UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de ***Master***

Domaine : *Mathématiques et Informatique*

Filière : *Mathématiques*

Option : *Géométrie des espaces de Banach et analyse harmonique.*

Par

BOUDJEMAA Fadhila

Sujet

CARACTERISATION POLYNOMIAL D'UN ESPACE DE HILBERT

Soutenue le 07/06/ 2012 devant le jury:

Mr. D.ACHOUR M.C.A *Université de M'sila* Président
Mr. K.SAADI M.C.B *Université de M'sila* Directeur de Mémoire
Mr. D.DRIHEM M.C.A *Université de M'sila* Examinateur

Promotion: 2011/2012

Résumé en français:

L'objectif de ce mémoire est la généralisation du théorème de Kwapien des opérateurs p-sommants et fortement p-sommants à les opérateurs linéaires.
On donne la version polynomiale et multilinéaire d'une caractérisation des espaces de Hilbert basée sur le théorème de Kwapien et comparer les différents classes de sommabilité sur les trois cas des opérateurs: linéaire, multilinéaire et polynôme homogène de degré m.

Résumé en englais:

The object of these lines is generalizing Kwapien theorem for the p-summing operators and strongly p-summing operators.
We give polynomial and multilinear version of this theorem, and we compare betwin the different types of summing in the three types: linear, multilinear and homogeneous polynomial.

الملخص باللغة العربية:

في هذه الأطروحة، تطرقنا إلى نظرية تميز فضاءات هيلبرت و تربطها بالتطبيقات متعددة الجمعية وكذا بالتطبيقات القوية متعددة الجمعية .نظرية كوابيان تعد نظرية أحدثت تغيرا كبيرا في مجال التطبيقات الجمعية، وقد عممنا هذه النظرية على كل من متعدد الخطيات وكذا كثيرات الحدود المتجانسة.

بسم الله الرحمان الرحيم

A ma mère et mon père.

A toute ma famille et tous mes amis.

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord je remercie le bon $\mathcal{DIEU}$ le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience ; qu'il j'adonné durant toutes ces longues années.

Puis, je tiens également à éxprimer mes vifs remerciements à mon encadreur Mr.Khalil $\mathcal{SAADI}$ pour avoir d'abord proposée ce thème, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire et qui n'a pas cessée de je donner ses conseils.

Je tiens à remercier vivement toutes personnes qui j'ai aidés à élaborer de ce modest et ravail, ainsi à tous ceux qui j'ai aidés de prés ou de loin à accomplir ce travail

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants et le chef de département de Mathématiques qui acontribué à mon formation parailleurs, mes remerciements à tous les membres du juger de mon travail.

Mes remerciements s'adresse aussi à ma mère, mon pére, mes frères et mes seures ; toute ma fammille et tous mes amiset collèques pour le soutien moral et matérièl........

0.1

Introduction

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la théorie des opérateurs multilinéaires et polynômes homogène de degré m. Il porte essentiellement sur les théorèmes de caractérisation de l'espace de Hilbert. Il bien connu dans l'analyse qu'un espace normé est un Hilbert si et seulement si sa norme vérifie l'identité de parallélogramme suivante

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

En 1970, Kwapień a donné une autre caratérisation d'un espace de Hilbert en utilisant les opérateurs linéaires 2-sommants et leurs conjugués. Cette caractérisation basée sur le théorème de factorisation de Pietsch des opérateurs linéaires 2-sommants par un espace de Hilbert. Dans ce mémoire, on s'intéresse à la généralisation de cette caractérisation dans le cas multilinéaire et le cas des polynômes homogènes de degré m. Le dernier cas a été entamné par Achour et Saadi en 2010 où ils ont donné une version polynômiale de théorème de Kwapień. Pour le cas multilinéaire, on peut citer les travaux de Saadi dans sa "Thèse de Doctorat" dont il a montré qu'il y a plusieurs version de cette caractérisation.

Le mémoire s'articule autour de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on donnera un aperçu général sur les espaces de Hilbert. Puis, on rappelle les notions des opérateurs linéaires p-sommants et fortement p-sommants. Le chapitre se termine par le théorème de Kwapień qui donne une caractérisation d'un espace de Hilbert dans laquelle on utilise les opérateurs p-sommants et fortement p-sommants..

Dans le deuxième chapitre, on fera un panorama sur les opérateurs multilinéaires. Une série de propriétés et résultats concernant ces opérateurs a été donné. Dans la catégorie des opérateurs multilinéaires on trouve beaucoup de définitions, dans ce chapitre on s'intéresse seulement aux opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants, p-dominés et fortement p-sommant au sens de Dimant.

Le troisième chapitre sera consacré à étudier la version polynômiale du théorème de Kwapień, tout d'abord on fait un rappel sur les polynômes homogèmes de degré m, puis on introduit sur cette catégorie plusieurs définitions à savoir les polynômes homogèmes Cohen fortement p-sommants, p-dominés et fortement p-sommants de Dimant. Finalement, on donne le théorème de caractérisation d'un espace de Hilbert en utilisant pour cela les polynômes homogènes de degré m.

