



N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté des Sciences

Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

MOUNIR BENCHOHRA

THEME

Modèle Standard Cosmologique Et Les Différents Types D'inflation

Soutenu le : 04/06/2016

Devant le jury composé de :

S. KALLI	MCB Univ. de M'sila	Président
M. BOUSSAHEL	MCA Univ. de M'sila	Rapporteur
A. METATLA	MCB Univ. de M'sila	Examineur

Promotion Juin 2016

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail. Mes remerciements aussi à mon père Lakhdar et ma mère Fairek Akila, mes frères: Hichem, RabeH, Maamoun et me sœur: Zineb, Hadjer qu'ils soient remerciés pour leurs encouragements durant toute la période d'élaboration de ce travail.

Merci à mon prof Mohadi Aicha qui m'a encouragé à choisir ce thème.

Je tiens à remercier mon directeur de Mémoire, Dr Boussahel Mounir pour m'avoir soutenue et encouragé tout au long de mes recherches et guidé durant le cheminement de ce travail.

Je remercie aussi les docteurs Kali Sihem et Abbod Metatla pour leurs travaux qui m'ont permet d'améliorer la qualité de mon travail.

Mes remerciement vont aussi à tous les enseignants de département de physique de l'université de M'sila et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin, a notre formation scientifique.

Aussi, mes remerciements à tous mes collègues de master et de licence 2015/2016 en particulier Yesri Ben mebkhout, Asli Abdelhak.

Merci

Table des matières

Introduction

1 Introduction à la Relativité Générale

1.1	Introduction	1
1.2	Théorie de la Relativité Générale	1
1.3	Le principe d'Equivalence d'Einstein	1
1.4	Courbure de l'espace-temps	2
1.4.1	Géodésique	2
1.4.2	L'Equation géodésique	2
1.4.3	La transformation des coordonnées curviligne	3
1.4.4	Métrique et transformation	3
1.4.5	Symbole de Christoffel	4
1.4.6	Les tenseurs	5
1.4.7	Tenseur de courbure(Riemann)	7
1.4.8	Tenseur d'Einstein	8
1.4.9	Tenseur de Ricci et courbure scalaire	8
1.5	Equation du champ gravitationnel	9
1.5.1	Le tenseur Energie-impulsion	9
1.5.2	Conservation de l'Energie et l'impulsion	9
1.5.3	L'Equation d'Einstein	10
1.5.4	Champ de gravitation central symétrique	12
1.6	Onde gravitationnelle	13
1.7	la cosmologie	13
1.7.1	Les principes cosmologiques	13
1.7.2	La cosmologie newtonienne	13
1.7.3	La cosmologie relativiste	15

2	Modèle Standard Cosmologique	
2.1	Introduction	18
2.2	La théorie de Bing Bang	19
2.2.1	Fond Diffus Cosmologique	19
2.2.2	La Nucléosynthèse Primordiale	20
2.2.3	L'Expansion de l'Univers	20
2.3	La Métrique de l'Univers FLRW	21
2.4	Equations de Friedmann-Lemaître	22
2.5	Equation du mouvement du fluide cosmologique	23
2.5.1	L'Equation d'Etat	24
2.6	Composantes du fluide cosmologique	24
2.6.1	La matière	25
2.6.2	Le rayonnement	25
2.6.3	Le vide	26
2.7	La contributions relatives des composantes du fluide cosmologique	26
2.8	Paramètres cosmologique	27
2.9	Comportement dynamique de l'Univers	28
2.10	Modèles cosmologique	29
2.10.1	Modèle de Friedmann	29
2.10.2	Modèle de Lemaître	29
2.10.3	Modèle de DeSitter	30
2.11	Les problèmes de modèle standard cosmologie	30
2.11.1	Problème de l'horizon	30
2.11.2	Problème de la platitude	30
3	Inflation cosmologique	
3.1	Introduction	32
3.2	L'inflation	32
3.3	La dynamique d'un champ inflationnaire	33
3.4	L'approximation de roulement lent	35

3.5	Les différents types d'inflations	36
3.5.1	Inflation Nouvelle (New Inflation)	36
3.5.2	Inflation Chaotique (Chaotic Inflation)	37
3.5.3	Inflation Stochastique (Eternelle)	38
3.6	Evolution classique des perturbations d'un champ scalaire	39
3.6.1	Equation d'Einstein perturbées	39
3.6.2	Equation des perturbations dans l'espace de Fourier	41
3.7	La solution des problème de le modèle standard cosmologie	42
3.7.1	La problème de la platitude	42
3.7.2	La problème de l'Horizon	42
	Conclusion	44
	Annexes	45
	Références	54

LISTE DES FIGURES :

Figure 2.3.1: Représente les trois espaces de la géométrie de l'univers possible : (a) sphère, (b) plat et (c) hyperbolique 22

Figure 2.9.1: Représente les propriétés de FLRW dominés par la matière et l'énergie de vide en fonction des paramètres de densité actuels $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$ 29

Figure 3.3.1: Représente le modèle originale de l'inflation 35

Figure 3.5.1: Représente la forme générique de l'Inflation Nouvelle, où le potentiel dépendant de la température pour un champ de Higgs scalaire ϕ 37

Figure 3.5.2: Représente la forme de potentiel pour la scénario de l'Inflation Chaotique 38

Figure 3.7.1: Représente l'histoire de l'Univers(CERN) 45

LISTE DES TABLEAUX :

Tableau 2.5.1: Représente les différents valeurs de paramètre d'état pour n'importe quel fluide. . 24

Tableau 3.2: Représente l'évolution de paramètre d'échelle pour n'importe quel fluide 33

Introduction Générale

La cosmologie est une science qui étudie la structure, l'origine et l'évolution de l'univers. Le vrai début de la cosmologie moderne est dû à la physique du XXe siècle surtout après l'émergence de la théorie d'Einstein qui décrit précisément la géométrie cosmique de l'espace, en particulier après des prévisions précises de la relativité générale confirmées par des observations astronomiques plus tard. Grâce à des observatoires qui nous ont permis de voir des objets cosmiques, des galaxies très éloignées de nous à des milliards d'années lumière en plus de la connaissance de leurs caractéristiques et propriétés.

Le progrès technologique a conduit à changer les perceptions sur les origines de l'univers avec des points de vue différents invitant les physiciens à travailler encore plus sur la théorie de Big Bang et l'enrichir avec de nouvelles pensées, et encore cette théorie a prévalu sur toute autre pensée en devenant le modèle sur lequel la plupart des chercheurs travaillaient.

Dans ce mémoire, ce travail est réparti en trois chapitres:

Chapitre 1: Une introduction à la relativité générale, qui est en fait un pilier de base pour comprendre la cosmologie.

Chapitre 2: Le modèle standard cosmologique (MSC) que est définit, des applications de Relativité Générale (RG) sur la cosmologie sont traitées, des observations qui confirment cette théorie et quelque problèmes de MSC (l'horizon et la platitude) sont mis en évidences.

Chapitre 3: Dans ce chapitre, c'est le mécanisme de l'inflation, quelques types d'inflation, et les solutions aux problèmes de MSC qui seront discutés.

Chapitre 1

Introduction à la Relativité Générale

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, On débute par une introduction à la Relativité Générale. Ensuite, on décrit l'écriture physique d'un espace courbé, puis l'équation d'Einstein avec la solution de Schwarzschild qui sera traitée.

1.2 Théorie de la Relativité Générale

La relativité générale est une théorie qui est purement géométrique, elle a été proposée par *Einstein* en 1915, quand il découvrit que l'espace-temps et le champ gravitationnel ne sont qu'une seule et même entité [6]. La relativité générale a permis de concilier deux théories importantes, celle de la gravitation newtonienne et celle de la relativité restreinte [4]. Cette théorie a en plus permis l'évolution de la cosmologie.

1.3 Le principe d'équivalence d'Einstein

Postulat: les caractéristiques du mouvement dans un champ de gravitation sont les mêmes qu'en l'absence de champ mais dans un référentiel accéléré (non Galiléen)[6], où la loi fondamentale de la dynamique est considérée:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.1}$$

Où

$$F = mg \quad (1.2)$$

1.4 Courbure de l'espace-temps

1.4.1 Géodésique

En géométrie, les géodésiques sont les lignes les plus courtes entre des événements de l'espace-temps [6].

1.4.2 L'équation géodésique

Dans un espace Riemannien à 4 dimension, les masses et le rayonnement électromagnétique, lorsqu'ils ne sont soumis qu'à la seule force de la gravitation, elles effectuent des mouvements en suivant nécessairement les géodésiques de l'espace-temps [14]. Donc l'équation géodésique décrit précisément le mouvement des objets (sous un champ de gravitation). Et qui est décrite par l'équation:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{ml}^i \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0 \quad (1.3)$$

τ : est le temps propre.

x^i : sont définis dans un espace de Minkowski.

Et en coordonnée cartésienne, on obtient:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = 0 \quad (1.4)$$

Parce que:

$$\Gamma_{ml}^i = 0 \quad (1.5)$$

Γ_{ml}^i : est le symbole de Christoffel

Où encore, en terme des vitesses locales u^i :

$$\frac{du^i}{d\tau} + \Gamma_{ml}^i u^m u^l = 0 \quad (1.6)$$

1.4.3 La transformation des coordonnées curviligne

Soit $d\vec{M}$ qui est un invariant:

$$d\vec{M} = dx'^i \vec{e}_i = dx^m \vec{e}_m \quad (1.7)$$

$$x^i \xrightarrow{f} x'^i \quad (1.8)$$

Puisque f est différentiable on peut écrire:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k \quad i, k = 1, \dots, n \quad (1.9)$$

$a_k^{i'}$: est matrice de transformation.

$$a_k^{i'} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \quad (1.10)$$

Avec la matrice inverse $a_{k'}^i$:

$$a_{k'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \quad (1.11)$$

Et pour les vecteurs unitaires:

$$\vec{e}_i = a_{k'}^i \vec{e}'_{k'} \quad (1.12)$$

1.4.4 Métrique et transformation

Une métrique est un tenseur du second ordre, elle décrit la déformation de l'espace-temps et ses composantes covariantes et contravariantes respectivement sont données par le produit scalaire de deux vecteurs de base:

$$g_{ik} = e_i \cdot e_k \quad (1.13)$$

et

$$g^{ik} = e^i \cdot e^k \quad (1.14)$$

Sachant que:

$$g^{ik} g_{im} = \delta_m^k \quad (1.15)$$

Où δ_m^k est un symbole de Kronecker $\{si\ k = m \rightarrow \delta_m^k = 1, si\ k \neq m \rightarrow \delta_m^k = 0\}$

Qui se transforment par:

$$g'_{ik} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} g_{ml} \quad (1.16)$$

Et

$$g'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} g^{ml} \quad (1.17)$$

Métrie de l'espace-temps de Minkowski:

$$\eta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

1.4.5 Symbole de Christoffel

Soit un vecteur de base \vec{e}_i et les variations élémentaire de ce vecteur $d\vec{e}_i$, donnée par:

$$d\vec{e}_i = \partial_m \vec{e}_i = \Gamma_{mi}^l \vec{e}_l \quad (1.19)$$

Γ_{mi}^l : est le symbole de Christoffel (ou connexion), il est symétrique par rapport aux indices inférieurs. On écrit:

$$\Gamma_{mi}^l = \Gamma_{im}^l \quad (1.20)$$

D'autre part:

$$\Gamma_{mi}^l = \frac{1}{2}g^{lk} (\partial_m g_{ki} + \partial_i g_{mk} - \partial_l g_{mi}) \quad (1.21)$$

On peut écrire:

$$\Gamma_{mi}^l = g^{lk} \Gamma_{mi,k} \quad (1.22)$$

1.4.6 Les tenseurs

Définition

Généralement au point de vue mathématique, les tenseurs sont des vecteurs qui possèdent des propriétés supplémentaires par rapport aux vecteurs lors d'un changement de base [14].

