

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques



Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

**Simulation numérique d'un écoulement d'un fluide
autour d'un obstacle**

Présentée par :

M^{lle} DILMI Hasna

KHIRANI Amina M.C.A, Université de M'sila **Président.**
SERGUINE Houria M.C.B, Université de M'sila **Rapporteur.**
DELLOUM Wahiba M.A.A, Université de M'sila **Examineur.**

Année universitaire 2023/2024

Remerciements

Louange Dieu, qui nous a accordé le succès et l'orientation, nous a donné la fermeté et nous a aidés à terminer ce travail après notre voyage pour mettre les points sur les lettres et révéler ce qui se cache derrière le rideau de la science et de la connaissance. Muris et il est temps de les récolter.

Merci à vous ma famille source de ma force et de ma réussite.

Merci pour le soutien que vous m'avez apporté tout au long de mon parcours académique.

un salut parfumé et des remerciements particuliers à mon encadreur me **M^{me} .SERGUINE Houria** pour tous les efforts qu'elle a déployés pour nous faciliter et m'aider mener bien mon travail. Je la remercie pour sa confiance en moi et son soutien, son orientation et ses conseils continus.

Nous remercions également les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail et de l'enrichir de leur suggestions.

Nous sommes également honorés d'exprimer nos sincères remerciements à ceux qui ont porté le message le plus sacré de la vie, à ceux qui nous ont ouvert la voie.

Le chemin du savoir à tous nos professeurs distingués de l'école primaire à l'université. N'oublions pas tous ceux qui ont contribué directement et indirectement à la réalisation de ce travail, même par un mot gentil .

DILMI Hasna

Dédicace

.... À celle qui m'a donné l'amour et la tendre
et au baume cicatrisant, au cœur blanc immaculé (ma chère maman).

A

mon honorable père, que Dieu le protège.

A celui qui a été et e
et de ma fierté. À celui qui a récolté le
de la connaissance. Mon cher oncle, que Dieu le bénisse et le protège de
sa protection.

Aux

cœurs purs et bons et aux âme
sœurs) *Amima* et *Meriem*. A tous ceux que j'aime pour l'amour de Dieu,
avec qui j'ai passé le
doux souvenirs, qui ont fait preuve de fraternité et se sont distingué
par leur fidélité, compagnons de mon chemin : *Dougha Sabrina*, *Benabida*
Houda, Metarfi Charifa.

Puissiez-vous toujours être le meilleur compagnon du paradis du
bonheur, si Dieu le veut.

À tous ceux qui sont re
j'en arrive l, et ma liste re
même le

Résumé :

Dans ce travail, nous avons étudié un problème d'écoulement potentiel, bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux devant un obstacle de forme rectangulaire où la gravité et la tension de surface sont négligées. Pour trouver la solution exacte de ce problème, nous avons utilisé les transformations de Schwartz Christoffel et la méthode d'hodographe.

Mots clés : fluide, écoulement potentiel, surface libre,, transformation conforme.

Abstract :

In This work, we studied a problem of a two-dimensional free-surface potential flow of a incompressible, non-viscous fluid in front of a rectangular-shaped obstacle, where gravity and surface tension are neglected. To find the exact solution to this problem, we used the Schwartz Christoffel transformation and the hodograph transformation.

Key words : fluid, potential flow, free surface, conformal transformation.

ملخص :

في هذا العمل قمنا بدراسة تحليلية لتدفق كموني ثنائي الأبعاد ذو سطح حر لسائل غير قابل للانضغاط وغير لزج أمام عائق على شكل مستطيل مع إهمال قوى التوتر السطحي وتأثير الجاذبية. لإيجاد الحل الدقيق لهذه المسألة استعملنا التحويلات المطابقة لشوارتز كريستوفل وتحويل هودوغراف.

كلمات مفتاحية: مائع، تدفق كموني، سطح حر، تحويلات مطابقة.

Notations

m	la masse de fluide
V	le volume
ρ	la masse volumique
P	la pression
d	la densité
χ	la compressibilité
ν	le volume massique
τ	la viscosité
ϖ	le poids volumique
Q_m	débit massique
Q_v	débit volumique
\vec{u}	vecteur de vitesse
\vec{a}	l'accélération
(x, y)	le plan
S	la surface
$\vec{\eta}$	le vecteur normal unitaire à une élément de surface de S
(u, v)	composantes du vecteur vitesse
γ	tension superficielle
dV	variation de volume
ds	élément de surface de normale η

Notations

ϕ	fonction potentiel
ψ	fonction de courant
i	le nombre complexe
z	la variable complexe
$M_0(x_0, y_0, z_0)$	position initiale
$\vec{r}(M_0, t)$	le vecteur position
plan z	le domaine d'écoulement réel
We	nombre de weber
g	gravité
Δ	la placcien
$\frac{\partial}{\partial x}$	dérivée par rapport à x
rot	rotationnel
\overline{grad}	gradient

Introduction générale

La mécanique des fluides est la science des lois des écoulements des fluides qui étudie leur comportement au repos et en mouvement et les forces internes associées. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de ses transfert .

C'est une branche de la mécanique des milieux continus qui modélise la matière à l'aide de particules assez petites pour relever de l'analyse mathématique mais assez grandes par rapport aux molécules pour être décrite par des fonctions continues. Elle comprend deux grandes sous-branches :

- La statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos.
- La dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement.[6]

Ce domaine spécifique de la physique est indispensable dans la mise en place de procédés et d'équipements industriels.

L'étude de la mécanique des fluides remonte à l'époque de la Grèce antique avec le célèbre savant Archimède, connu par son principe qui fut à l'origine de la statique des fluides. Aujourd'hui, la dynamique des fluides est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus[5].

Depuis toujours, l'homme s'intéresse à la maîtrise de l'eau et de l'air avec pour objectif de résoudre des problèmes du quotidien : l'irrigation en agriculture, les canaux, les fontaines, pour la navigation.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, mais aussi la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie.

En mécanique des fluides, les problèmes des écoulements à surface libre d'un fluide parfait sont étudiés grâce à leur importance d'application dans plusieurs domaines. Les premiers travaux dans ce secteur sont caractérisés par l'utilisation de la méthode d'hodographe et de la transformation de Schwartz-Christoffel, qui peuvent traiter les écoulements qui ont une géométrie polygonale[24].

Le présent mémoire comporte trois chapitres.

Après cette introduction, on présente **dans le premier chapitre** les notions fondamentales de la mécanique des fluides, quelques définitions des types des écoulements et les équations de la mécanique des fluides (Bernoulli, continuité, etc.) et on définit aussi les lignes de courant.

Dans le deuxième chapitre, on présente quelques définitions des fonctions analytiques, la transformation conforme et quelques transformations classiques.

Dans le dernier chapitre, on traite le problème dans le cas où la tension de surface et l'effet de gravité sont négligeables. Dans ce cas, le problème admet une solution exacte. On utilise la méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre, on utilise tout d'abord la technique de transformation Schwartz-Christoffel pour obtenir la solution exacte.

Enfin, on a terminé ce travail par une conclusion générale.

Table des matières

Remerciements	i
Dédicace	ii
Résumé	iii
Notations	iv
Introduction générale	vi
Liste des figures	xi
1 Notion générale	1
1.1 Introduction	1
1.2 Définition d'un fluide [2]	1
1.3 Propriétés des fluides	2
1.3.1 Compressibilité [12]	2
1.3.2 La masse volumique [12]	2
1.3.3 Poids volumique(poids spécifique)	2
1.3.4 Volume massique [6]	3
1.3.5 La densité [5]	3
1.3.6 La viscosité [2]	3
1.4 Débit	4

TABLE DES MATIÈRES

1.4.1	Débit massique	4
1.4.2	Débit volumique	4
1.5	Les écoulement des fluides	4
1.5.1	Écoulement incompressible	5
1.5.2	Écoulement stationnaire (permanent)	5
1.5.3	Ecoulement non stationnaire (transitoires)	5
1.5.4	Écoulement non visqueux [3]	5
1.5.5	Écoulement potentiel [23]	5
1.5.6	Écoulement uniforme	6
1.5.7	Écoulement irrotationnelle	6
1.5.8	Écoulement bidimensionnel [23]	6
1.6	Description du mouvement	6
1.6.1	description de Lagrange	7
1.6.2	description d'Euler [15]	7
1.7	Quelque équation de la mécanique des fluides	9
1.7.1	équation de continuité (l'équation de conservation de la masse)	9
1.7.2	équation d'Euler [19]	9
1.7.3	équation de Bernoulli[12, 19]	10
1.7.4	équation de mouvement [19]	10
1.7.5	Ligne et fonction de courant	11
2	Transformations conformes	13
2.1	Fonction à variable complexe	13
2.1.1	Fonction holomorphe (analytique)	13
2.1.2	Fonction harmonique	13
2.2	Utilisation de la théorie de la variable complexe	14
2.3	Transformations conformes	15
2.4	Quelques transformation classique	15
2.4.1	Transformation linéaire	15
2.4.2	Transformation inverse	15
2.4.3	Transformation linéaire fractionnelle	15
2.4.4	Transformation de Joukowski	16
2.5	Source, puits et tourbillon	16
2.5.1	Théorie des lignes de courants libre	19

TABLE DES MATIÈRES

2.5.2	Transformation de Schwarz-Christoffel	20
3	Ecoulement à surface libre sans tension de surface autour d'un rectangle	22
3.1	Introduction	22
3.2	Formulation du problème	22
3.3	Résolution du problème	25
	Conclusion	34
	Bibliography	34

Liste des figures

1.1	représentation de la vitesse dans un écoulement parfait et écoulement vis-queux.	3
1.2	Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme	6
1.3	Position du champ de vitesse.	6
1.4	trajectoire de la particule P	8
1.5	ligne de courante à t	11
2.1	Transformation conforme.	15
2.2	Transformation de joukowski	16
2.3	Source en $z = a$	17
2.4	Puits en $z = a$	18
2.5	Tourbillon	18
2.6	Transformation d'hodographe	20
2.7	Plan de variable ω	21
2.8	Plan de variable λ	21
3.1	la description du problème	24
3.2	Plan de la variable z	25
3.3	Plan Γ	30
3.4	Plan f	31
3.5	plan β	32
3.6	forme de la surface libre	33

Notions générales sur la mécanique des fluides

1.1 Introduction

Les écoulement autours des obstacles est un phénomène physique qu'on rencontre dans divers domaines technologiques comme l'ingénierie navale, aéronautique, météorologique ...etc. en effet, la compréhension de ce problème classique de mécanique des fluides revêt une importance pratique dans les applications aérodynamique.

