UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées **et fondamental**e

Par

BENTIKHA WAFA

Sujet

Résolution numérique d'un jet issue d'un curved-nozzle en 2D sans gravité

Dirigé par :

Pr. B.BOUDERAH

Promotion: 2011/2012

Résolution numérique d'un jet issue d'un curved-nozzle en 2D sans gravité

Présenté par

BENTIKHA WAFA

Sous la direction de

Pr. B.BOUDERAH

Maitre de conférence

Résumé

Dans ce présent travail, on s'intéresse à l'étude d'un problème d'un écoulement potentiel et bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux d'un jet issue d'un curved nozzle . On a adapté une méthode de résolution, c'est la méthode des transformations conformes, en négligeant les effets de la gravité et tension de surface. A la présence de cette dernière, on a l'équation de Bernoulli sur la surface libre et pour résoudre notre problème numériquement, on a utilise la technique de troncation de la série .

Notre résultats obtenus sont dépendants d'un paramètre physique c'est le nombre de Weber.

Sommaire

Introduction

En mécanique des fluides, les écoulements à surface libre autour des objets de différentes formes sont étudiés due à leurs à importance d'application.

Le problème classique de l'écoulement d'un fluide parfait a été étudié par beaucoup de chercheurs. Les premier travaux dans ce secteur sont caractérisés par l'utilsation de la méthode de hodographe et de la formule de Schwartz-Christoffel, qui peuvent traiter les écoulements qui ont une géomitrie polygonale.

Dans le présent travail, on se propose d'étudier un écoulement à surface libre d' un jet d'un curved-nozzle; l'écoulement est supposé bidimensionnel et potentiel d'un fluide parfait. Puisque l'écoulement est bidimensionnel et potentiel, alors le plan des variables (x,y) d'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe z=x + iy . En négligieant les forces de gravité et les tentions de surface, théoriquement, on peut calculer la solution exactement en utilisant une transformation conforme d'hodographe du Kirchhoff (1869) et la transformation de Schwartz-Christoffel. Si l'effet des forces de gravité ou bien les tensions de surface ne sont pas négligées, le roblème ne peut être résolu exactement. Pour résoudre le problème, deux approches peuvent être utilisées. On cherche une solution asymptotique en considérant les paramètres du problème sont assez petits (le nombre de Weber α si les tensions de surface sont non nulles) ou bien on résoude le problème numériquement.

Notre travail est composé de trois chapitre `I` , `II` et `III` et une annexe :

Dans le chapitre `I`, on présente leles notions prémilinaire et les définitions générales de la mécanique des fluides. Une présentation de la théorie de la variable complexe et les transformations conformes et leurs relations avec les écoulements bidimensionnels et potentiels est donnée à la fin du chapitre .

Dans le chapitre `II,` on considère qui les effets des forces de gravité et les tensions de surface sont nulles. On utilisé alors la méthode des lignes des courants libres introduites par Kirchhoff qui est basée sur les transformations conformes pour obtenir une solution exacte. le résultat reste un complet dûe à la cmplexité de l'intégrale obtenue : la solution exacte est donée sous la forme d'un intégral élliptique.

Dans le chapitre `III,` les tensions de surface sont prises on considération et les effes des forces de gravité est nul. dans ce cas, le problème se caractérise par le nombre de Weber α.la présence de ce paramètre réduit l'équation de Bernoulli à une équation non linéaire, qu'on nous peut pas résoudre explicitement sous forme d'une solution exacte. Le problème non linéaire complet est résolu numériquement on se basant sur une procédure de troncation de séries formulée par Vanden-Broeck et Keller[8]. l'idée est de transformer le plan d'écoulement à une disque unité dans le plan complexe w.On présent la vitesse complexe par une série entire. On formule la série de sorte que les conditions aux limites sur les parois rigides soient satisfaites.

Pour terminer, on discutera les résultats obtenus et on récapitulera le travail dans une conclusion générale.

Chapitre I
Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

Résumé

Dans ce chapitre , on représente les notions préliminaires concernant les équations générales du mouvement des fluides ainsi que les écoulements potentiels bidimensionnels.

Contenu

1

Chapitre1

Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.1 Introduction:

La mécanique des fluides est la branche de la physique qui étudie les écoulements des fluides c'est-à-dire des liquides lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Le mouvement des liquides est régi par : les équations de **Navier-Stokes**, l'on considère en général les liquides comme étant incompressibles. la mécanique des fluides se compose en deux grandes sous-branches:

a- statique des fluide ou hydrostatique: qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides avec la poussée d'Archimède l'étude de la pression.

b- dynamique des fluides: qui étudie les fluides en mouvement.

En fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Un fluides est donc un milieu matériele contenu déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. parmi les fluides, ou fait souvent la distinction entre liquides.

Par la suite, une particule d'un fluide ou un point d'un fluide sont identifiés au volume infinitesimal décrit plus haut. Ainsi le déplacement d'une particule de fluide est identifiée non pas au déplacement d'une molécule mais au déplacement d'un élément de volume, et donc c'est un déplacement moyen de toutes les molécules qui constituent cette particule qui doit posséder toutes les propriétés du fluide.

on note aussi qu'un fluide considéré comme un milieu continu occupant un domaine Ω de l'espace, ses propriétés sont définies comme fonctions de la variable $x \in \Omega$ et de temps t.

Ainsi la masse, le volume et la viscosité seront des fonctions de $X \in \Omega, m(x,t), \rho(x,t)$ et $\mu(x,t)$.Un fluide en mouvement est décrit à l'aide des grandeurs suivantes: les trois composantes de la vitesse $\overrightarrow{v}$, la pression P, la densité ρ,la viscosité μ et la température T .

Ces grandeurs sont des fonctions des coordonnées x, y, z (d'un point de l'espace occupé par le fluide) et du temps t. On établit les équations du mouvement en basant sur les principes de conservation.

La surface libre de l'eau :

Qu'est-ce qu'une surface libre?

Quand un liquide est dans un récipient il est en contact avec les parois de ce dernier mais aussi avec lair. La surface du liquide en contact avec l'air est aussi appelée surface libre.

1.2 Description d'écoulement d'un fluide :

1.2.1 Description de Lagrange:

Dans la description de lagrange, on s'intéresse à l'histoire de chaque particule de fluide. Considérons une particule de fluide P , placé en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à l'instant t_0 et suivons la (approche mécanistique) au cours de son mouvement on peut déterminer la trajectoire de la particule de fluide si l'on connait son équation horaire:

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$y = y(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$z = z(x_0, y_0, z_0, t)$$

la vitesse de la particule s'écrit:

$$\vec{v}(P) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Description de Lagrange => Trajectoire des particules de fluide

1.2.2 Description d'Euler:

L'approche d'Euler est à mettre parallèle avec l'approche de Maxwell en électromagnétisme.De la même manière que l'on définit le champ électromagnétique en tout point de l'espace, à l'instant t, ici, on va considérer le fluide dans son ensemble à l'instant t. On définit en chaque point du système les grandeurs :$\mu(x; y; z; t), P(x; y; z; t), \vec{v}(x; y; z; t)$............ etc .

Notion de courbes de niveau:

à un instant t, on peut représenter les champ scalaires (μ,P et T) à laide de surfaces de niveau $P(x, y, z, t) = K$ est une surface isobare, $T(x, y, z, t) = K$ est une isotherme.

Notion de ligne de courant :

Une ligne de courant ou ligned'écoulement, est une ligne de champ du vecteur vitesse c'est-à-dire une courbe tangente en tout point $M(x; y; z)$ à $\vec{v}(x; y; z; t)$ à l'instant t.

L'ensemble des lignes de courant peut évoluer au cours du temps. L'équation de la ligne de courant s'obtient en résolvant les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

où v_x,v_y et v_z sont les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$.
Description d'Euler => ligne de courant

Toute les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe C fermée constituent un tube de courant.
Remarque: Un ligne de courant n'est pas forcément une trajectoire d'une particulede fluide. Ce deux notion son à priori distinctes.

