



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Thème

*Une approche numérique pour un problème inverse gouverné par une équation
d'onde acoustique*

Présentée par :
ACHEB Qaddour

Soutenu publiquement le : 19/06/2018.

Devant le jury composé de :

Président :	<i>M^r</i> GAGUI Bachir	M.C.A,	Université de M'sila
Encadreur :	<i>M^r</i> NOUIRI Brahim	M.C.A,	Université de M'sila
Co-Encadreur :	<i>M^r</i> MIHOUBI Farid	M.A.A,	Université de M'sila
Examineur :	<i>M^r</i> ABDELKEBIR Saad	M.A.B,	Université de M'sila

Année universitaire 2017/2018

Remerciements

Avant tout je remercie **Allah**, le tout puissant d'avoir, éclairé notre vie, renforce notre courage et notre volenté pour finie ce travail.

J'adresse mes remerciements aux chers parents qui m'ont aidé et encouragé à continuer la marche de la science et du succès.

Je voudrais remercier en particulier les deux professeurs, Encadreur **NOURI Brahim**, et Co-encadreur **MIHOUBI Farid**, pour leurs conseils scientifiques inestimables, qui ont grandement contribué à l'achèvement de ce travail.

Mes remerciements s'adressent à tout les enseignants du département de mathématique pour leurs dévouement et leurs générosité.

Je remercie tous ceux qui mont aidé à accomplir ce travail.

Dédicaces

Au nom de **Allah** le clément et le miséricordieux

Je dédie ce modeste travail

À Ma Mère et à Mon Père, que **Allah** les préserve, pour moi.

Aux deux professeurs, Encadreur **NOUIRI Brahim**, et Co-encadreur **MIHOUBI Farid**.

À mes frères, et ma soeur.

À la famille, et à tous les amis sans exception.

Pour tous les étudiants de la deuxième année Master, spécialité analyse mathématique et numérique, 2017/2018.

Résumé

ملخص: في هذه المذكرة، قمنا باقتراح خوارزمية تعتمد على طريقتي التدرج المترافق ونيومارك لحساب معامل في مسألة غير خطية لمعادلة الأمواج الصوتية في مجال غير متجانس مع شروط ابتدائية وشرطين حديين لدریکلي ونيومان. المعامل تم تقريبه بواسطة كثير حدود وهذا لتقوم الخوارزمية بحساب معاملاته.

كلمات مفتاحية: تربيعات مصغرة غير خطية، عناصر منتهية، طريقة التدرج المترافق، طريقة نيومارك، مسألة عكسية.

Dans ce mémoire, nous avons proposé un algorithme basé sur la méthode de gradient conjugué et la méthode de Newmark pour estimer un coefficient dans un problème non linéaire gouverné par une équation d'onde acoustique dans un milieu non homogène en dimension un avec des conditions initiales et aux limites de Dirichlet-Neumann. Le coefficient est rapproché par une forme polynomiale et l'algorithme numérique est employé pour trouver les coefficients de cet polynôme.

Mots-Clés : Éléments finis, Méthode de gradient conjugué, Moindres carrés non linéaires, Méthode de Newmark, Problème inverse.

In this memoir, we proposed an algorithm based on the conjugate gradient method and Newmark method to estimate a coefficient in a nonlinear problem governed by an acoustic wave equation in a non-homogeneous one-dimensional domain with data condition and boundary conditions of Dirichlet-Neumann. The coefficient is approximated by a polynomial form and the numerical algorithm is used to find the coefficients of this polynomial.

Keywords : Conjugate gradient method, Finite elements, Newmark method, Nonlinear Least squares, Inverse problem.

Table des matières

1	Rappels sur des outils mathématiques	8
1.1	Méthode des moindres carrés non linéaire	9
1.2	Méthode de gradient conjugué non linéaire	9
1.3	Méthode de Newmark	10
2	Problème direct	13
2.1	Position du problème	14
2.2	Formulation variationnelle	14
2.2.1	Existence et unicité de la solution	15
2.2.2	La dépendance continu par rapport aux données	23
2.3	Semi-discrétisation en espace : Méthode des éléments finis	23
2.3.1	Vecteur de terme source	25
2.3.2	Matrice de rigidité	26
2.3.3	Matrice de masse	26
2.4	Discrétisation totale en espace-temps : Méthode de Newmark	27
2.4.1	Méthode de Cholesky	27
2.4.2	Programme Matlab	29
2.4.3	Exemples numériques	32
3	Problème inverse	34
3.1	Position du problème	35
3.2	Méthode des moindres carrés non linéaire	35
3.3	Méthode de gradient conjugué non linéaire	36
3.3.1	Critère d'arrêt	38
3.4	Algorithme de calcul	38
3.5	Calcul des coefficients de la matrice jacobienne	39
3.5.1	Formulation variationnelle	40
3.5.2	Semi-discrétisation par éléments finis	42
3.5.3	Méthode de Newmark	43

Table des figures

2.1	Exemple 1 : La solution u pour les temps $t = 0,04$ et $t = 1$	32
2.2	Exemple 1 : La solution u pour les temps $t = 2$ et $t = 3$	32
2.3	Exemple 2 : La solution u pour les temps $t = 0,04$ et $t = 1$	33
2.4	Exemple 2 : La solution u pour les temps $t = 2$ et $t = 3$	33

Introduction générale

Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations du phénomène. En mathématiques, un problème inverse a la forme d'une équation

$$Ax = y \quad (1)$$

Où y représente les mesures effectuées, x représente les valeurs des paramètres du phénomène et A est un opérateur linéaire ou non linéaire.

Les problèmes inverses généralement sont des problèmes mal posés car si l'on cherche à résoudre l'équation (1); cela nécessite l'inversion de l'opérateur A . Cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique et d'après Hadamard [3] un problème est bien posé s'il vérifie les trois conditions suivantes :

- ☞ La solution existe ;
- ☞ Elle est unique ;
- ☞ Elle dépend continument des données.

Donc, si l'une des trois conditions n'est pas satisfaite, on dit que le problème est mal posé.

La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par *simulation numérique* ou de façon analytique.

Dans ce mémoire, on s'intéresse au problème d'onde acoustique en dimension un suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + f(x, t), \quad (x, t) \in]0, \ell[\times]0, T], \quad (2)$$

avec conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3)$$

et les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = h(t), \quad \text{pour tout } 0 \leq x \leq \ell. \quad (4)$$

où $f(x, t)$, u_0 , u_1 , $h(t)$ et $c(x)$ sont des fonctions continues. Nous considérons le problème (2)-(4) comme un problème direct. Donc, si $f(x, t)$ et $h(t)$ sont des fonctions continues et $c(x)$ connaît, le problème (2)-(4) a une solution unique.

Pour le problème inverse, le coefficient acoustique $c(x)$ est considéré comme étant inconnu. De plus, on considère aussi une condition supplémentaire sur la frontière $x = \ell$ donnée par :

$$u(\ell, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous avons donné un rappel sur le problème des moindres carrés non linéaires, ainsi que les algorithmes des méthodes suivantes :

- ☞ Méthode de gradient conjugué,
- ☞ Méthode de Newmark.

Dans le second chapitre, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre le problème d'onde acoustique avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. La méthode des éléments finis est basé sur trois idées principales. D'abord, nous obtenons la formulation variationnelle du problème direct. Ensuite, nous discrétisons la formulation variationnelle par éléments finis \mathbb{P}_1 et nous dérivons un système d'équations différentielles linéaires de second ordre. Avec la méthode de Newmark et la méthode de Cholesky, nous avons proposé une algorithme pour résoudre ce système.

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié le problème inverse (2)-(5) pour estimer la fonction inconnue $c(x)$. Dans ce cas, on propose la forme polynomiale pour la fonction inconnue $c(x)$. Donc, $c(x)$ est rapproché comme

$$c(x) = p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots + p_mx^{m-1},$$

où p_1, p_2, \dots, p_m sont des constantes. Soit $\Delta t = T/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ avec $t_i = i\Delta t$. Les coefficients inconnus p_1, p_2, \dots, p_m peuvent être déterminés en utilisant le problème de minimisation de la fonction des moindres carrés non linéaires suivante :

$$\begin{cases} \min F(p_1, p_2, \dots, p_m), \\ (p_1, p_2, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (6)$$

où

$$F(p_1, p_2, \dots, p_m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [u(\ell, t_i, p_1, \dots, p_m) - \varphi(t_i)]^2$$

En se basant sur la méthode de gradient conjugué, nous avons proposé un algorithme pour résoudre le problème des moindres carrés (6).

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

RAPPELS SUR DES OUTILS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous avons donné un rappel sur des outils mathématiques concernant les méthodes suivantes : méthode des moindres carrés non linéaire, méthode de gradient conjugué non linéaire et méthode de Newmark.

1.1 Méthode des moindres carrés non linéaire

Définition 1.1. Le problème des moindres carrés non linéaire consiste à minimiser la fonction

$$g(x) = \frac{1}{2} r^T(x) r(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i^2(x), \quad (1.1)$$

avec y_i donné

$$r_i(x) = y_i - f(t_i, x), i = 1, \dots, m$$

où $f(t_i, x)$ est une fonction non linéaire, t_i les variables indépendants et $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de paramètres à estimer.

Pour la minimisation de (1.1) nous avons besoin des dérivées premières de g . La dérivée première s'écrit

$$\nabla g(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x) \cdot \nabla r_i(x) = \nabla r(x) r(x), \quad (1.2)$$

avec

$$\nabla r(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial r_m(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_1(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial r_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Le vecteur

$$\nabla r_i(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_i(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial r_i(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

correspond à la colonne i de la matrice $\nabla r(x)$.

1.2 Méthode de gradient conjugué non linéaire

La Méthode de gradient conjugué non linéaire n'est pas unique, il existe plusieurs forme. Le cœur de ces méthode présenté par l'algorithme suivant :

Algorithm 1 Méthode de gradient conjugué pour les moindres carrés non linéaire.