Dans ce chapitre nous allons exposer les définitions de base de mécanique des fluides, des écoulements autours des obstacles.

1.2 Définition d'un fluide [2]

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable comme les liquides et les gaz, on peut citer aussi des corps plus complexe comme les polymères ou les fluides alimentaires. En mécanique des fluides on distingue deux types de fluides, à savoir :

- Le fluide parfait : le mouvement du fluide parfait est décrit sans prendre en compte les effets de frottement.

1.3 Propriétés des fluides

- Le fluide réel : un fluide est dit réel si pendant son mouvement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent (elles possèdent donc des composantes tangentielles qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres).

1.3 Propriétés des fluides

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

1.3.1 Compressibilité [12]

la compressibilité χ représente la propriété du fluide à se comprimer sous l'effet de sollicitations. Le coefficient de compressibilité est défini comme étant l'inverse du module d'élasticité E qui est le rapport entre l'effort de compression et le changement de volume.

On :

$$E = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}}$$

- La compressibilité χ vaut :

$$\chi = \frac{1}{E} = -\frac{dV}{V dP} \text{ (Pa}^{-1}\text{)}$$

- Pour l'eau on prend généralement

$$P = 5.10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

1.3.2 La masse volumique [12]

La masse volumique représente le rapport entre la masse d'un fluide et son volume, son unité de base est le (kg/m^3). Mathématiquement, cela s'exprime comme suit : $\rho = \frac{m}{V}$

1.3.3 Poids volumique (poids spécifique)

une grandeur physique qui caractérise le poids par unité de volume d'un matériau. il est obtenu en multipliant la masse volumique par l'accélération de la pesanteur calculée par la formule : $\omega = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g$ exprimée en (N/m^3).

1.3 Propriétés des fluides

1.3.4 Volume massique [6]

c'est l'inverse de la masse volumique

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$$

1.3.5 La densité [5]

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

Dans le cas des liquides on prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas de gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

1.3.6 La viscosité [2]

Est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide autrement dit sa capacité à s'écouler.

Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. C'est-à-dire les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent plus facilement. La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes, la viscosité s'exprime comme suite :

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}$$

- τ : contrainte de cisaillement, exprimée en (N/m^2) .
- ν : la viscosité cinématique, exprimée en (m^2/s) .
- μ : viscosité dynamique, exprimée en $(N.s/m^2)$.

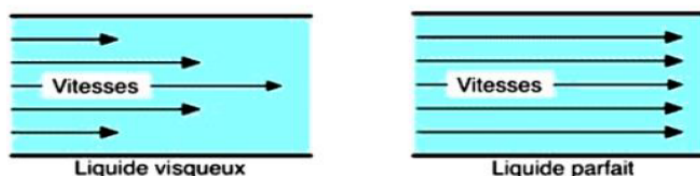


FIGURE 1.1 – représentation de la vitesse dans un écoulement parfait et écoulement visqueux.

1.4 Débit

On distingue deux types de viscosité qui sont comme suit :

Viscosité cinématique définie comme étant le rapport de la viscosité dynamique μ et la masse volumique ρ .

On a :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

L'unité de la viscosité cinématique est le (m^2/s)

Viscosité dynamique coefficient caractéristique d'un fluide, égale à la force nécessaire au déplacement de l'unité de surface plane du fluide avec une vitesse unité, par rapport à une autre surface plane du même fluide qui lui est parallèle à une distance unité.

1.4 Débit [16]

1.4.1 Débit massique

Le débit massique à travers une section S est la quantité de fluide qui traverse la section S par unité de temps. donnée par :

$$Q_m = \iint_s \rho \vec{u} \vec{n} ds$$

1.4.2 Débit volumique

C'est la quantité de volume d'un fluide quelconque qui traverse une section S par unité de temps. Donnée par :

$$Q_v = \iint_s \vec{u} \vec{n} ds$$

1.5 Les écoulement des fluides

Dans la vie quotidienne, dans la nature et dans le domaine industriel, les écoulements sont toujours présente. La circulation de l'oxygène dans notre organisme est l'un des exemples de l'importance de l'écoulement dans la vie humaine. Les tsunamis, les cyclones ou les coulées de lave sont aussi des exemples de l'écoulement mais qui conduisent quelquefois de grands dégâts pour l'humanité.

1.5 Les écoulement des fluides

1.5.1 Écoulement incompressible

un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure sa masse volumique est constante.

$$\rho = cte$$

les liquides peuvent être considérés comme fluide incompressible (eau, huile, etc ...) .

1.5.2 Écoulement stationnaire (permanent)

on dit un écoulement stationnaire si toutes les variables décrivant un mouvement sont indépendantes du temps. Ainsi la pression P , la vitesse V , la densité d , l'énergie E d'un écoulement.

On particulier pour la vitesse, on a

$$\frac{\partial \vec{u}(x, y, z, t)}{\partial t} = 0.$$

1.5.3 Ecoulement non stationnaire (transitoires)

on dit un écoulement non stationnaire si les variables décrivant le mouvement dépendent du temps. Écoulement de fluide en fonction de la viscosité peut être.

1.5.4 Écoulement non visqueux [3]

l'écoulement non visqueux est un flux non visqueux d'un fluide dans lequel la viscosité du fluide est égale à zéro.

1.5.5 Écoulement potentiel [23]

on dit que l'écoulement est potentiel si sa vecteur de vitesse est dérivé d'un potentiel c'est-à- dire :

$$\vec{u} = \nabla \phi$$
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

La fonction $\phi(x, y)$ est le potentiel des vitesses.

1.6 Description du mouvement

1.5.6 Écoulement uniforme

Un écoulement bidimensionnel a surface libre est dit uniforme si l'écoulement de vitesse est constante.

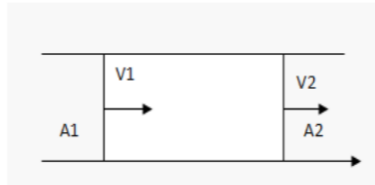


FIGURE 1.2 – Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme

1.5.7 Écoulement irrotationnelle

On dit que l'écoulement est irrotationnelle si

$$\text{rot}(\vec{u}) = \vec{0}$$

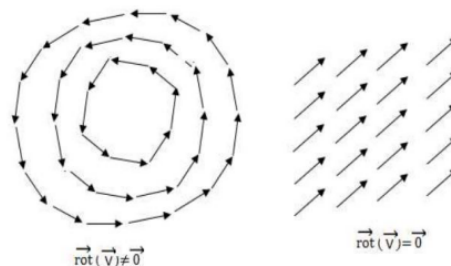


FIGURE 1.3 – Position du champ de vitesse.

1.5.8 Écoulement bidimensionnel [23]

Un écoulement est dit bidimensionnel ou un écoulement plan, si toutes ses caractéristique sont dépendantes de deux variables spatiales (x, y) et du temps t .

1.6 Description du mouvement

En mécanique, il y a deux façons pour décrire les mouvements des particule :

1.6 Description du mouvement

1.6.1 description de Lagrange

Cette description de l'écoulement consiste à suivre une particule donnée au cours de son mouvement au sein du fluide. C'est l'évolution de la position des particules qui permet la description du mouvement. [16]

L'identité d'une particule est donnée par sa position initiale $M_0(x_0, y_0, z_0)$. La description du mouvement est donc de déterminer le vecteur position $\vec{r} = \vec{r}(M_0, t)$ à tout instant t pour toutes les particules du fluide.

$$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t).$$

C'est-à-dire :

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t).$$

Et

$$\vec{u} = \vec{u}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(M_0, t), \quad \vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}.$$

[18]

1.6.2 description d'Euler [15]

La description eulérienne consiste à définir les champs de vitesse en fonction du temps. On s'intéresse alors à caractériser, à chaque instant et en chaque point de l'espace, la vitesse et accélération des particules fluides.

- A l'instant t_1 , on identifie une particule en M de vitesse P_1
- Au temps $t_2 = t_1 + dt$, on trouve au même point M de l'espace, une particule P_2 , avec une vitesse et des propriétés physique différentes.