Algèbre de tenseurs

les tenseurs sont munis de l'algèbre suivante:

1-Combinaison linéaire:

$$T_i^{lm} = aR_i^{lm} + bS_i^{lm} \quad (1.23)$$

2-Transposition :

$$T_m^{ikl} = G_m^{kil} \quad (1.24)$$

3-Multiplication:

$$T_m^{ikl} = R_m^i S^{kl} \quad (1.25)$$

3-Contraction:

$$T_k^i = R_{kl}^{il} = R_{km}^{il} \delta_l^m \quad (1.26)$$

4-Abaissement et élévation d'indices:

$$T_k^i = g^{il} T_{lk} \quad (1.27)$$

$$T_k^i = g_{km} T^{im} \quad (1.28)$$

$$D\phi(x) = d\phi(x) = \sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x^i} dx^i = \partial_i \phi dx^i \quad (1.29)$$

Donc, on peut écrire:

$$D_i \phi(x) = \partial_i \phi \quad (1.30)$$

D_i : est la dérivée covariante

La dérivée covariante d'un tenseur contravariante Soit T^i un tenseur contravariante, alors leur dérivée covariante définit par:

$$D_m T^i = \partial_m T^i + \Gamma_{ml}^i T^l \quad (1.31)$$

La dérivée covariante d'un tenseur covariante Soit T_i un tenseur covariante, alors leur dérivée covariante définit par:

$$D_m T_i = \partial_m T_i - \Gamma_{mi}^l T_l \quad (1.32)$$

La dérivée covariante d'un tenseur en générale Soit $S_{ik\dots}^n$ un tenseur mixte "covariante et contravariante", alors leur dérivée covariante définit par :

$$D_m S_{ik\dots}^n = \partial_m S_{ik\dots}^n - \Gamma_{mi}^l S_{lk\dots}^n - \Gamma_{mk}^l S_{il\dots}^n - \dots + \Gamma_{ml}^n S_{ik\dots}^l + \dots \quad (1.33)$$

Et la dérivée covariante d'un tenseur métrique est nulle:

$$D_m g_{ik} = \partial_m g_{ik} - \Gamma_{mi}^l g_{lk} - \Gamma_{mk}^l g_{il} = 0 \quad (1.34)$$

1.4.7 Tenseur de courbure(Riemann)

Dans un espace de Riemann a 4 dimension, si un vecteur est transporté parallèlement le long d'un contour fermé infinitésime vers le même point d'origine, il ne va pas coïncider avec le vecteur d'origine[14, 19]. Cette variation est décrit par le tenseur de Riemann qui est défini par:

$$R^i_{klm} = \partial_l \Gamma^i_{km} - \partial_m \Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl} \quad (1.35)$$

Propriétés du tenseur de courbure

Le tenseur de Riemann est muni des propriétés suivantes:

1-La composante covariante:

$$R_{iklm} = g_{kn} R^n_{ilm} \quad (1.36)$$

Et:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}(\partial_{li} g_{mk} + \partial_{mk} g_{il} - \partial_{lk} g_{im} - \partial_{mi} g_{lk}) \quad (1.37)$$

2-Antisymétrie:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} \quad (1.38)$$

Et

$$R_{iklm} = -R_{ikml} \quad (1.39)$$

3-Symétrie:

$$R_{iklm} = R_{lmik} \quad (1.40)$$

4-Symétrie cyclique:

$$R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0 \quad (1.41)$$

5-Identité de Bianchi:

$$\nabla_n R^i_{klm} + \nabla_l R^i_{kmn} + \nabla_m R^i_{knl} \equiv 0 \quad (1.42)$$

1.4.8 Tenseur d'Einstein

L'identité de Bianchi permet d'obtenir par la contraction l'identité d'Einstein[5]:

$$\nabla_k E^{ik} \equiv 0 \quad (1.43)$$

Où E^{ik} est appelée le tenseur d'Einstein. Donc:

$$E^{ik} = R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R \quad (1.44)$$

Et ce tenseur permet de retrouver la loi de gravitation de Newton comme approximation avec un champ de gravitation faible et vitesse très inférieur que la vitesse de la lumière.

1.4.9 Tenseur de Ricci et courbure scalaire

La contraction du tenseur de Riemann R^i_{klm} par rapport aux indices i et l conduit au tenseur de Ricci[14]. On définit:

$$R_{km} = R^l_{klm} = \partial_l \Gamma^l_{km} - \partial_m \Gamma^l_{kl} + \Gamma^l_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^l_{nm} \Gamma^n_{kl} \quad (1.45)$$

On obtient la courbure scalaire R (scalaire de Ricci) par la contraction du tenseur de Ricci:

$$R = g^{il} R_{il} = R^i_i \quad (1.46)$$

1.5 Equation du champ gravitationnel

1.5.1 Le tenseur énergie-impulsion

Le tenseur T^{ik} a été proposé par *Einstein*, pour généraliser le champ gravitationnel de Newton, il décrit le contenu en énergie de l'espace-temps pour tous les champs non-gravitationnel. Alors pour un fluide parfait avec pression T^{ik} s'écrit :

$$T^{ik} = -pg^{ik} + (p + \rho) u^i u^k \quad (1.47)$$

p : La pression.

ρ : La densité d'énergie.

u : La vitesse local.

Alors la normalisation du quadri-vecteur pour un fluide statique donne :

$$g_{ik} u^i u^k = -1 \quad (1.48)$$

$$\Rightarrow u^0 = \sqrt{-g^{00}}, u^i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.49)$$

On peut écrire le tenseur énergie-impulsion sous la forme:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} -g^{ik} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{ik} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{ik} p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{ik} p \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

Dans le cas d'une distribution continue de la matière et sans pression, on a:

$$T^{ik} = \rho u^i u^k \quad (1.51)$$

1.5.2 Conservation de l'énergie et l'impulsion

Dans cette section nous allons nous intéresser à l'étude de la loi de conservation locale de l'énergie et de l'impulsion dans le cas des coordonnées cartésiennes, donc on écrit:

$$\partial_i T^{ik} = 0 \quad (1.52)$$

Où:

$$\partial_i (\rho u^i) + p \partial_i u^i = 0 \quad (1.53)$$

On obtient l'équation classique, quand le mouvement d'un fluide est lent et la pression est faible:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.54)$$

1.5.3 L'équation d'Einstein

Constante cosmologique et l'équation d'Einstein générale

La constante cosmologique est introduite par Einstein, pour tenter de rendre compte d'un univers statique, l'existence de constante signifie que la courbure de l'espace-temps n'est pas nulle en l'absence de la matière [6]. Donc, on peut écrire les équations d'Einstein sous forme générale comme suivant:

$$E_{ik} - \Lambda g_{ik} = \kappa T_{ik} \quad (1.55)$$

E_{ik} :est tenseur d'Einstein.

Λ :la constante cosmologique.

κ :la constante d'Einstein.

T_{ik} :est tenseur énergie-impulsion.

L'équation d'Einstein dans un champ faible

À partir de l'équation d'Einstein, on peut retrouver l'équation de poisson de la gravitation Newtonienne en introduisant la constante d'Einstein. Dans l'approximation des champs faibles il existe une perturbation ($|h_{ik}| \ll 1$) autour l'espace-temps de Minkowski, alors la métrique s'écrit comme:

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} \quad (1.56)$$

Sachant que:

$$h_{00} = 2\phi \quad (1.57)$$

Et

$$R_{00} = -\kappa(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00}) \quad (1.58)$$

D'autre part:

$$R_{00} = -\partial_i \Gamma_{00}^i \quad (1.59)$$

Encore:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \partial^i h_{00} \quad (1.60)$$

Donc:

$$\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} = \frac{1}{2} \kappa \rho \quad (1.61)$$

Alors:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (1.62)$$

On obtient:

$$\kappa = 8\pi G \quad (1.63)$$

$G = 6.672 \cdot 10^{-11} m^3 / (kg \cdot s^2)$: la constante de gravitation.

Nous prenons ($c = \hbar = 1$) dans un système naturel.

1.5.4 Champ de gravitation central symétrique

Nous allons désormais expliciter la mise en place de l'expression de la métrique pour une géométrie de Schwarzschild, c'est à dire la métrique pour un espace-temps courbé par une masse sphérique[4].

Champ de gravitation central symétrique dans le vide

En 1916, *karl schwarzschild* a trouvé la première solution exacte des équations d'*Einstein* pour une source statique et à symétrie sphérique d'un champ produit par une masse M [19, 14].

La symétrie centrale du champ signifie que la métrique de l'espace-temps doit être la même pour tous les points équidistants du centre considéré [14]. La métrique de *Schwarzschild* est donnée sous la forme suivante par l'intervalle ds^2 (en coordonné sphérique):

$$ds^2 = \left[1 - \frac{r_0}{r}\right] c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - [r_0/r]} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.64)$$

t : est le coordonnée de temps.

r : est la coordonnée radiale.

θ : est la colatitude.

φ : est la longitude.

ds : est l'intervalle d'espace-temps.

$r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ est le rayon de *Schwarzschild* de l'objet d'une masse M , avec G la constante gravitationnelle, et c la vitesse de la lumière.

Pour la construction de cette métrique voir l'annexe.

Singularité de schwarzschild

On voit que La métrique schwarzschild présente deux singularité pour:

1-La première singularité:

-Le coefficient g_{00} de dt^2 est infini, pour $r = 0$.

2-Seconde singularité:

-Le coefficient g_{11} de dr^2 est infini, pour $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$.

1.6 Onde gravitationnelle

Les ondes gravitationnelles peuvent être considérées comme une petite perturbation qui se propage dans l'espace-temps Riemannien en le déformant légèrement. De nombreux laboratoires d'astrophysiques essaient de nos jours de détecter directement des ondes gravitationnelles[14], et finalement elles ont été détectées en 2016.

1.7 la cosmologie:

C'est une science qui étudier la structure, l'origine et l'évolution du l'Univers.

1.7.1 Les principes cosmologiques

- Univers est homogène c'est à dire qu'il présente les mêmes propriétés dans toutes ses régions, ceci s'étend à très grand échelle.

- Univers est isotrope c'est à dire qu'il n'existe pas de direction particulier de l'espace.

Ainsi autre hypothèse de la cosmologie:

- Univers est fluide gazeux non visqueux dont les particules sont les galaxies.

- Univers est thermodynamiquement un système fermé, sans travail et adiabatique (pas de chaleur avec l'extérieur).

- L'univers en expansion(loi de Edwin Hubble).

- Sa masse volumique est uniquement fonction du temp et il y a conservation de la masse (et donc de l'énergie), donc la quantité de matière y est constante.

1.7.2 La cosmologie newtonienne

Actuellement, l'univers est dominé par de la matière. On écrit la densité de matière par:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (1.65)$$

R :est le rayon de notre univers.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{-3M}{\frac{4}{3}\pi R^4} \dot{R} \quad (1.66)$$

Et

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} \quad (1.67)$$

D'autre par (loi de Hubble):

$$\frac{dR}{dt} = HR \quad (1.68)$$

$H = H(t)$: C^{ste} de Hubble.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{-3M}{\frac{4}{3}\pi R^4} HR \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = -3H\rho \quad (1.69)$$

On aura:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d}{dt} HR \quad (1.70)$$

$$= \frac{dH}{dt} R + \frac{dR}{dt} H = \frac{dH}{dt} R + RH^2 \quad (1.71)$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} + H^2 = -\frac{GM}{R^3} = -\frac{3}{4}\pi G\rho \quad (1.72)$$

On considère une particule dans cet Univers, elle est soumise à une attraction:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} \quad (1.73)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{R} = C^{ste} = \frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0}^2 - \frac{GM}{R_0} \quad (1.74)$$

Et

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right) = HR\dot{R} = H^2 R^2 \quad (1.75)$$

$$\frac{1}{2}HR\dot{R} - \frac{GM}{R} = \frac{1}{2}H_0R_0\dot{R}_0 - \frac{GM}{R_0} \quad (1.76)$$

$$HR\dot{R} = H_0 R_0 \dot{R}_0 - \frac{2GM}{R_0} + \frac{2GM}{R} \quad (1.77)$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi GR^2\rho - \frac{8}{3}\pi GR_0^2\rho_0 + H_0^2 R_0^2 \quad (1.78)$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi GR^2\rho - \frac{8}{3}\pi GR_0^2(\rho_0 - \rho_c) \quad (1.79)$$

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi} \frac{H_0^2}{G} \quad (1.80)$$

$$R_0 = R(t = t_0)$$

$$\rho_0 = \rho(t = t_0)$$

Si $\rho_c \succ \rho \rightarrow$ Univers en expansion.