- 1: Choisir $x^{(0)}$
- 2: Calculer $d^{(0)} = \nabla g(x^{(0)})$
- 3: **Pour** $k = 0, 1, \dots$, jusqu'à la convergence **faire**
- 4: Résoudre

$$\beta_k = \min_{\beta \geq 0} g(x^{(k)} - \beta d^{(k)}). \quad (1.3)$$

- 5: Adapter $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \beta_k d^{(k)}$
 - 6: Calculer $\nabla g(x^{(k+1)})$ et γ_{k+1}
 - 7: Adapter $d^{(k+1)} = \nabla g(x^{(k+1)}) + \gamma_{k+1} d^{(k)}$
 - 8: **fin du pour**
-

Remarque 1.1. Plusieurs méthode existent pour calculer le terme γ_{k+1} . Parmi elles se dégagent trois méthodes :

- La méthode de **Fletcher-Reeves** voire ([7],[6],[3]) consiste à calculer γ_{k+1} de la manière suivante :

$$\gamma_{k+1} = \frac{\nabla f_{k+1}^T \nabla f_{k+1}}{\nabla f_k^T \nabla f_k}.$$

- La méthode de **Polack-Ribière** voire ([7],[6]) consiste à calculer γ_{k+1} de la manière suivante :

$$\gamma_{k+1} = \frac{\nabla f_{k+1}^T (\nabla f_{k+1} - \nabla f_k)}{\nabla f_k^T \nabla f_k}.$$

1.3 Méthode de Newmark

On utilise méthode de Newmark pour résoudre le système linéaire d'équations différentielles ordinaires d'ordre 2 à coefficients constants suivante :

$$\begin{cases} M \frac{d^2 U}{dt^2}(t) + C \frac{dU}{dt}(t) + KU(t) = b(t), & 0 < t < T, \\ U(t=0) = U^0, \frac{dU}{dt}(t=0) = U^1. \end{cases}$$

Où on suppose que $b(t)$ est continu sur $[0, T]$. On découpe l'intervalle de temps $[0, T]$ en N intervalles ou pas de temps $\Delta t = T/N$, et on pose

$$\begin{cases} \forall n \in \{0, \dots, N\}, & t_n = n\Delta t \\ \forall n \in \{0, \dots, N-1\}, & t_{n+1} = t_n \Delta t \end{cases}$$

Avec ces notations, on peut écrire par développement de Taylor, en notant τ_n et τ'_n deux réels de $]t_n, t_{n+1}[$

$$U(t_{n+1}) = U(t_n + \Delta t) = U(t_n) + \Delta t U'(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} U''(t_n) + \frac{(\Delta t)^3}{6} U'''(\tau_n), \quad (1.4)$$

et

$$U'(t_{n+1}) = U'(t_n + \Delta t) = U'(t_n) + \Delta t U''(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} U'''(\tau'_n). \quad (1.5)$$

En remarquant que la valeur $U'''(\tau_n) = \frac{dU''}{dt}(\tau_n)$ est la pente de la tangente de la fonction $t \mapsto U''(t)$ en $t = \tau_n$ (et de même pour $U'''(\tau'_n)$), la méthode repose alors sur l'introduction de deux paramètres β et γ en écrivant

$$\begin{cases} \frac{1}{6} U'''(\tau_n) = \beta \frac{U''(t_n + \Delta t) - U''(t_n)}{\Delta t} \\ \frac{1}{2} U'''(\tau'_n) = \gamma \frac{U''(t_n + \Delta t) - U''(t_n)}{\Delta t} \end{cases} \quad (1.6)$$

En injectant (1.6) dans les développements de Taylor (1.4) et (1.5), on obtient le développement pour $U(t_n + \Delta t)$

$$U(t_n + \Delta t) = U(t_n) + \Delta t U'(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left[(1 - 2\beta) U''(t_n) + 2\beta U''(t_n + \Delta t) \right], \quad (1.7)$$

et pour $U'(t_n + \Delta t)$

$$U'(t_n + \Delta t) = U'(t_n) + \Delta t \left[(1 - \gamma) U''(t_n) + \gamma U''(t_n + \Delta t) \right], \quad (1.8)$$

on approche $U(t_n)$, $\frac{dU}{dt}(t_n)$, $\frac{d^2U}{dt^2}(t_n)$ par trois suite U_n, U'_n, U''_n

$$\begin{cases} MU''_{n+1} + CU'_{n+1} + KU_{n+1} = b(t_{n+1}), \\ U'_{n+1} = U'_n + \Delta t (\gamma U''_{n+1} + (1 - \gamma) U''_n), \\ U_{n+1} = U_n + \Delta t U'_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} (2\beta U''_{n+1} + (1 - 2\beta) U''_n). \end{cases} \quad (1.9)$$

Où $0 \leq \gamma \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 1/2$.

Lorsque la matrice C est nulle ($C = 0$), on peut éliminer les suites U'_n, U''_n car : de (1.9), on a

$$\begin{cases} \beta M U''_{n+1} + \beta K U_{n+1} = \beta b(t_{n+1}) \\ \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) M U''_n + \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) K U_n = \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) b(t_n) \\ \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) M U''_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) K U_{n-1} = \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) b(t_{n-1}) \end{cases} \quad (1.10)$$

et

$$U_{n+1} - U_n = \Delta t U'_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(2\beta U''_{n+1} + (1 - 2\beta) U''_n \right) \quad (1.11)$$

$$U_n - U_{n-1} = \Delta t U'_{n-1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(2\beta U''_n + (1 - 2\beta) U''_{n-1} \right) \quad (1.12)$$

$$U'_n - U'_{n-1} = \Delta t \left(\gamma U''_n + (1 - \gamma) U''_{n-1} \right). \quad (1.13)$$

On remplace (1.13) dans ((1.11) - (1.12))/ $(\Delta t)^2$, on obtient

$$\beta U''_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) U''_n + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) U''_{n-1} = \frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{(\Delta t)^2}, \quad (1.14)$$

donc, (1.9) est équivalent à

$$\begin{aligned} M \frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{(\Delta t)^2} + K \left(\beta U_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) U_n + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) U_{n-1} \right) \\ = \beta b(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) b(t_n) + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) b(t_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Pour démarrer le schéma il faut connaître U_0 et U_1 , ce qu'on obtient grâce aux conditions initiales

$$U_0 = U^0$$

et

$$\frac{dU}{dt}(t=0) = U^1 = \frac{U_1 - U_0}{\Delta t} \implies U_1 = \Delta t U^1 + U_0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = U^0 \text{ et} \\ U_1 = U_0 + \Delta t U^1, \\ (M + \beta (\Delta t)^2 K) U_{n+1} = (2M - (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) K) U_n \\ \quad - (M + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) K) U_{n-1} \\ \quad + (\Delta t)^2 \left(\beta b(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) b(t_n) + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) b(t_{n-1}) \right). \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Remarque 1.2. Si on pose $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$, le schéma (1.16) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(M + \frac{(\Delta t)^2}{4} K \right) U_{n+1} = \left(2M - \frac{(\Delta t)^2}{2} K \right) U_n - \left(M + \frac{(\Delta t)^2}{4} K \right) U_{n-1} \\ \quad + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{4} b(t_{n+1}) + \frac{1}{2} b(t_n) + \frac{1}{4} b(t_{n-1}) \right), \\ U_0 = U^0 \text{ et} \\ U_1 = U_0 + \Delta t U^1. \end{array} \right. \quad (1.17)$$

est un schéma implicite stable, voir [9].

PROBLÈME DIRECT

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre le problème direct avec les conditions initiales et les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. La méthode des éléments finis est basée sur trois idées principales. D'abord, nous obtenons la formulation variationnelle du problème direct. Ensuite, nous discrétisons la formulation variationnelle par éléments finis \mathbb{P}_1 et nous dérivons un système d'équations différentielles linéaires de deuxième ordre. Avec la méthode de Newmark et la méthode de Cholesky, nous avons proposé un algorithme pour résoudre ce système. Finalement, nous avons programmé cet algorithme par Matlab et nous testons cet algorithme par quelques exemples numériques.

2.1 Position du problème

On considère le problème d'onde acoustique non homogène en dimension un suivant :
Trouver $u :]0, L[\times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + f(x, t), (x, t) \in]0, L[\times]0, T[, \quad (2.1)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \text{ pour tout } 0 \leq x \leq L, \quad (2.2)$$

et les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann

$$u(0, t) = 0 \text{ et } c(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = h(t), \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Où $f \in C([0, T]; L^2(0, L))$ et $h \in C([0, T])$ et $u_0 \in H^1(0, L)$ et $u_1 \in L^2(0, L)$ et $c :]0, L[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction dérivable et bornée c' est à dire :

$$\exists a_1, a_2 > 0, a_1 \leq c(x) \leq a_2, \text{ pour tout } x \in]0, L[.$$

2.2 Formulation variationnelle

Soient V et H deux espaces de Hilbert réel définis par :

$$V := \{ \vartheta \in H^1(0, L) : \vartheta(0) = 0 \} \text{ et } H = L^2(0, L).$$

et soit A un sous-ensemble de $C^1(0, L)$ défini par :

$$A := \{ c \in C^1(0, L) : a_1 \leq c(x) \leq a_2, a_1, a_2 > 0 \}.$$

En multipliant l'équation (2.1) par une fonction arbitraire $\vartheta \in V$ et en intégrant sur $[0, L]$, on obtient :

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \vartheta(x) dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \vartheta(x) dx + \int_0^L f(x, t) \vartheta(x) dx. \quad (2.4)$$

Par intégration par parties, le premier terme de membre gauche de (2.4) devient :

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(c(x) u'(x) \right)' \vartheta(x) dx &= c(x) u'(x) \vartheta(x) \Big|_0^L - \int_0^L c(x) u'(x) \vartheta'(x) dx \\ &= h(t) \vartheta(L) - \int_0^L c(x) u'(x) \vartheta'(x) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, la formulation variationnelle du problème (2.1)-(2.3) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H) \text{ telle que} \\ \frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), \vartheta \rangle_H + a(u(t), \vartheta) = F(t, \vartheta) \quad \forall \vartheta \in V, 0 < t < T, \\ u(t=0) = u_0, \frac{du}{dt}(t=0) = u_1. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Où $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire donnée par :

$$a(u(t), \vartheta) = \int_0^L c(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \vartheta(x)}{\partial x} dx \text{ pour tout } u, \vartheta \in V \quad (2.6)$$

et $F : [0, T] \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire donnée par :

$$F(t, \vartheta) = \int_0^L f(x, t) \vartheta(x) dx + h(t) \vartheta(L) \text{ pour tout } \vartheta \in V \quad (2.7)$$

2.2.1 Existence et unicité de la solution

Lemme 2.1. voir [2] l'application suivante :

$$u \mapsto \left\| u' \right\|_{L^2(0, L)}$$

est une norme sur V équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(0, L)}$.

Démonstration. si $u \in V$ et pour tout $x \in]0, L[$, on a :

$$\left| u(x) - \underbrace{u(0)}_{=0} \right| = \left| \int_0^x u'(s) ds \right| \implies |u(x)| \leq \int_0^x |u'(s)| ds \leq \int_0^L |u'(s)| ds,$$

donc

$$|u(x)| \leq \int_0^L |u'(s)| ds.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :
on particulier on a

$$\begin{aligned} |u(x)| \leq \sqrt{L} \left\| u' \right\|_{L^2(0, L)} &\implies |u(x)|^2 \leq L \left\| u' \right\|_{L^2(0, L)}^2 \\ &\implies \int_0^L |u(x)|^2 dx \leq \int_0^L L \left\| u' \right\|_{L^2(0, L)}^2 dx \\ &\implies \int_0^L |u(x)|^2 dx \leq L \left\| u' \right\|_{L^2(0, L)}^2 \underbrace{\int_0^L 1 dx}_{=L}. \end{aligned}$$

il en résulte

$$\|u\|_{L^2(0,L)}^2 \leq L^2 \|u'\|_{L^2(0,L)}^2.$$

Ainsi, nous avons :

$$\|u'\|_{L^2(0,L)}^2 \leq \|u\|_{L^2(0,L)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,L)}^2 \leq (L^2 + 1) \|u'\|_{L^2(0,L)}^2.$$

Alors, on a :

$$\|u'\|_{L^2(0,L)} \leq \|u\|_{H^1(0,L)} \leq \sqrt{(L^2 + 1)} \|u'\|_{L^2(0,L)}.$$

d'où l'équivalence des normes. □

Lemme 2.2. *l'application suivante :*

$$u \longmapsto \|u\|_{L^2(0,L)} + \|u'\|_{L^2(0,L)}$$

est une norme sur V équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(0,L)}$.