Donc, nous en M et au temps t_1

$$\vec{u} = \vec{u}(P_1, t_1) = \vec{u}(x, y, z, t_1)$$

Et à l'instant t_2 , on a au même point M .

Les trajectoires :

Les trajectoires d'une particule M est le lieu des positions successives M_i de M au cours des temps.

1.6 Description du mouvement

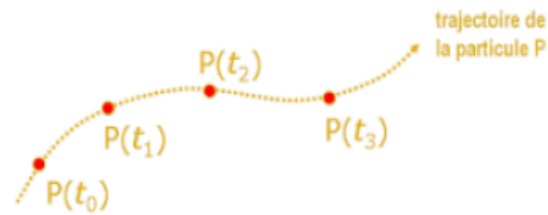


FIGURE 1.4 – trajectoire de la particule P

Dérivée particulaire :

considérons une grandeur physique locale $G(M, t)$ attachée à une particule de fluide située en M à l'instant t .

Il est donné dans la formule que l'on retiendra :

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})G$$

Tension superficielle [12]

La tension superficielle notée γ se manifeste à la surface libre d'un liquide ou à la surface de séparation entre deux fluides non miscibles.

Les molécules d'un liquide s'attirent mutuellement et sont attirées également par les molécules d'autres matériaux. C'est cette force d'attraction nécessaire pour arracher des molécules agissant la long d'un segment de longueur unitaire tracé sur la surface libre d'un liquide est appelé tension superficielle.

Nombre de weber :

On définit le nombre de weber par le rapport entre les effets inertiels et la tension superficielle par la formule suivante :

$$We = \frac{\rho u^2 \cdot L}{\gamma}$$

γ : la tension superficielle.

1.7 Quelques équation de la mécanique des fluides

1.7.1 équation de continuité (l'équation de conservation de la masse)

C'est l'équation qui exprime la loi de conservation de masse aux cours de l'écoulement. Elle s'exprime mathématiquement sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.1)$$

Ou ρ la masse volumique et \vec{u} le vecteur de vitesse .

$$\vec{u} = u + v$$

u et v les composantes de vecteur de la vitesse d'écoulement dans la directions x et y respectivement.

Si le fluide incompressible $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ alors l'équation est :

$$\text{div} \vec{u} = 0 \quad (1.2)$$

Pour un écoulement permanent $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ alors :

$$\text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.3)$$

1.7.2 équation d'Euler [19]

Est une équation aux dérivées particule du premier ordre. on considère que l'élément de volume du fluide est soumis à la force ($\overrightarrow{\text{grad} P}$) exercée par le fluide environnant, où P est la pression. Dans le cas où on ne considère que les forces surfaciques, l'équation de la balance des forces s'écrit alors

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad} P}$$

Ou

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\overrightarrow{\text{grad} P} \quad (1.4)$$

Lorsque le fluide est placé dans un champ(champ de pesanteur, champ magnétique,...etc), chacun de ses éléments de volume est encore soumis à la force \vec{f} , cette force doit être ajoutée au second membre de l'équation de sorte que cette dernière s'écrive sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad} P} + \vec{f} \quad (1.5)$$

1.7 Quelques équation de la mécanique des fluides

1.7.3 équation de Bernoulli [12, 19]

L'équation de Bernoulli traduit le bilan énergétique du fluide. en partant de l'équation d'Euler dans le champ gravitationnel

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P - \overrightarrow{\text{grad}}(gz)$$

z : représente la direction verticale

On sait que :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{u^2}{2}\right) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}) \wedge \vec{u}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{u^2}{2}\right) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}) \wedge \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P - \overrightarrow{\text{grad}}(gz) \quad (1.6)$$

Si l'écoulement est permanent $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$.

Si l'écoulement irrotationnel alors $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} = \vec{0}$ alors on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P - \overrightarrow{\text{grad}}(gz) \\ \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}(P + \rho gz) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Si le fluide est incompressible alors on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right) = 0$$

Et on définit une direction \vec{s} (définit la notion "ligne de courant"), on a $\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$. ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0$$

Et par intégration sur la ligne de courant s on trouve :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = cte \quad (1.8)$$

1.7.4 équation de mouvement [19]

Les forces qui agissent sur une particule d'un fluide sont deux types :

1.7 Quelques équation de la mécanique des fluides

- Forces intérieures d'origine moléculaires; elle sont composées deux à deux et donc leurs résultantes sont nulles.
- Forces extérieures; sont des forces de volume ou des forces de surface.

La forme de l'équation qui gouverne le mouvement d'une particule de fluide dépend des forces que l'on doit considérer. Comme équation on a

D'où

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{1}{d\vartheta} \sum \vec{F}_{ext}$$
$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = \frac{1}{d\vartheta} \sum \vec{F}_{ext}$$

1.7.5 Ligne et fonction de courant

Ligne de courant [12]

Est un courbe qui admet en chacun de ses point un tangente parallèle au vecteur vitesse. Les ligne des courant satisfont aux équation différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Où u, v, w sont en générale fonction du temps t .

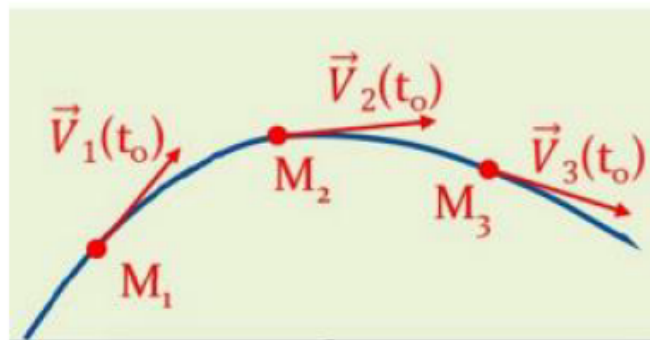


FIGURE 1.5 – ligne de courante à t

Fonction de courant [1]

Si l'on suppose que l'écoulement est incompressible ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) alors l'équation de continuité sera donné :

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

1.7 Quelques équations de la mécanique des fluides

Ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Cela implique que la forme différentielle $u dy - v dx$ est une différentielle totale d'une certaine fonction ψ tel que

$$d(\psi) = u dy - v dx$$

Alors, on :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy &= u dy - v dx \\ \Rightarrow \begin{cases} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.9)$$

ψ s'appelle la fonction de courant et les surfaces définies par les lignes ($\psi = \text{cte}$) sont des lignes de courants.

Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter quelques transformations conformes et ses propriétés fondamentale. On définit d'une façon spéciale la transformation utilisée dans la théorie d'hodographe et la transformation de Schwarz-Christoffel.

2.1 Fonction à variable complexe [8]

2.1.1 Fonction holomorphe (analytique)

Une fonction f est dite holomorphe en un point si elle est holomorphe dans un disque ouvert centré en ce point, et dite holomorphe dans un domaine D si elle est dérivable en chaque point de D .

2.1.2 Fonction harmonique

Les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, ces équations nous ramène à la notion de fonctions harmoniques.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} .

2.2 Utilisation de la théorie de la variable complexe

Une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable est dite harmonique si

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

L'expression Δu est appelée le Laplacien de u .

2.2 Utilisation de la théorie de la variable complexe [18]

Soient ϕ et ψ la fonction potentielle et la fonction de courant respectivement d'un écoulement potentiel bidimensionnel. On relie le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant $z = x + iy$, puis on définit la fonction complexe $f(z)$ par :

$$f(z) = \phi + i\psi$$

Tel que $i^2 = -1$.

$f(z)$ est appelé le potentiel d'écoulement complexe. Puisque les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ vérifient l'équation de Laplace, ce vaut aussi :

$$\begin{cases} u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Et les relation de Cauchy Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2.1)$$

La théorie des variables complexes fournit une méthode très puissante pour obtenir des solution de quelque écoulement.

Si le plan (x, y) est considéré comme plan de $z = x + iy$ la fonction $f(z)$ sera analytique dans le domaine de l'écoulement. De plus la vitesse complexe est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - iv \quad (2.2)$$

Sera aussi analytique le plan de l'écoulement. Cette très importante propriété va nous paramétré d'utiliser par suite la théorie des fonctions analytiques complexe pour résoudre notre problème considéré.

2.3 Transformations conformes [24]

Une transformation $f(z) = w$ est conforme, si l'angle entre deux courbes du plan Z est égale à l'angle qu'il y a entre les images de ces courbes dans le plan W . Le sens de l'angle doit être respecté.

Une condition nécessaire et suffisante pour une transformation conforme est que la fonction $f(z)$ soit analytique.

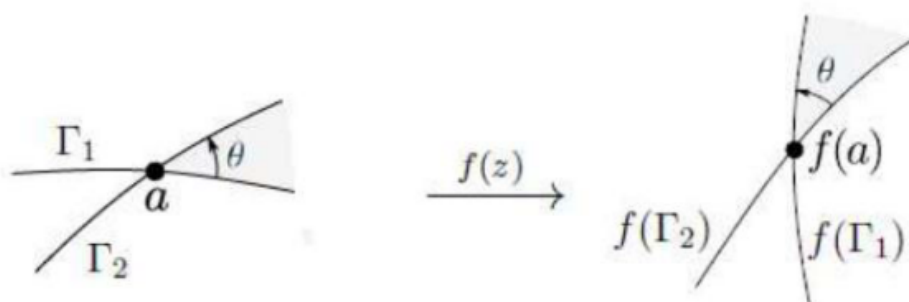


FIGURE 2.1 – Transformation conforme.