Formule de Green:
Soit un volume V de frontière, la surface S et $\overrightarrow{u}_n$le vecteur normale à S pointant vers l'extérieur du volume V.Soit $\overrightarrow{F}$ un champ vectoriel défini dans un voisinage de V ; alors la forme de Green nous donne:

$$\iint_s (F.\overrightarrow{u}_n)ds = \iiint_v div(\overrightarrow{F})dv$$

1.3 Equation du mouvement des fluides

1.3.1 Equation de continuité:

soit une partie d'un fluide de masse volumique p délimitée par une surface fermée S_f (de volume$v$)
soit $\overrightarrow{ds}$ un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée ($voir\ figure\ A$).
La partie de fluide a une masse $m = \iiint_v pdv$, le débit massique sortant de la surface S_f est égale à

$$\iint_{S_f} p\overrightarrow{v}\overrightarrow{ds}$$

La conservation de la masse s'écrit $\dfrac{dm_s}{dt} - \iint_{s_f} p\overrightarrow{v}\overrightarrow{ds} = \iiint_v \dfrac{\partial p}{\partial t}dv$ où $\dfrac{dm_s}{dt}$ représente le débit massique de fluide interne au volume considéré compté positivement s'il s'agit d'une source et négativement s'il s'agit d'un puits compte tenu du théorème d'ostrogradsky

$$\iint_{S_f} p\overrightarrow{v}\overrightarrow{ds} = \iiint_v (div(p\overrightarrow{v}))dv.$$

L'equation de conservation de la masse peut être écrite

$$\frac{dm_s}{dt} = \iiint_v [div(p\overrightarrow{v}) + \frac{\partial p}{\partial t}]dv.$$

Remarque:

Sauf précision contraire, nous appliquerons l'équation de conservation de masse en absence de source ou de puits, soit

$$div(p\overrightarrow{v}) + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Deux cas particuliers sont alors à considérer.

le **cas1** du fluide **incompressible** ($p = cte$) $\Rightarrow div\overrightarrow{v} = 0$ pour un écoulement stationnaire ou instationnaire.

Cet écoulement est dit isovolume.

le **cas2** du écoulement **stationnaire** ($\frac{\partial p}{\partial t} = 0$) $\Rightarrow div(p\overrightarrow{v}) = 0 = pdiv\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{gradp}$.

En déhors de la possibilité **cas1**, il existe la possiblité d'écoulement **isovolumes** tels que $\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{gradp} = 0$ où les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout poit, au vecteur vitesse.

Le principe de conservation de la quantité de mouvement:

Si la force externe agissant sur un objet, ou sur un système d'objets (un système isolé) est nulle, alors la quantité de mouvement total de l'objet ou du système d'objet de meure constante.

1.3.2 L'equation d'Euler

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à une particule nous donne :"la variation de la quantité de mouvement = la résultante des forces extérieures",c'est à dire

$$\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} + (\overrightarrow{v}.\nabla)\overrightarrow{v} = -\frac{1}{p}\overrightarrow{grad}\,P + \overrightarrow{F}_{champ}$$

1.3.3 Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide parfait incomressible:

Un **fluide parfait** est un fluide dont l'écoulement se fait sans frotement .

On considère un écoulement permanent isovolume d'un fluide parfait entre les sections s_1 et s_2, entre les quelles il n'y a aucune machine hydraulique, (pas de pompe, ni de turbine) (*voir figure B*).

Soit m la masse et v le volume du fluide qui passe à travers la section $s_1$entre les instants t et $t + \Delta t$. Pendant ce temps la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section s_2.

Tout se passe comme si ce fluide était passé de la position (1) à la position (2).

En appliquant le théorème de l'energie cinétique à ce fluide entre les instants t et $t+\Delta t$ (la variation d'energie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures : poids et forces pressantes), on obtient :

$$\rho\frac{v^2}{2} + \rho g z + P = Cte$$

P est la pression statique, $\rho g z$ est la pression de psanteur, $\rho\frac{v^2}{2}$ est la pression cénitique

Tout les termes s'expriment en pascal.

En divisant tous les termes de la relation précédente par le produit ρg , on écrit tous les termes dans la dimension d'une hauteur (pression exprimées en mètres de colonne de fluide).

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{P}{\rho g} = H = Cte$$

H : est la hauteur totale
$\frac{P}{\rho g}$: est la hauteur de pression
z : est la cote,
$\frac{v^2}{2g}$: est la hauteur cinétique
$z + \frac{P}{\rho g}$: est la hauteur piezomètrique.

Cas d'un écoulement (1)⟶(2) sans échange de travail:

Lorsque, dans un écoulement d'un fluide parfait, il n'y a aucune machine (ni pompe, ni turbine) entre les points (1) et (2) d'une même ligne de courant, la relation de Bernoulli peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes:

$$\frac{1}{2}\ \rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) + (P_{2-}P_1) = 0$$

ou

$$\frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) + (z_2 - z_1) + \frac{(P_2 - P_1)}{\rho g} = 0$$

1.4 Dynamique des fluides:

1.4.1 Le débit:

est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.

Débit masse: Si Δm est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt , par définition le débit-masse est:

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

unité : $Kg.s^{-1}$

Débit-volume Si Δv est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt , par définition le débit-volume est:

$$q_v = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

unité : $m^3.s^{-1}$

Relation entre q_m et q_v : La masse volumiqueρ est donnée par la relation :

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta v} \qquad \text{où} \quad q_m = \rho q_v$$

Remarque:

Les liquides sont incomressibles et peu dilatables (masse volumique constante); on parle alors d'écoulements isovolumes.

Ecoulements permanents ou stationnaires: Un régime d'écoulement est dit permanent ou stationnaire si les paramètres qui le caractérisent(pression, température, itesse, masse volumique,.........) ont une valeur constante au cours du temps.

1.5 Ecoulement bidimentionnel,irrotationnel et stationnaire d'un fluide parfait incompressible:

1.5.1 Ecoulement irrotationnel-potentiel de vitesse:

Un écoulement est dit irrotationnel (ou potentiel) si le pseudo-vecteur tourbillonest nule en tout point de l'écoulement .

Le rotationnelde la vitesse étant nul en tout point d'un écoulement irrotationnel

$$\vec{Rot}\vec{v} = 0$$

il existe alors une fonction ϕ telle que:

$$\vec{v} = \vec{grad}\phi$$

La fonction ϕ est appelée potentiel des vitesses.

1.5.2 Ecoulement incompressible-Fonction de courant

Un fluide est dit en écoulement incompressiple si sa **masse volumique** est constante au cours du movement, ce qui se traduit par une dérivée par particulaire du champ scalaire de masse volumique nul .

***Traduction mathématique*:** Si l'on note $p = p(M, t)$ la masse volumique en un point M à instant t et si l'on considère l'écoulement incompressible alors:

$$\frac{Dp}{Dt} = 0$$

où $\frac{Dp}{Dt}$ est la dérivée particuliere de la masse volumique.

On peut caractériser un tel écoulement par la relation suivante:

$$div\vec{v} = 0$$

où $\vec{v} = v(M, t)$ est la vitesse d'une particule de fluideen un point M à un instant t.

Ou encor : [2]

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

On introduit une nouvelle fonction ψ de x et y que l'on appelle **fonction de courant**,vérifiant

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad ((1.1))$$

Les surfaces définies par ($\psi = cte$) sont des lignes de courant, en effet,la différentielle exacte de ψ sont donne:

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy \qquad ((1.2)) \\ &= v_y dx - v_x dy \end{aligned}$$

puisque $\psi = cte$, alors $d\psi = 0$,on trouve l'équation de la ligne de courant d'aprés (1.1). Soient,C une courbe fine qui part d'une ligne de courant vers autre caractérisée par $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$ respectivement.

Soient $\vec{u_n}$ un vecteur unitaire normale à C et orienté dans le sens de lécoulement, le flux à travers C donné par :

$$Q = \int_C \vec{v}.\vec{u}_n = \int_C (-v_x \frac{dy}{dt} + v_y \frac{dx}{dt}) = \int_C (v_y dx - v_x dy)dt$$

d'ou

$$Q = \int_C \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy\right) \ = \ \int_C \ d\psi$$

par conséquent

$$Q = \psi_1 - \psi_2 \qquad ((1.3))$$

1.5.3 Equation différentielles des fonctions ϕ et ψ :

Soit un écoulement bidimentsionnel , irrotationnel et stationnaire d'un fluide parfait et incompressible .

Parce que $v^{\rightarrow} = -grad^{\rightarrow}\phi$ et $div\ v^{\rightarrow} = 0$,il vient $div(-grad^{\rightarrow}\phi) = 0$ d'où

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^{2\phi}}{\partial^2 y} = 0$$

Alors

$$\Delta\phi = 0 \qquad (\ (1.4))$$

De même ,d'aprés $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y) = (-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x})$ et $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{v} = 0$,on trouve

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

donc

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

c'est-à-dire

$$\Delta\psi = 0 \qquad (\ (1.5))$$

D'où la fonction potentielle ϕ et la fonction ligne de courant ψ sont vérifient l'équation de Laplace

.

1.6 Utilisation de la théorie de la variable complexe:

Soient ϕ la fonction potentielle et ψ la fonction de courant respectivement d'un écoulement potentiel bidimensionnel. on rapport le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant $z = x + iy$, puis on définit la fonction complexe $f(z)$ par

$$f(z) = \phi + i\psi \qquad ((1.6))$$

i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$

$f(z)$ est appelé le potentiel complexe de l'écoulement . Parce que la partie réel et la partie imaginnaire de $f(z)$ vérifient l'équation de Laplace, de plus on a :

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \ ; \ v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Alors les relations de Cauchy-Rieman

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{(1.7)}$$

La théorie des variables complexe offre une méthode, trés puissante pour obtenir des solution de quelque écoulement. si le plan(x, y) est considiré comme plan e la variable complexe $z = x + iy$ la fonction $f(z)$ sera analytique dans le domaine de l'écoulement .