Si $\rho_c = \rho \rightarrow$ Univers en expansion ralentie.

Si $\rho_c \prec \rho \rightarrow$ Univers en contraction.

1.7.3 La cosmologie relativiste

On considère que l'univers est un fluide pleine de rayonnement et de matière.

Dans le cas statique à symétrie sphérique, on utilise l'équation (A.4) et (1.55):

- quand $T_{ik} = 0$

On écrire la métrique de Schwarzschild-DeSitter:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right] c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.81)$$

- quand $T_{ik} \neq 0$

On utilise l'équation (1.47) , p et ρ sont définis localement:

$$\rightarrow u^0 = 0 \Rightarrow T^{00} = \rho$$

$$\rightarrow u^i = 0 \Rightarrow T^{ii} = -p \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\text{Et } T^{ik} = T^{ki} = 0 \quad (k \neq i)$$

$$\kappa\rho = R_{00} - \frac{1}{2}R_0^0 g_{00} - \Lambda g_{00} \rightarrow$$

$$\kappa\rho = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda \quad (1.82)$$

$$\kappa p = R_{11} - \frac{1}{2}R_1^1 g_{11} - \Lambda g_{11} \rightarrow$$

$$\kappa p = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda \quad (1.83)$$

$$\kappa p = R_{22} - \frac{1}{2}R_2^2 g_{22} - \Lambda g_{22} \rightarrow$$

$$\kappa p = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{r''^2}{4} - \frac{\lambda\nu'}{4} + \frac{1}{2r} (\nu' + \lambda) \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda \quad (1.84)$$

$$\kappa p = R_{33} - \frac{1}{2}R_3^3 g_{33} - \Lambda g_{33} \rightarrow$$

$$\kappa p = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{r''^2}{4} - \frac{\lambda\nu'}{4} + \frac{1}{2r} (\nu' + \lambda) \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda r^2 \quad (1.85)$$

$$\partial_i T^{ik} = 0 \Rightarrow \nu' (p + \rho) = 0$$

puisque l'Univers est homogène, donc:

$$p \text{ et } \rho = c^{ste}$$

- L'univers DeSitter :

$$\text{on prend } (p + \rho) = 0$$

- L'univers d'Einstein :

$$\nu' = 0 \Rightarrow \nu = c^{ste}$$

En choisissant $c^{ste} = 0$ on a:

$$\kappa\rho = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda \quad (1.86)$$

$$\kappa p = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda \quad (1.87)$$

$$\kappa p = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{2r} \right) + \Lambda \quad (1.88)$$

Après (1.86):

$$-r^2(\kappa\rho + \Lambda) = e^{-\lambda} \left(-r\lambda' + 1 \right) - 1 \quad (1.89)$$

$$(re^{-\lambda})' = -r^2(\kappa\rho + \Lambda) + 1 \quad (1.90)$$

Pour $r = 0 \rightarrow A = 0$

Donc:

$$e^{-\lambda} - 1 = -\frac{1}{3}(\kappa\rho + \Lambda)r^2 \quad (1.91)$$

Après (1.87):

$$e^{-\lambda} - 1 = (\kappa p - \Lambda)r^2 \quad (1.92)$$

Après l'égalité (1.92) et (1.91):

$$-\frac{1}{3}(\kappa\rho + \Lambda)r^2 = (\kappa p - \Lambda)r^2 \quad (1.93)$$

$$-\frac{1}{3}\kappa\rho - \kappa p = -\frac{2}{3}\Lambda \quad (1.94)$$

$$\Lambda = \frac{3}{2}\kappa\left(\frac{1}{3}\rho + p\right) \quad (1.95)$$

Si la radiation domine dans l'univers ($\rho = 0$):

$$\Lambda = \frac{3}{2}\lambda p \quad (1.96)$$

Tel que $p \rightarrow c^{ste}$

Si la matière domine dans l'univers ($p = 0$):

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2}\rho \quad (1.97)$$

$\rho \sim 10^{-30} g/cm^3$; la *c^{ste} cosmologique* est très faible ($\Lambda = 10^{-53} cm^{-2}$).

Chapitre 2

Modèle Standard Cosmologique

2.1 Introduction

La cosmologie étudie la structure et le contenu matériel de l'Univers aux échelles observables les plus grandes. Sa structure est décrite par une variété lorentzienne quadridimensionnelle (ou espace-temps). Les progrès récents de la cosmologie observationnelle ont permis de construire un modèle, dit de concordance, ou modèle cosmologique standard, qui résume les résultats de nombreuses observations à quelques chiffres indiquant la géométrie et la composition de l'Univers.

La construction de ce qui est désormais appelé le modèle standard de la cosmologie est la conséquence logique de l'idée du Big Bang proposée dans la première partie du XXe siècle. Ce modèle standard de la cosmologie, qui tire son nom par analogie avec le modèle standard de la physique des particules, offre une description de l'univers compatible avec l'ensemble des observations de l'univers.

Il stipule en particulier les deux points suivants:

- L'Univers observable est issu d'une phase dense et chaude (Big Bang), durant laquelle un mécanisme a permis à la région qui nous est accessible d'être très homogène mais de présenter de petits écarts à l'homogénéité parfaite. Ce mécanisme est probablement une phase de type inflation, quoique d'autres mécanismes aient été proposés.
- L'Univers actuel est empli de plusieurs formes de matières.

2.2 La théorie de Bing Bang

Le Big Bang est un modèle cosmologique pour décrire l'origine et l'évolution de l'Univers. Il a été initialement proposé en 1927 par *Georges Lemaître*, l'Univers d'il y a 13,8 *milliards d'années* quand son histoire a commencé jusqu'à aujourd'hui. Le concept général du Big Bang, à savoir que l'Univers est en expansion et a été plus dense et plus chaud par le passé. les observations cosmologique sur le fond diffus cosmique, Redshift et nucléosynthèse primordiale elles ont donné les arguments que ce modèle est validé[22].

Ce modèle est basé sur les preuves suivantes:

2.2.1 Fond Diffus Cosmologique

En 1964, *Penzias* et *Wilson* ont découverts le fond diffus cosmologique à 2.725 0k . Ce rayonnement assimilable à celui d'un corps noir a été dilué et refroidi par l'expansion de l'Univers et correspond à l'émission des premiers photons[9]. Il nous parvient aujourd'hui de régions qui se trouvent actuellement à plus de 45 *milliards d'années – lumière de la Terre*.

En effet, à cette période, a eu lieu la recombinaison entre les électrons et les protons pour former les premiers atomes. Ce phénomène se produit au moment où la température de l'Univers descend au-dessous du seuil.

La température actuelle de ce rayonnement pouvait être calculée à partir de la connaissance de l'âge de l'Univers, la densité de matière, ou l'abondance d'hélium. On donne la loi de Wien:

$$T \cdot \lambda_{\max} = 2,9 \cdot 10^{-3} m \cdot ^0k \quad (2.1)$$

T : la Température.

λ_{\max} : la longueur d'onde correspondant au maximum d'intensité lumineuse émise.

2.2.2 La Nucléosynthèse Primordiale

La Nucléosynthèse Primordiale qui s'est déroulée dans les minutes suivant le Big-Bang à une températures 10^9 kelvin, elle a formée les éléments chimiques les plus légers (1_1H (75⁰/₀), 4_2He (24⁰/₀) et des traces de 7Li et 5Be) parce que l'Univers a une expansion rapide (refroidit)[16, 22].

L'abondance relative pour des deux éléments principaux(${}^1_1H, {}^4_2He$) à la fin de la nucléosynthèse primordiale est directement liée à la proportion de neutrons et de protons juste avant cette période [19]. On donne la proportionnalité par la formule de *Maxwell – Boltzmann*:

$$\frac{N_p}{N_n} = \exp[-\beta (E_p - E_n)] \quad (2.2)$$

Et

$$\beta = \frac{1}{K_B T} \quad (2.3)$$

N_p, N_n : le n^{bre} de protons et de neutrons respectivement.

E_p, E_n : l'énergie de protons et de neutrons respectivement.

K_B : C^{ste} de Boltzmann.

T : la Température.

Les mesures d'abondance relative (de ${}^1_1H, {}^4_2He$) dans l'Univers (les galaxies très anciennes ou les amas globulaires de notre Galaxie) sont en parfait accord avec la description théorique de la Nucléosynthèse Primordiale dans le but de confirmer la théorie du Big-Bang[12].

2.2.3 L'Expansion de l'Univers

L'astronome américain *Edwin Hubble* donne la première preuve de l'expansion de l'Univers, un phénomène générique prédit par la relativité générale, et du Big Bang, le modèle cosmologique qui en résulte le plus naturellement. En 1929, il découvrit une loi qui porte son nom par l'observation d'un décalage vers le rouge pour les galaxies[5, 16].

La loi de Hubble énonce que les galaxies s'éloignent les unes des autres à une vitesse proportionnelle à leur distance.

$$V = H_0 d \quad (2.4)$$

V : la vitesse d'éloignement en $Km.s^{-1}$.

$H_0 = 70 \pm 7 Km.s^{-1}.Mpc^{-1}$: C^{ste} de Hubble actuel.

d : la distance.

Avec le passage du temps, le facteur d'échelle augmente plus vite que H diminue, donc il y a accélération de l'expansion.

L'Age de Univers

L'âge de univers est représenté la durée écoulée juste après le Big Bang jusqu'à maintenant. Il est estimé par 13.798 ± 0.037 milliards d'années (ou $4.354.10^{17} \pm 0.012.10^{17}s$). Cette estimation est donnée par les satellites de *Planck* et *WMAP*. On peut trouver l'âge de univers à partir de la C^{ste} de Hubble (H_0):

$$t = \frac{1}{H_0} \quad (2.5)$$

t : l'âge de Univers.

2.3 La Métrique de l'Univers FLRW

La métrique *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW) décrit la géométrie moyenne de l'univers aux grandes échelles. Elle nous donne sa dynamique et nous permet de connaître l'évolution de sa taille (contraction ou expansion de l'univers). Un Univers homogène et isotrope demeure au cours de son évolution. Il ne peut rendre compte de la formation des structures, le composant de densité inhomogène par définition. La formation de ses structures, tels que les filaments ou les amas de galaxies, est permise par l'introduction de perturbations autour de cette métrique FLRW. Ces perturbations croissent au cours du temps, par attraction gravitationnelle, et entraînent la création des grandes structures observées. Elles sont supposées d'origine quantique, et leur existence nous est donnée par l'observation du fond diffus cosmologique, réalisée grâce aux satellites COBE (:cosmic background explorer

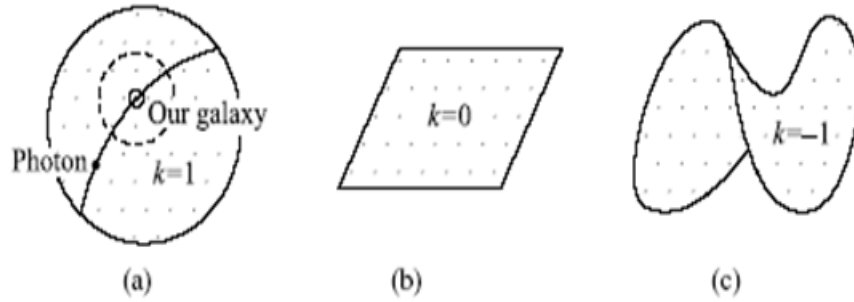


Figure 2.3.1 : Représente les trois espaces de la géométrie de l'univers possible : (a) sphère, (b) plat et (c) hyperbolique.

fut lancé pour procéder à l'étude du fond diffus cosmologique), WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe est un observatoire spatial pour dresser une carte de l'anisotropie du fond diffus cosmique), et plus récemment Planck[13].

La métrique donnée par:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (2.6)$$

$R(t)$ est le rayon de courbure (facteur d'échelle) de l'Univers.

Le signe de $\dot{R}(t)$ est renseigné sur l'évolution de l'univers:

- quand $\dot{R}(t) > 0$ (univers en expansion).
- quand $\dot{R}(t) = 0$ (univers statique).
- quand $\dot{R}(t) < 0$ (univers en contraction).