2.4 Quelques transformation classique [9]

2.4.1 Transformation linéaire

Une transformation linéaire $w = Az$, avec $A = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ est une double transformation : expansion/contraction liée au coefficient a et rotation d'un angle α .

2.4.2 Transformation inverse

Une transformation linéaire $w = z^{-1}$ pour z non nul transforme les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/ cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

2.4.3 Transformation linéaire fractionnelle

La transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

Avec a, b, c, d des complexes, transforme les cercles en droites et réciproquement.

2.5 Source, puits et tourbillon

2.4.4 Transformation de Joukowski [8]

La transformation de Joukowski est défini par :

$$J(z) = z + \frac{1}{z}; \forall z \neq 0$$

Cette application est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$ car : $\forall z \neq 0; J'(z) = 1 + \frac{1}{z^2}$

De plus, $\forall z \notin \{-1, 0, 1\}, J'(z) \neq 0$, donc cette transformation est une application conforme sur tous les domaines ouverts du plan complexe n'incluant ni 0 ni -1 ni 1 .

La transformation de Joukowski est une bijection qui transforme le demi-cercle unité supérieur en un segment borné aux points d'affixes respective -2 et 2 .

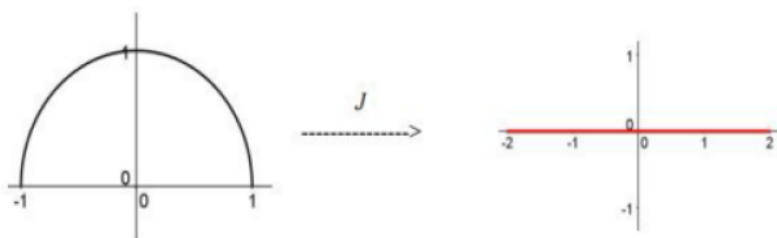


FIGURE 2.2 – Transformation de Joukowski

2.5 Source, puits et tourbillon [21]

Source en $z = a$

Si un fluide sort par une vitesse constante d'une source en $z = a$ (figure 2.3 ci-dessous), le potentiel complexe est :

$$\Omega(z) = K \log(z - a)$$

2.5 Source, puits et tourbillon

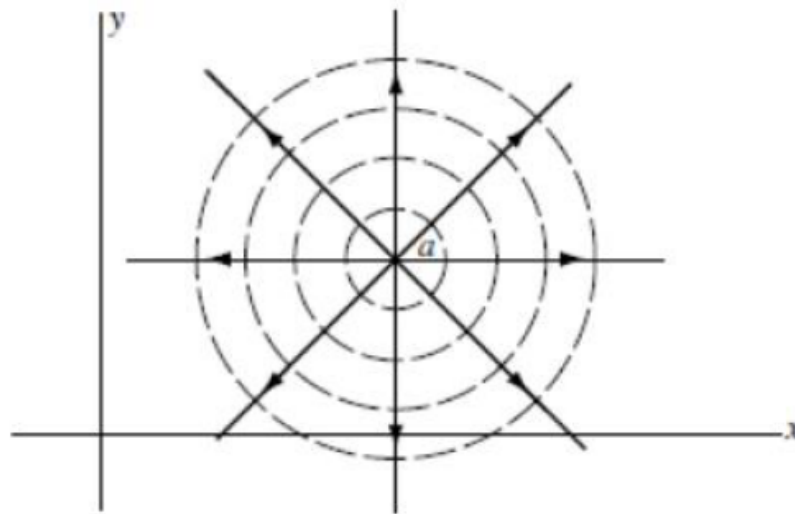


FIGURE 2.3 – Source en $z = a$

Où $K > 0$ est appelé la force de la source. Les lignes de courants ont été représentées en traits pleins et les équipotentiels en pointillés.

Puits en $z = a$

Dans ce cas disparaît en $z = a$ (figure 2.4 ci-dessous) et le potentiel complexe se déduit de celui d'une source en remplaçant K par $-K$. Ce qui donne :

$$-K \log(z - a)$$

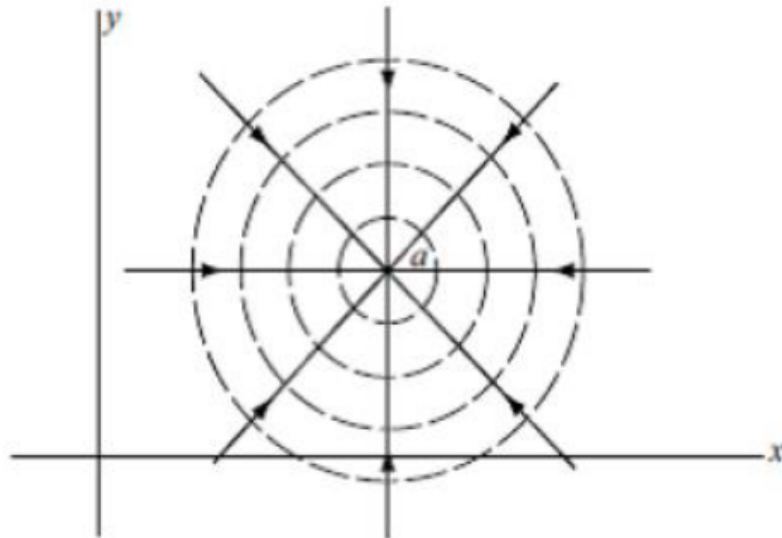


FIGURE 2.4 – Puits en $z = a$

Tourbillon

L'écoulement correspondant au potentiel complexe :

$$\Omega(z) = -iK \log(z - a)$$

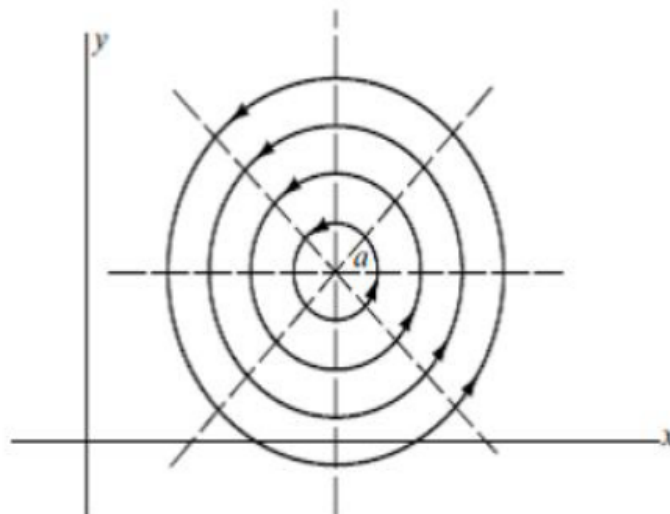


FIGURE 2.5 – Tourbillon

2.5 Source, puits et tourbillon

2.5.1 Théorie des lignes de courants libre [24]

La théorie des lignes de courant libre consiste à étudier les problèmes d'écoulement potentiel, limité par des parois rigides rectilignes et des lignes de courant libre de formes inconnues, sur lesquelles la pression est supposée constante. Si les lignes de courant libres ne sont pas présentes et les effets de gravité sont négligés, la région d'écoulement dans le plan physique est un polygone. Aussi les lignes de courants libres présentes et les effets de gravité ainsi que les effets de la tension de surface sont négligés, la région d'écoulement peut être transformée par une transformation conforme à une région polygonale. Cette région est un parfait du plan hodographe défini :

$$\Gamma = \log\left(\frac{1}{df/dz}\right) \quad (2.3)$$

Dans le cas où l'écoulement est délimité partiellement par des surfaces libre on donne la méthode de résolution introduite par Kirchhoff(1869) .

L'idée est d'introduire la fonction complexe définie par :

$$\Gamma = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u-iv}\right) = \log\left(\frac{U}{r}\right) + i\alpha$$

Où U la vitesse de référence, α l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale

$$\text{Et } f = \phi + i\psi, \frac{df}{dz} = u - iv, r = \sqrt{u^2 + v^2}$$

(u, v) sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe des x et l'axe des y respectivement.

On note que la fonction possède les propriétés suivantes :

- La partie réelle de Γ est constante sur chaque ligne de courante libre, i.e. $\log\left(\frac{U}{r}\right) = \text{cte}$.
- La partie imaginaire de Γ est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e. $\alpha = \text{cte}$.