De plus

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= v_x - iv_y \end{aligned} \tag{(1.8)}$$

sera aussi analytique dan le plan d'écoulement. Cette trés importante propriété va nous parmetre d'utiliser, par la suite la théorie des fonctions analytiques complexes pour résoudre notre problème considiré.

1.6.1 Transformation conforme:

On a

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y) \\ v_y &= v_y(x, y) \end{aligned} \qquad \text{équation de la transformation}$$

1.6.2 Forme complexe d'une transformation :

v_x etv_y désignent la partie réel et la partie imaginaire d'une force $f(z) = w = v_x + iv_y$, $z = x + iy$

Le Jacobien de la transformation est :

$$\frac{\partial (v_x, v_y)}{\partial (x, y)} = |f(z)|^2$$

$f'(z) = 0$ point critique.

1.7 Quelques transformations générales :

Si on représente chaque point du plan par un nombre complexe z (le point est alors l'affixe de z)

1.7.1 Translation:

correspond à la transformation

$$Z \to z + A$$

avec A également un nombre complexe,représente le vecteurde Translation.

1.7.2 Rotation:

de centre O et d'angle θ correspond à la transformation :

$$Z \to e^{i\theta} z$$

1.7.3 Homothétie

de centre O et de rapport r correspond à la transformation :

$$Z \to rz$$

1.7.4 Transformation homografique :

est de la forme :

$$Z \to \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ où a, b, c, d sont des nombres complexes.

1.8 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est un outil théorique servant à interpréter les problèmes à partir des dimensions des grandeurs physiques mises en jeu. Cet outil est utilisé particulièrement en physique, en chimie et en ingénierie. L'analyse dimensionnelle permet notamment de vérifier a priori la viabilité d'une équation ou du résultat d'un calcul. Elle est utile également pour formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses.

L'analyse dimensionnelle repose sur le fait que ne peuvent être comparées que des grandeurs ayant la même dimension : il est possible de comparer deux longueurs entre elles, mais pas une longueur et une masse entre elles par exemple. Mathématiquement, cette assertion est fondée sur le théorème de Vaschy-Buckingham.

Théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème Π :

Le théorème de Vaschy-Buckingham est fondamental dans la théorie de la similitude. Il permet de dire combien de nombres sans dimension indépendants peuvent être construits dans un problème physique qui implique n variables. Son énoncé est un peut technique et sa mise en oeuvre laisse croire qu'il s'agit d'une procédure mathématique qu'il suffit d'appliquer méthodiquement.

En fait, son utilisation à l'aveugle peut conduire à de graves erreurs et il faut de la pratique pour éviter les nombreux pièges.

Son application est relativement aisée quand on a déjà une idée du resultat, c'est-à-dire de la nature des nombres adimensionnels qui peuvent jouer un rôle dans le problème étudié.

$*$ Nous cherchons à calcuer une variable x, de pendant de $n-1$ autres variable indépendants x_k

on doit resoudre un problème implicite

$$\phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

Nombre de Froude:

On le définit de la manière suivante:

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gh}}$$

avec

v : vitesse de l'écoulement
g : accélérationde la pesanteur (9,81 m.s^{-1})
h : longueur caractéristique.

on le définit de la manière suivante:

Nombre de Weber:

On le définit de la manière suivante:

$$We = \frac{p.v^2 h}{\sigma}$$

avec

v : vitesse
h : longueur caractéristique
p : masse volumique
σ : tension superficielle

Chapitre II
Problème de l'écoulement d'un jet issu d'un curved-nozzle sans effets de tension de surface et de gravité

Résumé

Dans ce chapitre , on étudie un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel à la surface libre d'un fluide parfait incompressible d'un jet issu curved-nozzle. En négligent l'effet de gravité et de tensions de surface, le problème admet une solution exacte qu'on peut calculer.

La méthode de résolution est la méthode des lignes de courant libres et la transformation Kirchhoff.

Contenu

2

CHAPITRE 2

Problème d'écoulement d'un jet issu d'un curved-nozzle sans effets de tension de surface et de gravité

2.1 Introduction :

Dans l'étude de notre problème des écoulements bidimensionnels et stationnaires d'un fluide parfait et incompréssible dans un canal de forme réservoir et de largeur $2H$ dans la mécanique des fluides, résolution est trés difficile, on étudie un écoulement bidimensionnel, stationnaire et irrotationnel sur la surface libre d'un fluide parfait et incompréssible. Lécoulement est supposé uniforme à l'infini. Les effets de gravité et de tensions sont négligées dans un canal à la forme de réservoir (figure 3).

Alors la solution exacte est possible, dans ce partie la solution exacte est calculer par la méthode des lignes de courant libres et la transformation de Schwartz-Christoffel. Par cette méthode on obtient un intégrale ne peut pas calculer par les méthodes connues .

2.2 Théorie des lignes de courant libres:

La théorie des lignes de courant libres consiste à étudier les problèmes d'écoulements potentiel, bornés par des parois rigides rectillignes et des lignes de courant libres de formes inconnues, sur les quelles la pression est supposée canstante. Si les lignes de courant libres ne sont pas présentes et les effets de gravité sont négligées, la région d'écoulement dans le plan physique est un polygone. Aussi les lignes de courant libres sont présentes et l'effet de gravité ainsi que les effets de la tension de surface sont négligées, la région d'écoulement peut être tansformée par une transformation conforme à une région polygone. Cette région est une partie du plan hodographe défini:

$$\Omega = \log(U.\frac{dz}{df})$$

Dans le cas où l'écoulement est délimité partiellement par des des surfaces libres, on donne la méthode de résolution introduite par la méthode de Kirchhoff.

L'idée est d'introduire la fonction complexe Ω définie par :

$$\Omega = \log(U.\frac{dz}{df}) = \log(\frac{U}{v_x - iv_y}) = \log\frac{U}{q} + i\theta \qquad ((2.1))$$

où $f = \phi + i\psi$, $\frac{df}{dz} = v_x - iv_y, q = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, (v_x, v_y)$ sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe x et l'axe y respectivement, θ est l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale et U la vitesse de référence.

• La partie réelle de Ω est constante sur la ligne de courant libre, c'est-à dire $\log \dfrac{U}{q} = Cte$

•La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rectiligne, c'est-à-dire:

$$\theta = Cte$$

Par conséquent, l'écoulement est représent par une figure plane de côtés rectiligne(polygone) noté Ω .A l'aide de la transformation de Schwartz-Christoffel, le domaine Ω polygonal est transformé en un demi plan superieur de la variable auxiliaire λ.Et pa conséquent, par les transformations inverses des transformations conformes utilisées, on peut retrouver l'écoulement originale $f(z)$.

2.3 Transformation de Schwartz-Christoffel :

Un polygone (figure 1) limité par les lignes droites dans le plan Ω peut être transformé de manière à se placer sur l'axe réele du plan desλ (figure 2), tout les points sutués à l'intérieur du polygone viennent dans le même demi-plan .

La transformation permettant d'obtenir un tel resultat est obtenue à partir de la relation

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \alpha(\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}...(\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \qquad (\ (2.2))$$

ou

$$\Omega = \alpha \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}...(\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\lambda + \beta \qquad ((2.3))$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ étant les points transformés des sommets du polygone, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ étant les angles intérieurs du polygone et α, β sont des constantes complexe.

On notera que

1- Parmi les points $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ on peut en choisir trois arbitrairement.

2- Les constantes α et β déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.

2.4 Position du problème :

On suppose un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide parfait incompressible et non-visqueux dans un canal à la forme d'un réservoir (modèle curved nozzle) de largeur **2H** et de longueur infinie. l'orifice de la réservoir est de largeur **2L**(voir figure 3et figure 4). Dans l'effets de gravité et de tension de surface sont négligées et de au symétrie de l'écoulement , la ligne de symétrie

EOF est considérée comme ligne de courant. On prend comme axes de coordonnées la ligne de courant EOF sur l'axe des abscisses x et la paroi BC sur l'axe des ordonnées y. .

Nous supposons que l'écoulement à l'infinie(Lorsque $x \longrightarrow -\infty$) est uniforme de vitesse U et d'amplitude H..Nous supposons que le jet à l'infinie est uniforme de vitesse constante U_0 et de largeur $2H_0$ et la paroi BC fait un angle $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.avec l'axe x'ox..