Démonstration. Soit $u \in V$, on pose $A = \|u\|_{L^2(0,L)}$ et $B = \|u'\|_{L^2(0,L)}$, donc, $A, B \geq 0$

$$(A^2 + B^2)^{1/2} \leq (A^2 + B^2 + 2AB)^{1/2} \implies (A^2 + B^2)^{1/2} \leq (A + B)$$

Ainsi, nous avons :

$$\left(\|u\|_{L^2(0,L)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,L)}^2 \right)^{1/2} \leq \|u\|_{L^2(0,L)} + \|u'\|_{L^2(0,L)}$$

on a

$$0 \leq (A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB \implies 2AB \leq A^2 + B^2$$

donc

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB \leq 2(A^2 + B^2) \implies \frac{1}{\sqrt{2}}(A + B) \leq (A^2 + B^2)^{1/2}$$

Ainsi, nous avons :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\|u\|_{L^2(0,L)} + \|u'\|_{L^2(0,L)} \right) \leq \left(\|u\|_{L^2(0,L)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,L)}^2 \right)^{1/2}$$

Alors, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\|u\|_{L^2(0,L)} + \|u'\|_{L^2(0,L)} \right) \leq \|u\|_{H^1(0,L)} \leq \|u\|_{L^2(0,L)} + \|u'\|_{L^2(0,L)}$$

d'où l'équivalence des normes. \square

Remarque 2.1. $a(u, \vartheta)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans V , et $F(t, \vartheta)$ une forme linéaire continue sur V .

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et Lemme 2.1 et 2.2 nous avons :

$$\forall u(t), \vartheta \in V, |a(u(t), \vartheta)| \leq \sup_{x \in [0,L]} |c(x)| \int_0^L \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \vartheta(x)}{\partial x} \right| dx \quad (2.8)$$

$$\leq a_2 \left(\int_0^L \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L \left(\frac{\partial \vartheta(x)}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{1/2} \quad (2.9)$$

$$\leq a_2 \|u\|_V \|\vartheta\|_V. \quad (2.10)$$

Donc, la forme bilinéaire a est continue dans V .

Pour la coercivité de a , on a :

$$\forall \vartheta \in V, a(\vartheta, \vartheta) = \int_0^L c(x) \left(\vartheta'(x) \right)^2 dx \geq a_1 \int_0^L \left(\vartheta'(x) \right)^2 dx \geq a_1 \|\vartheta\|_V^2. \quad (2.11)$$

De même F , on a :

$$\forall \vartheta \in V, |F(t, \vartheta)| \leq \int_0^L |f(x,t)| |\vartheta(x)| dx + |h(t)| |\vartheta(L)|$$

d'autre part on a : $\forall \vartheta \in V$

$$\left| \vartheta(L) - \underbrace{\vartheta(0)}_{=0} \right| = \left| \int_0^L \vartheta'(x) dx \right| \leq \int_0^L |\vartheta'(x)| dx \leq \underbrace{\left(\int_0^L 1^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\vartheta'(x)|^2 dx \right)^{1/2}}_{=\sqrt{L} \|\vartheta'\|_{L^2(0,L)}}$$

donc, on a :

$$|F(t, \vartheta)| \leq \left(\int_0^L f^2(x,t) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L \vartheta^2(x) dx \right)^{1/2} + |h(t)| \sqrt{L} \|\vartheta'\|_{L^2(0,L)} \quad (2.12)$$

$$\leq M \|\vartheta\|_V \text{ où } M = \max \left\{ \|f\|_{C([0,T];L^2(0,L))}, \sqrt{L} \|h\|_{C(0,T)} \right\}. \quad (2.13)$$

Alors, la forme linéaire F est continue sur V . Donc, d'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $K_1 : [0, T] \rightarrow V$, tel que

$$F(t, \vartheta) = \langle K_1(t), \vartheta \rangle_V. \quad (2.14)$$

\square

Nous considérons le problème variationnel de valeurs propres suivant : trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in V - \{0\}$ tels que

$$a(u, \vartheta) = \lambda \langle u, \vartheta \rangle_H \quad \forall \vartheta \in V. \quad (2.15)$$

On dira que λ est une valeur propre du problème variationnel (2.15) (ou de la forme bilinéaire a) et que u est le vecteur propre associé.

Lemme 2.3. *voire [1] Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans V . Alors les valeurs propres de (2.15) forment une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs qui tend vers l'infini, et il existe une base hilbertienne de H $(u_k)_{k \geq 1}$ de vecteurs propres associés, c'est-à-dire que*

$$u_k \in V, \text{ et } a(u_k, \vartheta) = \lambda_k \langle u_k, \vartheta \rangle_H \quad \forall \vartheta \in V. \quad (2.16)$$

De plus, $(u_k / \sqrt{\lambda_k})_{k \geq 1}$ est une base hilbertienne de V pour le produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$.

Théorème 2.1. *D'après la Remarque 2.1, le problème variationnel (2.5) admet une solution unique*

$$u \in C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H).$$

Démonstration. La démonstration est divisée en deux étapes.

étape 1. Supposons que $u \in C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H)$ est solution de (2.5). Introduisons la base hilbertienne $(u_k)_{k \geq 1}$ de H composée des fonctions propres de la formulation variationnelle (2.15) qui vérifient

$$u_k \in V, \text{ et } a(u_k, \vartheta) = \lambda_k \langle u_k, \vartheta \rangle_H \quad \forall \vartheta \in V.$$

D'après (2.16) on a :

$$F(t, \vartheta) = \langle K_1(t), \vartheta \rangle_V = \langle K(t), \vartheta \rangle_H \quad \forall \vartheta \in V. \quad (2.17)$$

On définit

$$\alpha_k(t) = \langle u(t), u_k \rangle_H, \alpha_k^0 = \langle u_0, u_k \rangle_H, \alpha_k^1 = \langle u_1, u_k \rangle_H, \beta_k(t) = \langle K(t), u_k \rangle_H.$$

Puisque $u \in C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H)$ et $K(t) \in L^2(0, T; H)$, on en déduit que $\alpha_k(t) \in C([0, T])$ et $\beta_k(t) \in L^2(0, T)$. Comme $(u_k)_{k \geq 1}$ est une base hilbertienne de H , on a

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t) u_k.$$

En choisissant $\vartheta = u_k$ dans (2.5) on obtient

$$\begin{cases} \frac{d^2 \alpha_k}{dt^2}(t) + \lambda_k \alpha_k(t) = \beta_k(t) \text{ dans }]0, T[\\ \alpha_k(t=0) = \alpha_k^0, \frac{d\alpha_k}{dt}(t=0) = \alpha_k^1. \end{cases} \quad (2.18)$$

La solution homogène : Posant $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$

$$\alpha_k^h(t) = c_1 \cos(\omega_k t) + c_2 \sin(\omega_k t).$$

La solution générale :

$$\alpha_k(t) = c_1(t) \cos(\omega_k t) + c_2(t) \sin(\omega_k t),$$

donc

$$\alpha_k'(t) = c_1'(t) \cos(\omega_k t) + c_2'(t) \sin(\omega_k t) - c_1(t) \omega_k \sin(\omega_k t) + c_2(t) \omega_k \cos(\omega_k t)$$

on pose :

$$c_1'(t) \cos(\omega_k t) + c_2'(t) \sin(\omega_k t) = 0 \quad (2.19)$$

alors

$$\alpha_k''(t) = -c_1'(t) \omega_k \sin(\omega_k t) + c_2'(t) \omega_k \cos(\omega_k t) - c_1(t) \lambda_k \cos(\omega_k t) - c_2(t) \lambda_k \sin(\omega_k t)$$

on remplace dans (2.18) on obtient

$$-c_1'(t) \omega_k \sin(\omega_k t) + c_2'(t) \omega_k \cos(\omega_k t) = \beta_k(t) \quad (2.20)$$

de (2.19) et (2.20)

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos(\omega_k t) + c_2'(t) \sin(\omega_k t) = 0, \\ -c_1'(t) \sin(\omega_k t) + c_2'(t) \cos(\omega_k t) = \frac{\beta_k(t)}{\omega_k}. \end{cases} \quad (2.21)$$

On trouve la solution de (2.21) par la méthode de Cramer.

$$c_1'(t) = -\frac{\beta_k(t)}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \Rightarrow c_1(t) = -\frac{1}{\omega_k} \int_0^t \beta_k(s) \sin(\omega_k s) ds + k_1$$

et

$$c_2'(t) = \frac{\beta_k(t)}{\omega_k} \cos(\omega_k t) \Rightarrow c_2(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \beta_k(s) \cos(\omega_k s) ds + k_2.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\alpha_k(t) &= k_1 \cos(\omega_k t) + k_2 \sin(\omega_k t) - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \beta_k(s) \sin(\omega_k s) \cos(\omega_k t) ds \\
&\quad + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \beta_k(s) \cos(\omega_k s) \sin(\omega_k t) ds \\
&= k_1 \cos(\omega_k t) + k_2 \sin(\omega_k t) + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \beta_k(s) [\sin(\omega_k t) \cos(\omega_k s) - \sin(\omega_k s) \cos(\omega_k t)] ds \\
&= k_1 \cos(\omega_k t) + k_2 \sin(\omega_k t) + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \beta_k(s) \sin(\omega_k(t-s)) ds.
\end{aligned}$$

On a $\alpha_k(t=0) = \alpha_k^0 \Rightarrow k_1 = \alpha_k^0$, et $\frac{d\alpha_k}{dt}(t=0) = \alpha_k^1 \Rightarrow k_2 = \frac{\alpha_k^1}{\omega_k}$.

Donc l'unique solution de (2.18) est

$$\alpha_k(t) = \alpha_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{\alpha_k^1}{\omega_k} \sin(\omega_k t) + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \beta_k(s) \sin(\omega_k(t-s)) ds \text{ pour } t > 0, \quad (2.22)$$

ce qui donne une formule explicite pour la solution u (qui est donc unique).