Chapitre 1

Théorème de Kwapień dans le cas linéaire

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats de base à propos les espaces de Hilbert, les espaces de Lebesgue ainsi que des résultats concernant les applications linéaires. On fait un survol sur les opérateurs linéaires p-sommants et fortement p-sommants. On termine ce chapitre par théorème de Kwapień dans le cas linéaire. On utilise dans cette caractérisation les opérateurs linéaires p-sommants et fortement p-sommants (pour meilleur d'informations sur les espaces de Hilbert et les espaces de Lebesgue voir [LT96]).

1.1 Les espaces de Hilbert

Produit scalaire. Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle produit scalaire sur H une application $\varphi : H \times H \to \mathbb{R}$ telle que

a) Linéaire par rapport à la première composante, i.e,

1. $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$.
2. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$.

b) Anti-linéaire par rapport à la deuxième composante, i.e.,

1. $\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$.
2. $\varphi(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\varphi(x, y)$.

c) Positive, i.e., $\varphi(x, x) \geq 0$.

d) Définie, i.e., $\varphi(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

e) Hermitienne, i.e., $\varphi(y,x)=\overline{\varphi(x,y)}$.

où x, x'et y sont des éléments quelconques de H et λ un élément quelconque de $\mathbb{K}$. On note habitualement l'application φ par $\langle , \rangle$, c'est à dire

$$\forall x, y \in X : \varphi(x,y) = \langle x, y \rangle$$

Espace préhilbertien. On appelle espace préhilbertien (réel ou complexe) un espace vectoriel (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire. On définit dans ce cas l'application suivante

$$\forall x \in X : \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \tag{1.1}$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Un espace préhilbertien est un espace normé dont sa norme est définit par (1.1).*

Exemple. $\forall x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)$ des éléments de $\mathbb{K}^n$,on pose $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$. Cette formule définit clairement un produit scalaire sur $\mathbb{K}$. La norme associée est l'application $x \mapsto |x|$.

Définition 1.2 *(espace de Hilbert). Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet, dénoté simplement H.*

Exemples.

1) $\mathbb{R}^n$ est un espace de Hilbert.

2) L'espace vectoriel $C([a,b])$ des fonctions continues a défini sur $[a,b]$ est un espace du Hilbert.

3) $P([a,b])$ n'est pas un espace de Hilbert, mais défini sur l'espace de produit scalaire par :$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$,où $f, g \in [a,b]$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $x, y \in H$ nous avons

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Preuve. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = \lambda\overline{\lambda} \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \lambda \langle x, y\rangle + \overline{\lambda} \langle y, x\rangle \, ,$$

on pose $a = \langle x, x\rangle \, , b = \langle x, y\rangle \, , c = \langle y, y\rangle$ on trouve

$$a\lambda\overline{\lambda} + b\lambda + \overline{b\lambda} + c \geq 0$$

Si $a = c = 0$, $\lambda\lambda = \overline{b}$ alors l'inégalité ci-dessus entraine $-2 \, |b|^2 \geq 0 \Rightarrow b = 0$.
Si $a \neq 0$, on a $\lambda = -\frac{\overline{b}}{a}$, alors l'inégalité ci-dessus implique

$$a \left(-\frac{\overline{b}}{a}\right) \left(-\frac{b}{a}\right) - \left(\frac{\overline{b}}{a}\right) b - \frac{\overline{b\overline{b}}}{a} + c \geq 0$$

donc $-\frac{|b|^2}{a} + c \geq 0 \Rightarrow |b|^2 \leq ac.$ ■

Inégalité de Minkowski. Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $x, y \in H$ nous avons

$$(\langle x + y, x + y\rangle)^{1/2} \leq (\langle x, x\rangle)^{1/2} + (\langle y, y\rangle)^{1/2} \, .$$

Preuve On sait que :

$$\begin{cases} \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ \operatorname{Re} \langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \sqrt{\langle y, y\rangle} \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\langle x + y, x + y\rangle \leq \left(\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2$$

alors

$$\|x+y\| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \blacksquare$$

Formule de polarisation. Dans un espace de Hilbert on peut définir le produit scalaire à partir de sa associe. La formule suivante est dite de *Polarisation* qui montre ça.

Théorème 1.3. Pour tout x et y qui appartiennent à un espace de Hilbert, nous avons

$$4\langle x,y\rangle = \begin{cases} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2, \text{ si } \mathbb{K}=\mathbb{R}. \\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2, \text{ si } \mathbb{K}=\mathbb{C}. \end{cases}$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle . \\ -\|x+y\|^2 &= -\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \langle y,y\rangle . \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i\|x+iy\|^2 &= i\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + i\langle y,y\rangle . \\ -i\|x-iy\|^2 &= -i\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle - i\langle y,y\rangle . \end{aligned}$$

En ajoutant ces quatre relations, nous obtenons. $\blacksquare$

1.2 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.4. *Soient X, Y deux espaces de Banach et $u : X \to Y$ une application. Elle est linéaire si*

1) $\forall x, y \in X : u(x+y) = u(x) + u(y)$.