Sur la surface libre l'equation de Bernoulli (car les tension de surface sont négligées) donne :

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{P}{p} = Cte \qquad \text{sur CD} \qquad (\;(2.4))$$

où q est la vitesse, P la pression et p est la densité du fluide. la pression est constante sur la surface libre et l'equation (2.1) implique que la vitesse est constante sur la surface libre,donc l'equation de Bernoulli (2.4) devient:

$$q = Cte \qquad \text{sur CD} \qquad (\quad (2.5))$$

On rapporte le plan d'écoulement dans le répère (oxy)au plan complexe de la variable $z = x + iy$. Dans ce plan, la fonction $f = \phi + i\psi$ où ϕ est la fonction potentielle, ψ est la fonction ligne de courant sont analytique de la variable z.,

2.5 Résolution du problème :

Dans notre cas, nous avons un écoulement délimité par un fend rigide ABC et une surface libre CD, si on néglige les tensions de surface et les forces de gravité, une solution exacte peut être calculée en utilisant la transformation hodographe et la transformation de Schwartz-Christoffel pour trouver la solution, nous utilisons les étapes suivantes :

1^{ere}étape:

La transformation hodographe Ω transforme le domaine d'écoulement réel dans le plan (x,y) en un domaine d'écoulement de frontière polygonale dans le plan $(log\frac{U}{q}, \theta)$(figure 5).

$2^{ème}$étape: La transformation de Ω à λ .

Par cette transformation de Schwartz-Christoffel, le domaine d'écoulement dans le plan Ω est transfomé en demi-plan superieur de la variable λ.

Dans le plan λ, les points correspondents sont :

$A = F(\lambda = \pm\infty)$, $B = F(\lambda = -1)$, $C = F(\lambda = 0)$, $D = F(\lambda = 1)$.

On trouve la représentation conforme suivante

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = a \; \frac{1}{(\lambda + 1)\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}}$$

Par intégration, on trouve:

$$\Omega = a \int \frac{d\lambda}{(\lambda+1)\sqrt{\lambda(\lambda-1)}} + b$$

Où a , b des constantes d'intégration.
En fait une changement de variable:

$$\sqrt{\lambda(\lambda-1)} = \beta + \lambda$$

On obtient:

$$\begin{aligned}
\Omega &= a \int \frac{2\ d\beta}{\beta^2 - 2\beta - 1} + b \\
&= 2a \int \frac{1}{(\beta-1)^2 - 2} d\beta + b \\
&= a \int \frac{1}{\left(\frac{(\beta-1)}{\sqrt{2}} - 1\right)\left(\frac{(\beta-1)}{\sqrt{2}} + 1\right)} d\beta + b \\
&= a\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\log(\frac{\beta-1}{\sqrt{2}} - 1) - \log(\frac{\beta-1}{\sqrt{2}} + 1)\right] + b
\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
\Omega &= a\frac{\sqrt{2}}{2}\log(\frac{\beta-1-\sqrt{2}}{\beta-1+\sqrt{2}}) + b \\
\Omega &= a\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)} - \lambda - 1 - \sqrt{2}}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)} - \lambda - 1 + \sqrt{2}}\right] + b
\end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$, $\Omega = -\frac{i\pi}{4}$ on a:

$$-\frac{i\pi}{4} = a\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[\frac{-1-\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right] + b \qquad (1)$$

Pour $\lambda = 1, \Omega = 0$ on a:

$$0 = a\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[\frac{-2-\sqrt{2}}{-2+\sqrt{2}}\right] + b \qquad (2)$$

$(2) - (1)$ alors:

$$\begin{aligned}
\frac{i\pi}{4} &= a\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\log\left[\frac{-2-\sqrt{2}}{-2+\sqrt{2}}\right] - \log\left[\frac{-1-\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right]\right] \\
a &= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Alors :

$$b = -\frac{1}{4}\log(3+2\sqrt{2})$$

Donc:

$$\Omega(\lambda) = U\frac{dz}{df} = \log\left[\frac{1}{(3+2\sqrt{2})}\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)}-\lambda-1-\sqrt{2}}{(\sqrt{\lambda(\lambda-1)}-\lambda-1+\sqrt{2})}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$3^{éme}$ étape:

Le domaine d'écoulement réel dans le plan z est transformé à une bande inférieur de largeur HU dans le plan de la variable $f = \phi + i\psi$, on choisissant $\psi = 0$ sur la ligne de courant $ABCD$ (Figure 6)

$4^{éme}$ étape : La transformation de f à λ

En utilisant la transformationde *Schwartz-Christoffel*,on transforme la bonde de largeur HU du plan f en demi plan superieur de la variable λ (Figure 7),où la correspondents des point B,C, D donnée par ($\lambda = -1, \lambda = 0, \lambda = 1$) d'où:

$$\frac{df}{d\lambda} = a\frac{1}{(\lambda-1)}$$

Donc:

$$f = a\int\frac{1}{(\lambda-1)}d\lambda + b$$

Alors:

$$f = a\log(\lambda-1) + b$$

a et b sont des constantes à déterminer.
Lorsque $\lambda = -1$,(au point B), $f = -1$ alors:

$$-1 = a(i\pi + \log(2)) + b \quad (1)$$

Lorsque $\lambda = 0$,(au point B), $f = 0$ alors:

$$0 = i\pi a + b \qquad (2)$$

Donc:

$$a = \frac{1}{\log 2}, b = -\frac{i\pi}{\log 2}$$

Alors:

$$f = \frac{1}{\log 2}\log(\lambda-1) - \frac{i\pi}{\log 2}$$

On déduit:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\log 2(\lambda-1)}$$

$5^{éme}$ étape : La solution

En utilisant la relation
$$U\frac{dz}{d\lambda} = U\frac{dz}{df}\frac{df}{d\lambda}$$
On a:
Et on a les relation de $(U\dfrac{dz}{df}$ et $\dfrac{df}{d\lambda})$, on obtient:

$$U\frac{dz}{d\lambda} = \frac{1}{\log 2(\lambda-1)(3+2\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)}-\lambda-1-\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)}-\lambda-1+\sqrt{2}}\right]^{\frac{1}{4}}$$

Donc:

$$z = \frac{1}{U(3+2\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\log 2}\int\left[\frac{1}{(\lambda-1)}\left[\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)}-\lambda-1-\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda(\lambda-1)}-\lambda-1+\sqrt{2}}\right]^{\frac{1}{4}}\right]d\lambda + z_0$$

$$z = \frac{1}{U(3+2\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\log 2}\int\frac{1}{(\lambda-1)}\left[\frac{3\lambda-1+i\ 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}{2\lambda^2+\lambda(1-2\sqrt{2})}\right]^{\frac{1}{4}}d\lambda + z_0$$

Sur la surface libre , $f=\phi$, $\phi \geq 0$,donc la forme de surface libre est donnée par :

$$x(\phi) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{U(3+2\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\log 2}\int\frac{1}{(\lambda-1)}\left[\frac{3\lambda-1+i\ 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}{2\lambda^2+\lambda(1-2\sqrt{2})}\right]^{\frac{1}{4}}d\lambda + x_0\right]$$

$$y(\phi) = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{U(3+2\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\log 2}\int\frac{1}{(\lambda-1)}\left[\frac{3\lambda-1+i\ 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}{2\lambda^2+\lambda(1-2\sqrt{2})}\right]^{\frac{1}{4}}d\lambda + y_0\right]$$

Chapitre III
problème d'écoulement dans un canal à la forme de curved-nozzle avec tension de surface

Résumé

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'effet des tension de surface sur l'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompréssible et non visqueux issu d'un orifice d'un réservoir -modèle curved nozzle-, les forces de gravité sont toujour négligées.

Dans ce chapitre, la solution exacte est impossible puisque il-y-a un terme non linéaire dans l'équation de Bernoulli, donc le problème sera résolu numériquement , la technique de résolution utilisé la procédure de troncation de séries formullé par Vanden-Broech et Keller. Ce problème est caractérisé par le nombre de Weber α.

Contenu

3

Chapitre 3

problème d'écoulement dans un canal à la forme de curved-nozzle avec tension de surface

3.1 Introduction:

Dans ce chapitre, on étudié un écoulement potentiel bidimensionnele qui étudié au chapitre précédent, on néglige l'effet de gravité mais on prend en considération l'effet de tension de surface , et puisque la solution exacte est impossible, pour cette raison, on résoud le problème par une approche numérique. La thécnique de résolution utilisée par Vanden-Broeck et Keller. La solution est est obtenue pour différent valeurs du nombre de Weber α défini par

$$\alpha = \frac{pU^2L}{T} \qquad ((3,1))$$

où T est la tension de surface et p est la densité de fluide.

Cette méthode réduit le problème bidimensionnele à problème unidimensionnel où les inconnues sont à trouver uniqument sur la surface libre.

Par la suite les variables avec leurs dimension physiques seront notées avec tild($\tilde{}$) et les variables sans dimensions seront notées sans tild, par exemple $\widetilde{R}$ et R, $\widetilde{\phi}$ et ϕ.