étape 2. Pour démontrer que la série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\alpha_j^0 \cos(\omega_j t) + \frac{\alpha_j^1}{\omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \beta_j(s) \sin(\omega_j(t-s)) ds \right) u_j \quad (2.23)$$

converge dans $C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H)$, on va montrer que la suite $\omega^k(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(t) u_j$ des sommes partielles de cette série est de Cauchy. Dans V nous considérons le produit scalaire $a(u, v)$ pour lequel la famille (u_j) est orthonormé dans H . Par orthogonalité dans H et dans V de (u_j) , on obtient, pour $l > k$, et pour tout temps t ,

$$\begin{aligned}
a(\omega^l - \omega^k, \omega^l - \omega^k) + \left\| \frac{d}{dt} (\omega^l - \omega^k) \right\|_H^2 &= a \left(\sum_{j=k+1}^l \alpha_j(t) u_j, \sum_{i=k+1}^l \alpha_i(t) u_i \right) \\
&\quad + \left\langle \sum_{j=k+1}^l \frac{d\alpha_j}{dt}(t) u_j, \sum_{i=k+1}^l \frac{d\alpha_i}{dt}(t) u_i \right\rangle_H \\
&= \sum_{j=k+1}^l \left(\lambda_j |\alpha_j(t)|^2 \underbrace{\langle u_j, u_j \rangle_H}_{=1} + \left| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right|^2 \underbrace{\langle u_j, u_j \rangle_H}_{=1} \right) \\
&= \sum_{j=k+1}^l \left(\lambda_j |\alpha_j(t)|^2 + \left| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right|^2 \right).
\end{aligned}$$

De la formule (2.22) on infère que

$$|\alpha_j(t)| \leq \left| \alpha_j^0 \underbrace{\cos(\omega_j t)}_{\leq 1} \right| + \left| \frac{\alpha_j^1}{\omega_j} \underbrace{\sin(\omega_j t)}_{\leq 1} \right| + \frac{1}{\omega_j} \left| \int_0^t \beta_j(s) \underbrace{\sin(\omega_j(t-s))}_{\leq 1} ds \right|$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons :

$$|\alpha_j(t)| \leq |\alpha_j^0| + \frac{|\alpha_j^1|}{\omega_j} + \frac{1}{\omega_j} \left(\int_0^t 1^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t |\beta_j(s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

d'après $(a + b + c)^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + 2c^2$ on obtient

$$\lambda_j |\alpha_j(t)|^2 \leq 4 |\alpha_j^1|^2 + 4\lambda_j |\alpha_j^0|^2 + 2t \int_0^t |\beta_j(s)|^2 ds. \quad (2.24)$$

Et de la formule (2.22) on infère que

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right| &\leq \omega_j |\alpha_j^0| + |\alpha_j^1| + \left| \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\omega_j} \int_0^t \beta_j(s) \sin(\omega_j(t-s)) ds \right] \right| \\ &\leq \omega_j |\alpha_j^0| + |\alpha_j^1| + \left| \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \beta_j(s) \frac{d}{dt} [\sin(\omega_j(t-s))] ds \right| + \left| \beta_j(t) \underbrace{\sin(\omega_j(t-t))}_{=0} \right| \\ &\leq \omega_j |\alpha_j^0| + |\alpha_j^1| + \left| \int_0^t \beta_j(s) \underbrace{\cos(\omega_j(t-s))}_{\leq 1} ds \right| \\ &\leq \omega_j |\alpha_j^0| + |\alpha_j^1| + \int_0^t |\beta_j(s)| ds \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons :

$$\left| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right| \leq \omega_j |\alpha_j^0| + |\alpha_j^1| + \left(\int_0^t 1^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t |\beta_j(s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

d'après $(a + b + c)^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + 2c^2$ on obtient

$$\left| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right|^2 \leq 4\lambda_j |\alpha_j^0|^2 + 4 |\alpha_j^1|^2 + 2t \int_0^t |\beta_j(s)|^2 ds. \quad (2.25)$$

De (2.24) et (2.25), on obtient

$$\left| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right|^2 + \lambda_j |\alpha_j(t)|^2 \leq 8 |\alpha_j^1|^2 + 8\lambda_j |\alpha_j^0|^2 + 4t \int_0^t |\beta_j(s)|^2 ds. \quad (2.26)$$

Comme $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ et $K(t) \in L^2(0, T; H)$, on a

$$\|u_0\|_V^2 = a(u_0, u_0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j |\alpha_j^0|^2 \underbrace{\langle u_j, u_j \rangle_H}_{=1} = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j |\alpha_j^0|^2 < +\infty \implies \lambda_j |\alpha_j^0|^2 \text{ tend vers } 0.$$

$$\|u_1\|_H^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} |\alpha_j^1|^2 \langle u_j, u_j \rangle_H = \sum_{j=1}^{+\infty} |\alpha_j^1|^2 < +\infty \implies |\alpha_j^1|^2 \text{ tend vers } 0.$$

$$\|K\|_{L^2([0,T];H)}^2 = \langle K, K \rangle_{L^2([0,T];H)} = \int_0^T \langle K(t), K(t) \rangle_H dt = \int_0^T \sum_{j=1}^{+\infty} |\beta_j(t)|^2 \langle u_j, u_j \rangle_H dt < +\infty$$

donc

$$\|K\|_{L^2([0,T];H)}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^T |\beta_j(s)|^2 ds < +\infty \implies \int_0^T |\beta_j(s)|^2 ds \text{ tend vers } 0.$$

Ce qui implique que la série, dont le terme général est le membre de gauche de (2.26), est convergente, c'est-à-dire que la suite ω^k vérifie

$$\lim_{k,l \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\|\omega^l(t) - \omega^k(t)\|_V^2 + \left\| \frac{d}{dt} (\omega^l(t) - \omega^k(t)) \right\|_H^2 \right) = 0. \quad (2.27)$$

De (2.27)

$$\lim_{k,l \rightarrow +\infty} \|\omega^l - \omega^k\|_{C([0,T];V)}^2 = \lim_{k,l \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\omega^l(t) - \omega^k(t)\|_V^2 = 0,$$

donc, la suite ω^k est de Cauchy dans $C([0, T]; V)$.

Et

$$\lim_{k,l \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\left\| \frac{d}{dt} (\omega^l(t) - \omega^k(t)) \right\|_H^2 \right) = 0,$$

d'autre part, on a λ_j tend vers l'infini donc, pour tout t :

$$\|\omega^l(t) - \omega^k(t)\|_H^2 = \sum_{j=k+1}^l |\alpha_j(t)|^2 \leq \sum_{j=k+1}^l \lambda_j |\alpha_j(t)|^2 = \|\omega^l(t) - \omega^k(t)\|_V^2, \quad (2.28)$$

donc, de (2.27)

$$\lim_{k,l \rightarrow +\infty} \|\omega^l - \omega^k\|_{C^1([0,T];H)}^2 = \lim_{k,l \rightarrow +\infty} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|\omega^l(t) - \omega^k(t)\|_H^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{d}{dt} (\omega^l(t) - \omega^k(t)) \right\|_H^2 \right) = 0,$$

donc, la suite ω^k est de Cauchy dans $C^1([0, T]; H)$.

Comme les deux espaces $C([0, T]; V)$ et $C^1([0, T]; H)$ sont complets, la suite de Cauchy ω^k converge et on peut définir sa limite u

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \omega^k = u \text{ dans } C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H).$$

En particulier, comme $\left(\omega^k(0), \frac{d\omega^k}{dt}(0)\right)$ converge vers (u_0, u_1) dans $V \times H$, on obtient les conditions initiales voulues. D'autre part, il est clair que $u(t)$, en tant que somme de série (2.23) vérifie la formulation variationnelle (2.5) pour chaque fonction test $\vartheta = u_k$. Comme $(u_k/\sqrt{\lambda_k})$ est une base hilbertienne de V , $u(t)$ vérifie donc la formulation variationnelle (2.5) pour tout $\vartheta \in V$, c'est-à-dire que $u(t)$ est bien la solution recherchée de (2.5). \square

2.2.2 La dépendance continu par rapport aux données

Théorème 2.2. *D'après la Remarque 2.1, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de L et de T) telle que*

$$\|u\|_{C([0, T]; V)} + \|u\|_{C^1([0, T]; H)} \leq C \left(\|u_0\|_V + \|u_1\|_H + \|K\|_{L^2([0, T]; H)} \right). \quad (2.29)$$

Démonstration. De la formule (2.26) et (2.28), on a

$$\begin{aligned} a(\omega^l - \omega^k, \omega^l - \omega^k) + \left\| \frac{d}{dt}(\omega^l - \omega^k) \right\|_H^2 &\leq \sum_{j=k+1}^l \left(8|\alpha_j^1|^2 + 8\lambda_j |\alpha_j^0|^2 + 4t \int_0^t |\beta_j(s)|^2 ds \right) \\ &\leq \sum_{j=k+1}^l \left(8|\alpha_j^1|^2 + 8\lambda_j |\alpha_j^0|^2 + 4T \int_0^T |\beta_j(s)|^2 ds \right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} a(\omega^l - \omega^k, \omega^l - \omega^k) + \|\omega^l(t) - \omega^k(t)\|_H^2 + \left\| \frac{d}{dt}(\omega^l - \omega^k) \right\|_H^2 &\leq \\ C \left(\sum_{j=k+1}^l |\alpha_j^1|^2 + \sum_{j=k+1}^l \lambda_j |\alpha_j^0|^2 + \sum_{j=k+1}^l \int_0^T |\beta_j(s)|^2 ds \right), \end{aligned}$$

et (2.29) s'obtient alors facilement en prenant $k = 0$ et en faisant tendre l vers l'infini. \square

Remarque 2.2. voire [1] La formule (2.29) prouve que la solution de (2.5) dépend continument des données, et donc que le problème (2.5) est bien posé au sens de Hadamard [5].

2.3 Semi-discrétisation en espace : Méthode des éléments finis

Nous construisons un sous-espace V_h de V de dimension finie et constitué de fonctions affine par morceaux. On se donne un entier naturel N et on pose $h = L/(N+1)$, $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N+1$ (avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = L$) et $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, \dots, N$.

On définit l'espace vectoriel V_h par :

$$V_h := \left\{ \vartheta_h \in V : \vartheta_h|_{I_i} \in \mathbb{P}_1, \forall i = 0, \dots, N \right\}$$

Où \mathbb{P}_1 désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 1.