\dot{R} : la premier dérivé de R .

k est la courbure de l'espace il prend $k = 1, 0, -1$ (voir le figure 2.3.1)

2.4 Equations de Friedmann-Lemaître

La dynamique de l'espace FRW est entièrement caractérisée par le facteur d'échelle R et afin de déterminer son évolution, il est nécessaire de résoudre les équations d'Einstein en présence de matière avec la constante cosmologique .

Nous cherchons des solutions homogènes et isotropes, alors ρ et p ne doivent dépendre que du temps cosmique t . Par ailleurs, puisque $u^\mu u^\mu = c^2$, la trace de tenseur d'énergie-impulsion vaut:

$$T = T^\mu_\mu = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)c^2 - p\delta^\mu_\mu = \rho c^2 - 3p \quad (2.7)$$

La combinaison de ces deux équations (2.7) et (1.55) permet de démontrer rigoureusement l'équation de Friedmann:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)R + \frac{1}{3}\Lambda c^2 R \quad (2.8)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \frac{1}{3}\Lambda c^2 R^2 - c^2 k \quad (2.9)$$

Ces deux équations différentielles, on les appelle souvent simplement équation de Friedmann pour $\Lambda = 0$ et équation de Friedmann-Lemaître pour $\Lambda \neq 0$.

2.5 Equation du mouvement du fluide cosmologique

On peut obtenir une équation supplémentaire (qui simplifie beaucoup de calculs), pour tout modèle cosmologique, à partir de la conservation de l'énergie-impulsion:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.10)$$

On sait que la conservation nous mène à l'équation de continuité relativiste pour le fluide cosmologique, soit:

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) + \frac{p}{c^2}\nabla_\mu u^\mu = 0 \quad (2.11)$$

Sachant que, ρ ne dépend que de t et que $u^\mu = \delta_0^\mu$, on aboutit:

$$\dot{\rho} + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{3\dot{R}}{R} = \frac{d(\rho R^3)}{dR} + \frac{3pR^2}{c^2} = 0 \quad (2.12)$$

2.5.1 L'équation d'état

En cosmologie, chaque composante d'un fluide cosmologique obéit à une équation de type:

$$p = \omega \rho c^2 \quad (2.13)$$

ω : le paramètre de l'équation d'état est C^{ste} .

Après (2.14) et (2.15), on obtient:

$$\frac{d(\rho R^3)}{dR} = -3\omega \rho R^2 \quad (2.14)$$

La solution de l'équation précédente est:

$$\rho \propto R^{-3(1+\omega)} \quad (2.15)$$

Chaque composante du fluide cosmologique est modélisée comme un fluide parfait dont l'équation d'état est de la forme:

$$p_i = \omega_i \rho_i c^2 \quad (2.16)$$

Où i ($= m, r, \Lambda$) permet d'indiquer la composante de fluide considérée

type de fluide	ω_i
la poussière(m)	0
le rayonnement(γ)	$\frac{1}{3}$
le vide(Λ)	-1

Tableau 2.5.1: Représenté les différents valeurs de paramètre d'état pour n'importe quel fluide.

2.6 Composantes du fluide cosmologique

Dans un modèle cosmologique général, l'Univers peut contenir à la fois de la matière et du rayonnement, mais on suppose que la constante cosmologique n'est pas nulle. Sachant que l'interprétation moderne de Λ fait appel à la notion d'énergie du vide qui est modélisée

comme un fluide parfait. Il est donc le fluide cosmologique possède trois composantes (la matière (m), le rayonnement (r) et le vide (Λ)), et la densité de masse équivalente est donnée simplement comme la somme des trois contributions individuelles, soit:

$$\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t) \quad (2.17)$$

Où t est le temp cosmique: est le temp juste après le Big Bang jusqu'a t donné.

On supposera par ailleurs que ces trois composantes n'interagissent pas entre elles que par leur gravitation. Bien que la matière et le rayonnement aient été en interaction dans l'univers primordial, cela reste une hypothèse simplificatrice très raisonnable pour la majeure partie de l'histoire de l'Univers[12].

2.6.1 La matière

La matière existe dans l'univers sous plusieurs formes comme la matière baryonique et la matière noire non baryonique (froide(CDM), chaude (HDM)) [11, 12]. On donne la densité totale de la matière qui peut être exprimée à tout temps cosmique t :

$$\rho_m(t) = \rho_b(t) + \rho_{dm}(t) \quad (2.18)$$

La densité totale de matière joue un rôle dans l'évolution de l'Univers par le facteur d'échelle $R(t)$ avec le temps cosmique t . On déduit alors de l'équation (2.17) que:

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0} \left[\frac{R_0}{R(t)} \right]^3 \quad (2.19)$$

$\rho_m(t_0) \equiv \rho_{m,0}$: est la densité propre actuelle de matière.

$R_0 = R(t_0)$: est la valeur de facteur actuelle.

2.6.2 Le rayonnement

Le terme rayonnement inclut évidemment les photon, mais également d'autres espèces de particule dont la masse est très petite (comme les neutrinos (ν)), ce qui implique qu'elle sont actuellement en mouvement relativiste[11]. La densité totale de masse équivalente du rayonnement peut être écrite comme:

$$\rho_r(t) = \rho_\gamma(t) + \rho_v(t) \quad (2.20)$$

La densité totale de rayonnement joue un rôle dans l'évolution de l'Univers par le facteur d'échelle $R(t)$ avec le temps cosmique t . On déduit alors de l'équation (2.17) que:

$$\rho_r(t) = \rho_{r,0} \left[\frac{R_0}{R(t)} \right]^4 \quad (2.21)$$

$\rho_r(t_0) \equiv \rho_{r,0}$: est la densité propre actuelle de rayonnement.

Ainsi, on peut démontrer que la distribution d'énergie des photons qui forment le CMB reste celle d'un corps noir tout au long de l'évolution de l'Univers[12], donc on écrit à tout temps cosmique:

$$T(t) = T_0 \left[\frac{R_0}{R(t)} \right] \quad (2.22)$$

Et $T_0 = 2,726 \text{ K}$.

2.6.3 le vide

Comme nous l'avons déjà mentionnée, le vide peut être modélisé comme un fluide parfait, ce qui correspond à une pression négative, donc on déduit la densité d'énergie du vide est garde sa valeur à tout temps cosmique t on a:

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (2.23)$$

$\rho_{\Lambda,0}$: est la densité propre actuelle de vide.

2.7 La contributions relatives des composantes du fluide cosmologique

Après la combinaison les résultats antérieures, on peut écrire l'évolution de la densité de masse équivalente totale sous la forme:

$$\rho(t) = \rho_{m,0} [a(t)]^{-3} + \rho_{r,0} [a(t)]^{-4} + \rho_{\Lambda,0} \quad (2.24)$$

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0} \quad (2.25)$$

$a(t)$: est le paramètre d'échelle.

- pour $R(t)$ est petit \Leftrightarrow le rayonnement est domine.

- pour $R(t)$ est grand \Leftrightarrow le vide est domine.

2.8 Paramètres cosmologique

Dans le modèle cosmologique très simplifié décrit auparavant, l'intégralité de l'histoire est déterminée uniquement par un petit nombre de paramètre[7]. Il est alors entièrement déterminé par des donnée des 4 quantités $(H_0, \rho_{m,0}, \rho_{r,0}, \rho_{\Lambda,0})$.

Il est cependant usuel et pratique en cosmologie d'employer des quantités adimensionnées que l'on nomme paramètres de densité et qui sont définit par:

$$\Omega_i \equiv \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho_i(t) \quad (2.26)$$

L'un des objectifs les plus importants de la cosmologie est donc déterminer ces quantités $(H_0, \Omega_{m,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_{\Lambda,0})$ pour notre Univers.

L'intérêt des densité(2.26) devient plus évident quand on les utilise pour réexprimer la seconde équation du champ cosmologique. En divisant cette dernière par R^2 , on aboutit à:

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_K \quad (2.27)$$

Sachant que:

$$\Omega_K(t) = -\frac{c^2 K}{H^2 R^2} \quad (2.28)$$

$\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda, \Omega_K$: sont les paramètres de densité de matière, rayonnement, vide et courbure (respectivement).

On constate que les valeurs de Ω_m, Ω_r et Ω_Λ déterminent la courbure spatiale de l'Univers comme suit:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda < 1 \Leftrightarrow (K = -1) \Leftrightarrow \text{ouvert}$$

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 \Leftrightarrow (K = 0) \Leftrightarrow \textit{plat}$$

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda > 1 \Leftrightarrow (K = 1) \Leftrightarrow \textit{fermé}$$

L'Univers ne peut pas évoluer spontanément d'une géométrie de *FRW*, car la somme de Ω_m, Ω_r et Ω_Λ ne change pas la signe[12].

D'autre part, les cosmologistes ajoutent encore un paramètre de densité total, on donne:

$$\Omega_{tot} \equiv 1 - \Omega_K = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda \quad (2.29)$$

Pour tout modèle cosmologique spatialement plat, on pose en général $\Omega_{tot} = 1$ et l'on désigne alors la densité totale de masse équivalente sous nom de densité critique:

$$\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 9,2 \times 10^{-27} \text{ Kg.m}^{-3} \quad (2.30)$$

De l'équation (2.24),(2.26) et (2.28):

$$H^2(t) = H_0^2 (\Omega_{m,0} [a(t)]^{-3} + \Omega_{r,0} [a(t)]^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} [a(t)]^{-2}) \quad (2.31)$$

En fin, de (2.9)et (2.26) on définit autre paramètre de décélération q :

$$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = \frac{1}{2}(\Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda) \quad (2.32)$$

2.9 Comportement dynamique de l'Univers

Les équation *cosmologiques* (2.31) et (2.32) nous permettent de déterminer la dynamique et la géométrie de l'Univers de manière générale pour n'importe quelles valeurs des paramètres $\Omega_{m,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_{\Lambda,0}$. les observation suggèrent que la valeur actuelle de $\Omega_{r,0} \ll$ que celle de $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$. On peut donc raisonnablement négliger $\Omega_{r,0}$ et paramétrer un modèle de notre Univers uniquement à l'aide de $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$ (voir le figure 2.9.1).

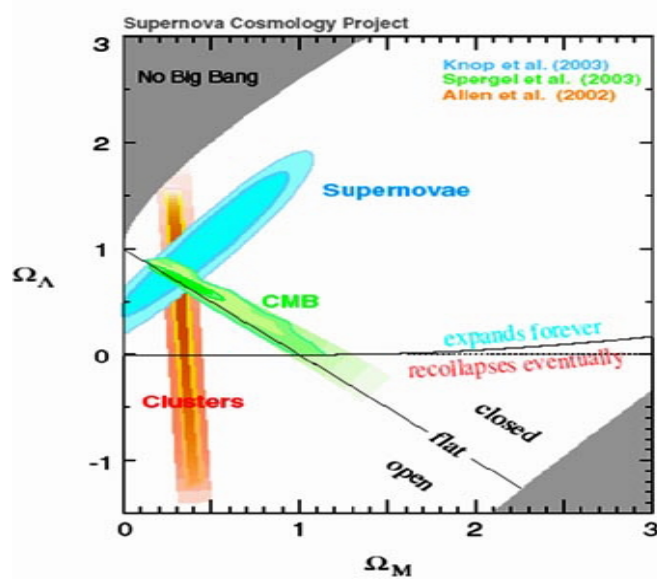


Figure 2.9.1 : Représente les propriétés de FLRW dominés par la matière et l'énergie de vide en fonction des paramètres de densité actuels $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$.

2.10 Modèles cosmologique

Nous allons maintenant nous intéresser à certains de ces modèles cosmologiques :

2.10.1 Modèle de Friedmann

Les modèles cosmologiques pour lesquels la constante cosmologique est nulle et qui sont associés à une densité non nulle de matière ou de rayonnement sont connus.

- 1- Modèle de Friedmann avec poussière.
- 2- Modèle de Friedmann avec rayonnement.
- 3- Modèle de Friedmann spatialement plats.

2.10.2 Modèle de lemaître

Les modèles de lemaître sont la généralisation de ceux de Friedmann pour inclure une constante cosmologique non nulle. Nous allons nous intéresser ici en particulier au modèle ne contenant que de la matière ($\Omega_{r,0} = 0$).

- 1- Modèle de lemaître avec matière seule et courbure spatiale quelconque.

2- Modèle de lemaître plats et avec matière seule.

