 n'est pas linèaire on applique aussi le lemme avec $r_2$on obtient un ordre flou intuitionniste $r_3$sur X qui éxtensie r_2 (i.e, éxtensie r_1 et r aussi) défini par:

$$\begin{cases} \mu_{r_3}(x,y) = \max\left\{\mu_{r_2}(x,y)\,;\min\left\{\mu_{r_2}(x,b)\,;\mu_{r_2}(c,y)\right\}\right\} \\ \nu_{r_3}(x,y) = \min\left\{\nu_{r_2}(x,y)\,;\max\left\{\nu_{r_2}(x,b)\,;\nu_{r_2}(c,y)\right\}\right\} \end{cases}$$

On peut présenter r_3 par le tabteau suivant :

μ_r	a	b	c
a	1	1	1
b	0.1	1	1
c	0	0	1

ν_r	a	b	c
a	0	0	0
b	0.2	0	0
c	0.6	0.5	0

La procédure s'arrête ici car r_3 est un ordre flou intuitionniste linéaire qui éxtensie r.

Dans cet éxemple le nombre d'applications du lemme est $k = 3$ on obtient aussi que $k = \frac{m}{2}$tel que $m = card\,(A)$ avec $A = \{(a,b)\,,(b,a)\,,(b,c)\,,(c,b)\,,(a,c)\,,(c,a)\}\,.$

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons vu le concept de l'ensemble flou intuitionniste comme une généralisation de la notion d'ensemble flou, nous avons aussi examiné, le concept de relation floue intuitionniste, qui est considéré comme un ensemble flou intuitionniste. Nous avons étudié en profondeur un genre de relations "les relations d'ordres floues intuitionnistes".

Nous avons étudié quelques propriétés des ordres floues intuitionnistes (la minimisation d'une famille d'ordres floues intuitionnistes, la compatibilité avec les structures des espaces vectorielles, la Caractérisation d'une sous-catégorie d'ordres flous, l'ordre flou total,....etc, parmis les propriétés les plus importantes se trouve l'extension linéaire, dans ce sens nous avons fourni un lemme(Lemme 4.1.1) qui permet la création d'une relation où les éléments sont comparables, puis on généralise ce résultat dans un théorème(Théorème 4.1.2) où chaque relation d'ordre flou intuitionniste sur un ensemble non vide X peut être étendu à une relation d'ordre flou intuitionniste total sur X.

Finalement, et dans le même sens nous avons fourni une algorithme d'extension linéaire pour obtenir un ordre total puis on donne des exemples pratiques.

Nous constatons que les propriétés des ordres flous se généralisent par analogie au cas d'un ordre flou intuitionniste.

Nous signalons par ailleurs que les résultats concernant les relations floues intuitionnistes demeurent encore ouverts, nous avons proposé un aperçu sur les ordres flous intuitionnistes seulement.

Nous signalons aussi que si la relation d'ordre floue intuitionniste n'est pas total (l'ensemble X est partiellement ordonné), on peut parler de la structure d'un treillis et aussi un treillis complementé et étudier sont propriétés algebrigues comme un travaille de future.

Bibliographie

[1] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, *VII ITKR's session*, Sofia, june 1983, Deposed in central sci. Techn. Library of Bulg. Acad. of Sc, 1984 (in Bulgarian).

[2] K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 20 (1986), 87-96.

[3] K. T. Atanassov, More on intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 33(1989), 37-45.

[4] K. T. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy sets*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[5] K. T. Atanassov et G. Gargov, Interval valued intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 31 (1989), 343-349.

[6] I. Beg and M. Islam, Fuzzy Riesz spaces, *The Journal of Fuzzy Mathematics.* 2(1) (1994), 211-229.

[7] I. Beg and M. Islam, Fuzzy ordered spaces, *The Journal of Fuzzy Mathematics.* 3(3) (1995), 659-670.

[8] U. Bodenhofer, B. Bernard and F. Janos, A compendium of fuzzy weak orders: Representation and construction, *Fuzzy Sets and Systems*, 158(8) (2007), 811-829.