On définit, pour $j = 1, \dots, N + 1$, les fonctions ϕ_j par :

$$\phi_j(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h} \text{ si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1}-x}{h} \text{ si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 \text{ si } x \leq x_{j-1} \text{ ou si } x \geq x_{j+1}. \end{cases} \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, N$$

$$\phi_{N+1}(x) := \begin{cases} \frac{x-x_N}{h} \text{ si } x \in [x_N, x_{N+1}], \\ 0 \text{ si } x \leq x_N. \end{cases}$$

Les fonctions $\phi_j, j = 1, \dots, N + 1$, sont des fonctions "chapeau", elles vérifient

$$\phi_j \in V_h \text{ et } \phi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

La semi-discrétisation de (2.5) est donc l'approximation variationnelle suivante : trouver $u_h(t)$ fonction de $]0, T[$ à valeurs dans V_h telle que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle u_h(t), \vartheta_h \rangle_H + a(u_h(t), \vartheta_h) = F(t, \vartheta_h) \quad \forall \vartheta_h \in V_h, 0 < t < T, \\ u_h(t=0) = u_{0,h}, \frac{du_h}{dt}(t=0) = u_{1,h}. \end{cases} \quad (2.30)$$

où $u_{0,h} \in V_h$ et $u_{1,h} \in V_h$ sont des approximations des données initiales u_0 et u_1 .

La solution u_h du problème variationnel (2.30) s'écrit

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^{N+1} U_j(t) \phi_j \text{ où } U_j(t) = u_h(x_j, t)$$

avec $U = (U_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ le vecteur des coordonnées de $u_h(t)$. En posant

$$u_{0,h} = \sum_{j=1}^{N+1} U_j^0 \phi_j \text{ et } u_{1,h} = \sum_{j=1}^{N+1} U_j^1 \phi_j,$$

et (2.30) devient, pour tout $1 \leq i \leq N + 1$,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} \langle \phi_j, \phi_i \rangle_H \frac{d^2 U_j(t)}{dt^2} + \sum_{j=1}^{N+1} a(\phi_j, \phi_i) U_j(t) = F(t, \phi_i) \quad 0 < t < T, \\ U_i(t=0) = U_i^0, \frac{dU_i}{dt}(t=0) = U_i^1. \end{cases}$$

Le problème (2.30) est équivalente au système linéaire d'équations différentielles ordinaires d'ordre 2 à coefficients constants : Déterminer $U(t) = (U_1(t), \dots, U_{N+1}(t))^T$ solution de

$$\begin{cases} MU''(t) + KU(t) = R(t), & 0 < t < T, \\ U(t=0) = U^0, \frac{dU}{dt}(t=0) = U^1. \end{cases} \quad (2.31)$$

Où $K = (k_{ij})$ est une matrice symétrique appelée matrice de rigidité donnée par :

$$k_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) \quad \forall 1 \leq i, j \leq N+1,$$

$M = (M_{ij})$ est une matrice symétrique appelée matrice de masse donnée par :

$$M_{ij} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle_H \quad \forall 1 \leq i, j \leq N+1,$$

et $R(t) = (r_i(t))$ le vecteur de terme source donné par :

$$r_i(t) = F(t, \phi_i) \quad \forall 1 \leq i \leq N+1.$$

Pour calculer les composantes du vecteur de terme source et les éléments des matrices de rigidité et de masse, nous utilisons la règle de Simpson suivante :

$$\int_a^b g(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right].$$

2.3.1 Vecteur de terme source

Pour $i = 1, \dots, N$ nous avons :

$$\begin{aligned} r_i(t) &= F(t, \phi_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) f(x, t) dx - \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1}) f(x, t) dx \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{6} \left[(x_{i-1} - x_{i-1}) f(x_{i-1}, t) + 4 \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} - x_{i-1} \right) f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, t\right) + (x_i - x_{i-1}) f(x_i, t) \right] \\ &\quad - \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{6} \left[(x_i - x_{i+1}) f(x_i, t) + 4 \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_{i+1} \right) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, t\right) + (x_{i+1} - x_{i+1}) f(x_{i+1}, t) \right] \\ &= \frac{h}{3} \left[f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, t\right) + f(x_i, t) + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, t\right) \right]. \end{aligned}$$

Et

$$r_{N+1}(t) = F(t, \phi_{N+1}) = \frac{h}{6} \left[2f\left(\frac{x_N + x_{N+1}}{2}, t\right) + f(x_{N+1}, t) \right] + h(t).$$

2.3.2 Matrice de rigidité

Si $|i - j| > 1$, $\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$, donc $k_{i,j} = 0$ alors la matrice K est creuse.
Pour les éléments de diagonale principale, nous avons pour $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} d_i = K_{i,i} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} c(x) \left(\phi'_i(x) \right)^2 dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x) dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} c(x) dx \\ &= \frac{1}{6h} \left[c(x_{i-1}) + 4c\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2c(x_i) + 4c\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + c(x_{i+1}) \right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_{N+1} = K_{N+1,N+1} &= \int_{x_N}^{x_{N+1}} c(x) \left(\phi'_{N+1}(x) \right)^2 dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_N}^{x_{N+1}} c(x) dx \\ &= \frac{1}{6h} \left[c(x_N) + 4c\left(\frac{x_N + x_{N+1}}{2}\right) + c(x_{N+1}) \right]. \end{aligned}$$

Pour tout $i = 1, \dots, N$ nous avons :

$$\begin{aligned} o_i = K_{i+1,i} = K_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} c(x) \phi'_{i+1}(x) \phi'_i(x) dx = -\frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} c(x) dx \\ &= -\frac{1}{6h} \left[c(x_i) + 4c\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + c(x_{i+1}) \right]. \end{aligned}$$

Enfin, la matrice K est tridiagonale.

2.3.3 Matrice de masse

Si $|i - j| > 1$, $\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$, donc $M_{i,j} = 0$ alors la matrice M est creuse.
Pour les éléments de diagonale principale, nous avons pour $i = 1, \dots, N$:

$$e_i = M_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx = 2h/3,$$

et

$$e_{N+1} = M_{N+1,N+1} = \int_{x_N}^{x_{N+1}} \phi_{N+1}^2(x) dx = h/3.$$

Pour tout $i = 1, \dots, N$ nous avons :

$$s_i = M_{i+1,i} = M_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) dx = h/6.$$

$$U = U_{k+1} \text{ et } A = M + \frac{(\Delta t)^2}{4}K,$$

et

$$b = \left(2M - \frac{(\Delta t)^2}{2}K\right)U_k - \left(M + \frac{(\Delta t)^2}{4}K\right)U_{k-1} + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{4}R_{k+1} + \frac{1}{2}R_k + \frac{1}{4}R_{k-1}\right).$$

On écrit A sous la forme $A = L \cdot L^T$. Où L est matrice triangulaire inférieure.

$$AU = b \iff L \cdot L^T U = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ L^T U = y \end{cases}$$

Initiation : soient c, f et h trois fonctions données, $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = L/(N+1)$ et $x_i = ih$.
Pour $i = 1, \dots, N$, on a :

$$\begin{aligned} a_i &= A_{i,i} = e_i + \frac{(\Delta t)^2}{4}d_i \\ a_{N+1} &= A_{N+1,N+1} = e_{N+1} + \frac{(\Delta t)^2}{4}d_{N+1} \\ v_i &= A_{i+1,i} = s_i + \frac{(\Delta t)^2}{4}o_i \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned} b_1 &= \left(2e_1 - \frac{(\Delta t)^2}{2}d_1\right)U_{k,1} - \left(e_1 + \frac{(\Delta t)^2}{4}d_1\right)U_{k-1,1} + \left(2s_1 - \frac{(\Delta t)^2}{2}o_1\right)U_{k,2} \\ &\quad - \left(s_1 + \frac{(\Delta t)^2}{4}o_1\right)U_{k-1,2} + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{4}r_1(t_{k+1}) + \frac{1}{2}r_1(t_k) + \frac{1}{4}r_1(t_{k-1})\right), \end{aligned}$$

et pour $i = 2, \dots, N$, on a :

$$\begin{aligned} b_i &= \left(2s_{i-1} - \frac{(\Delta t)^2}{2}o_{i-1}\right)U_{k,i-1} - \left(s_{i-1} + \frac{(\Delta t)^2}{4}o_{i-1}\right)U_{k-1,i-1} + \left(2e_i - \frac{(\Delta t)^2}{2}d_i\right)U_{k,i} \\ &\quad - \left(e_i + \frac{(\Delta t)^2}{4}d_i\right)U_{k-1,i} + \left(2s_i - \frac{(\Delta t)^2}{2}o_i\right)U_{k,i+1} - \left(s_i + \frac{(\Delta t)^2}{4}o_i\right)U_{k-1,i+1} \\ &\quad + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{4}r_i(t_{k+1}) + \frac{1}{2}r_i(t_k) + \frac{1}{4}r_i(t_{k-1})\right), \end{aligned}$$

et

$$b_{N+1} = \left(2s_N - \frac{(\Delta t)^2}{2} o_N \right) U_{k,N} - \left(s_N + \frac{(\Delta t)^2}{4} o_N \right) U_{k-1,N} + \left(2e_{N+1} - \frac{(\Delta t)^2}{2} d_{N+1} \right) U_{k,N+1} - \left(e_{N+1} + \frac{(\Delta t)^2}{4} d_{N+1} \right) U_{k-1,N+1} + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{4} r_{N+1}(t_{k+1}) + \frac{1}{2} r_{N+1}(t_k) + \frac{1}{4} r_{N+1}(t_{k-1}) \right).$$

Factorisation :

$$l_1 = \sqrt{a_1}. \quad (2.33)$$

Pour tout $i = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} w_i = v_i/l_i, \\ l_{i+1} = \sqrt{a_{i+1} - w_i^2}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Résolution :

$$Ly = b \iff \begin{cases} y_1 = b_1/l_1 \text{ et} \\ y_i = (b_i - w_{i-1}y_{i-1})/l_i, \text{ pour tout } i = 2, \dots, N+1. \end{cases} \quad (2.35)$$

$$L^T U = y \iff \begin{cases} U_{N+1} = y_{N+1}/l_{N+1} \text{ et} \\ U_i = (y_i - w_i U_{i+1})/l_i, \text{ pour tout } i = N, \dots, 1. \end{cases} \quad (2.36)$$