2.10.3 Modèle de DeSitter

Le modèle de DeSitter est un cas particulier de modèle de lemaître dans lequel les paramètres cosmologiques vérifient ($\Omega_{m,0} = 0, \Omega_{r,0} = 0$ et $\Omega_{\Lambda,0} = 1$), et spatialement plat ($k = 0$).

2.11 Les problèmes de modèle standard cosmologie

2.11.1 Problème de l'horizon

On définit que l'horizon est un peu la fin de l'univers visible. le problème réside dans le fait qu'il n'y a pas d'échange d'informations entre deux régions très éloignées, bien que le passé il étaient proche les uns des autres [7, 22].

Soient 2 observateur comobiles, le premier (O) situé en $\chi = 0$, et la deuxième (E) en χ_1 . Supposons qu'au temps cosmique t_1 , E émet radialement un photon qui ensuite reçu par χ au temps t . La coordonnée χ de l'horizon des particule est donnée par:

$$\chi_p(t) = c \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} \quad (2.33)$$

2.11.2 Problème de la platitude

Un autre problème qui apparaît quand on considère l'étude de l'évolution de l'univers est celui de son éventuel rayon de courbure. La relativité générale indique que si la répartition de matière est homogène dans l'univers, alors la géométrie de celui-ci ne dépend que d'un paramètre, appelé courbure spatiale.

Le fait que le rayon de courbure soit encore aujourd'hui plus grand que la taille de l'univers observable est connu sous le nom de problème de la platitude.

Dans ce chapitre, nous avons identifier le MSC comme un meilleur modèle cosmologique qui base à la théorie de Big Bang. A partir la RG (par la métrique de FLWR, les équations de Friedmann) avec les observations cosmologiques, nous avons vu que l'univers est en expansion accéléré. Ensuite, nous avons décrit l'évolution de l'Univers par des nombres

des paramètres, avec toute sa la MSC n'est explique pas les problèmes de l'horizon et la platitude.

Chapitre 3

Inflation cosmologique

3.1 Introduction

En physique cosmologique, inflation cosmique (ou inflation cosmologique) est une théorie d'expansion exponentielle de l'espace dans l'Univers juste après le Big Bang (l'ère de Planck $\sim 10^{-43} - 10^{-34}$ s). Ce scénario est proposé par *Alan Guth* au début de l'année 1980.

3.2 L'inflation

Pour décrire cette période d'expansion accélérée, doit avoir:

$$\ddot{R} > 0 \tag{3.1}$$

Supposons qu'à un instant dans l'Univers primordial, la densité d'énergie est dominée par la "matière". Les équations de Friedmann (avec $\Lambda = 0$ et $8\pi G = c = 1$):

$$\ddot{R} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p)R \tag{3.2}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{1}{3}\rho R^2 - k \tag{3.3}$$

Pour avoir une inflation, la pression doit être négative:

$$p < -\frac{1}{3}\rho \quad (3.4)$$

Au cours d'une phase infaltionnaire, le facteur d'échelle doit croître plus vite. Ainsi, pendant cette phase le terme ρR^2 augmente bien plus vite que le terme de courbure, à la condition que la phase d'accélération dure suffisamment longtemps[7, 12].

Nous avons choisi d'ignorer la constante cosmologique, car nous allons voir que s'il existe dans l'univers primordial de la matière sous la forme d'un champ scalaire alors celui-ci peut agir comme une constante cosmologique effective.

L'équation de Friedmann fournit alors l'évolution du facteur d'échelle:

le fluide	$a(t)$
la matière	$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$
le rayonnement	$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$
le vide	$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$

Tableau 3.2:Représente l'évolution de paramètre d'échelle pour n'importe quel fluide.

3.3 La dynamique d'un champ inflationnaire

Il existe un champ scalaire ϕ dans l'Univers primordial et il est nommé par un champ d'inflation. Nous présentons le lagrangien d'un champ ϕ comme:

$$L = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} (\partial_u\phi) (\partial_v\phi) - V(\phi) \quad (3.5)$$

Grace aux équations d'Euler-Lagrange, on obtient l'équation de champ ϕ :

$$\square^2\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.6)$$

où $\square^2 \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$

On utilise la théorème de Noether, le tenseur d'énergie-impulsion ,on écrit :

$$T^{uv} = (\partial_u\phi) (\partial_v\phi) - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (\partial_\sigma\phi) (\partial^\sigma\phi) - V(\phi) \right] \quad (3.7)$$

Ce tenseur est:

- symétrique.
- quadratique par rapport aux dérivées de la variable dynamique ϕ .
- redonne l'équation de champ par $\nabla_u T^{uv} = 0$.

Le champ scalaire se comporte comme un fluide parfait, donc la densité d'énergie et la pression sont données par:

$$\rho_\phi = T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 \quad (3.8)$$

$$p_\phi = -\frac{1}{3}T_{ii} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - \frac{1}{6}(\vec{\nabla}\phi)^2 \quad (3.9)$$

Maintenant, si l'on suppose que le champ scalaire n'interagit pas avec la matière ou le rayonnement, en dehors de son interaction gravitationnelle, l'équation du mouvement est:

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad (3.10)$$

On substituant (3.8) et (3.9) dans l'expression (3.10) avec les variations spatiales est négligé, on aboutit:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.11)$$

où $\ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$

On remarque que cette équation décrit le comportement d'un champ descendant un potentiel avec une force de friction[7].

Quand le champ scalaire apporte la contribution dominante à la densité d'énergie:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (3.12)$$

L'origine de l'inflation, le champ de l'inflaton ϕ est passé par l'effet tunnel au travers d'une barrière de potentiel d'un état de faux vide (associé un énergie minimum) à l'état du vrai vide. (voir le figure 3.3.1)

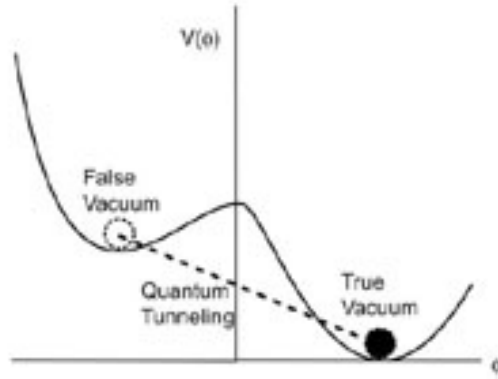


Figure 3.3.1 : Représente la modèle originale de l'inflation.

3.4 L'approximation de roulement lent

On peut résoudre l'équation du mouvement à l'aide de l'approximation de roulement lent (slow-roll). on considère que

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (3.13)$$

Après la dérivation de $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \rightarrow \ddot{\phi} \ll \frac{dV}{d\phi}$, l'équation (3.12) qui devient:

$$3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} \quad (3.14)$$

Avec cette hypothèse, l'équation de champ cosmologique est:

$$H^2 = \frac{1}{3}V(\phi) \quad (3.15)$$

Après (3.15)et (3.14):

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad (3.16)$$

A l'aide des deux équations précédentes et de la condition $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, on montre que les paramètres de roulement lent sont:

$$\varepsilon = \frac{M_{pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (3.17)$$

$$\eta = \frac{M_{pl}^2}{8\pi} \left(\frac{V''}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (3.18)$$

Sachant que:

$$V' = \frac{dV}{d\phi}$$

$$V'' = \frac{d^2V}{d\phi^2}$$

$M_{pl} = \frac{1}{\sqrt{G}}$: est la masse de planck.

Ces deux conditions s'interprètent physiquement par le fait qu'elles requièrent que le potentiel pour que le champ puisse rouler lentement et en conséquence l'inflation avoir lieu[12]. Dans cette situation le paramètre de Hubble est constante et le paramètre d'échelle croît:

$$R(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{1}{3}V(\phi)}t\right) \quad (3.19)$$

3.5 Les différents types d'inflations

Aujourd'hui, il existe plusieurs types de l'inflation(Inflation Nouvelle, Inflation Chaotique, Inflation Stochastique, Inflation Hypride, K-Inflation, Old Inflation). Nous allons nous intéresser aux trois premières type.

3.5.1 Inflation Nouvelle (New Inflation)

Ce modèle est proposé par *Alan Guth*, s'il on identifie le champ d'inflation ϕ au champ de Higgs associé avec la brisure spontanée de symétrie de la grande unification. Nous allons le voir, les modèles qui entrent dans cette catégorie requièrent une forme particulière du potentiel $V(\phi)$ afin d'effectivement mener à une période d'inflation, avec des considérations reliées à la théorie quantique des champs suggèrent que le potentiel doit également dépendre de T $V(\phi, T)$ [1, 7, 12, 16]. (voir le figure 3.5.1)

- pour $T \rightarrow T_c \rightarrow \phi_{\min} = 0 \rightarrow$ l'état du vrai vide.

Un moment dans l'évolution de l'univers la densité d'énergie du champ scalaire devient supérieure à celle rayonnement, le champ reste en $\phi = 0$ et se comporte comme une constante cosmologique effective de valeur $\Lambda = V(0)$. le paramètre d'échelle entre alors dans une phase d'expansion exponentielle:

$$R(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{1}{3}V(0)}t\right) \quad (3.20)$$

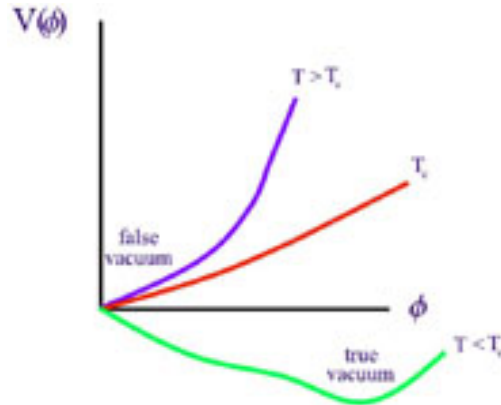


Figure 3.5.1 : Représente la forme générique de l'Inflation Nouvelle, où le potentiel dépendant de la température pour un champ de Higgs scalaire ϕ .

le résultat de cette expansion très rapide est une décroissance toute aussi rapide de la température.

- pour $T \sim T_c \rightarrow \phi_{\min} \neq 0; \phi = 0 \rightarrow$ l'état du vrai vide; l'état du faux vide.

Le champ scalaire est capable de rouler le long de la pente descendante du potentiel pour s'éloigner de $\phi = 0$ et l'on assiste donc à la transition de phase de grande unification. Il passe par l'effet tunnel au travers d'une barrière de potentiel d'un état de vide métastable $\phi = 0$ à l'état du vrai vide $\phi > 0$.

- pour $T < T_c \rightarrow \phi_{\min} = \sigma \rightarrow$ l'état du vrai vide.

Le champ scalaire roule alors rapidement vers l'état de vrai vide, oscille autour de ce minimum.

quand $V(\sigma) = 0$ l'Univers décrit par le modèle de Friedmann dominé par le rayonnement, et le paramètre d'échelle comme:

$$R(t) \propto t^{1/2} \quad (3.21)$$

Où $T_c = 10^{27} \text{ } ^\circ\text{K}$.

3.5.2 Inflation Chaotique (Chaotic Inflation)

Ce modèle est proposée par *Andrei Linde*, le champ est considéré comme un champ scalaire (n'est plus identifiée avec un champ de Higgs associée à la brisure spontanée de symétrie

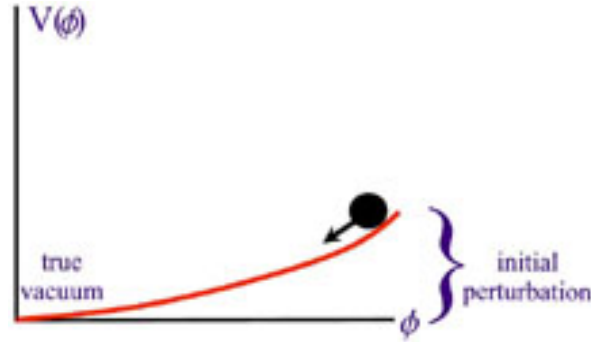


Figure 3.5.2 : Représente la forme de potentiel pour la scénario de l'inflation chaotique.

de la grande unification) quelconque présent dans les premiers temps de l'Univers la valeur initiale du champ scalaire $\phi_{début}$ est choisie chaotiquement (c'est à dire qu'elle prend des valeurs très différentes en des régions distinctes de l'Univers), il est éloigné du minimum du potentiel et le champ commence à rouler le long d'une pente descendante [7, 11, 12, 16].