3.2 Formulation du problème:

Nous considérons un écoulement potentiel, bidimentionnel d'un fluide incompréssible et non visqueux issu d'une buse rectangulaire de largeur $2H$ et de longueur infinie. L'ouverture de la buse est de largeur $2L$ (figure 8 et 9). Dans l'absence de gravité et de au symétrie de l'écoulement , la ligne de symétrie EOF est considérée comme ligne de courant sur l'axe $\tilde{x}'\tilde{o}\tilde{x}$ et la paroi BC fait un angle $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ avec l'axe $\tilde{y}\prime\tilde{o}\ \tilde{y}$. Lorsques $x \longrightarrow -\infty$, l'écoulement est considéré uniforme de vitesse constante $\tilde{U}$ et de profondeur constante $2\tilde{H}$. Nous supposons que le jet à l'infini est uniforme de vitesse constante $\tilde{U}_0$ et de profondeur $2\tilde{H}_0$.

On considère que l'effet des forces de gravité est négligée (nulle), la tension de surface notée $\widetilde{T}$ est non nulle.

L'axe des $\tilde{x}$ variables et l'axe des $\tilde{y}$ forment un plan de la variable complexe $\widetilde{z} = \widetilde{x} + i\widetilde{y}$. On note $\overrightarrow{v} = (\widetilde{v_x}(\widetilde{x},\widetilde{y}), \widetilde{v_y}(\widetilde{x},\widetilde{y}))$ le champ du vecteur vitesse de l'écoulement.

Les fonctions $\widetilde{\phi}$ et $\widetilde{\psi}$ qui définissent la fonction potentielle et la fonction ligne de courant , respectivement.Sans perte de généralité, on choisit $\phi = 0$ au point de raccordement $(x, y) = (0, 1)$. La fonction de courant $\psi = 0$ sur la ligne de courant $ABCD$. D'après la loi de conservation de la masse il s'ensuit que $\psi = -1$ sur EOF . Alors dans le plan f , la région de l'écoulement est une bande infinie $-\infty < \phi < +\infty$, $-1 < \psi < 0$. (figure 10) . En utilisant le fait que l'écoulement est potentiel, les composant du vecteur vitesse sont alors données en fonction de ϕ et ψ par les relations :

$$\begin{aligned} \widetilde{v_x} &= \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\widetilde{x}} = \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\widetilde{y}} \\ \widetilde{v_y} &= \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial\widetilde{y}} = -\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\widetilde{x}} \end{aligned} \tag{(3,2)}$$

La vitesse potentielle complexe $\widetilde{f}$ est définit par

$$\widetilde{f}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \widetilde{\phi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) + i\widetilde{\psi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \tag{(3,3)}$$

On note par $\widetilde{\xi}$ la vitesse complexe

$$\widetilde{\xi} = \widetilde{v}_x - i\widetilde{v_y} = \frac{d\widetilde{f}}{d\widetilde{z}}$$

Les relations de la formule (3,2)(condition de Cauchy-Rieman) montrent que la vitesse complexe $\widetilde{\xi}$ et la fonction potentielle $\widetilde{f}$ de la variable complexe $\widetilde{z} = \widetilde{x} + i\widetilde{y}$ sont des fonctions analytiques de $\widetilde{z}$ qui constante au dessus de la surface libre . On note par P_0 la pression atmosphérique qui est constante au dessus de la surface libre et $\tilde{P}$ la pression du fluide sur la surface libre .

Pour résoudre le problème, nous introduisons les variables adimentionnelles en choisissant $\breve{U}$ comme unité de vitesse et $\widetilde{H}$ comme unité de longueur.On pose:

$$x = \tilde{x}\ /\tilde{H},\ y = \tilde{y}\ /\tilde{H},\ v_x = \tilde{v}_x/\tilde{U},\ v_y = \tilde{v}_y/\tilde{U},\ K = \tilde{K}\ \tilde{H}\ , q = \tilde{q}\ /\tilde{U},\ \phi = \phi\ /C\ \tilde{H}\ \tilde{U},\ \psi = \tilde{\psi}/C\ \tilde{H}\ \tilde{U}$$

où $C = \dfrac{H}{L}$ désigne le dégré de contraction de l'écoulement.

$$q = \frac{\widetilde{q}}{\widetilde{U}} \tag{(3,4)}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\widetilde{R}}\widetilde{H} \tag{(3,5)}$$

avec $\widetilde{q} = \sqrt{\widetilde{v_x}^2 + \widetilde{v_y}^2}$ désigne le module du vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = (\widetilde{v_x}(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \widetilde{v_y}(\widetilde{x}, \widetilde{y}))$ et $\widetilde{R}$ la rayon de courbure de la surface libre.

En supposant la pression du fluide $\tilde{P}$ juste au dessus de la surface libre est constante, la condition de Bernoulli sur a surface libre s'écrit alors

$$\frac{1}{2}\widetilde{q}^2 + \frac{\widetilde{P}}{\widetilde{p}} = \frac{1}{2}\widetilde{U}^2 + \frac{\widetilde{P}_0}{\widetilde{p}} \qquad sur\ la\ surface\ libre\ CD \qquad (\ (3,6))$$

où $\widetilde{P}$, $\widetilde{q}$ et $\widetilde{P}_0$ désignent, respectivement, la pression sur la surface libre, le module de la vitesse et la pression à l'infini juste au dessus la surface libre.

On note que le membre droite de (3,6) a été évalué d'apés les conditions de l'écolement à l'infini($x \longrightarrow +\infty$).

La relation entre $\widetilde{P}$ et $\widetilde{P}_0$ est donné par la loi de Laplace

$$\widetilde{P} - \widetilde{P}_0 = \frac{\widetilde{T}}{\widetilde{R}} = \widetilde{T}\ \widetilde{K} \qquad ((3,7))$$

Où $\widetilde{K} < 0$ si le centre de courbure est en dehors du fluide et $\widetilde{K} > 0$ si le centre de courbure est dans le fluide.

Dans notre problème , le centre de courbure est en dehors du domaine de l'écoulement , alors K est de signe négatif.

Donc

$$\frac{1}{2}\widetilde{q}^2 - \frac{\widetilde{T}}{\widetilde{p}}\widetilde{K} = \frac{1}{2}\widetilde{U}^2 \qquad sur\ CD \qquad ((3,8))$$

D'aprés (3,4), léquation (3,5) et la relation $\widetilde{K} = \dfrac{1}{\widetilde{R}}$, l'équation (3,8) devient

$$q^2 - \frac{2\widetilde{T}}{\widetilde{p}\widetilde{H}R\widetilde{U}^2} = 1 \qquad sur\ CD$$

Alors que (3,1) nous donne la relation finale

$$q^2 - \frac{2}{\alpha R} = 1 \qquad sur\ CD \qquad ((3,8))$$

avec α le nombre de Weber définie par

$$\alpha = \frac{\tilde{p}\tilde{H}\tilde{U}^2}{\widetilde{T}}$$

Puisque $\xi = v_x - iv_y$ et $q^2 = |\xi|^2 = v_x^2 + v_y^2$,l'équation (3,8) devient

$$|\xi|^2 - \frac{2}{\alpha R} = 1 \qquad sur\ CD \qquad ((3,9))$$

Pour mieux définir le rayon de courbure de la surface libre CD, on écrit la vitesse complexe $\xi = v_x - iv_y$ sous la forme :

$$\xi = \exp(\tau - i\theta) \qquad ((3,10))$$

où $|\xi| = \exp(\tau)$ et θ l'angle que fait l'axe des x horizontal et le vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$.

Soient $\overrightarrow{u}_T, \overrightarrow{u}_N$ les vecteurs tangentiel et normal sur la surface libre, respectivement, ds désigne un élément de longueur sur la surface libre.

■En coordonnées intrinsèques$(\overrightarrow{u}_T, \overrightarrow{u}_N)$ sur la surface libre, on a

$$\frac{d\overrightarrow{u}_T}{ds} = K\overrightarrow{u}_N = \frac{1}{R}\overrightarrow{u}_N \Rightarrow \left|\frac{d\overrightarrow{u}_T}{ds}\right| = \frac{1}{R}$$

soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse d'après (3,3)

$$\overrightarrow{v}(v_x, v_y) = \exp(\tau)(\cos\theta\,\overrightarrow{i} - \sin\theta\,\overrightarrow{j}), \quad q = |\overrightarrow{v}|$$

on sait que :

$$\left|\frac{d\overrightarrow{u}_T}{ds}\right| = \left|\frac{d\overrightarrow{u}_T}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\overrightarrow{u}_T}{dt}\frac{1}{q}\right|$$

donc

$$\left|\frac{d\overrightarrow{u}_T}{ds}\right| = \left|\frac{d\overrightarrow{u}_T}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\frac{1}{q}\right| \tag{(3,11)}$$

t désigne le temps.