2.4.2 Programme Matlab

```
clear all
L=2;      %Fixe car h(t)=c(L)*u'(L,t)
T=3;
N=99;
I=75;
h=L/(N+1);
Dt=T/I;
%-----fonction  U0(x)-----
%u0=inline('x^2','x');
u0=inline('sin(5*x)','x');
%-----fonction  U1(x)-----
%u1=inline('x^2+2*x','x');
u1=inline('sin(5*x)-x','x');
%-----
for i=1:N+1
    U0(i)=u0(i*h);
    U1(i)=u1(i*h);
```

```

end
U1= U0+Dt*U1;
%-----
k=1;
x=[h:h:L];
X=[0:h:L];
%ex=exp(k*Dt)*X.^(2)+2*X*k*Dt;
ex=exp(k*Dt)*sin(5*X)-X*k*Dt;
plot(X,ex,'red',x,U1,'--');
%-----fonction de paramètre c(x)-----
%c=inline('exp(x)','x');
c=inline('log(x+1)','x');
%-----fonction deuxième membre f(x,t)-----
%f=inline('exp(t)*x^2-2*exp(x)*(exp(t)*(x+1)+t)','x','t');
f=inline('exp(t)*sin(5*x)*(1+25*log(x+1))-(5*exp(t)*cos(5*x)-t)/(x+1)',
        'x','t');
%-----fonction h(t)-----
%H=inline('exp(2)*(4*exp(t)+2*t)','t');
H=inline('5*log(3)*cos(10)*exp(t)-t','t');
%-----Matrice de rigidité K-----
for i=1:N
    d(i)=(c((i-1)*h)+4*c((2*i-1)*h/2)+2*c(i*h)+4*c((2*i+1)*h/2)...
        +c((i+1)*h))/(6*h);
end
d(N+1)=(c(N*h)+4*c((2*N+1)*h/2)+c((N+1)*h))/(6*h);
for i=1:N
    o(i)=-(c(i*h)+4*c((2*i+1)*h/2)+c((i+1)*h))/(6*h);
end
%-----Matrice de masse M-----
for i=1:N
    e(i)=2*h/3;
end
e(N+1)=h/3;
for i=1:N
    s(i)=h/6;
end
%-----
for k=1:I-1
%-----Vecteur de terme source R-----
R=zeros(N+1,3);
for j=1:3
    for i=1:N
        R(i,j)=(f((2*i-1)*h/2,(k-2+j)*Dt)+f(i*h,(k-2+j)*Dt)...
            +f((2*i+1)*h/2,(k-2+j)*Dt))*h/3;
    end
    R(N+1,j)=(2*f((2*N+1)*h/2,(k-2+j)*Dt)...
        +f((N+1)*h,(k-2+j)*Dt))*h/6+H((k-2+j)*Dt);

```

```

end
%-----Matrice A-----
for i=1:N
    a(i)=e(i)+d(i)*Dt^2/4;
end
a(N+1)=e(N+1)+d(N+1)*Dt^2/4;
for i=1:N
    v(i)=s(i)+o(i)*Dt^2/4;
end
%-----Element de 2ème membre b-----
b(1)=(2*e(1)-d(1)*Dt^2/2)*U1(1)-(e(1)+d(1)*Dt^2/4)*U0(1)...
      +(2*s(1)-o(1)*Dt^2/2)*U1(2)-(s(1)+o(1)*Dt^2/4)*U0(2)...
      +(R(1,3)/4+R(1,2)/2+R(1,1)/4)*Dt^2;
for i=2:N
    b(i)=(2*s(i-1)-o(i-1)*Dt^2/2)*U1(i-1)-(s(i-1)+o(i-1)*Dt^2/4)...
          *U0(i-1)+(2*e(i)-d(i)*Dt^2/2)*U1(i)-(e(i)+d(i)*Dt^2/4)*U0(i)...
          +(2*s(i)-o(i)*Dt^2/2)*U1(i+1)-(s(i)+o(i)*Dt^2/4)*U0(i+1)...
          +(R(i,3)/4+R(i,2)/2+R(i,1)/4)*Dt^2;
end
b(N+1)=(2*s(N)-o(N)*Dt^2/2)*U1(N)-(s(N)+o(N)*Dt^2/4)*U0(N)...
        +(2*e(N+1)-d(N+1)*Dt^2/2)*U1(N+1)-(e(N+1)+d(N+1)*Dt^2/4)...
        *U0(N+1)+(R(N+1,3)/4+R(N+1,2)/2+R(N+1,1)/4)*Dt^2;
%-----Factorisation-----
l(1)=sqrt(a(1));
for i=1:N
    w(i)=v(i)/l(i);
    l(i+1)=sqrt(a(i+1)-w(i)^2);
end
%-----Résolution-----
y(1)=b(1)/l(1);
for i=2:N+1
    y(i)=(b(i)-w(i-1)*y(i-1))/l(i);
end
%-----
u(N+1)=y(N+1)/l(N+1);
for i=N:-1:1
    u(i)=(y(i)-w(i)*u(i+1))/l(i);
end
%-----
k=k+1;
if mod(k,25)==0
%ex=exp(k*Dt)*X.^2+2*X*k*Dt;
ex=exp(k*Dt)*sin(5*X)-X*k*Dt;
figure
plot(X,ex,'red',x,u,'--');
end
U0=U1;

```

```
U1=u;
end
```

2.4.3 Exemples numériques

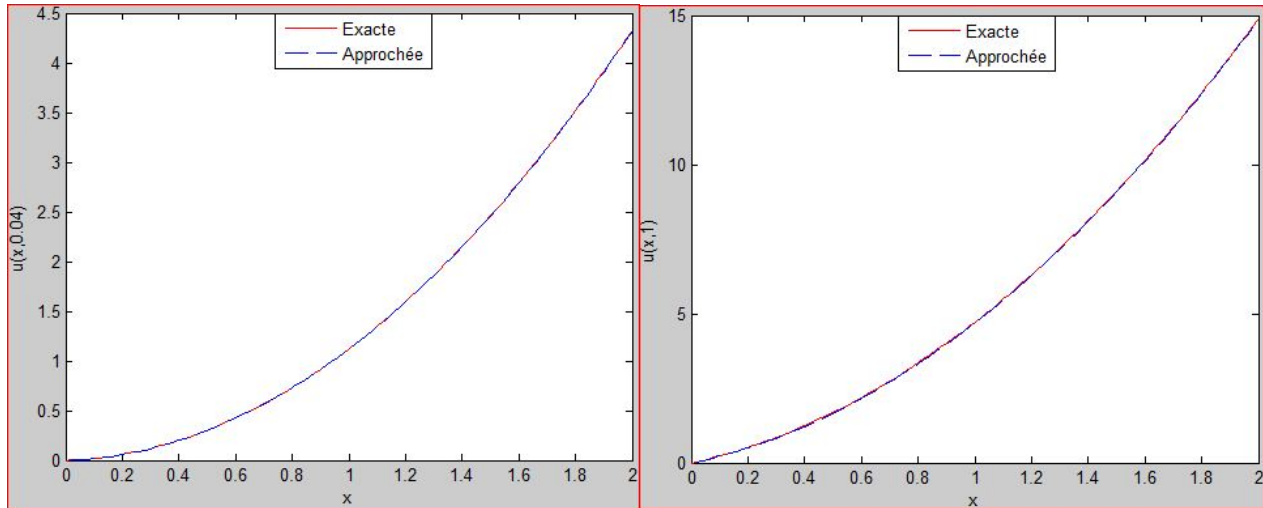


FIGURE 2.1 – Exemple 1 : La solution u pour les temps $t = 0,04$ et $t = 1$

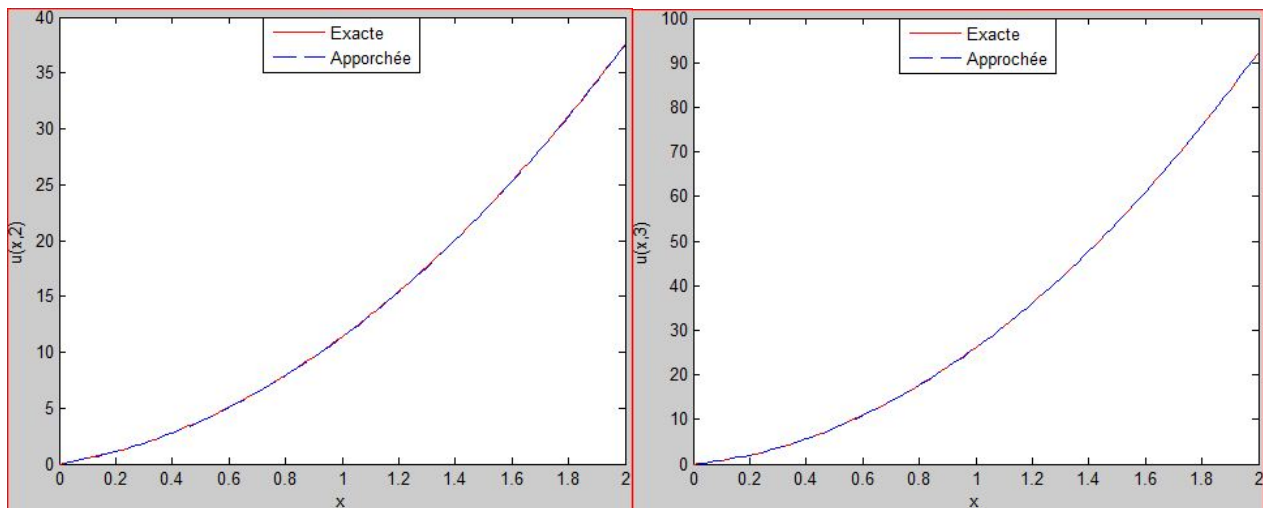
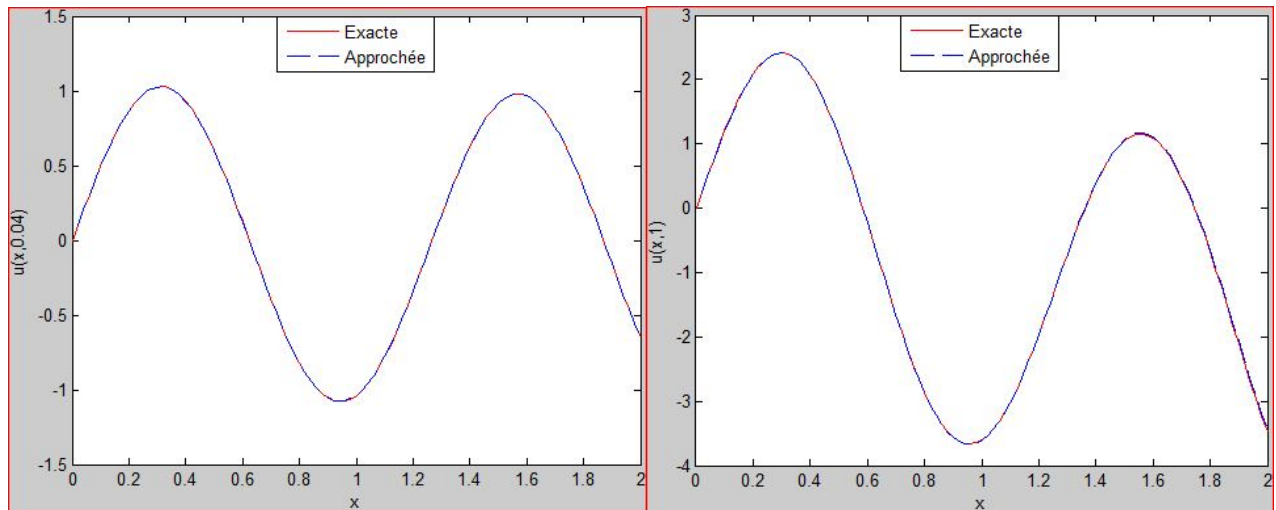
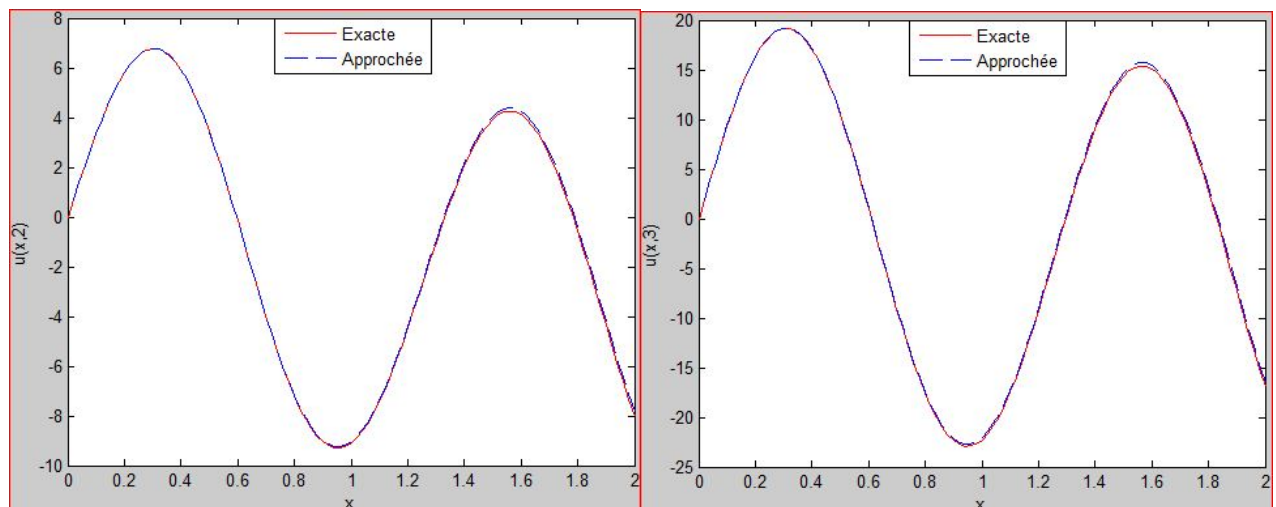