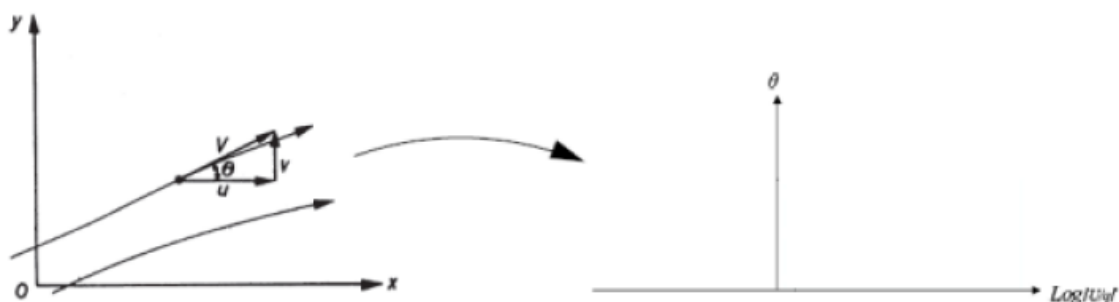


FIGURE 2.6 – Transformation d'hodographe

2.5.2 Transformation de Schwarz-Christoffel [1]

La transformation de Schwarz-Christoffel est une transformation conforme est très utilisée dans la résolution des problèmes d'écoulements. Cette transformation réalise une transformation l'intérieur d'un polygone du plan complexe figure (2.7) en demi plan supérieur figure (2.8) de la variable complexe λ .

Soient a_1, a_2, \dots, a_n les point correspondants respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe réel du plan λ . On définit la transformation de Schwarz-Christoffel qui représente l'intérieur du polygone à demi plan supérieur par la formule :

$$\Omega = k \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\lambda + M \quad (2.4)$$

Où k et M sont des constantes complexes, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les angles intérieurs au polygone.

Remarque 2.1.

- La transformation $\Omega(\lambda)$ est conforme sauf aux points λ_i .
- Le point anguleux est transformé en au point non anguleux .
- La transformation de α_i vers l'infini, alors on admet le facteur $(\lambda - \lambda_n)$ dans la transformation puisqu'il serait associe à l'exposant 0 , on dit que le polygone est dégénéré en ce point.
- On peut choisir trois points arbitraires parmi les n points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

2.5 Source, puits et tourbillon

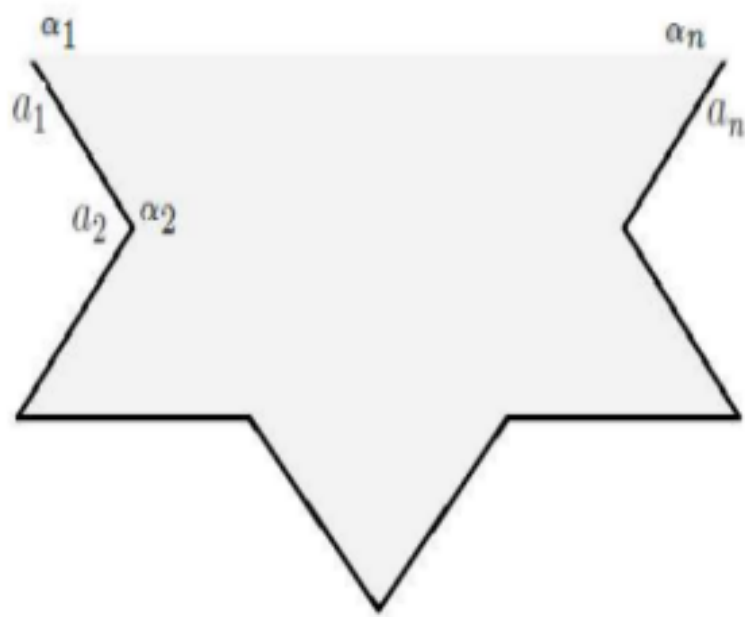


FIGURE 2.7 – Plan de variable ω

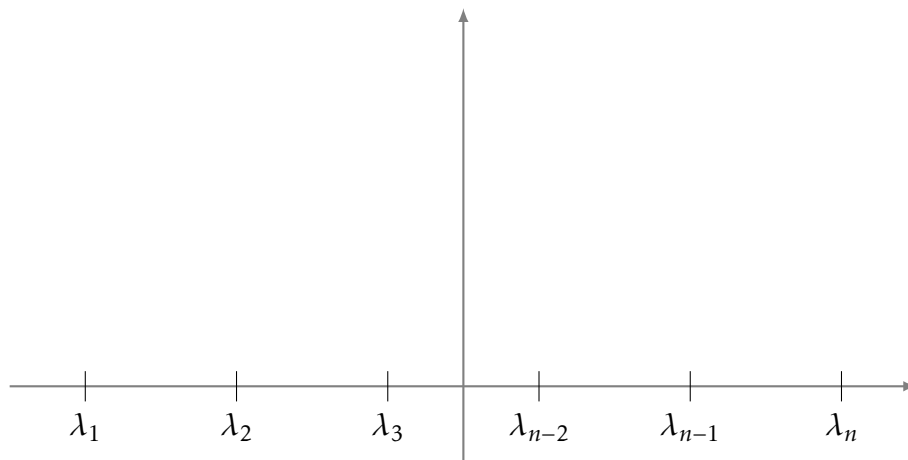


FIGURE 2.8 – Plan de variable λ

Écoulement à surface libre sans tension de surface autour d'un rectangle

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons un problème d'écoulement d'un jet devant un obstacle de forme rectangulaire. Le fluide est considéré comme incompressible et non visqueux. Dans le cas où nous négligeons les effets de la gravité et de la tension de surface, la solution exacte peut être calculée en utilisant la théorie des lignes de courant libre introduite par Kirchhoff.

3.2 Formulation du problème

On considère un écoulement bidimensionnel potentiel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux autour d'un obstacle de forme rectangulaire [voir figure 3.1]. Le rectangle $ABDE$ est de longueur $2H$ et de largeur H , ce qui implique que les angles aux sommets A et B sont égaux ($\frac{\pi}{2}$). le côté AB du rectangle fait un angle ($\frac{\pi}{2}$) avec l'axe des x et le côté DE fait un angle ($-\frac{\pi}{2}$) avec l'axe des x . la courbe $FB'CDF'$ est la surface libre. Loin de l'obstacle rectangulaire $ABDE$. L'écoulement est uniforme de vitesse U et de profondeur h [voir figure 3.1].

3.2 Formulation du problème

L'axe des y divise le rectangle $ABDE$ au milieu en deux carrés égaux $ABCO$ et $OCDE$, alors on a une symétrie par rapport à l'axe des y . D'après cette symétrie on va faire notre étude seulement sur le côté qui se trouve à gauche de l'axe des y [voir figure 3.2], et après la résolution on va faire la généralisation dans le plan complet. Sur la surface libre, puisque la tension de surface et les forces de gravité sont négligés, l'équation de Bernoulli donne :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = cte \quad (3.1)$$

ou v la vitesse de l'écoulement, P est la pression et ρ la densité. La vitesse est constante sur la surface libre alors (3.1) devient :

$$|v| = cte \quad (3.2)$$

On rapporte le plan d'écoulement dans le repère oxy au plan complexe de la variable $z = x + iy$. on définit la fonction $f(z) = \phi + i\psi$, où ϕ est la fonction potentiel et ψ est la fonction de ligne de courant, comme une fonction analytique [voir figure 3.4].

Le problème d'écoulement décrit au-dessous est donné par un problème aux limites de la fonction ϕ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi = 0 \quad \text{dans le domaine de l'écoulement} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur AO} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \quad \text{sur BC} \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{P}{\rho} = \text{constante} \quad \text{sur la surface libre FB'C} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