D'une part, on a :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d\theta}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} + \frac{d\theta}{d\psi}\frac{d\psi}{ds}\right]\frac{ds}{dt}$$

mais

$$\frac{d\psi}{ds} = 0 \ \text{ et } \ \frac{ds}{dt} = q$$

Alors

$$\frac{d\theta}{dt} = q\frac{d\theta}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}$$

D'autre part

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{ds} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{ds}$$

donc

$$\frac{d\phi}{ds} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}v_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}v_y\right)\frac{dt}{ds} = (v_x^2 + v_y^2)\frac{1}{q} = q$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\phi}q^2 \quad sur\ CD \tag{(3,12)}$$

donc on a la relation suivante

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\phi} e^{2\tau} \qquad ((3,13))$$

puisque $\quad q^2 = (v_x^2 + v_y^2) = |\xi|^2 = \left|e^{\tau - i\theta}\right|^2 = e^{2\tau}$
Finalement

$$K = e^{2\tau} \left|\frac{d\overrightarrow{u}_T}{d\theta}\right| \left|\frac{d\theta}{d\phi}\right| \left|\frac{1}{q}\right| \qquad ((3,14))$$

mais $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y) = \exp(\tau)(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}) \Rightarrow q = |\overrightarrow{v}| = e^{\tau}$ et $\overrightarrow{u}_T = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = (\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{u}_T}{d\theta} = (-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$

Ce qui implique que $\left|\frac{d\overrightarrow{u}_T}{d\theta}\right| = 1$

alors l'équation (3,14) devient

$$K = \frac{1}{R} = e^{\tau} \left|\frac{d\theta}{d\phi}\right| \qquad ((3,15))$$

D'après $|\xi|^2 = e^{2\tau}$ et (3,15), l'équation de Bernoulli (3,9) s'écrit

$$e^{2\tau} - \frac{2}{\alpha} \left|\frac{d\theta}{d\phi}\right| e^{\tau} = 1 \qquad \textit{sur } CD \qquad ((3,16))$$

ou alors

$$(v_x^2 + v_y^2) - \frac{2}{\alpha} \left|\frac{d\theta}{d\phi}\right| \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} = 1 \qquad \textit{sur } CD \qquad ((3,17))$$

D'autre part, on sait que $\theta(\phi)$ est une fonction croissante lorsque $0 \leq \phi < \infty$ sur la surface libre CD , alors l'équation de Bernoulli dans le plan f s'écrit :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\phi} = \frac{2}{\alpha}(e^{\tau} - e^{-\tau}) \qquad \textit{pour} \quad 0 < \phi < +\infty \qquad ((3,18))$$

avec les conditions aux limites deviennent :

$$\operatorname{Im}\xi = 0 \quad \textit{pour} \quad \psi = 0, \ -\infty < \phi < \phi_B \qquad ((3,19))$$

$$\left|\frac{\operatorname{Im}(\xi)}{\operatorname{Re}(\xi)}\right| = \tan\alpha \qquad \textit{pour} \quad \psi = 0, \ \phi_B < \phi < 0 \qquad ((3,20))$$

$$\operatorname{Im}\xi = 0 \qquad \textit{pour} \ \ \psi = -1, \qquad -\infty < \phi < +\infty \qquad ((3,21))$$

Le problème mathématique est déterminer la fonction $\tau - i\theta$ qui est analytique en $f = \phi + i\psi$ dans la bande $-1 < \psi < 0$, et qui vérifie les conditions (3,18), (3,19), (3,20), (3,21).

3.3 Méthode de séries

On résoude le problème numériquement on utilisant la technique de troncation de séries utilisée par Venden-Broeck et Keller.Cette technique nous permet de calculer la fonction de vitesse complexe ξ.

On transforme le domaine d'écoulement successivement par des transformations conformes en un quart de disque unité dans un plan de la variable complexe w (figure 11), où la surface libre sera transformée conformément sur le quart de disque unité $w = e^{i\theta}$ et la paroi rigide ABC sur le diamètre de quart disque unité.

Puisque $\xi(z)$ est analytiquedans le domaine d'écoulement de la variable $z = x + iy$, $\xi(w)$ est aussi analytique dans le quart de disque unité de la variable comlexe w .

La fonction $f = \phi + i\psi$ transforme le plan d'écoulement à une bande infini $-1 \leq \psi \leq 0$, $-\infty \leq \phi \leq +\infty$ dans le plan (ϕ, ψ)(figure 10).

Avec la transformation

$$f = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{2w}{1+w^2}\right) \qquad ((3,22))$$

la bande est transformée en un quart de disque unitaire dans le plan w . Les points A, B, C et Ddans le plan f, sont transformés respectivement à $w_A = 0$, w_B, $w_C = -i$, $w_D = 1$ dans le plan w . De sorte que les parois AB et BC sont transformées sur la partie positive du diamètre réel. La surface libre est transformée sur la circonférence de quart de cercle unité (voir figure 11).

Donc la surface libre est définie par la variable σ telle que

$$w = |w| \exp(i\sigma) = \exp(i\sigma) \qquad avec \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq 0 \qquad ((3,23))$$

Dans le plan f, la surface libre est définie par la relation

$$f = \phi \quad avec \quad -\infty \leq \phi \leq +\infty \qquad ((3,24))$$

En substituant (3,23) et (3,24) dans la relation (3,22), on trouve

$$f = \phi = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{2\exp(i\sigma)}{1+\exp(2i\sigma)}\right) = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1}{\sin\sigma}\right) \quad sur\ CD$$

alors

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{d\phi}{d\sigma} = -\frac{2}{\pi} \cot\sigma$$

donc

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{\partial\sigma}{\partial\phi} = -\frac{\pi}{2} \tan\sigma \ sur\ CD \qquad ((3,25))$$

D'autre part, on a sur la surface libre

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial\phi} &= \frac{\partial\theta}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\phi} \\ &= -\frac{\pi}{2}\tan\sigma\frac{\partial\theta}{\partial\sigma} \end{aligned}$$

Finalement, l'équation de Bernoulli devient :

$$e^{2\tau} + \frac{\pi}{\alpha} e^{\tau} \tan\sigma \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} \qquad\qquad 0 < \phi < \infty \qquad\qquad ((3,26))$$

Avant de formuler la série, il est nécessaire de faire une étude asymptotique au voisinage de quelques points singuliers de l'écoulement. L'écoulement sous étude admet deux points singuliers.

3.4 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités

Dans le plan d'écoulement z, on a deux points singuliers ; z_C et z_B où la vitesse est nulle. Ces deux points correspondent , respectivement, aux points w_C et w_B dans le plan w.

3.4.1 comportement asymptotique au voisinage de $w_B = b$

L'écoulement au voisinage de $w = w_B$, est un écoulement dans un angle $\gamma = \frac{3\pi}{4}$ dans le plan z, au voisinage de z=z$_B$, dans la fonction complexe est donnée par

$$f(z) \backsim \frac{a}{n}(z - z_B)^n \ où \ \ n = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{4}{3}$$

donc

$$f(z) \backsim \frac{3a}{4}(z - z_B)^{\frac{4}{3}} \qquad\qquad ((3,26))$$

Alors

$$\xi = \frac{df}{dz} \backsim a(z - z_B)^{\frac{1}{3}} \ \ lorsque \ z \longrightarrow z_B \qquad\qquad ((3,27))$$

on a

$$f = \phi = \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{2w}{1 + w^2}\right) \quad sur\ CD \qquad\qquad ((3,28))$$

de l'équation (3,26) et (3,28) on trouve

$$(z - z_B) \backsim \left[\frac{4}{3a}\left(\frac{2}{\pi}\log\left(\frac{2w}{1 + w^2}\right)\ \right)\right]^{\frac{3}{4}} \qquad\qquad ((3,29))$$

En substituant (3,29) dans (3,27) on trouve

$$\xi \backsim a\ \left[\frac{4}{3a}\left(\frac{2}{\pi}\log\left(\frac{2w}{1 + w^2}\right)\right)\right]^{\frac{1}{4}} \qquad lorsque\ w \longrightarrow b$$

Mais

$$2\log\left(\frac{2w}{1+w^2}\right) \backsim k_1(b^2-w^2)^2 \quad lorsque\ w \longrightarrow b$$

donc

$$\xi \backsim a^{\frac{3}{4}}(\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}(k_1)^{\frac{1}{2}}(b^2-w^2)^{\frac{1}{2}} \quad lorsque\ w \longrightarrow b$$

alors

$$\xi \backsim c_1(b^2-w^2)^{\frac{1}{2}} \quad lorsque\ w \longrightarrow b \tag{(3,30)}$$

avec

$$c_1 = a^{\frac{3}{4}}(\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}(k_1)^{\frac{1}{2}}$$