FIGURE 2.2 – Exemple 1 : La solution u pour les temps $t = 2$ et $t = 3$

FIGURE 2.3 – Exemple 2 : La solution u pour les temps $t = 0,04$ et $t = 1$ FIGURE 2.4 – Exemple 2 : La solution u pour les temps $t = 2$ et $t = 3$

PROBLÈME INVERSE

Dans ce chapitre, nous avons proposé un algorithme basé sur la méthode de gradient conjugué non linéaire et la méthode des éléments finis pour estimer un coefficient dans un problème non linéaire gouverné par une équation d'onde acoustique dans un milieu non homogène en dimension un avec les conditions initiales et les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. Le coefficient est rapproché par une forme polynomiale et l'algorithme numérique est employé pour trouver les coefficients de cet polynôme.

3.1 Position du problème

On considère le problème d'onde acoustique non homogène en dimension un suivant :
 Trouver $u :]0, L[\times]0, T[\longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + f(x, t), (x, t) \in]0, L[\times]0, T[, \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \text{ pour tout } 0 \leq x \leq L, \quad (3.2)$$

et les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann

$$u(0, t) = 0 \text{ et } c(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = h(t), \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T. \quad (3.3)$$

Où $f \in C([0, T]; L^2(0, L))$ et $h \in C([0, T])$ et $u_0 \in H^1(0, L)$ et $u_1 \in L^2(0, L)$.

Pour le problème inverse, le coefficient acoustique $c(x)$ est inconnu. Dans ce cas, pour estimer $c(x)$, une condition supplémentaire est imposée sur la frontière $x = L$, donnée par :

$$u(L, t) = g(t), \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T. \quad (3.4)$$

3.2 Méthode des moindres carrés non linéaire

Pour la solution de problème inverse (3.1)-(3.4), nous considérons que la fonction c doit être paramétrée sous la forme d'un polynôme suivant :

$$c(x) \approx p_1 + p_2 x + p_3 x^2 + \dots + p_N x^{N-1}. \quad (3.5)$$

Les coefficients inconnus p_1, p_2, \dots, p_N peuvent être déterminés en utilisant le problème des moindres carrés non linéaire suivant :

$$S(P) = \sum_{i=1}^I [g_i - u_i(P)]^2. \quad (3.6)$$

Où

S = Somme d'erreur carré ou fonction objective

$P^T = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ vecteur de paramètres inconnus

$u_i(P) \equiv u(L, t_i, P)$ = solution estimée en t_i

$g_i \equiv g(t_i)$ = solution mesurée en t_i

N = nombre total de paramètres inconnus

I = nombre total de mesures, où $I \geq N$.

Les solutions estimées $u_i(P)$ sont obtenues à partir de la solution du problème direct sur la frontière $x = L$. L'équation (3.6) peut être écrite sous forme vectorielle suivante :

$$S(P) = [G - U(P)]^T [G - U(P)]. \quad (3.7)$$

Où l'exposant T désigne la transposition, et le vecteur $[G - U(P)]^T$ est défini par :

$$[G - U(P)]^T = [g_1 - u_1, g_2 - u_2, \dots, g_I - u_I]. \quad (3.8)$$

Remarque 3.1. La fonction S définie par (3.7) est continue sur un domaine borné et fermé de \mathbb{R}^N . Donc, d'après théorème de Weierstrass, la fonction S est atteinte son minimum global.

3.3 Méthode de gradient conjugué non linéaire

Pour minimiser la fonction des moindres carrés non linéaire donnée par (3.7) et d'après Remarque 3.1, en utilisant la méthode de gradient conjugué donnée par :

$$P^{k+1} = P^k - \beta^k d^k. \quad (3.9)$$

Où β^k est le pas, d^k est la direction de descente et k est le nombre d'itérations. La direction d^k est donnée par :

$$d^k = \nabla S(P^k) + \gamma^k d^{k-1}. \quad (3.10)$$

Plusieurs expressions existent pour calculer le terme γ^k . L'expression de Polak-Ribiere, voir ([7],[6]), est donnée sous la forme : pour $k = 1, 2, \dots$

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N \left\{ [\nabla S(P^k)]_j [\nabla S(P^k) - \nabla S(P^{k-1})]_j \right\}}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{k-1})]_j^2}, \quad (3.11)$$

où $\gamma^0 = 0$.

Et l'expression de Fletcher-Reeves voire ([7],[6],[3]) est donnée comme : pour $k = 1, 2, \dots$

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^k)]_j^2}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{k-1})]_j^2} = \frac{[\nabla S(P^k)]^T \cdot [\nabla S(P^k)]}{[\nabla S(P^{k-1})]^T \cdot [\nabla S(P^{k-1})]}, \quad (3.12)$$

où $\gamma^0 = 0$.

$[\nabla S(P^k)]_j$ est le composant j^{eme} de vecteur $\nabla S(P^k)$, où $\nabla S(P^k)$ est donné par :

$$\nabla S(P^k) = 2 \left[-\frac{\partial U^T(P^k)}{\partial P} \right] [G - U(P^k)]. \quad (3.13)$$

Où

$$\frac{\partial U^T (P^k)}{\partial P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1} \\ \frac{\partial}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_N} \end{bmatrix} [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_I] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_1} & \frac{\partial u_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial u_I}{\partial p_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial p_2} & \frac{\partial u_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial u_I}{\partial p_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial p_N} & \frac{\partial u_2}{\partial p_N} & \cdots & \frac{\partial u_I}{\partial p_N} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

La matrice jacobienne $J (P^k)$ est définie comme la transposition de l'équation (3.14), c'est-à-dire

$$J (P^k) = \left[\frac{\partial U^T (P^k)}{\partial P} \right]^T \quad (3.15)$$

Sous forme explicite, la matrice jacobienne est écrite comme

$$J^k = J (P^k) = \left[\frac{\partial U^T (P^k)}{\partial P} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_1} & \frac{\partial u_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial p_N} \\ \frac{\partial u_2}{\partial p_1} & \frac{\partial u_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial p_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_I}{\partial p_1} & \frac{\partial u_I}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial u_I}{\partial p_N} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Les éléments de la matrice jacobienne sont appelés coefficients de sensibilité. Le coefficient de sensibilité J_{ij} est donc défini comme la dérivée première de la solution estimée à l'instant t_i par rapport au paramètre inconnu p_j , c'est-à-dire

$$J_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial p_j}, \text{ pour } i = 1, \dots, I \text{ et } j = 1, \dots, N.$$

En utilisant la définition de la matrice jacobienne donnée par l'équation (3.16), l'équation (3.13) devienne :

$$\nabla S (P^k) = -2 (J^k)^T [G - U (P^k)], \quad (3.17)$$

et

$$[\nabla S (P^k)]_j = -2 \sum_{i=1}^I \frac{\partial u_i (p^k)}{\partial p_j} [g_i - u_i (P^k)] \text{ pour } j = 1, \dots, N. \quad (3.18)$$

La recherche de β^k dans l'équation (3.9) est obtenu en minimisant la fonction $S (P^{k+1})$ par rapport à β^k ,

$$\min_{\beta^k \geq 0} S (P^{k+1}) = \min_{\beta^k \geq 0} [G - U (P^{k+1})]^T [G - U (P^{k+1})]. \quad (3.19)$$

En remplace P^{k+1} par l'équation (3.9) dans l'équation (3.19), on obtient

$$\min_{\beta^k \geq 0} S(P^{k+1}) = \min_{\beta^k \geq 0} [G - U(P^k - \beta^k d^k)]^T [G - U(P^k - \beta^k d^k)]. \quad (3.20)$$

Le vecteur $U(P^k - \beta^k d^k)$ peut être linéarisé avec un développement de Taylor au voisinage de p^k , une telle linéarisation est donnée par :

$$U(P^k - \beta^k d^k) = U(P^k) - \beta^k J^k d^k. \quad (3.21)$$

En remplace (3.21) dans (3.20), on obtient

$$\min_{\beta^k \geq 0} S(P^{k+1}) = \min_{\beta^k \geq 0} [G - U(P^k) + \beta^k J^k d^k]^T [G - U(P^k) + \beta^k J^k d^k]. \quad (3.22)$$

En utilisant la condition nécessaire d'optimalité de premier ordre, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(P^{k+1})}{\partial \beta^k} = 0 &\Leftrightarrow 2 [J^k d^k]^T [G - U(P^k) + \beta^k J^k d^k] = 0 \\ &\Leftrightarrow [J^k d^k]^T [\beta^k J^k d^k] = [J^k d^k]^T [U(P^k) - G]. \end{aligned}$$

Donc

$$\beta^k = \frac{[J^k d^k]^T [U(P^k) - G]}{[J^k d^k]^T [J^k d^k]}. \quad (3.23)$$

3.3.1 Critère d'arrêt

La méthode du gradient conjugué est converge voire [7] si le schéma itératif est arrêtée , donc, si critère suivant est satisfait

$$S(P^{k+1}) < \epsilon. \quad (3.24)$$

Où ϵ est une tolérance donnée.