3.2 Formulation du problème

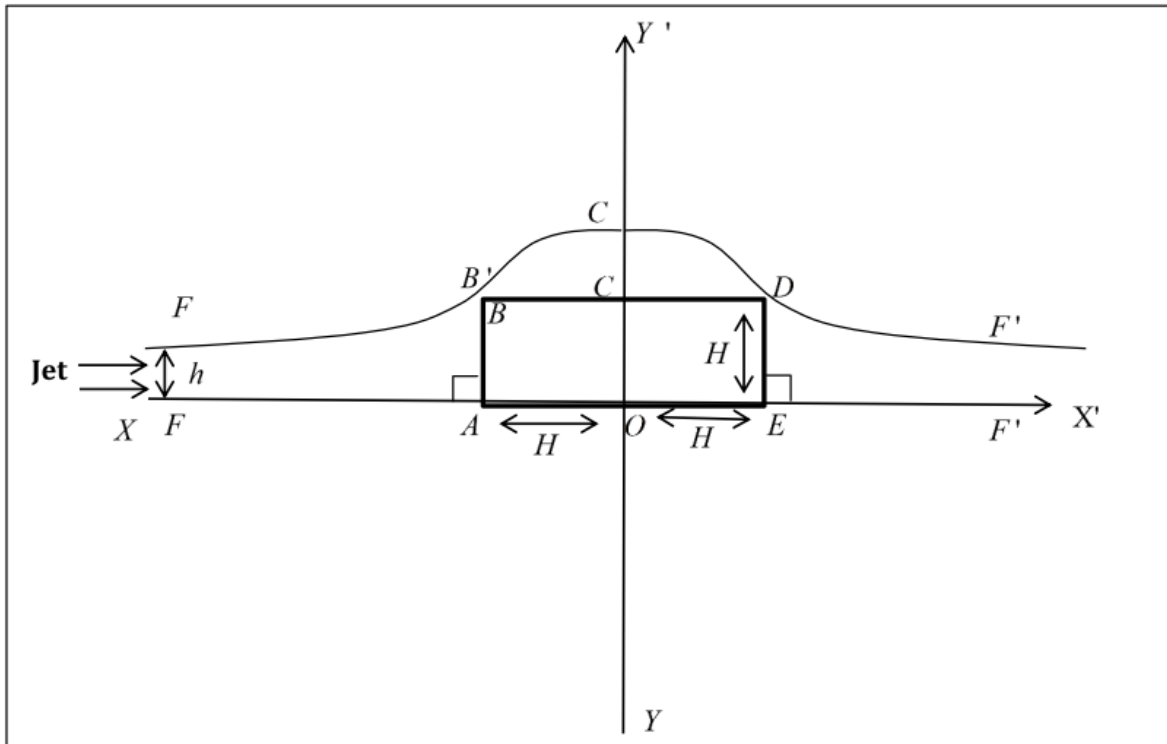


FIGURE 3.1 – la description du problème

3.3 Résolution du problème

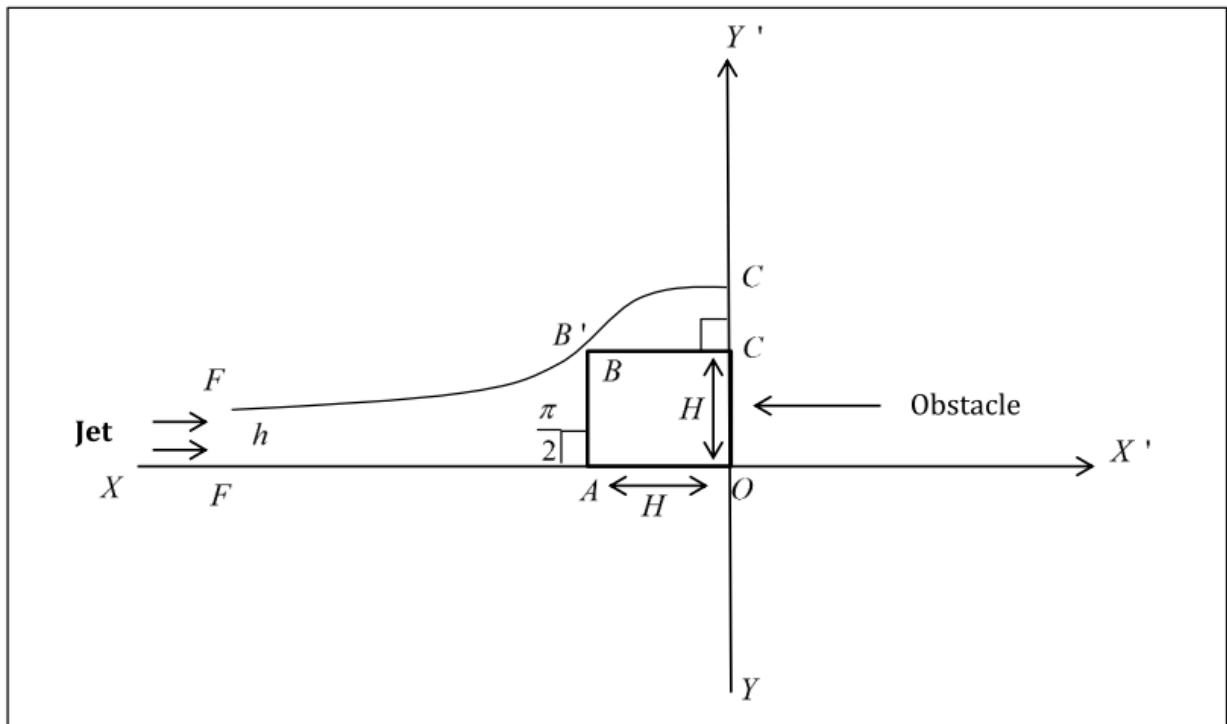


FIGURE 3.2 – Plan de la variable z

3.3 Résolution du problème

Dans cette section, l'écoulement est délimité par un fond rigide $FABC$ et une surface libre $FB'C$.

Puisque la tension de surface et les effets de la gravité sont négligées, une solution exacte peut être calculée, en utilisant la transformation d'hodographe et la transformation de Schwarz-Christoffel. Pour résoudre ce problème en suit les étapes suivantes :

De la transformation (2.3), on a :

$$\Gamma = \log \left(\frac{U}{\frac{df}{dz}} \right) = \log \left(\frac{U}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{U}{r} \right) + i\alpha$$

On transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable z en une bande semi-infinie dans le plan Γ [figure 3.3].

On choisit $\phi = 0$ au point $(x, y) = (0, 0)$, $\psi = 0$ sur la ligne $FABC$ et $\psi = hU$ sur la ligne de courant FC [figure 3.4].

3.3 Résolution du problème

La transformation conforme d'une bande semi-infinie dans le plan Γ au demi-plan inférieur d'autre plan complexe β est donnée par le théorème de Schwartz-Christoffel.

On choisit $B' = 0$; $C = 1$; $F = -1$ et B à l'infini sur le plan β [figure 3.5], on trouve une relation entre Γ et β par la transformation conforme suivante :

$$\frac{d\Gamma}{d\beta} = K(\beta - 1)^{-\frac{1}{2}}(\beta + 1)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

Par intégration on trouve :

$$\Gamma = K \left\{ \int (\beta - 1)^{-\frac{1}{2}}(\beta + 1)^{-\frac{1}{2}} d\beta \right\} + M$$

$$\Gamma = K \ln\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}\right) + M$$

$$\Gamma = K \operatorname{argch}(\beta) + M \quad (3.5)$$

Où K et M sont des constantes à déterminer.

Pour cette détermination on remplace le point C ($\beta = 1$; $\Gamma = i\pi$) dans l'équation (3.5), on trouve :

$$M = i\pi$$

Alors l'équation (3.5) devient :

$$\Gamma = K \operatorname{argch}(\beta) + i\pi$$

Donc

$$\beta = \operatorname{ch}\left(\frac{\Gamma - i\pi}{K}\right)$$

On remplace le point B' ($\beta = 0$; $\Gamma = i\frac{\pi}{2}$) dans l'équation (3.5) on trouve :

$$i\frac{\pi}{2} = K \operatorname{argch}(0) + i\pi$$

$$-i\frac{\pi}{2} = K \operatorname{argch}(0)$$

Donc la valeur de deuxième constante est :

$$K = -1$$

On déduit la transformation

$$\Gamma = -\operatorname{argch}(\beta) + i\pi$$

3.3 Résolution du problème

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Gamma &= i\pi - \ln\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}\right) \\ \beta &= \text{ch}(i\pi - \Gamma) \\ \beta &= -\text{ch}(\Gamma)\end{aligned}\tag{3.6}$$

On cherche maintenant, une relation entre f et β qui transforme l'intérieur de la bande infinie de largeur hU du plan f en demi-plan inférieur de la variable β .

En faisant la correspondance entre les points F, C et B' définis sur les deux plans.

On utilise le théorème de Schwartz-Christoffel, on trouve :

$$\frac{df}{d\beta} = K'(\beta - 1)^{-1}(\beta + 1)^{-1} = \frac{K'}{\beta^2 - 1}\tag{3.7}$$

Par intégration, on trouve :

$$\begin{aligned}f &= K' \left\{ \int (\beta - 1)^{-1}(\beta + 1)^{-1} d\beta \right\} + M' \\ f &= \frac{K'}{2} \ln\left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right) + M'\end{aligned}\tag{3.8}$$

On va déterminer les valeurs M' et K' :

On choisit le point B ($\beta = \infty; f = 0$) et le remplace dans l'équation (3.8) on trouve :

$$M' = 0$$

Alors l'équation (3.8) devient :

$$f = \frac{K'}{2} \ln\left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right)\tag{3.9}$$

Pour déterminer K' , on choisit le point B' ($\beta = 0; f = ihU$) et on remplace dans (3.9) :

$$ihU = \frac{K'}{2} \ln(-1)$$

$$ihU = \frac{K'}{2} i\pi$$

$$\Rightarrow K' = \frac{2hU}{\pi}$$

On substitue la valeur de K' dans l'équation (3.9) :

$$f = \frac{hU}{\pi} \ln\left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right)\tag{3.10}$$

3.3 Résolution du problème

On trouve la relation

$$\frac{df}{d\beta} = \frac{2hU}{\pi} \frac{1}{\beta^2 - 1} \quad (3.11)$$

Cela implique

$$f = \frac{hU}{\pi} \ln\left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right) \iff e^{\frac{\pi f}{hU}} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \quad (3.12)$$
$$\beta = \frac{1 + e^{\frac{\pi f}{hU}}}{1 - e^{\frac{\pi f}{hU}}} \quad (3.12)$$

Est la relation entre les deux plans f et β .