3.4.2 Comportement asymptotique au voisinage $w_C = 1$

l'écoulement au voisinage $w_C = 1$ est un écoulement dans un angle γ dans e plan z, au voisinage de $z = i$,dans la fonction complexe est donnée par

$$f(z) \backsim \frac{a}{n}(z-z_C)^n \quad où\ n = \frac{\pi}{\gamma}$$

don

$$f(z) \backsim \frac{\gamma a}{\pi}(z-i)^{\frac{\pi}{\gamma}} \quad lorsque\ z \longrightarrow i \tag{(3,31)}$$

alors

$$\xi = \frac{df}{dz} \backsim a(z-i)^{\frac{\pi-\gamma}{\gamma}} \quad lorsque\ z \longrightarrow i \tag{(3,32)}$$

on a

$$f = \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{2w}{1+w^2}\right) \quad surCD \tag{(3,33)}$$

de l'équation (3,31) et(3,33) on trouve

$$(z-i) \backsim \left[\frac{2}{a\gamma}\log\left(\frac{2w}{1+w^2}\right)\right]^{\frac{\gamma}{\pi}} \tag{(3,34)}$$

En substituant (3,34) dans (3,32) on trouve

$$\xi \backsim a\left[\frac{2}{a\gamma}\log\left(\frac{2w}{1+w^2}\right)\right]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \quad lorsque\ w \longrightarrow 1$$

donc

$$\xi \backsim a^{\frac{-\gamma}{\pi}}(\frac{2}{\gamma})^{1-\frac{\gamma}{\pi}}\left[\log\left(\frac{2w}{1+w^2}\right)\right]^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \quad lorsque\ w \longrightarrow 1$$

mais

$$\log\left(\frac{2w}{1+w^2}\right) \backsim k_2(1-w^2)^2 \qquad lorsque\ w \longrightarrow 1$$

donc

$$\xi \backsim a^{-\frac{\gamma}{\pi}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1-\frac{\gamma}{\pi}} (k_2(1-w^2))^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \qquad lorsque\ w \longrightarrow 1$$

alors

$$\xi \backsim c_2(1-w^2)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \qquad lorsque\ w \longrightarrow 1 \qquad ((3{,}35))$$

avec

$$c_2 = a^{-\frac{\gamma}{\pi}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1-\frac{\gamma}{\pi}} (k_2)^{1-\frac{\gamma}{\pi}}$$

3.5 Formulation de la serie

Puisque $\xi(w)$ est analytique exepte aux points A, B et D, $\xi(w)$ s'écrit sous la forme

$$\xi(w) = g(w).\Omega(w)$$

où $g(w)$ contient les singularités et les zéros de ξ aux points B et C données en (3,30) et (3,35), et la fonction $\Omega(w)$ est bornée et continue sur le cercle d'unité $|w| = 1$ et analytique à l'intérieur. Les conditions (3,19), (3,20) et (3,21) montrent que $\Omega(w)$ peut être développée en série entière en w . par conséquent

$$\xi(w) = v_x - iv_y = (b^2 - w^2)^{\frac{1}{2}} (1-w^2)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^{2n}\right) \qquad ((3{,}36))$$

les coefficient a_n réels, la vitesse donnée par la relation (3,37) satisfait toutes les conditions (3,19), (3,20) et (3,21) . On détermine les coefficients a_n et l'angle γ de tel sorte que l'équation de Bernoulli (3,6) soit satisfait .

On introduit la notation $w = |w|\, e^{i\sigma}$ de sorte que les points sur BC sont donnés par $w = e^{i\sigma}$, $-\frac{\pi}{2} < \sigma < 0$.En utilisant (3,37) l'équation (3,18) devient

$$e^{2\tilde{\tau}} + \frac{\pi}{\alpha} e^{\tilde{\tau}} \tan(\sigma) \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\sigma} = 1 \qquad ((3{,}37))$$

Ici $\tilde{\tau}(\sigma)$ et $\tilde{\theta}(\sigma)$ notent respectivement les valeurs des fonctions τ et θ sur la surface libre CD .

Pour déterminer les coefficients a_n , nous faisons une troncation de la série définie dans (3,36) aprés N termes . Ainsi on introduit la discrétisation de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ en $N+1$ points :

$$\sigma_I = -\frac{\pi}{2\,(N+1)}\left(I-\frac{1}{2}\right), \quad I = 1, 2...., N+1 \tag{(3,38)}$$

Les deux équations (3,36) et (3,38) nous permettent de trouver les expressions $[\tilde{\tau}(\sigma)]_{\sigma=\sigma_I}$, $\left[\tilde{\theta}(\sigma)\right]_{\sigma=\sigma_I}$ et $\left[\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\sigma}\right]_{\sigma=\sigma_I}$ en termes de γ et les coefficients a_n ; lesquelles , une fois substitués dans l'équation (3,38), deviennent en chaque point σ_I on obtient le système de (N+1) équations algebriques non linéaires à (N+1) inconnues a_n , k=1,...,N et γ.

I=1,...,N+1 Pour résoudre ce système on utilise la méthode de Newton.

Forme de surface libre :

Aprés avoir trouver les coefficients a_n , la forme de la surface libre est déterminée comme suit de la relation

$$\frac{\partial x}{\partial\sigma} = \frac{2}{\pi}\cot(\sigma)e^{\tilde{\tau}}\cos(\tilde{\theta}) \tag{(3,39)}$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial\sigma} = \frac{2}{\pi}\cot(\sigma)e^{\tilde{\tau}}\sin(\tilde{\theta}) \tag{(3,40)}$$

3.6 Discussion et présentation des résultats

Nous utilisons la procédure numérique décrite en section (3.3) pour calculer les solutions du problème pour différentes valeurs du nombre de Weber α. La plupart des calculs ont été faits avec N = 60:

a. Solution sans tension de surface (T = 0):

Pour $\infty \longrightarrow \infty$ et pour toute valeur de la longueur de la paroi verticale $H0-L$, la solution exacte peut être calculée en utilisant la méthode des lignes des courants libres introduite par Kirchoff. Nous avons calculé numériquement ces solutions en utilisant la procédure décrite ci-dessus. Le coéfficient C de contraction est défini comme le rapport de la largeur d'écoulement à l'infini à la largeur de l'ouverture de buse. Les valeurs correspondantes du coefficient de contraction$C$ calculées par notre procédure peuvent

être comparées aux résultats obtenus par Gurevich (voir figure 12).

Pour $H0-L \longrightarrow \infty$, les coefficients de la série (3.36) $a_k \sim 0$ et l'angle de séparation $\gamma = 3.1415$, par conséquent la solution s'écri:

$$\xi(w) = w \tag{(3,41)}$$

qui est la solution classique de Kirchoff (Batchelor 1967)[4].

De l'équation (2.18) on obtient $C = \dfrac{\pi}{\pi + 2} = 0.611$.

La figure 13 montre la comparaison pour les deux valeurs $H0 - L \longrightarrow \infty$ et $H_0 - L = 1$ entre la forme de la surface libre calculée par notre procédure et la solution exacte.

b. Solution avec tension de surface (T$\neq$ 0):

Nous utilisons encore notre procédure pour calculer la solution quand l'effet de la tension de surface est inclus dans la condition sur la surface libre, les calculs numériques montrent qu'il existe une solution pour chaque valeur de nombre de Weber $\alpha > 0$ et pour

chaque valeur de la longueur du mur vertical $0 \leq H_0 - L < \infty$. Dans le tableau 3.1, nous donnons une comparaison des coéfficients de la série (3.36) avec les coefficients de la série $\sum_k (\dfrac{5}{6})^n$, ce qui montre la convergence absolue de la série (3.36) dans le quatrième

quart du disque unité du plan w. Les coefficients de la série trouvés sont rapidement décroissants et l'angle γ croit lorsque α décroît. Le tableau 3.2 présente quelques valeurs des coefficients de la série(3.36) et les nombres de Weber correspondants et pour plusieurs valeurs de la longueur $H_0 - L$.

On note que lorsque le nombre de Weber α décroît, le coefficient de contraction C et l'angle de séparation croient. La figure 14 montre la variation de$C$ en fonction de $\dfrac{1}{\alpha}$.

Dans la figure 15 on présente les valeurs de l'angle de séparation entre la surface libre et la paroi verticale γ en fonction de $\dfrac{1}{\alpha}$

On constate que la solution numérique existe pour toute valeur $\alpha > 0$. Lorsque $\alpha \longrightarrow 0$, la surface libre tend vers une demi droite

$y = 1$, le degré de contraction $C \longrightarrow 1$ et l'angle de séparation $\gamma \longrightarrow \dfrac{3\pi}{2}$

Des profils typiques de la surface libre pour différents nombres de Weber sont présentés dans la figure 16 pour $H_0 - L = 1.21$, et dans la figure 17 pour $H_0 - L = 10.16$.