2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

On note $L(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires, on le muni de deux opérations algébriques suivantes

1) $\forall x \in X : (u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x)$.

2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda u)(x) = \lambda u(x)$.

Définition 1.5. *Soit $u \in L(X,Y)$. L'application linéaire u est continue s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall x \in E : \|u(x)\| \leq C \|x\|.$$

On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues où sa norme des opérateurs est donnée par

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|.$$

Cas particulier (Espace dual). Si $Y = \mathbb{K}$, l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ est dit le *dual topologique* de X, on le note généralement X^*.

L'opérateur adjoint. Soient X, Y deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, on définit l'opérateur adjoint de T par :

$$\begin{array}{rccc} T^* : & Y & \to & X \\ & y & \mapsto & \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle \end{array}$$

Proposition 1.6. *Soient X, Y deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ tel que $\forall x \in X, \forall y \in Y$ on a :*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

de plus :

$$\|T\| = \|T^*\| .$$

Représentation de Riesz. Soit H un espace de Hilbert. Pour tout vecteur y de H, la forme linéaire qui à x associe $< y, x >$ est continue sur H (sa norme est égale à celle de y, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Le théorème de Riesz énonce la réciproque : toute forme linéaire continue sur H s'obtient de cette façon.

Théorème 1.7. *Soient H un espace de Hilbert et u une forme linéaire sur H. Alors, il existe un élément unique $a \in H$ tel que*

$$\forall x \in H : u(x) = \langle a, x \rangle .$$

Proposition 1.8. *Soit H un espace de Hilbert sur K. Alors $H = H^*$.*

Comme conséquence immédiate de cette propostion est la reflexifité d'un espace de Hilbert.

Corollaire 1.9. *Tout espace de Hilbert est réflexif, i.e., $H = H^{**}$.*

1.3 Caractérisation d'un espace de Hilbert

Cette partie est consacrée à donner une caractérisation d'un espace de Hilbert. En effet, soit H un espace de Banach quelconque, on définit l'identité du parallélogramme par

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \tag{1.2}$$

qui signifie que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des diagonales Le théorème dû à Jordan-Von-Neumann en 1935 donne une caractrisation en utilisant cette dernière identité.

Théorème 1.10.. *Un espace de Banach est un espace de Hilbert si et seulement si sa norme vérifie l'égalité du parallélogramme.*

Preuve. Soit H un espace de Hilbert. On vérifie l'identité (1.2). On sait que

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle . \\ \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle . \end{aligned}$$

ce qui donne le résutat.

Inversement on va montrer que si la norme $\|.\|$ de H vérifie l'identité du parallélogramme, alors elle est induite d'un produit scalaire. On pose

$$4\langle x, y\rangle = \begin{cases} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}. \\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2, \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

qui est bien un produit scalaire sur H. ■

1.4 Les espaces de suites ℓ_p

Définition 1.11. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de R et $p \in [1, +\infty[$. On définit l'ensemble ℓ_p par*

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Si $p = \infty$, on définie ℓ_∞ par

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

On munit ℓ_p de la norme suivante

1. Si $1 \leq p < \infty$: $\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.
2. Si $p = \infty$, $\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Théorème 1.12. *(L'espace ℓ_2). L'espace $\ell_2$est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n.$$

Théorème 1.13 *(Espace dual). Soit $1 \leq p < +\infty$. On a*

$$(\ell_p)^* = \ell_{p^*}$$

avec p^* est le conjugué de p, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Proposition 1.14. *Soit $1 < p < +\infty$. L'espace ℓ_p est reflexif, i.e.,*

$$(\ell_p)^{**} = \ell_p.$$

Proposition 1.15 (*comparaison entre les espaces*). *Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Nous avons les inclusions suivantes*

$$\ell_1 \subset ... \subset \ell_p \subset \ell_q \subset ...\ell_\infty.$$

1.5 Espaces $\mathcal{L}_p$

Commençons par rappeler la définition des espaces $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, introduite par Lindenstrauss et Pelczynski dans leur article : "*Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications*". Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $\lambda > 1$. Un espace de Banach X est dit espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ si pour tout sous espace de dimension finie $E \subset X$ il existe $F \subset X$ contenant E et un isomorphisme $u : F \longrightarrow l_p^{\dim F}$ satisfaisant $\|u\| \|u^{-1}\| < \lambda$. On dit que X est un espace $\mathcal{L}_p$ si c'est un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ pour un certain $\lambda > 1$. Soit $(\Omega; \mu)$ un espace mesuré ; pour

$1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Lebesgue $L_p(\mu)$ sont des espaces $\mathcal{L}_p$. L'espace $C(K)$ des fonctions continues sur un compact K est un espace $\mathcal{L}_\infty$.