Pour trouver la transformation qui transforme le plan z au plan β nous utilisons la fonction de Kirchoff définie par :

$$\Gamma = \log\left(U \frac{dz}{df}\right) \quad (3.13)$$

Et on a :

$$\beta = -ch\Gamma = -\left[\frac{e^\Gamma + e^{-\Gamma}}{2}\right] \quad (3.14)$$

En substituant (3.13) dans (3.14), on trouve :

$$\beta = -\frac{1}{2} \left[U \frac{dz}{df} + \frac{1}{U} \frac{df}{dz} \right]$$

On pose $y = U \frac{dz}{df}$ on obtient :

$$\beta = -\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right)$$
$$\Rightarrow y^2 + 2\beta y + 1 = 0$$

La solution de cette équation est :

$$y = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} = -\beta \pm i \sqrt{1 - \beta^2}$$

On prend

$$y = -\beta + i \sqrt{1 - \beta^2}$$

Au d'autre part on a :

$$U \frac{dz}{d\beta} = U \frac{dz}{df} \frac{df}{d\beta} = (-\beta + i \sqrt{1 - \beta^2}) \left(\frac{2hU}{\pi} \frac{1}{\beta^2 - 1} \right)$$

3.3 Résolution du problème

$$\frac{dz}{df} = \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\beta}{1-\beta^2} - i \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (3.15)$$

Pour faciliter l'intégration, on divise le domaine $[-1, 1]$ du plan β en deux parties : $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et on intègre l'équation (3.15) seulement sur l'intervalle $[-1, 0]$.

$$\int_{z_0}^z dz = \frac{2h}{\pi} \left[\int_{\beta}^0 \frac{t}{1-t^2} dt - i \int_{\beta}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right]$$

$$z - z_0 = \frac{2h}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \ln(1-t^2) \Big|_{\beta}^0 - i \arcsin(t) \Big|_{\beta}^0 \right]$$

Après des calculs simples, on trouve :

$$z - z_0 = \frac{2h}{\pi} \left[\frac{1}{2} \ln(1-\beta^2) + i \arcsin \beta \right] \quad (3.16)$$

Où z_0 est la constante d'intégration.

On choisit $z_0 = -H + iH$ (au point B') et en substituant dans (3.16).

Alors la forme de la surface libre est donnée par l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x + H = \frac{h}{\pi} \ln(1-\beta^2) \\ y - H = \frac{2h}{\pi} \arcsin \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -H + \frac{h}{\pi} \ln(1-\beta^2) \\ y = H + \frac{2h}{\pi} \arcsin \beta \end{cases} \quad (3.17)$$

L'amplitude du jet à moins l'infini est donnée par :

$$h = \lim_{\beta \rightarrow -1} y(\beta) = H + \frac{2h}{\pi} \arcsin(-1) \Rightarrow 2h = H$$

$$\Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{H}{h} = 2$$

Telle que la valeur $\frac{h}{H}$ représente le degré de contraction de l'écoulement.

Finalement, on divise par H l'équation (3.17) devient :

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \frac{1}{2\pi} \ln(1-\beta^2) \\ y_1 = 1 + \frac{1}{\pi} \arcsin(\beta) \end{cases} \quad (3.18)$$

Qui est l'équation paramétrique de la surface libre.

Et on utilise la symétrie par rapport à l'axe des y_0y' pour tracer la courbe de la surface libre.

Dont le graphe est donné dans la figure (3.6).