Pour$H_0 - L \longrightarrow \infty$ et pour différents nombres de Weber $\alpha \geq 0.95$, on trouve les

mêmes résultats que dans le second chapitre.

Conclusion

Dans ce mémoire, on propose un problème d'écoulement bidimensionnels potentiels à surface libre d'un jet issu d'un curved-nozzle, dans cette étude, on trouve la solution exacte si on néglige l'effet de tension de surface, mais lorsque les effets de tensions de surface sont considère, la solution analytiquement est impossible, mais on trouve numériquement à l'aide de la méthode de troncation de la série qui est trés puissante et qui donne de bons résultats.

EN effet, on trouve a solution approchée pour différentes valeurs du nombre de Weber $\alpha \geq \tilde{\alpha}$, où $\tilde{\alpha}$ une valeur critique.

NOTATION

C degré de contraction.
f potentiel complexe de la vitesse.
H diamètre
L longueur.
K courbure de surface.
P pression.
P_0 pression au dessus de la surface libre.
q module de la vitesse.
R rayon de courbure de la surface.
T tension de surface.
u_N vecteur normal.
u_T vecteur tangentiel.
p densité.
ξ vitesse complexe.
U vitesse à l'infini.
v_x;v_y composantes du vecteur vitesse.
ϕ fonction potentiel.
α nombre de Weber.
α angle d'inlinaison.
γ angle de séparation.
z variable complexe.

Annexe

Contenu :

A.1- Méthode de Newton.

A.2- Algorithme de Newton pour la résolution de système non linéaire $f(x) = 0$

A.3- Algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite

Dans cette section, on utilise la méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équation non linéaire $f(x) = 0$ ainsi que l'algorithme de la méthode de factorisation $A \longrightarrow LU$ de Doolittle qui donne la résolution d'un système d'équation linéaire.

A.1- Méthode de Newton :

On considère le problème de recherche d'une solution au système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{c} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{array} \right\} \tag{1}$$

avec les f_i sont des fonction réelles non linéaire des variables $x_1, x_2, ..., x_n$.

Ce système peut être écrit sous la forme matricielle

$$f(x) = 0 \qquad où \qquad x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \ , \ x \in R^n$$

La méthode de Newton consiste à résoudre le système d'équations non linéaires précédent, en trouvant l'ensemble des n valeurs réelles $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ vérifiant les n équations du système (1).

Le système (1) se réduit à un système linéaire, en suivant les étapes suivantes:

En supposant que les fonctions f_i sont des fonctions continuement différenhtiables . La matrice $E(x) = \left(\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)$ est appelée Jacobienne de f au point x . On fait le dévelopement de taylor dans un voisinage x proche x^*, on obtient:

$$f(x) = f(x^*) + E(x^*)(x - x^*) + R(x^*, x - x^*)$$

où

$$R(x^*, x - x^*) = (x - x^*) \int_0^1 [E(x^* + t(x - x^*)) - E(x^*)]dt$$

Ainsi au voisinage de x^* l'expression linéaire

$$f_*(x) = f(x^*) + E(x^*)(x - x^*)$$

est une bonne approximation de $f(x)$. Il est claire qu'une meilleure approximation de la solution x que x^* peut être obteue en résolvant l'équation

$$f_*(x) = 0$$

i.e

$$f(x^*) + E(x^*)(x - x^*) = 0$$

■En suivant la procédure, la méthode générale de Newton consiste à prendre une approximation initiale x_0 à la solution x, puis tenter à l'améliorer itérativement comme suit :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f^{(k)}}{S^{(k)}} \qquad\qquad k = 1, 2, ..., n$$

en prenant $f^{(k)} = f(x^{(k)})$ et avec la définition de la matrice Jacobienn

$$S^{(k)} = E(x^{(k)})$$

On continue jusqu'à ce que $\left|f^{(k)}(x^{(k)})\right| < \xi$

A.2- Algorithme de Newton pour la résolution de système non linéaire f(x) =0 :

Soient $x^{(0)}, \xi$

1. Calculer

$E_{ij}^{(k)} = \dfrac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j}$ tel que $x = x^{(k)}$, $j = 1, 2, ..., n$

$f_i^{(k)} = -f_i(x^{(k)})$ et $i = 1, 2, ..., n$

2. Résoudre le système linéaire

$\sum_{j=1}^{n} \triangle x_j^{(k)} E_{i\ j}^{(k)} = f_i^{(k)}$ $\qquad i = 1, 2, ..., n$

3. Calculer

$x_i^{(k+1)} = \triangle x_j^{(k)} + x_i^{(k)}$ $\qquad i = 1, 2, ..., n$

4. Si

$\left|f_i(x^{(k+1)})\right| < \xi$ $\qquad i = 1, 2, ..., n$

est vérifier, arrêter

A.3- Algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite

Choix du pivot

$P_k = a_{l_k\ c_k}$ où $a_{l_k\ c_k} = \max_{i\ j} |a_{i\ j}|$

$i = 1, 2, ..., n$ $\qquad i \neq l_1, l_k, ..., l_{k-1}$

$j = 1, 2, ..., n$ $\qquad j \neq l_1, l_k, ..., l_{k-1}$

Normalisation $\qquad k = 1, 2, ..., n$

$a_{l_k\ j} = \dfrac{a_{l_k\ j}}{P_k}$ $\qquad j = 1, 2, ..., n+1$

Réduction

$$\left.\begin{array}{c} w = a_{i\ c_k} \\ a_{i\ j} = a_{i\ j} - w.a_{l_k\ j} \end{array}\right\} \quad j = 1, n+1 \qquad i = 1, ..., n \;\; et \;\; i \neq l_k$$

Remise en ordre

$x_{c_k} = a_{l_k\ n+1}$

Référence

[1] A la mémoire de Léon et Hanri Houpeurt.

[2]A.Gasmi. L'effet de la tension de surface sur le coefficient de contraction d'un jet.
These de Doctorat.

[3] Christian Grossetête. Mécanique des fluides .

[4] Jac Harthong. Cours d'analyse .

[5] J.CARBDNNET.M.ROQUES académie, de Nancy-Metz. Fichier: poly-mécaflu.doc .

[6] Joindre l'auteur. Mécanique des fluides table de matière.

[7] J.Roussel-E.N.S.C.R .Mécanique des fluides (Mars 2010).

[8] Lon Paraschiviou, Michel Prud homme, Luc Robillard et Patrick Vasseur. Mécanique des fluide.

[9] Note de cours Mécanique des fluides
Une introduction à l'hydraulique pour les ingénieurs civils version 7.2 du 29 Février 2012.

[10] Valiron G. Théorie des fonctions, Masson 1942, chapitre 2.

[11] Wahiba Delloum, Résolution numériques d'un problème non linéaire dans un domaine à
frontière libre devant un obstacle - Modèle house – thèse de magister.

ملخص : في هذا البحث نهتم بدراسة مسألة تدفق كموني ذو سطح حر لسائل غير قابل للانضغاط وغير لزج ناتج عن مصدر دفق بعيد داخل قناة على شكل خزان. ولقد استعملنا في الحل طريقة تعتمد على التحويلات المتطابقة عند انعدام التوتر السطحي . أما عند وجود تأثير قوى الضغط السطحي فان المسألة المطروحة تتميز بشرط غير خطي معطى بمعادلة برنولي على السطح الحر للسائل ذو شكل غير معروف. ولإيجاد الحل يمكن استعمال تقنية السلاسل التي تعتمد أساسا على التحويلات المتطابقة والنتائج المحصل عليها مرتبطة بالوسيط الفيزيائي : عدد ويبر.

الكلمات المفاتيح: سطح حر, تدفق كموني, ينبوع, توتر سطحي, عدد فرود, عدد ويبر.

RÉSUMÉ: Dans le présent travail, on considère un écoulement potentiel et bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux dans un canal à la forme de réservoir. On a adopté une méthode de résolution basée sur la méthode des transformations conformes. En négligeant l'effet de la tension de surface, une solution exacte peut être calculée. En présence des tensions de surface, une solution exacte est impossible, le problème peut être résolu numériquement en utilisant les transformations conformes et la technique de troncation de la série. Les résultat obtenus sont dépendants d'un paramètre physique: le nombre de Weber.

Mots-clés: surface libre, écoulement potentiel, source, tension de surface, nombre de Froude, nombre de Weber.

ABSTRACT : In the present work, we are interested by the study of a bidimensional and potential flow with a free surface of an incompressible and no viscous fluid. we adapted a method of resolution based on the method of the transformations in conformity, by neglecting the effect of the surface tension. With the presence of the latter, there is the Bernoulli's equation on the free surface, and to solve our problem, the technique of truncation of the series is used. The obtained results are dependant of a physical parameter : The Weber number.

Key-words: Free surface, potential flow, source, surface tension, Froude number, Weber number.