Définition 1.16. (*Sous espace complémenté*) *Soit X un espace de Banach et Y un sous espace fermé de X. On dit que Y est complémenté de X s'il existe un sous espace fermé Z tel que*

$$X = Y \oplus Z$$

Le sous espace fermé Z s'appel le complément de Y.

Théorème 1.17. *Un sous espace fermé Y d'un espace de Banach X est compémenté de X si, et seulement si, est l'image d'une projection continue de X.*

Exemples.

(1) Tout sous espace fermé d'un espace de Hilbert H est complémenté dans H.

(2) Les l_p^n sont complémentés dans l_p.

Proposition 1.18. [Bou 81]

(1) *Si $1 < p < \infty$ et X est un espace $\mathcal{L}_p$, alors X est isomorphique à un sous espace complémenté de $L_p(\mu)$.*

(2) *Si X est un espace $\mathcal{L}_1$ (resp. $\mathcal{L}_\infty$), alors X^{**} est isomorphique à un sous espace complémenté de $L_1(\mu)$ (resp. $C(K)$).*

Inversement, si X est un sous espace complémenté de L_p $(1 < p < \infty)$, alors X est un epace $\mathcal{L}_p$ ou bien isomorphe à un espace de Hilbert.

Proposition 1.19. [Bou 81]

(1) *Si X est un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ pour tout $\lambda \geq 1$, alors X est un $L_p(\mu)$.*

(2) *Tout espace de Hilbert est un espace $\mathcal{L}_{2,\lambda}$ pour tout $\lambda \geq 1$*

1.6 Les opérateurs linéaires p-sommants

La définition des opérateurs linéaires p-sommants a été introduite Grothendieck pour $p = 1$, et généralisée au cas général par Pietcsh [Pie67](peut voir aussi [DJT95]).

Définition 1.20. *Soient* X, Y *deux espaces de Banach* $u \in \mathcal{B}(X;Y)$. *On dira que* u *est p-sommants pour* $1 \leq p < \infty$, *s'il existe une constante* $C > 0$, *telle que pour tout* $x_1, ..., x_n \in X$ *on a*

$$(\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^\star}} (\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{1.22}$$

On note $\Pi_p(X;Y)$ *l'espace de Banach des opérateurs linéaires p-sommants de* X *dans* Y *muni de la norme* $\pi_p(u) = \inf\{C,$ *vérifiant (1.22)* $\}$.

Théorème de factorisation de Pietsch. *Soient* $1 \leq p < \infty$ et $u : X \longrightarrow Y$ *un opérateur linéaire p-sommants si et seulement s'il existe une probabilité de radon* λ *sur* $(B_{X^\star},\ \sigma(X^\star, X))$ *telle que*

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq \pi_p(u) \|x\|_{L_p(B_{X^*},\lambda)}.$$

Corollaire.1.21 (Cas $p = 2$). Si $T \in \Pi_p(X, Y)$, alors, u se factorise par un Hilbert, i.e., $u = v_1 v_2$ tels que $v_2 \in \Pi_p(X; H)$ et $v_1 \in \mathcal{B}(H; Y)$.

Théorème 1.22 (*Théorème d'inclusion*). *Si* $1 \leq p < q < \infty$, *alors*

$$\Pi_p(X;Y) \subseteq \Pi_q(X;Y).$$

De plus, on a $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$ *pour tout* $u \in \Pi_p(X;Y)$.

Théorème 1.23 (*Le théorème de Grothendieck*). *Si X un espace $\mathcal{L}_1$ et Y un espace de Hilbert, alors,*

$$\mathcal{B}\left(X;Y\right)=\Pi_1\left(X;Y\right).$$

Théorème 1.24 (*Le petit théorème de Grothendieck*). *Soient X un espace $\mathcal{L}_\infty$ et Y un espace $\mathcal{L}_p$ avec $1\leq p\leq 2$. Tout opérateur borné de X dans Y est 2-sommants. i.e.,*

$$\mathcal{B}\left(X;Y\right)=\Pi_2\left(X;Y\right).$$

(Pour la généralisation des théorèmes de Grothendieck au cas multilinéaire voir [BGV04]).

1.7 Exemple fondamental d'opérateurs p-sommants

1) Soit $\mathbb{K}$ un compact, μ une mésure régulière sur $\mathbb{K}$ et soit $1\leq p<+\infty$. Pour chaque $\varphi\in L_p(\mu)$, on définit l'opérateur de multiplication :

$$\begin{array}{rccc} T_\varphi: & C(\Bbbk) & \rightarrow & L_p(\mu) \\ & f & \mapsto & T_\varphi(f)=f.\varphi \end{array}$$

Cet opérateur est p-sommants, de plus : $\pi_p(T_\varphi)=\left\|\varphi\right\|_{L_p}$.