Pour un champ scalaire libre $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ (voir le figure 3.5.2), l'inflation peut commencer même s'il n'y a pas d'équilibre thermique dans l'Univers primordial ce qui signifie qu'elle peut se produire juste après l'ère de Planck[12].

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0 \quad (3.22)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right] \quad (3.23)$$

3.5.3 Inflation Stochastique (Eternelle)

En 1983, l'inflation éternelle est développé par *Alexander Vilenkin* et *Paul Steinhardt*, il est une extension naturelle du modèle de l'inflation chaotique. L'idée principale de ce scénario est de prendre en compte l'existence de fluctuations quantique dans l'évolution du champ scalaire, et les fluctuations quantiques peuvent pousser ϕ vers le haut dans le potentiel $V(\phi)$ [1, 7, 12].

3.6 Evolution classique des perturbations d'un champ scalaire

Nous allons supposer que le champ scalaire ϕ perturbée en fonction de temps et l'espace:

$$\phi(t) \rightarrow \phi_0(t) + \delta\phi(t, \vec{x}) \quad (3.24)$$

Nous adopterons un modèle de FRW plat ($k=0$), avec des coordonnées comobiles cartésiennes et écrirons la métrique perturbée sous la forme:

$$ds^2 = (1 + 2\Phi)dt^2 - (1 - 2\Phi)R^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.25)$$

Où Φ est une fonction infinitésimale des quatre coordonnées, on note que Φ peut être considéré comme le potentiel newtonien associé aux perturbations du champ.

3.6.1 Equation d'Einstein perturbées

Les coefficients de la connexion pour la métrique perturbée, s'écrit comme:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = (\Gamma_0)_{\mu\nu}^{\sigma} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \quad (3.26)$$

- le premier terme contient les coefficients de la connexion de la métrique non perturbée ($\Phi=0$), et les perturbations valent quant à elles:

$$\delta\Gamma_{0\mu}^0 = \partial_{\mu}\Phi \quad (3.27)$$

$$\delta\Gamma_{0\mu}^0 = -R^2(\Phi + 4H\Phi) \quad (3.28)$$

$$\delta\Gamma_{ii}^j = \delta^{ik}\partial_k\Phi \text{ (pour } i \neq j) \quad (3.29)$$

$$\delta\Gamma_{00}^i = \frac{1}{R^2}\delta^{ik}\partial_k\Phi \quad (3.30)$$

$$\delta\Gamma_{i\mu}^i = -\partial_\mu\Phi \quad (3.31)$$

Au premier ordre en Φ , on trouve que la partie perturbée du tenseur d'Einstein vérifier:

$$\delta E_i^0 = -2\partial_i(\dot{\Phi} + H\Phi) \quad (3.32)$$

$$\delta E_0^0 = -2\left(\overset{\rightarrow}{\nabla}^2\Phi - 3H\dot{\Phi} - 3H^2\Phi\right) \quad (3.33)$$

$$\delta E_i^i = -2\left[\ddot{\Phi} + 4\dot{\Phi}H + (2\dot{H} + 3H^2)\Phi\right] \quad (3.34)$$

Où

$$\overset{\rightarrow}{\nabla}^2 = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

ET

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2$$

Remarque: il n'y a pas de somme sur les indices i répétés.

Il nous faut également calculer la partie du tenseur énergie-impulsion du champ scalaire associée aux perturbations (voir l'annexe). En substituant (3.28) dans (3.7), on obtient:

$$\delta T_i^0 = \dot{\phi}_0\partial_i(\delta\phi) \quad (3.35)$$

$$\delta T_0^0 = -\dot{\phi}_0^2\Phi + \dot{\phi}_0\delta\dot{\phi} - V'\delta\phi \quad (3.36)$$

$$\delta T_i^i\delta T_i^i = \dot{\phi}_0^2\Phi - \dot{\phi}_0\delta\dot{\phi} + V'\delta\phi \quad (3.37)$$

Où

$$V' = \frac{dV}{d\phi_0}$$

On peut ensuite utiliser les équations d'Einstein pour relier le tenseur d'Einstein et le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire ($\delta E_\mu^\nu = -\delta T_\mu^\nu$, où $\kappa = 8\pi G/c^4 = 1$).

-pour les composante $\binom{0}{i}$:

$$2\partial_i(\dot{\Phi} + H\Phi) = \dot{\phi}_0\partial_i(\delta\phi) \quad (3.38)$$

Après l'intégral (H, ϕ_0) ne dépendent des coordonnées spatiales), on obtient:

$$\dot{\Phi} + H\Phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}_0\delta\phi \quad (3.39)$$

En dérivant l'équation(3.39) par rapport au temps, on trouve:

$$\ddot{\Phi} + \dot{H}\Phi + H\dot{\Phi} = \frac{1}{2}\ddot{\phi}_0\delta\phi + \frac{1}{2}\dot{\phi}_0\delta\dot{\phi} \quad (3.40)$$

-pour les composantes $\binom{i}{i}$:

$$-2 \left[\ddot{\Phi} + 4\dot{\Phi}H + (2\dot{H} + 3H^2) \Phi \right] = \dot{\phi}_0^2\Phi - \dot{\phi}_0\delta\dot{\phi} + V'\delta\phi \quad (3.41)$$

-pour les composantes $\binom{0}{0}$, à l'aide de l'équation (3.39):

$$\left(\dot{\phi}_0^2 + 2\vec{\nabla}^2 \right) \Phi = \dot{\phi}_0^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}_0} \right) \quad (3.42)$$

3.6.2 Equation des perturbations dans l'espace de fourier

Ainsi, on écrit Φ et $\delta\phi$ sous la forme d'une superposition d'ondes planes de vecteur d'onde comobile \vec{k} , ce qui nous mène à:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Phi_{\vec{k}} \exp\left(i\vec{k}\vec{x}\right) d^3\vec{k} \quad (3.43)$$

Les équations (3.39) et (3.42) deviennent alors:

$$\dot{\Phi}_k + H\Phi_k = \frac{1}{2}\dot{\phi}_0\delta\phi_k \quad (3.44)$$

Et

$$\left(1 - \frac{2k^2}{R^2\dot{\phi}_0^2} \right) \Phi_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta\phi_k}{\dot{\phi}_0} \right) \quad (3.45)$$

Nous avons obtenu deux équation différentielles du premier ordre couplées pour les quantités Φ_k et $\delta\phi_k$ qui sont respectivement les amplitudes des perturbations oscillatoires planes de nombre d'onde k de la métrique et du champ scalaire.

3.7 La solution des problème de le modèle standard cosmologie

Nous pouvons offrir de résoudre ces problèmes en estimant la quantité de l'inflation pour chaque cas:

3.7.1 La problème de la platitude

Après (2.28), le rapport entre la densité de courbure spatiale au cours de l'époque inflationnaire et sa valeur actuelle est:

$$\frac{\Omega_{k,*}}{\Omega_{k,0}} = \left(\frac{H_0}{H_*}\right)^2 \left(\frac{R_0}{R_*}\right)^2 \sim \frac{t_*}{t_0} \quad (3.46)$$

les paramètre indiquer par(*): est la valeur pendant l'époque inflationnaire.

Puisque le rapport dépend de $\frac{1}{R_*^2}$, on conclut toutefois que pour résoudre le problème de platitude, le paramètre d'échelle doit avoir été multiplié par un facteur $\sim 10^{27} - 10^{30}$ durant l'inflation, pour Ω_k du même ordre avec $\Omega_{k,0} \sim 1$.

3.7.2 La problème de l'Horizon

L'horizon des particules au moment de la période d'inflation vaudrait:

$$d_{p,*} = 2ct_* \quad (3.47)$$

On prend $c = 1$, cette équation nous donne donc la taille de la région causalement connectée à cet instant, soit $\sim 10^{-34} - 10^{-27}m$. D'après le modèle de Friedmann on a:

$$\frac{R_*}{R_0} \sim \left(\frac{t_*}{t_0}\right) \sim \frac{T_*}{T_0} \quad (3.48)$$

On déduit que la taille actuelle de cette région serait seulement $10^{-3} - 1m$, alors que l'Univers observable a un rayon grossièrement donné par la valeur actuelle de la distance de Hubble, soit

$$d_{H,0} = cH_0^{-1} \sim 10^{26}m \sim 3000Mpc \quad (3.49)$$

La résolution du problème de l'Horizon nécessite donc de multiplier le paramètre d'échelle par un facteur $\sim 10^{26} - 10^{29}$ au cour de l'inflation.

Dans ce chapitre, nous avons discuté du modèle inflationniste, comme une solution possible aux problèmes posés par le modèle standard de la cosmologie. Nous avons vu comment il peut résoudre les problèmes: l'horizon et la courbure spatiale (platitude).

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons utilisé les outils et les points de vue de la RG pour construire un modèle cosmologique (MSC) qui décrit bien l'expansion de l'Univers est homogène et isotrope dans tout temps cosmique. Aujourd'hui, les observations cosmologique ont confirmé la sucée du MSC, mais dans le cadre du MSC les problèmes subsistent tels que l'horizon et la platitude. Ainsi, nous avons discuté le paradigme inflationnaire, comme une solution possible des problèmes posé par le MSC, où l'homogénéité de l'espace est démontrée. Enfin, Nous nous sommes intéressés aux trois types d'inflation (New Inflation, Chaotic Inflation, Eternelle Inflation).

La question posé, puisque l'inflation est capable de résoudre les problèmes de MSC, quelle est le type d'inflation qui vérifie ça? Est que la technologie contemporaine peut nous offrir cette réponse?

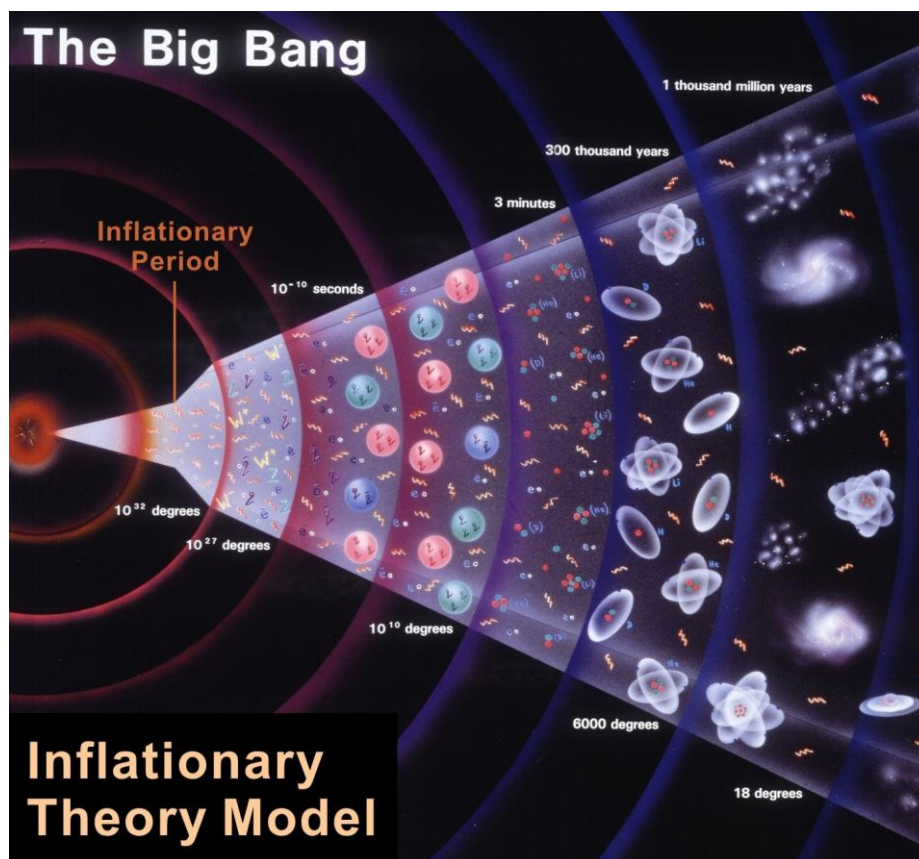


Figure 3.7.1 : Représente l'histoire de l'univers (CERN)

Annexes :

Construction la métrique de Schwarzschild :

Pour fait la construction on doit avoir:

- symétrie centrale sphérique: la masse concentrée dans un point de l'origine.
- la métrique est diagonale.
- statique: les coefficients $g_{\alpha\beta}$ indépendant du temps.

