# UNIVERSITE DE M'SILA



FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

**Département de Mathématiques**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Spécialité :** Mathématiques Appliquées et fondamentales

**Par**

**<u>NEDJMA Kheira</u>** a2/

**Sujet**

# Compacité des opérateurs intégraux

**Soutenu le : 28/06/2011**

**Devant le jury composé de :**

| | | |
|---|---|---|
| Abdelkader GASMI | UNIV. M'sila | Président |
| Mostefa NADIR | UNIV. M'sila | Rapporteur |
| Azedine RAHMOUNE | UNIV. Bordj.B.A | Examinateur |

# Table des matières

## 0.1 Introduction

Dans les espaces de Lebesgue, il y a plusieurs recherches comme la continuité et la compacité des opérateurs. Cette dernière possède, en général un caractère très fort dans la résolution de plusieurs problèmes mathématiques. Le but de ce travail est d'étudier un problème mathématique, qu'on trouve souvent dans le domaine fonctionnel, qui est la compacité. Cette étude sera faite sur des opérateurs intégraux dans l'espace $L^2([a,b])$.

On connaît que si le noyau $k(x,y)$ continu alors l'opérateur correspondant $T$ est compact dans $L^2([a,b])$, mais, en ce qui concerne notre travail, on essayera de montrer par des méthodes différentes que si le noyau $k(x,y)$ appartient à $L^2\left([a,b]^2\right)$ alors l'opérateur correspondant $T$ est compact dans $L^2([a,b])$(i.e., le noyau n'est pas nécessairement continu). Pour cette raison, notre travail est partagé en deux chapitres :

Le premier chapitre se divise en deux parties, la première partie est un rappel sur l'espace des fonctions continues $C(\Omega)$, l'espace de Lebesgue et la compacité dans les deux espaces( Théorème de Arzelà-Ascoli), avec quelques notions et théorèmes qui seront utilisées dans le deuxième chapitre.
Et dans la deuxième partie, nous donnons la définition de l'opérateur intégral et ces propriétés( noyau et norme d'un opérateur intégral).

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la continuité des opérateurs intégraux dans les espaces $L^p(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et sa compacité dans $L^2(\Omega)$, et aussi à la démonstration de la compacité d'un opérateur intégral dans l'espace $L^2([a,b])$ tel que le noyau $k(x,y)$ appartient à $L^2\left([a,b]^2\right)$ par des méthodes différentes, on a utilisé un théorème très important qui donne la compacité de l'opérateur $T$ s'il existe une suite d'opérateurs compacts $T_n$, convergente en norme vers l'opérateur $T$(i.e., $\|T_n - T\| \to 0, n \to \infty$).

# Bibliographie


[1] Anne-Sophie Bonnet Bendhia, Marc Lenoir. : *Outils élémentaires d'Analyse pour les Equations aux Dérivées Partielles( MA 102),* Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées( ENSTA), Octobre 2004.

[2] Belmechri Firouz. : *Equations intégrales sur les espaces fonctionnels,* Mémoire de Magister, Département de Mathématiques, Université de M'SILA, 2007.

[3] Benmerrouche Soraya Amel, *La compacité dans les espaces D'Orlicz,* Mémoire de Magister, Département de Mathématiques, Université de M'SILA, 2009.

[4] Brezis Haïm. : *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Deuxième édition,* Masson, Parris, 1987.

[5] Carlier Guillaume. : *Notes de Cours Analyse Fonctionnelle,* ENS, 2008-2009.

[6] David Porter, David S.G. Stirling. : *Integral Equations, A partical treatment, from spectral theory to applications,* Cambridge University Press, 1990.

[7] A.Kolmogorov, S.Fomine. : *Eléments de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle, Deuxième édition,* Éditions Mir, Moscou, Décembre 1973.

[8] L.P.Lebedev, I.I.Vorovich. : *Functional Analysis in Mechanics*, Springer-Verlag New York, Inc, 2003.

[9] L.P.Lebedev, I.I.Vorovich, G.M.L.Gladwell. : *Functional Analysis, Applications in Mechanics and Inverse Problems, Second edition,* Kluwer Academic Publishers, Moscou, 2003.

[10] Lokenath Debnath, Piotr Mikusiński. : *Introduction to Hilbert Spaces With Applications,* Academic Press, 1990.

[11] M.Nadir. : *Cours d'Analyse Fonctionnelle,* Université de M'SILA, 2004.

## Résumé

L'objectif essentiel de ce travail est l'étude de la compacité des opérateurs intégraux, pour cela, nous avons démontré par des méthodes différentes que l'opérateur intégral à noyau dans$L^2\left([a,b]^2\right)$ est un opérateur compact dans $L^2\left([a,b]\right)$.
**Mots Clés :** opérateur intégral, noyau d'un opérateur, opérateur compact, espace $L^2$.

## Abstract

The aim of this work is the study the compactness of the intégral operator, where, we tried to demonstrate by different ways that all integral operator with kernel in $L^2\left([a,b]^2\right)$ is compact operator in $L^2\left([a,b]\right)$.
**Key Words :** integral operator, kernel of operator, compact operator, space $L^2$.

# ملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو دراسة تراص المؤثرات التكاملية، ولأجل ذلك حاولنا أن نبرهن بطرق مختلفة أنه إذا كانت النواة تنتمي إلى الفضاء $L^2$ فان المؤثر التابع لها متراص في نفس الفضاء.



**الكلمات المفتاحية:** مؤثر تكاملي، نواة مؤثر، مؤثر متراص، فضاء $L^2$ .