2) L'opérateur canonique :

$$\begin{array}{rccc} \partial_p: & C(\Bbbk) & \rightarrow & L_p(\mu) \\ & f & \mapsto & f \end{array}$$

est p-sommants, de plus : $\pi_p(\partial_p)=\mu(\Bbbk)^{\frac{1}{p}}$. Soit $\{f_1,...,f_n\}\subset C(\Bbbk)$, a chaque point $\omega\in\Bbbk$, correspant un point de masse $\delta_\omega\in C(\Bbbk)^*$ donné par : $\langle\delta_\omega,f\rangle=f(\omega)$. Les points de masse forment un sous ensemble de $C(\Bbbk)^*$.(δ_ω est la mésure de Dirac).

$$\begin{aligned}\sup_{\xi\in B_{C(\Bbbk)^*}}(\sum_{k=1}^n|\langle\xi,f_k\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\omega\in\mathbb{K}}(\sum_{k=1}^n|\langle\delta_\omega,f_k\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}\\ &= \sup_{\omega\in\Bbbk}(\sum_{k=1}^n|f_k(\omega)|^p)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left\|(\sum_{k=1}^n|f_k(\omega)|^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_\infty\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}(\sum_{k=1}^n|T_\varphi(f_k)|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{k=1}^n\|f_k\varphi\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}}\\ &= (\sum_{k=1}^n\int_{\mathbb{K}}|f_k\varphi|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}\\ &= (\int_{\mathbb{K}}\sum_{k=1}^n|f_k|^p\,|\varphi|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \sup_{\omega\in\mathbb{K}}(\sum_{k=1}^n|f_k(\omega)|^p)^{\frac{1}{p}}(\int_{\mathbb{K}}|\varphi|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}\\ &= \|\varphi\|_{L_p(\mu)}\sup_{\xi\in B_{C(\mathbb{K})^*}}(\sum_{k=1}^n|\langle\xi,f_k\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

donc T_φ est p-sommants et $\pi_p(T_\varphi)\leq\|\varphi\|_{L_p}$. Et aussi on a : $\pi_p(T_\varphi)\geq\|T_\varphi\|\geq\|\varphi\|_{L_p}$, alors $\pi_p(T_\varphi)=\|\varphi\|_{L_p}$.

1.8 Les opérateurs linéaires fortement p-sommants

Définition 1.25. *Soit $T:X\to Y$ un opérateur linéaire entre deux espaces de Banach. L'opérateur T est Cohen fortement p-sommants $(1<p\leq\infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n\in\mathbb{N},x_1,...,x_n\in X$ et $y_1^*,...,y_n^*\in Y^*$, on a :*

$$\sum_{i=1}^n|\langle T(x_i),y_i^*\rangle|\leq C(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}\sup_{y\in B_Y}\|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n}$$

la plus petite constante C notée $d_p(T)$ tel que l'inégalité précésente a lieu, définit la norme fortement p-sommants sur l'espace de Banach $\mathcal{D}_p(X;Y)$ des opérateurs Cohen fortemant p-sommants de X dans Y.

Proposition 1.26 [Coh73] . *Si $p = 1$, alors l'espace $\mathcal{D}_1(X;Y)$ coïncide avec $\mathcal{B}(X;Y)$.* De plus, les résultats suivants dû à Cohen :

1. $\mathcal{D}_{p^*}(X,Y) \neq \Pi_p(X,Y)$, *en général.*
2. $T \in \mathcal{D}_p(X,Y)$ *si, et seulement si,* $T^{**} \in \mathcal{D}_p(X^{**},Y^{**})$.
3. *Pour* $p_1 \leq p_2$, *nous avons :* $\mathcal{D}_{p_2}(X,Y) \subseteq \mathcal{D}_{p_1}(X,Y)$.
4. *Soit* $1 \leq p < \infty$; $\Pi_p(X,Y) \subseteq \mathcal{D}_{p^*}(X,Y)$, *lorsque X est un espace* $\mathcal{L}_{p^*}$.
5. *Soit* $1 \leq p < \infty; \mathcal{D}_{p^*}(X,Y) \subseteq \Pi_p(X,Y)$, *lorsque Y est un espace* $\mathcal{L}_p$.
6. *Soit* $1 \leq p < \infty; \mathcal{D}_{p^*}(X,Y) = \Pi_p(X,Y)$,*lorsque X est un espace $\mathcal{L}_{p^*}$ et Y est un espace $\mathcal{L}_p$.*

Théorème de factorisation de Pietsch. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire, et $C > 0$ une constante. Alors les propriétés suivante sont équivalentes :*

1. *T est p-sommants, et $\pi_p(T) \leq C$.*
2. *Il existe une probabilité μ sur $\mathbb{k} = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$, tel que :*

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_{\mathbb{k}} |\langle \xi, x\rangle|^p \, d\mu(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}$$

1.9 Théorème de Kwapień dans le cas linéaire

Théorème 1.27 [Kwa70]. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *X est isomorphe à un espace de Hilbert.*

(2) *Pour tout espace de Banach Y,* $\Pi_2(X;Y) \subseteq \mathcal{D}_2(X;Y)$.