Dans l'espace Minkowski (en coordonnée polaire), on écrit:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (\text{A.1})$$

Pour un espace courbé à symétrie sphérique indépendant de temps:

$$ds^2 = c^2 A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - F(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (\text{A.2})$$

On peut remplace A(r), B(r) et F(r) par une fonction quelconque W(r) sans changer les propriétés de la symétrie sphérique. Donc on choix F(w(r))=1

$$ds^2 = c^2 A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (\text{A.3})$$

Détermination du tenseur métrique et du tenseur de courbure:

On peut écrit la métrique sous la forme suivante:

$$ds^2 = c^2 e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (\text{A.4})$$

Les composantes du tenseur métrique g_{ik} sont :

Si $i \neq k$

$$g^{ik} = g_{ik} = 0$$

Si $i = k$

$$g_{00} = c^2 e^\nu; g_{11} = -e^\lambda; g_{22} = r^2; g_{33} = r^2 \sin^2\theta$$

Et

$$g^{00} = \frac{1}{c^2 e^\nu}; g^{11} = -\frac{1}{e^\lambda}; g^{22} = \frac{1}{r^2}; g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}$$

On calcule tenseur de Ricci R_{ik} :

Tel que g_{ik} est diagonale, donc les connexion non nulle sont :

$$\Gamma_{ii}^i, \Gamma_{im}^i = \Gamma_{mi}^i \text{ et } \Gamma_{mm}^i$$

Après (1.21) les connexions sont:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = v'(r) \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma_{00}^1 = v'(r)e^{2(v-\lambda)} \quad (\text{A.6})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \lambda'(r) \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma_{22}^1 = -re^{-2\lambda} \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r\sin^2\theta e^{-2\lambda} \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta \quad (\text{A.11})$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad (\text{A.12})$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \quad (\text{A.13})$$

Après (1.35) les tenseurs de Ricci sont:

$$R_{00} = e^{2(v-\lambda)}(v'' + \lambda'v' + v'^2 + \frac{2v'}{r}) \quad (\text{A.14})$$

$$R_{11} = -\left(v'' + \lambda'v' + v'^2 + \frac{2v'}{r}\right) \quad (\text{A.15})$$

$$R_{22} = 1 - e^{-2\lambda}(1 - r\lambda' + rv') \quad (\text{A.16})$$

$$R_{33} = [1 - e^{-2\lambda}(1 - r\lambda' + rv')] \sin^2\theta = R_{22} \sin^2\theta \quad (\text{A.17})$$

On résout les équations précédent $R_{km} = 0$

$$R_{00} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$R_{00} = e^{2(v-\lambda)}(v'' + \lambda'v' + v'^2 + \frac{2v'}{r}) = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$R_{11} = -(v'' + \lambda'v' + v'^2 + \frac{2v'}{r}) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$R_{33} = R_{22} = [1 - e^{-2\lambda}(1 - r\lambda' + rv')] \sin^2\theta = 0 \quad (\text{A.21})$$

Par l'addition (A.19) et (A.20) on trouve :

$$\lambda' + v' = 0$$

Donc :

$$\lambda + v = C^{ste}$$

Lorsque $r \rightarrow \infty$ la métrique tend vers la métrique Minkowski (espace Euclidien)

C'est à dire $\lambda + \nu \rightarrow 0$

Alors:

$$\lambda + \nu = 0$$

DE (A.21) on peut écrire :

$$1 - e^{-2\lambda}(1 - 2r\lambda') = 0 \quad (\text{A.22})$$

On peut écrit (A.22) encore :

$$\frac{d}{dr}(re^{-2\lambda}) = e^{-2\lambda}(1 - 2r\lambda') \Rightarrow re^{-2\lambda} = r + k \quad (\text{A.23})$$

k peut être déterminée par l'approximation newtonienne

$$g_{00} \rightarrow 1 + \frac{2\phi}{c^2}; \phi = \frac{GM}{r}$$

$$g_{11} \rightarrow (1 + \frac{2\phi}{c^2})^{-1}$$

$$\Rightarrow k = -\frac{2GM}{c^2}$$

Donc :

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} \quad (\text{A.24})$$

Cette valeur sera justifiée à nouveau dans le calcul des orbites des planètes

Construction la métrique FLWR:

Pour faire la construction, on doit avoir:

- espace-temps (univers) est homogène (invariant par la translation) et isotrope.
- les coefficients $g_{\alpha\beta}$ dépendent du temps.

On a la métrique espace-temps dans le cas générale:

$$ds^2 = c^2 dw^2 + 2cg_{0i} dw dx^i + g_{im} dx^i dx^m \quad (\text{A.25})$$

On applique la condition de l'isotropie et symétrie sphérique:

$$ds^2 = c^2 dw^2 - D(r, w) dr^2 - cE(r, w) dw dr - F(r, w)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (\text{A.26})$$

L'équation géodésique d'une particule:

$$\frac{du^j}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} u^i u^k \quad (\text{A.27})$$

Pour une particule statique :

$$u^0 = 1, u^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1:3) \quad (\text{A.28})$$

On remplace (A.28) dans (A.27):

$$\frac{du^j}{ds} = \frac{d(g_{lk} u^l)}{ds} = \frac{d(g_{0j} u^0)}{ds} = \frac{dw}{ds} \frac{dg_{0j}}{dw} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} = 0 \quad (\text{A.29})$$

Alors :

$$\frac{dg_{0j}}{dw} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dw} E(r, w) = 0 \quad (\text{A.30})$$

Donc :

$E = E(r)$

Pour éliminer le terme $dw.dr$, on défini:

$$t = w - \frac{1}{2c} \int^r E(r) \Rightarrow dw = dt + \frac{1}{2c} E(r) dr \quad (\text{A.31})$$

$$c^2 dw^2 = dt^2 + \frac{1}{4c^4} E^2 dr^2 + cE(r) dr dt \quad (\text{A.32})$$

Et

$$-cE(r) dr dw = -cE(r) dr dt - \frac{1}{2} E^2(r) dr^2 \quad (\text{A.33})$$

$$ds^2 = c^2 dw^2 - A(r, t) dr^2 - B(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{A.34})$$

Où :

$$A(r, t) = D[r, w(r, t)] + \frac{1}{2} E^2(r) \quad (\text{A.35})$$

$$B(r, t) = F[r, w(r, t)] \quad (\text{A.36})$$

On considère la transformation suivante:

$$z^\alpha = x^\alpha + \varepsilon^\alpha(r, \theta, \varphi) \quad (\alpha = 1:3) \quad (\text{A.37})$$

On utilise l'hypothèse que $\varepsilon^\alpha \equiv 0$

$$\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial x^\beta}; \quad \frac{\partial z^0}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\text{A.38})$$

La transformation d'un métrique covariant définie par un système de coordonné z^k et x^k devient:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial z^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\beta} \bar{g}_{\nu\sigma} \quad (\text{A.39})$$

Après (A.37) et (A.38):

$$g_{\alpha\beta} = \left(\delta_\alpha^\nu + \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x^\alpha} \right) \left(\delta_\beta^\sigma + \frac{\partial \varepsilon^\sigma}{\partial x^\beta} \right) \bar{g}_{\nu\sigma} \quad (\text{A.40})$$

Translation infinitésimal \rightarrow négligé la dérivé quadratique :

$$g_{\alpha\beta}(x^k) = \bar{g}_{\beta\alpha}(z^k) + \left(\frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x^\alpha} \right) \bar{g}_{\nu\beta}(z^k) + \left(\frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x^\beta} \right) \bar{g}_{\nu\alpha}(z^k) \quad (\text{A.41})$$

$g_{\alpha\beta}(z^k)$ est invariant par ce transformation quand l'espace temps est homogène.

Donc :

$$g_{\alpha\beta}(x^k) = \bar{g}_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1:3) \quad (\text{A.42})$$

$$g_{\alpha\beta}(x^k) = \bar{g}_{\beta\alpha}(z^k) + \left(\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial x^\alpha}\right) g_{v\beta}(z^k) + \left(\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial x^\beta}\right) g_{v\alpha}(z^k) \quad (\text{A.43})$$

On peut écrire $g_{\alpha\beta}(x^k)$ comme série de Taylor:

$$g_{\alpha\beta}(x^k) = g_{\alpha\beta}(z^k) + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^v} \varepsilon^v \quad (\text{A.44})$$

Après(A.43) et(A.44):

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(z^k) = g_{\alpha\beta}(x^k) - \left(\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial x^\alpha}\right) g_{v\beta}(x^k) - \left(\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial x^\beta}\right) g_{v\alpha}(x^k) = 0 \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^v} \varepsilon^v + \left(\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial x^\alpha}\right) g_{v\beta}(x^k) + \left(\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial x^\beta}\right) g_{v\alpha}(x^k) = 0 \quad (\text{A.46})$$

Si $\alpha = \beta = 1$

$$\frac{\partial A}{\partial r} \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial \varepsilon^1}{\partial r} A = 0 \quad (\text{A.47})$$

Si $\alpha = 1, \beta = 2$

$$\frac{\partial \varepsilon^1}{\partial r} B + \frac{\partial \varepsilon^1}{\partial \theta} A = 0 \quad (\text{A.48})$$

Si $\alpha = \beta = 1$

$$\frac{\partial B}{\partial r} \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \theta} B = 0 \quad (\text{A.49})$$

Après(A.48) et (A.49):

$$-\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon^1}{\partial \theta} \frac{A}{B} \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \theta} B = \frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial r} \varepsilon^1 = \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln B^{-\frac{1}{2}} \right) \varepsilon^1 \quad (\text{A.51})$$

On peut écrire:

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 \varepsilon^1}{\partial \theta^2} \frac{A}{B} \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial r \partial \theta} \frac{A}{B} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\ln B^{-\frac{1}{2}} \right) \varepsilon^1 + \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln B^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial \varepsilon^1}{\partial r} \quad (\text{A.53})$$

Après l'égalité (A.52) et (A.53):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\ln B^{-\frac{1}{2}} \right) \varepsilon^1 + \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln B^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial \varepsilon^1}{\partial r} \quad (\text{A.54})$$

On utilise (A.47) et (A.49) encore on peut écrire:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (\ln A) = -\frac{2}{\varepsilon^1} \frac{\partial \varepsilon^1}{\partial r} \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (\ln B) = -\frac{2}{\varepsilon^1} \frac{\partial \varepsilon^1}{\partial \theta} \quad (\text{A.56})$$

Donc on peut écrire A(r,t) et B(r,t) comme:

$$A(r, t) = a(r)R^2(t) \quad (\text{A.57})$$

$$B(r, t) = b(r)R^2(t) \quad (\text{A.58})$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(r)R(t)^2 dr^2 - b(r)R(t)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\ln \varepsilon^1) = \frac{\partial}{\partial r} (\ln A^{-\frac{1}{2}}) = \frac{\partial}{\partial r} (\ln a^{-\frac{1}{2}}) \quad (\text{A.60})$$

La solution de l'équation différentielle est:

$$\varepsilon^1(r, \theta, \varphi) = e(\theta, \varphi) a^{-\frac{1}{2}}(r) \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^1}{\partial \theta^2} \frac{a}{r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\ln r) \varepsilon^1 + \frac{\partial}{\partial r} (\ln r) \frac{\partial \varepsilon^1}{\partial r} \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^1}{\partial \theta^2} \frac{a}{r^2} = \frac{r^2}{a} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon^1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varepsilon^1 \right) = \frac{r^2}{a} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\varepsilon^1}{r} \right) \quad (\text{A.63})$$

On remplace (A.61) dans (A.63):

$$\frac{1}{e} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = \frac{r^2}{a^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{ra^{\frac{1}{2}}} \right) = C \quad (\text{A.64})$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = eC \quad (\text{A.65})$$

on choisit la translation selon θ et $e(\theta, \varphi) \sim \cos \theta \rightarrow C = -1$

$$\frac{r^2}{a^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{ra^{\frac{1}{2}}} \right) = -1 \quad (\text{A.66})$$