3.3 Résolution du problème

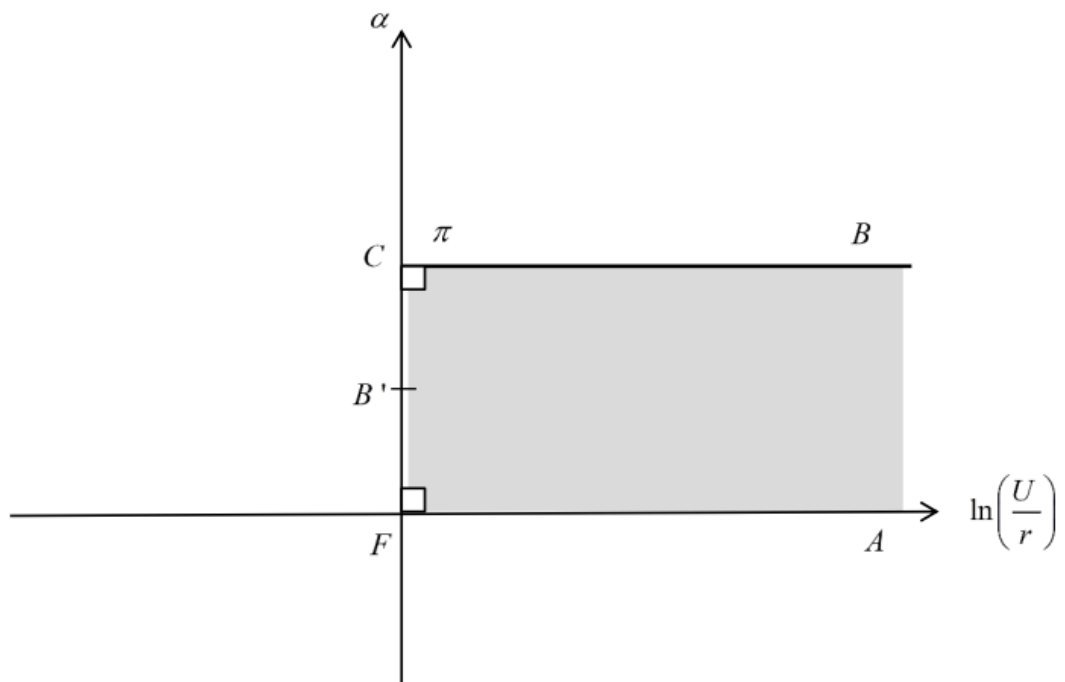


FIGURE 3.3 – Plan Γ

3.3 Résolution du problème

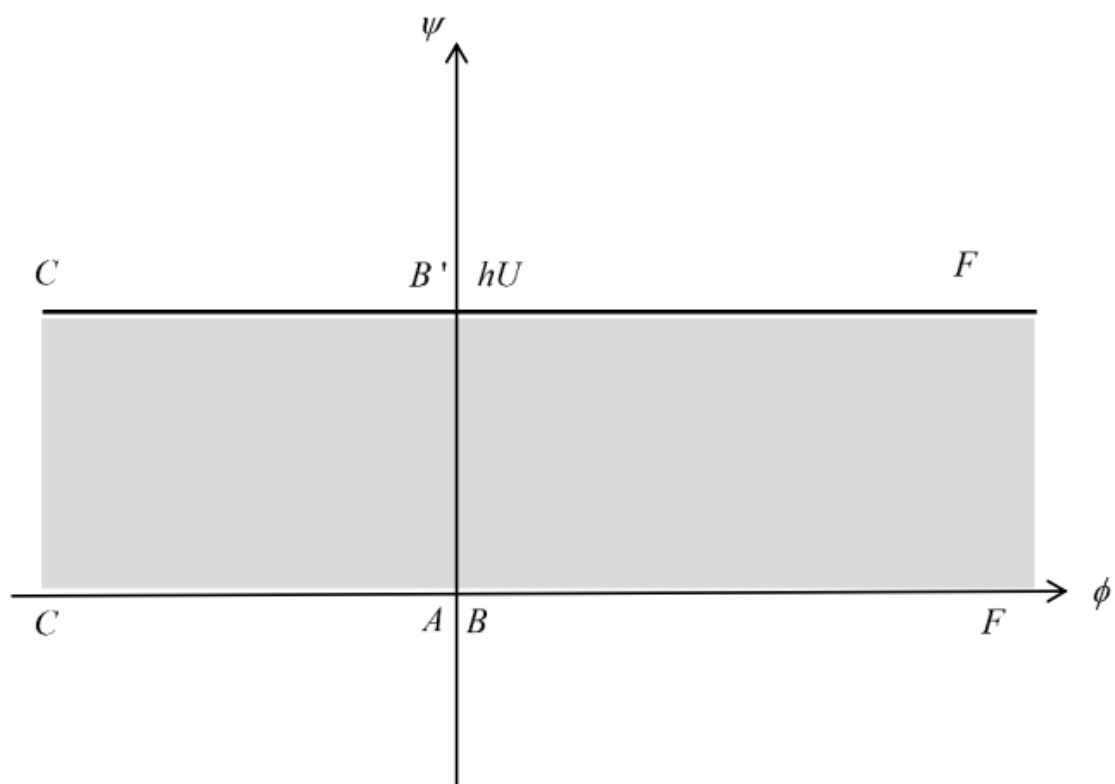


FIGURE 3.4 – Plan f

3.3 Résolution du problème

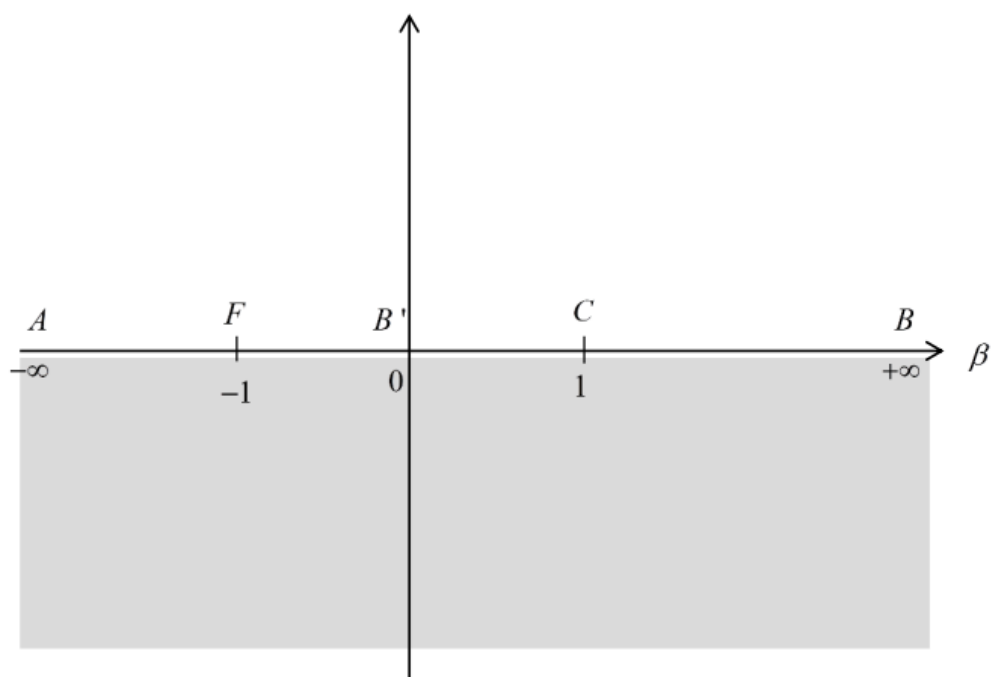


FIGURE 3.5 – plan β

3.3 Résolution du problème

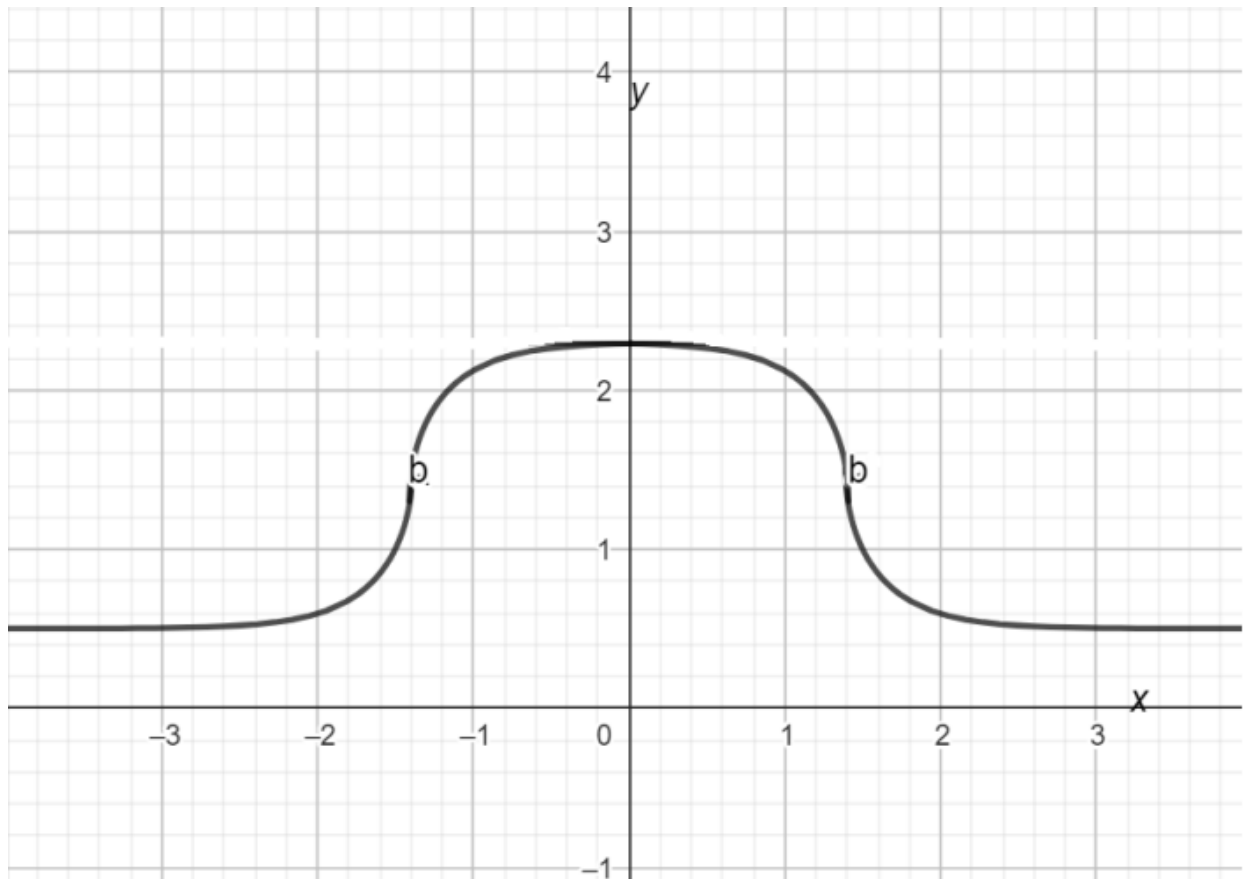


FIGURE 3.6 – forme de la surface libre

Conclusion

Dans ce mémoire , on a étudié analytiquement un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux devant un obstacle de forme rectangulaire en négligeant les effets de la gravité et de la tension de surface.

On a appliqué la technique d'hodographe introduite par Kirchhoff et la transformation de Schwartz Christoffel pour résoudre notre problème, c'est-à-dire pour trouver la solution exacte qui donne la courbe qui présente la forme de la surface libre.

Cette résolution est très important pour des recherche futures surtout dans le côté numérique.

Bibliographie

- [1] Amara, Abdelkader. *Calcul numérique d'un jet bidimensionnel d'un fluide devant un mur de forme quelconque*. 2018. Thèse de doctorat. Université de M'sila.
- [2] Ait Ameer, Ramdane. *Simulation Numérique d'un écoulement Autour d'un obstacle*. 2019. mémoire de master. Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [3] Amara Oussama, Zerouki Charaf Eddine. *Simulation numérique d'un écoulement de fluide autour d'un obstacle carré : influence de l'angle d'inclinaison*. 2020. Mémoire de master. Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
- [4]] A. Gasmi. *Numerical study of two-dimensional jet flow issuing from a funnel*. , Adv. Appl. Math., Vol 87, (2014), pp. 161–169.
- [5] Ben Hamouda, Riadh. *Notion de Mécanique des fluides, cours et exercice corrigés*. Centre de Publication Universitaire, Tunis 2008.
- [6] Bouhellala Kharfia. *Mécanique des fluides. Cours et Applications*. 2020. Université de Béchar Tahri Mohammed, Faculté de Technologie, Département de Génie Civile et Hydrologie.
- [7] Bouzina Amira. *Ecoulement d'un jet devant un obstacle*. 2022. mémoire de master. Université de M'sila.
- [8] Bouguerra Rima. *Ecoulement bidimensionnel de type jet*. 2019. mémoire de master. Université de M'sila.

BIBLIOGRAPHIE

- [9] Christophe Ancey. *Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides, laboratoire hydraulique environnementale (LHE)*. école Polytechnique Fédérale de lausanne Ecublens CH-1015 Lausanne.
- [10] Chedala Fatma Zohra. *Sur un problème d'écoulement d'un jet à surface libre*. 2022. Thèse de doctorat. Université KASDI MERBAH Ouargla.
- [11]] H. Serguine, F. Guechi and A. Gasmi *Numerical study of mathematical model of free-surface potential flow.* , Aust. J. Math. Anal. Appl., Vol. 20, No. 1, (2023).
- [12] Joël M. ZINSALO. *Mécanique des fluides pour ingénieurs*. 2013. Université d'Abomey Calavi, Ecole Polytechnique d'Abomey Calavi, Département de Génie Civil.
- [13] Laidad Abdelkader *Effet de la tension de surface sur des écoulement au-dessus des obstacles*. 2012. mémoire de magistère. Université KASDI MERBAH Ouargla.
- [14] Mame Souhila. *Application de la technique de transformations conformes à un écoulement du fluide*. 2016. mémoire de master. Université Mohamed Boudaif de M'sila Faculté des Mathématiques et de l'Informatique Département de Mathématiques.
- [15] Mechegueg Leyla. *Étude mathématique et numérique d'un problème d'écoulement à surface libre*. 2023. mémoire de master. Université de M'sila.
- [16] Meuris Chantal. *Mécanique des fluides, cours mécanique des fluides*.
- [17] Rimi Khazzani. *Résolution analytique du problème d'écoulement sans l'effet de gravité*. 2016. mémoire de master. université de ouargla .
- [18] Setta Amel. *résolution numérique d'un problème d'écoulement potentiel et bidimensionnel dans un cavité avec tension de la surface*. 2023. mémoire de master. Université de M'sila.
- [19] Serguine Houria. *Etude d'un écoulement potentiel à surface libre sur un plaque avec tension de surface*. thèse de doctorat. 2023. Université Ferhat Abbas, Sétif 1.
- [20] Serguine Houria. *Numerical resolution of a non-linear problem in a field at free border due to a jet against a infinite plate*. Thesis of magister. University of M'sila. 2004.
- [21] Touil Islam. *Etude d'un écoulement a surface libre non lineaire*. 2018. Mémoire de master. Université de M'sila.
- [22] Youcefi Sarra. *Mécanique des fluide, cours et Application*. 2017. Université des sciences et de la technologie Mohamed Boudiaf Oran Faculté de Génie Mécanique Département de Génie Mécanique.

BIBLIOGRAPHIE

- [23] Zaouche Meftah. *Simulation Numérique d'un écoulement autour d'un obstacle*. 2020. mémoire de master. Université de M'sila.
- [24] Zitouni Asma. *L'application de la méthode des volume finis aux quelques écoulements potentiels bidimensionnels*. 2019. Mémoire de master. Université de M'sila.