(3) *Pour tout espace de Banach Y,* $\mathcal{D}_2(Y;X) \subseteq \Pi_2(Y;X)$.

Pour la démonstration, nous avons besoin des Lemmes suivants.

Lemme 1.28. [Coh73, Théorème 4.2.2.(ii)] Soit H un espace de Hilbert. Pour $1 < p, q < \infty$, nous avons

$$\Pi_p(H;Y) \subseteq \mathcal{D}_q(H;Y).$$

Lemme 1.29 [Coh73]. Soient X, Y deux espaces de Banach. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(1) L'opérateurs T est dans $\mathcal{D}_p(X;Y)$.

(2) L'opérateur adjoint T^* est dans $\Pi_{p^*}(Y^*;X^*)$.

Preuve.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Supposons que $T \in \mathcal{D}_p(X;Y)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|T^*(y^*)\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} |T^*(y^*)(x)| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), y^*\rangle| \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} d_p(T)\|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq d_p(T) \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

C'est à dire, $T^* \in \Pi_{p^*}(Y^*;X^*)$ et $\pi_{p^*}(T^*) \leq d_p(T)$.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Supposons que T^* est dans $\Pi_{p^*}(Y^*;X^*)$. Alors

$$\begin{aligned}
|\langle T(x), y^*\rangle| &= |T^*(y^*)(x)| \\
&\leq \|T^*(y^*)\| \|x\|.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs linéaires p^*-sommants, on trouve

$$|\langle T(x), y^*\rangle| \leq \pi_{p^*}(T^*)\|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

On conclut que T est fortement p-sommants et $d_p(T) \leq \pi_{p^*}(T^*)$. $\blacksquare$

Remarque 1.30. On peut facilement montrer l'inverse de ce dernier lemme. i.e.,

(1) L'opérateurs T est dans $\Pi_p(X;Y)$.

(2) L'opérateur adjoint T^* est dans $\mathcal{D}_{p^*}(Y^*;X^*)$.

Preuve de Théorème de Kwapień.

(1) $\implies$ (2) Par le théorème de Cohen.

(2) $\implies$ (1) *Préliminaire* : Soit $K = B_{X^*}$ muni de la topologie $*$-faible. Soit $(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}} \subset C(K)^*$ telle que $\left\|(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_{l_2^w(C(K)^*)} \leq 1$. On lui associe l'application linéaire

$$u : C(K) \to l_2$$

définie par $u(x) = (\langle x, x_i^* \rangle)_{i\in\mathbb{N}}$. L'application u est bornée car

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} (\sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle x, x_i^* \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} = \|(x_i^*)\|_{l_2^w(C(K)^*)} \leq 1.$$

D'après le petit théorème de Grothendieck, elle est 2-sommants, ce qui implique que

$$u \circ i_X : X \to C(K) \to l_2$$

est 2-sommante, donc Cohen fortement 2-sommants, i.e, $i_X^* \circ u^*$ est 2-sommants. Montrons à l'aide du Préliminaire que $i_X^* \in \Pi_2(C(K)^*; X^*)$. Soit $(x_i^*) \in l_2^w(C(K)^*)$ et soit u associée à (x_i^*) comme ci-dessus. Alors $x_i^* = u^*(e_i)$, donc

$$(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|i_X^*(x_i^*)\|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i\in\mathbb{N}} \|i_X^* \circ u^*(e_i)\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \pi_2(i_X^* \circ u^*) < \infty,$$

et par conséquent i_X^* est 2-sommants. Il existe donc un espace de Hilbert H tel que

$$i_X^* = v_1 \circ v_2 : C(K)^* \xrightarrow{v_2} H \xrightarrow{v_1} X^*$$

Comme i_X^* est sujective, v_1 est aussi surjective. D'après le théorème de l'application ouverte, X^* est isomorphe à l'espace quotient $\frac{H}{Ker(v_1)}$, donc à un Hilbert.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Facile à voire. $\blacksquare$

Chapitre 2

Caractérisation multilinéaire des espaces de Hilbert

On commence ce chapitre par un survol sur les opérateurs multilinéaires. Puis on introduit sur cette catégorie quelque définitions de sommabilité qui sont les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants, p-dominés et fortement p-sommants de Dimant. On termine ce chapitre en exposant les résultats de caractérisation version multilinéaire des espaces de Hilbert.

2.1 Les opérateurs multilinéaires

La généralisation de concept des opérateurs sommants au cas multilinéaire produite plusieurs définitions et espaces différents. En fait, une grande étude a été faite dans cette direction et beuacoup de travaux qui sont consacrés à explorer et trouver des liens entre ces espaces.