3.4 Algorithme de calcul

Nous présentons un algorithme de calcul basé sur la méthode de gradient conjugué non linéaire pour résoudre le problème inverse (3.1)-(3.4), voir [8].

Algorithm 2 (Algorithme de calcul basé sur la méthode de gradient conjugué non linéaire).

Entrée(s) $G = (g_1, g_2, \dots, g_I)^T$, P^0 , ϵ donnée, $k = 0$.

- 1: Résoudre le problème direct (2.1)-(2.3) avec l'estimation disponible P^k pour obtenir le vecteur de solution $U(P^k) = (u_1, u_2, \dots, u_I)^T$.
- 2: Vérifier le critère d'arrêt donné par l'équation (3.24). Continuer si pas satisfait.
- 3: Calculer la matrice jacobienne J^k définie par l'équation (3.16).
- 4: Calculer le gradient $\nabla S(P^k)$ à partir de l'équation (3.17) puis le coefficient γ^k à partir de l'équation (3.11) ou (3.12).
- 5: Calculer la direction d^k en utilisant l'équation

$$d^k = \nabla S(P^k) + \gamma^k d^{k-1}.$$

- 6: Calculer le pas β^k à partir de l'équation (3.23).
- 7: Calculer la nouvelle estimation de P^{k+1} ,

$$P^{k+1} = P^k - \beta^k d^k.$$

- 8: Remplacer k par $k + 1$ et retourne à l'étape 1.
-

3.5 Calcul des coefficients de la matrice jacobienne

On note $u_k = \frac{\partial u}{\partial p_k}$ pour $k = 1, \dots, N$. En dérivant les équations (2.1)-(2.3) par rapport à p_k . Donc, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(p_1 + p_2 x + p_3 x^2 + \dots + p_N x^{N-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x} + x^{k-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right], \\ u_k(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u_k}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u_k(0, t) = 0, \\ c(L) \frac{\partial u_k}{\partial x}(L, t) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Avec le système (3.25) et les équations (2.1)-(2.3), nous construisons le système vectoriel suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial x} + \vec{F}, \\ \vec{U}(x, 0) = \vec{U}_0(x), \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(x, 0) = \vec{U}_1(x), \\ \vec{U}(0, t) = \vec{0}, \\ c(L) \frac{\partial \vec{U}}{\partial x}(L, t) = \vec{H}(t). \end{cases} \quad (3.26)$$

Où

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \text{ et } \vec{F} = \begin{pmatrix} f(x, t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Gamma} = \begin{pmatrix} (p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots + p_Nx^{N-1}) \frac{\partial u}{\partial x} \\ (p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots + p_Nx^{N-1}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \\ (p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots + p_Nx^{N-1}) \frac{\partial u_2}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial x} \\ \vdots \\ (p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots + p_Nx^{N-1}) \frac{\partial u_N}{\partial x} + x^{N-1} \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\vec{U}_0(x) = [u_0(x) \ 0 \ \dots \ 0]^T \text{ et } \vec{U}_1(x) = [u_1(x) \ 0 \ \dots \ 0]^T,$$

$$\vec{H}(t) = [h(t) \ 0 \ \dots \ 0]^T.$$

3.5.1 Formulation variationnelle

Soit V un espace de Hilbert définis par :

$$V = \{\vartheta \in H^1(0, L) : \vartheta(0) = 0\}.$$

Nous multiplions (3.26) par une fonction de test $\vartheta \in V$ et en intégrant l'équation obtenue sur $[0, L]$, nous obtenons l'équation suivante :

$$\int_0^L \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \cdot \vartheta(x) dx - \int_0^L \frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial x} \cdot \vartheta(x) dx = \int_0^L F(x, t) \cdot \vartheta(x) dx.$$

Avec l'intégration par parties, nous avons :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^L U(x, t) \cdot \vartheta(x) dx + \int_0^L \Gamma(x, t) \cdot \frac{\partial \vartheta(x)}{\partial x} dx = \int_0^L F(x, t) \cdot \vartheta(x) dx + \vartheta(L) H(t).$$

Nous utilisons le produit scalaire de l'espace $L^2(0, L)$:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(0, L)} = \int_0^L f(x) \cdot g(x) dx,$$

et on définit la forme bilinéaire suivant :

$$\begin{aligned}
a(U, \vartheta) &= \int_0^L \Gamma(x, t) \cdot \frac{\partial \vartheta(x)}{\partial x} dx = \begin{pmatrix} a_0(u, \vartheta) \\ a_1(u_1, \vartheta) \\ a_2(u_2, \vartheta) \\ \vdots \\ a_N(u_N, \vartheta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} \int_0^L (p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots + p_Nx^{N-1}) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \\ \int_0^L (p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots + p_Nx^{N-1}) \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \\ \int_0^L (p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots + p_Nx^{N-1}) \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \\ \vdots \\ \int_0^L (p_1 + p_2x + p_3x^2 + \dots + p_Nx^{N-1}) \frac{\partial u_N}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + x^{N-1} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx. \end{cases}
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et Lemme 2.1 nous avons : Pour tout $i = 1, 2, \dots, N$, on a

$$\begin{aligned}
\forall u, \vartheta \in V, |a_i(u, \vartheta)| &= \left| \int_0^L \left[c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + x^{i-1} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right] dx \right| \\
&\leq (a_2 + L^{i-1}) \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \cdot \left| \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right| dx \\
&\leq (a_2 + L^{i-1}) \left(\int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^L \left| \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq (a_2 + L^{i-1}) \|u\|_V \|\vartheta\|_V.
\end{aligned}$$

Donc, la forme bilinéaire a est continue.

Pour la coercivité de a , on a :

$$\begin{aligned}
\forall \vartheta \in V, a_i(\vartheta, \vartheta) &= \int_0^L \left[c(x) \left(\vartheta'(x) \right)^2 + \underbrace{x^{i-1} \left(\vartheta'(x) \right)^2}_{\geq 0} \right] dx \\
&\geq a_1 \int_0^L \left(\vartheta'(x) \right)^2 dx \geq a_1 \|\vartheta\|_V^2.
\end{aligned}$$

D'après (2.12), la forme linéaire

$$\int_0^L F(x, t) \cdot \vartheta(x) dx + \vartheta(L) H(t),$$

est continue sur V . Donc, d'après (2.14) et (2.17)

$$\int_0^L F(x, t) \cdot \vartheta(x) dx + \vartheta(L) H(t) = \langle K(t), \vartheta \rangle_{L^2(0,L)} \quad \forall \vartheta \in V. \quad (3.27)$$

Enfin, la formulation variationnelle du problème (3.26) est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle U, \vartheta \rangle_{L^2(0,L)} + a(U, \vartheta) = \langle K(t), \vartheta \rangle_{L^2(0,L)}, \\ U(x, 0) = U_0(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = U_1(x). \end{cases} \quad (3.28)$$

D'après Théorème 2.1, le problème variationnel (3.28) admet une solution unique.

3.5.2 Semi-discrétisation par éléments finis

Soit V_h un sous espace de V de dimension $N_x + 1$. On considère le problème approché suivant : trouver $u_h, u_{1,h}, u_{2,h}, \dots, u_{N,h} \in V_h$ tels que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle U_h, \vartheta_h \rangle_{L^2(0,L)} + a(U_h, \vartheta_h) = \langle K(t), \vartheta_h \rangle_{L^2(0,L)}, \\ U_h(x, 0) = U_{0,h}(x), \\ \frac{\partial U_h}{\partial t}(x, 0) = U_{1,h}(x). \end{cases} \quad (3.29)$$

Où $\vartheta_h \in V_h$ et $U_h = [u_h \ u_{1,h} \ u_{2,h} \ \dots \ u_{N,h}]^T$.

Nous subdivisons l'intervalle $[0, L]$ en $N_x + 1$ sous-intervalle des distances égales h :

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{N_x} \leq x_{N_x+1} = L,$$

avec $x_i = i.h$.

On définit l'espace vectoriel V_h par :

$$V_h := \left\{ \vartheta_h \in V : \vartheta_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \forall i = 0, \dots, N_x \right\}.$$

On définit, pour $j = 1, \dots, N_x + 1$, les fonctions φ_j par :

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h} \text{ si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1}-x}{h} \text{ si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 \text{ si } x \leq x_{j-1} \text{ ou si } x \geq x_{j+1}. \end{cases} \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, N_x$$

$$\varphi_{N_x+1}(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{N_x}}{h} \text{ si } x \in [x_{N_x}, x_{N_x+1}], \\ 0 \text{ si } x \leq x_{N_x}. \end{cases}$$

Afin que on peut écrit U_h comme une combinaison linéaire des éléments de base :

$$U_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_x+1} \tilde{U}_j(t) \cdot \varphi_j(x) \quad \text{où } \tilde{U}_j(t) = U_h(x_j, t), \quad (3.30)$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse non linéaire pour l'identification numérique d'un paramètre dans un problème d'onde acoustique en dimension un avec des conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Problème direct** : nous avons utilisé la méthode des éléments finis, la méthode de Newmark et la méthode de Cholesky pour calculer la solution de ce problème.
- ✓ **Problème inverse** : nous avons proposé un algorithme basé sur la méthode de gradient conjugué non linéaire pour estimer un coefficient dans un problème non linéaire gouverné par une équation d'onde acoustique dans un milieu non homogène en dimension un avec des conditions initiales et aux limites de Dirichlet-Neumann. Le coefficient est rapproché par une forme polynomiale et l'algorithme numérique est employé pour trouver les coefficients de cet polynôme.

Comme perspectives, nous avons prévu les projets de recherches suivants :

- ☞ Identification numérique le paramètre a pour un problème hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a(x) f(t), & 0 < x \leq 1, t > 0. \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

- ☞ Identification numérique la condition initiale $g(t)$ pour un problème de diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, t > 0. \\ u(x, 0) = g(t), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- [2] S. BENZIANE. Résolution numérique d'un problème inverse non linéaire par des méthodes de type extragradient. Master's thesis, Université Mohamed Boudiaf de M'sila, Algérie, 2016.
- [3] R. V. Churchill. *Introduction to Complex Variables*. McGraw-Hill New York, 1948.
- [4] I. ZIANE et S. CHARIKH. Résolution numérique d'un problème inverse de conduction thermique par la méthode de levenberg-marquardt. Master's thesis, Université Mohamed Boudiaf de M'sila, Algérie, 2017.
- [5] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, 1923.
- [6] L. M. Milne-Thompson. *Theoretical Hydrodynamics*. MacMillan New York, 1950.
- [7] M. N. Özisik. *Finite Difference Methods in Heat Transfer*. CRC Press, 1994.
- [8] M. N. Özisik and H. R. B. Orlande. *Inverse heat transfer, fundamentals and applications*. Taylor & Francis, 2000.
- [9] Xaxier Picamoles. *Fondamentaux de mathématiques appliquées*. ellipses, 2016.