[9] A. Billot, Economic theory of fuzzy equilibria, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems-373*, Springer-Verlag, Berlin 1992.

[10] G. Birkkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 25, reved, New York, 1948.

[11] R. Biswas, On fuzzy sets and intuitionistic fuzzy sets, *NIFS*, 3(1997), 3-11.

[11] P. Burillo et H. Bustince, Estructuras algebraicas en conjuntos 1FS, *I1 Congreso nacional de lsgica y tecnologia fuzzy*, Boadilla del Monte, Madrid, Spain, (1992), 135-147.

[13] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part I), *Mathware and computing* , vol. 2(1995), 5-38.

[14] P. Burillo et H. Bustince, intuitionistic fuzzy relations. (Part II), Effect of Atanassov's operators on the properties of the intuitionistic fuzzy relations, *Mathware and computing*, vol. 2(1995), 117-148.

[15] H. Bustince, Conjuntos intuicionistas e lntervalo valorados difusos: Propieda- des y construccirn, Relaciones lntuicionistas fuzzy, Thesis, *Universidad pfiblica de Navarra*, 1994.

[16] H. Bustince et P. Burillo, Structures on intuitionistic fuzzy relations, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 78(3)(1996), 293-303.

[17] H. Bustince et P. Burillo, Antisymmetrical intuitionistic fuzzy relation. Order on the referential set induced by an intuitionistic fuzzy relation. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 62(1995), 17-22.

[18] H. Bustince, Construction of intuitionistic fuzzy relations with predetermined properties, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 109(3)(2000), 379-403.

[19] G. Deschrijver, E. E. Kerre, On the composition of intuitionistic fuzzy relations, *Fuzzy Sets and Systems*, 136(2003), 333361.

[20] L. A. Fano, G. N. Nana, M. Salles et H. Gwet, A Binary intuitionistic fuzzy relation, some new results,a general factorization,and two properties of strict components, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2009(2009), 38 pages.

[21] L. Gacôgne, *Logique floue et application*, Institut d'Informatique d'Evry, 9-36,Novembre 2003.

[22] D. Glad et E. E. Kerre, On the composition of intuitionistic fuzzy relations, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 136(2003), 333–361.

[23] A. Kaufmann, *Introduction a la théorie des sous-ensembles flous*, Vols. l-IV (Masson, Paris, 1977.

[24] S. Kundu, Similarity relations, fuzzy linear orders and fuzzy partial orders, *Fuzzy Sets and Systems*, 109(3) (2000), 419-428.

[25] K. Menger, Statistical metrics, *Proc.Nat.Acad. Sci*, vol. 28(1942), 535-537.

[26] B. B. Meunier, *La logique floue et ses applications*, Addison Wesley, France, 1995.

[27] B. Schroder, Ordered sets: An Introduction, Birkhauser Boston; *First edition*, December 6, 2002.

[28] B. Schweizer, A. Sklar, Associative functions and abstract semigroups, *Publications mathematicae Debrecen*, vol. 10(1963), 69-81

[29] J. Szpilrajn, Sur I'extension de I'ordre partiel, *Fund. Math.* 16(1930), 386-389.

[30] A. Stouti, Fixed point theory for fuzzy monotone multifunctions, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 11(2)(2003), 455-466.

[31] A. Stouti et L. Zedam, On α-fuzzy Orders, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, vol. 18(1)(2010), 171-192.

[32] A. Stouti et L. Zedam, Linear extention of Zadeh's fuzzy order, to appear.

[33] P. Venugopalan, Fuzzy ordered sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 46(1992), 221-226.

[34] Z. S. Xu, intuitionistic fuzzy preference relations and their application in group decision making, *Information Sciences*, 177(2007), 2363-2379.

[35] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and computation*, vol. 8 (1965), 338–353.

[36] L .A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, *inform. Sci*, vol. 3 (1971), 177-200

[37] L. Zedam and A. Amroune, On the representation of L-M algebra by intuitionistic fuzzy subsets, *Arima*, vol. 4(2006), 72-85

[38] H. Zemmerman, fuzzy sets theory and its applications, *Kluwer academic publishers*, Boston, Dordrehlt, London (1991).