Opérateurs multilinéaires. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. L'opérateur $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ est dit *multilinéaire* ou *m-linéaire* s'il est linéaire par rapport à chaque composante. Il est borné (continu) s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, ..., x_m) \in X_1 \times ... \times X_m$, on a

$$\|T(x_1, ..., x_m)\| \leq C \|x_1\| ... \|x_m\| \tag{2.1}$$

On note $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m-linéaires bornée qui est Banach dont sa norme est la plus petite constante vérifiant (2.1). Elle peut s'exprimer par

$$\|T\| = \sup_{\|x_j\| \leq 1; 1 \leq j \leq m} \|T(x_1, ..., x_m)\|.$$

Opérateur adjoint. A chaque opérateur multilinéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ on associe l'opérateur *adjoint* suivant

$$T^* : Y^* \to \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$$

qui est définie par $y^* \to T^*(y^*) : X_1 \times ... \times X_m \to \mathbb{K}$ où $T^*(y^*)(x^1, ..., x^m) = y^*(T(x^1, ..., x^m))$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Produit tensoriel projectif. Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach. On note $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ le produit tensoriel algébrique de $X_1, ..., X_m$. On définit la norme projective par

$$\|v\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\| \right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de v de la forme

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m.$$

On note $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ le produit tensoriel projectif des espaces $X_1, ..., X_m$ i.e.; le complété de $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ pour cette norme. Si $X_1 = ... = X_m = X$ on écrit simplement $\widehat{\otimes}_\pi^m X$.(Pour plus de détails voir [DF93])

Opérateur linéairisé. A chaque opérateur multilinéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ on peut lui associer un opérateur linéaire, appelé *linéarisation de* T, $\widetilde{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \to Y$ défini par

$$\widetilde{T}(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m) = \sum_{i=1}^{n} T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right).$$

Il est bien défini, car il ne dépend pas de repésentation choisie. De plus, $\widetilde{T}$ est unique et $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$.

On a aussi

$$\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) = \mathcal{B}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right),$$

car l'application

$$\begin{array}{rcccc} \Phi & : & \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) & \to & \mathcal{B}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right) \\ & & T & \to & \Phi\left(T\right) = \widetilde{T} \end{array}$$

est une isométrie surjective.

Cas particulier. Le dual de $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ s'identifie à l'espace des formes multilinéaires bornées

$$\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m\right)^* = \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m\right).$$

2.2 Classes d'opérateurs multilinéaires

On expose dans ce paragraphe les trois notions qu'on a besoin dans la suite. Commençons par la classe des opérateurs multilinéaires fortement p-sommants puis la classe des opérateurs p-dominés et finalement la classe des opérateurs multilinéaires fortement p-sommants de Dimant.

2.3 Opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants

Les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants ont été introduite par Achour et Mezrag en 2007 comme généralisation des opérateur linéaires fortement p-sommants.

Définition 2.1. Un opérateur m-linéaire $T : X_1, ..., X_m \to Y$ $(X_j\,; Y$ sont des espaces de Banach et $m \in \mathbb{N})$ est Cohen fortement p-sommants, $1 \leq p \leq \infty$ si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$, $(j = 1, ..., m)$, et tout $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p)^{1/p} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{\ell_{p^*}^n}. \tag{2.2}$$

La classe des opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, qui est notée $\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$d_p^m(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité (2.2)}\}$$

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_1^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ et si $\dim Y \leq \infty$ alors

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y).$$

Proposition 2.2. *Soient $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, $R \in \mathcal{B}(Y; Z)$ et $S_j \in \mathcal{B}(E_j; X_j)$ $(1 \leq j \leq \infty)$. Si T est Cohen fortement p-sommants, alors $R \circ T \circ (S_1, ..., S_m)$ est Cohen fortement p-sommants et*

$$d_p^m(R \circ T \circ (S_1, ..., S_m)) \leq \|R\| \, d_p^m(T) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\|.$$

Preuve. On montre que $R \circ T \circ (S_1, ..., S_m) \in \mathcal{D}_p^m(E_1, ..., E_m; Z)$ oú $\left(x_i^j\right)_{i \in \mathbb{N}} \subset E_j(1 \leq j \leq m)$ et $(z_i^*)_{i \in \mathbb{N}} \subset Z^*$.

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle R\circ T\circ (S_1,...,S_m), z_i^*\right\rangle\right| \\
= \;& \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\circ (S_1,...,S_m), R^*\left(z_i^*\right)\right\rangle\right| \\
\leq \;& d_p^m(T)(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\|S_j(x_i^j)\right\|_{X_j}^p)^{1/p}\sup_{y\in B_Y}(\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle R^*\left(z_i^*\right), y\right\rangle\right|^{p^*})^{1/p^*} \\
\leq \;& d_p^m(T)\prod_{j=1}^{m}\left\|S_j\right\|(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|_{X_j}^p)^{1/p}\sup_{y\in B_Y}(\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle z_i^*, R\left(y\right)\right\rangle\right|^{p^*})^{1/p^*} \\
= \;& \left\|R\right\| d_p^m(T)\prod_{j=1}^{m}\left\|S_j\right\|(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|_{X_j}^p)^{1/p}\sup_{y\in B_Y}(\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle z_i^*, \tfrac{R(y)}{\|R\|}\right\rangle\right|^{p^*})^{1/p^*} \\
= \;& \left\|R\right\| d_p^m(T)\prod_{j=1}^{m}\left\|S_j\right\|(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|_{X_j}^p)^{1/p}\sup_{z\in B_Z}(\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle z_i^*, z\right\rangle\right|^{p^*})^{1/p^*}
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne

$$d_p^m(R\circ T\circ (S_1,...,S_m)) \leq \left\|R\right\| d_p^m(T)\prod_{j=1}^{m}\left\|S_j\right\|. \quad \blacksquare$$