La solution de l'équation devient par:

$$a(r) = \frac{1}{1-Kr^2} \quad (\text{A.67})$$

On substitue (A.67) dans (A.59), on obtient:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (\text{A.68})$$

Tenseur énergie-impulsion :

Pour trouver l'expression de densité d'énergie (ρ) et la pression (p) en fonction d'un champ scalaire:

Après l'expression (3.7), On pose que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$:

$$T_{00} = \rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + V(\phi) \quad (\text{A.69})$$

$$-T_{11} = (\partial_1\phi)^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - V(\phi) \quad (\text{A.70})$$

$$-T_{22} = (\partial_2\phi)^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - V(\phi) \quad (\text{A.71})$$

$$-T_{33} = (\partial_3\phi)^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - V(\phi) \quad (\text{A.72})$$

Donc :

$$-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 T_{ii} = p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{6}(\vec{\nabla}\phi)^2 - V(\phi) \quad (\text{A.73})$$

On peut écrire:

$$T_{\mu\nu} = (T_0)_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu} \quad (\text{A.74})$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} T_{\nu}^{\alpha} \quad (\text{A.75})$$

Alors :

$$\delta T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \delta T_{\nu}^{\alpha} = \delta T_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\alpha} \quad (\text{A.76})$$

On peut écrire :

$$T_{\mu\nu} = (T_1)_{\mu\nu} + (T_2)_{\mu\nu} \quad (\text{A.77})$$

$$(T_1)_{\mu\nu} = (\partial_{\mu}\phi)(\partial_{\nu}\phi) \quad (\text{A.78})$$

$$(T_2)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\phi)(\partial^{\sigma}\phi) - V(\phi) \right] \quad (\text{A.79})$$

On remplace (3.28) dans (A.78):

$$(T_1)_{\mu\nu} = \partial_{\mu}[\phi_0 + \delta\phi]\partial_{\nu}[\phi_0 + \delta\phi] \quad (\text{A.80})$$

$$(T_1)_{\mu\nu} = (\partial_{\mu}\phi_0)(\partial_{\nu}\phi_0) + (\partial_{\mu}\phi_0)(\partial_{\nu}\delta\phi) + (\partial_{\mu}\delta\phi)(\partial_{\nu}\phi_0) + (\partial_{\mu}\delta\phi)(\partial_{\nu}\delta\phi) \quad (\text{A.81})$$

$$(T_2)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left[\frac{g^{\sigma\sigma}}{2}(\partial_{\sigma}\phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (\text{A.82})$$

On remplace (3.28) dans (A.82):

$$(T_2)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left[\frac{g^{\sigma\sigma}}{2}[\partial_{\sigma}(\phi_0 + \delta\phi)]^2 - V(\phi) \right] \quad (\text{A.83})$$

$$(T_2)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left[\frac{g^{\sigma\sigma}}{2}[(\partial_{\sigma}\phi_0)^2 + (\partial_{\sigma}\delta\phi)^2 + 2(\partial_{\sigma}\phi_0)(\partial_{\sigma}\delta\phi)] - V(\phi) \right] \quad (\text{A.84})$$

Après (A.84) et (A.81):

$$T_{\mu\nu} = (\partial_{\mu}\phi_0)(\partial_{\nu}\phi_0) + (\partial_{\mu}\phi_0)(\partial_{\nu}\delta\phi) + (\partial_{\mu}\delta\phi)(\partial_{\nu}\phi_0) + (\partial_{\mu}\delta\phi)(\partial_{\nu}\delta\phi)$$

$$+g_{\mu\nu} \left[\frac{g^{\sigma\sigma}}{2} [(\partial_\sigma \phi_0)^2 + (\partial_\sigma \delta\phi)^2 + 2(\partial_\sigma \phi_0)(\partial_\sigma \delta\phi)] - V(\phi) \right] \quad (\text{A.85})$$

Alors :

$$\begin{aligned} \delta T_{\mu\nu} &= (\partial_\mu \phi_0)(\partial_\nu \delta\phi) + (\partial_\mu \delta\phi)(\partial_\nu \phi_0) + (\partial_\mu \delta\phi)(\partial_\nu \phi) \\ &+ g_{\mu\nu} \left[\frac{g^{\sigma\sigma}}{2} [(\partial_\sigma \delta\phi)^2 + 2(\partial_\sigma \phi_0)(\partial_\sigma \delta\phi)] - V(\phi) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

Quand $n = \mu = 0$

$$2\Phi \delta T_\nu^0 = (\dot{\phi}_0)(\partial_\nu \delta\phi) + (\delta\dot{\phi})(\partial_\nu \phi_0) + (\delta\dot{\phi})(\partial_\nu \delta\phi) + g_{0\nu} \left[\Phi [(\delta\dot{\phi})^2 + 2(\dot{\phi}_0)(\delta\dot{\phi}) - (\bar{\nabla}_n \delta\phi)^2 + 2\partial n \phi_0 \partial n \delta\phi - V\phi] \right] \quad (\text{A.87})$$

Quand $n = \nu = \mu = 0$

$$\Phi \delta T_0^0 = (\dot{\phi}_0)(\delta\dot{\phi}) + (\delta\dot{\phi})^2 + \Phi \left[\Phi [(\delta\dot{\phi})^2 + 2(\dot{\phi}_0)(\delta\dot{\phi}) - (\bar{\nabla}_n \delta\phi)^2 + 2(\partial_n \phi_0)(\partial_n \delta\phi)] - V(\phi) \right] \quad (\text{A.88})$$

Quand $n = \nu = \mu$

$$g_{\nu\nu} \delta T_\nu^\nu = (\partial_\nu \phi_0)(\partial_\nu \delta\phi) + (\partial_\nu \delta\phi)(\partial_\nu \phi_0) + (\partial_\nu \delta\phi)(\partial_\nu \phi) + 2\Phi \left[\Phi [(\delta\dot{\phi})^2 + 2(\dot{\phi}_0)(\delta\dot{\phi}) - \nabla n \delta\phi^2 + 2\partial n \phi_0 \partial n \delta\phi - V\phi] \right] \quad (\text{A.89})$$

Tableau des paramètres de MSC:

Paramètre	symbole	Valeur
Constante de Hubble	H_0	$72 \pm 5 \text{ km/s/Mpc}$
Facteur d'échelle	R_0	$4.15 \cdot 10^{-5} (\Omega_m h^2)^{-1}$
L'âge de l'Univers	t_0	$3.14 \pm 0.3 \text{ Gan}$
Densité critique	ρ_c	$0.974 \cdot 10^{-26} \text{ kg.m}^{-3}$
Densité de courbure	Ω_k	0.02 ± 0.02
Densité de matière	Ω_m	0.29 ± 0.07
Densité de rayonnement	Ω_r	$4.74 \pm 0.3 \cdot 10^{-5}$
Densité de constante cosmologique	Ω_Λ	0.7 ± 0.1
Densité de matière baryonique	$\Omega_{b,0}$	0.05
Densité de matière noire	$\Omega_{dm,0}$	0.25
Densité de neutrinos	$\Omega_{\nu,0}$	≈ 0
Densité totale réduite	Ω_{tot}	1.02 ± 0.2

Tableau A.1: Représente les valeurs numériques des paramètres cosmologiques dans le MSC.

Unités:

1 Mpc = 10^6 parsecs $\sim 3 \times 10^{22}$ mètres.

1Gan = 10^9 ans.

Références:

- [1] Alain H Guth; Carnegie Observatories Astrophysics Series, Vol 2: Measuring and Modeling the Universe, 2004 ed. W. L. Freedman (Cambridge Univ. Press).
- [2] A.Liddle and D.Lyth; Cosmological inflation and Large scale structure; Cambridge University Press ,2000.
- [3] A.D.Linde; Particule physics and inflationary Cosmology; Harwood Academic Publishers, London,1990.
- [4] Alexandre FAURE; Equation des géodésiques dans un espace-temps de Schwarzschild-(anti-) de Sitter: solutions analytiques et application à l'anomalie Pioneer; Juin 2010.
- [5] Andrew Liddle; An introduction to modern cosmology, second Edition; WILEY,2003; ISBN 0470 84834 0 Cloth, 0470 54835 9 Paper.
- [6] Aurélien Barrau, Julien Grain; Relativité générale: cours et exercices corrigés; Dunod, paris, 201; Isbn:978-2-10-056316-6.
- [7] Bernardeau F; Cosmologie, EPD Sciences, 2007; Isbn:2868839541;Fr,T,O,488s,PGrC.
- [8] Éricourgoulhon; Relativité générale; CNRS / Observatoire de Paris / Université Paris Diderot (Paris 7),2014.
- [9] F.-Xavier Désert; Cours de Cosmologie; Laboratoire d'astrophysique, observatoire de grenoble ;<http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/~desert/cosmologie>.
- [10] Francis Bernardeau; Cosmologique: des fondements théoriques aux observations; EDP science, 2007, ISBN:978-2-86883-938-1.
- [11] Gary Scott Watson; An exposition on inflationary cosmology; Dept of Physics, Brown University, P.O. Box 1843, Providence, RI 02912;http://ned.ipac.caltech.edu/level5/Watson/Watson2_3.html (6/02/2016,15:00 h).
- [12] Hobson, Efstathiou, Lasenby; Relativité générale, De boeck, 2010; Isbn:978-2-8041-0126-8.
- [13] Ignazio Ciufolini; Eugenio Cocchia, Vittorio Gorini, Roberto Peron, Nicola Vittorio; Gravitation : From the Hubble lenght to the Plank lenght, IOP,2005 ;ISBN 0 7503 0948 2.
- [14] Jean Hladik; Introduction à la Relativité Générale; Ellipses, 2006; Isbn:978-2-7298-3062-5.
- [15] Luc Blanchet; Introduction a relativité générale, Institut d'astrophysique de paris, UMR 7095 de CNRS, Université pierre et Marie Curie 98^{bis} boulevard Arago, 75014 paris, France(17/09/2009).
- [16] Matts Roos; An introduction to cosmology, Third Edition; ISBN 0 470 84909 6 (hardback).
- [17] Michel Le Bellac; Relativité Générale pour débutants ; Mai 2004.

- [18] Mikhaïl Shaposhnikov; Relativité et Cosmologie II; 2008.
- [19] Mirjana Dalarsson and Nils Dalarsson; Tensors, Relativity, and Cosmology; Elsevier, 2005 ;
Isbn:0-12-200681-x.
- [20] P.Coles et F.Lucchin; Cosmology: The Origine and Evolution of Cosmique Structure (2nd
edition); Wiley, 2002.
- [21] Sean M.carroll; General Relativity; Decembre 1997.
- [22] Viatcheslav Mukhanov; Physical Foundations of Cosmology; ebook, 2005, Isbn-13 978-0-511-
13679-5.

ملخص:

في هذه المذكرة, قمنا بإجراء دراسة للكون في نطاق واسع لتحديد خصائصه وكيفية تطوره من خلال الملاحظات الكونية تحت إطار النموذج المعياري الكوني. أيضا كما أجرينا دراسة لبعض أنواع التضخم و إبراز أهمية وجوده في بداية نشأة الكون, الذي تبني حل المشاكل التي تعرض إليها النموذج المعياري القياسي الكوني بطريقة آلية.

كلمات مفتاحية: النموذج المعياري الكوني, التضخم الجديد, التضخم الفوضوي, التضخم الأبدي.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons mené une étude sur l'univers à grande échelle afin de déterminer ses caractéristiques et comprendre comment il a évolué grâce à des observations cosmiques dans le cadre du modèle standard cosmologique. Nous avons fait aussi une étude de certains types d'inflation et montrer l'importance de sa présence dans le début de l'Univers, ce mécanisme adopte les problèmes subis par le modèle standard cosmologique de façon naturelle.

Mots clés: Modèle Standard Cosmologique (MSC), Inflation Nouvelle, Inflation chaotique, Inflation Eternelle.

Abstract :

In this memory, we have conducted a study of the Universe on a large scale to determine its characteristics and how its evolution through cosmic observations under cosmologic standard model. We also had a study of some types of inflation and show the importance of his presence in the beginning of the Universe, which adopted the problems suffered by cosmologic standard model.

Key Word: Standard Model Cosmological, New Inflation, Chaotic Inflation, Eternelle Inflation.