Théorème de domination de Pietsch. *Un opérateur m-linéaire $T\in\mathcal{L}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$ est Cohen fortement p-sommants,* $(1 < p \leq \infty)$ *s'il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ telle que pour tout $(x^1,...,x^m)\in X_1,...,X_m$* et $y^*\in Y^*$, *on a*

$$\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right), y_i^*\right\rangle\right| \;\leq\; C\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|\left(\int_{B_{Y^{**}}}\left|y(y^*)\right|^{p^*}d\mu(y^*)\right)^{1/p^*}$$

Preuve. Pour la preuve de ce théorème voir [AMez07]

Corollaire 2.3 [AMez07]**.** Soient $1\leq p_1,p_2<\infty$ tels que $p_1\leq p_2$. Si $T\in\mathcal{D}_{p_2}^m(X_1,...,X_m;Y)$ alors T est dans $\mathcal{D}_{p_1}^m(X_1,...,X_m;Y)$ et $d_{p_1}^m(T)\leq d_{p_2}^m(T)$.

Proposition 2.4 [Saa10]**.** *Soient $X_1,...,X_m,Y$ des espaces des Banach et $1\leq p\leq +\infty$.Alors,l'idéal multilinéaire $\mathcal{D}_p^m$ est engendré par la méthode de composition à partir de l'idéal linéaire $\mathcal{D}_p$*

$$\mathcal{D}_p^m(X_1,...,X_m;Y) = \mathcal{D}_p\circ\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y).$$

Proposition 2.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ et $\tilde{T} : X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m \to Y$ sa linéarisation. Alors les propriétés suivantes sont équivalents :*

(1) . $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$.

(2) . $\tilde{T} \in \mathcal{D}_p(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$.

Preuve. On suppose que $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left| \left\langle \tilde{T}\left(x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| &= \sum_{i=1}^n \left| \left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \right\rangle \right| \\
&\leq d_p^m(T) \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^m \left\| x_i^j \right\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} \left| \langle y_i^*, y \rangle \right|^{p^*} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p^*}} \right) \\
&\leq d_p^m(T) \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left\| x_i^j \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} \left| \langle y_i^*, y \rangle \right|^{p^*} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq d_p^m(T) \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left\| x_i^j \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \langle y_i^*, y \rangle \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \mu(B_{Y^{**}})^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq d_p^m(T) \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left\| x_i^j \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| y_i^*(y) \right\|_{l_{p^*}^n}
\end{aligned}$$

ce qui implique : $\tilde{T} \in \mathcal{D}_p(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$ et aussi : $d_p(\tilde{T}) \leq d_p^m(T)$.

Inversement : supposons que $\tilde{T} \in \mathcal{D}_p(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left| \left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \right\rangle \right| &= \sum_{i=1}^n \left| \left\langle \tilde{T}\left(x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| \\
&\leq d_p(\tilde{T}) \left(\sum_{i=1}^n \left\| x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| y_i^*(y) \right\|_{l_{p^*}^n} \\
&\leq d_p(\tilde{T}) \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left\| x_i^j \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| y_i^*(y) \right\|_{l_{p^*}^n}
\end{aligned}$$

alors $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ et aussi : $d_p^m(T) \leq d_p(\tilde{T})$.

2.4 Opérateurs multilinéaires p-dominés

Définition 2.6. *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ un opérateur m-linéaire borné. On dira que T est p-dominés $(1 \leq p < \infty)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$, $(j = 1, ..., m)$, on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^{p/m}\right)^{m/p} \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\|\left(x_i^j\right)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{\ell_p^{n,w}(X_j)}. \tag{2.3}$$

On note $\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m-linéaires p-dominés de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y. Pour $p < m$, $\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$ est un quasi-Banach pour la quasi-norme $\delta_p(T)$, définie par

$$\delta_p(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité } (2.3)\}$$

Si $p > m$, $\delta_p(T)$ est une norme sur $\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$.

Remarque 2.7. La classe des opérateurs m-linéaires p-dominés est un multi-idéal. Sa construction peut s'interpréter par la méthode de factorisation. i.e.,

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(\Pi_p)(X_1, ..., X_m; Y),$$

Théorème de factorisation (domination) de Pietsch. *Soient $1 \leq p < \infty$; $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur T est p-dominés.*

(2) *Il existe une constante positive C et des probabilités de Radon μ_j sur $K_j = B_{X_j^*}, (j = 1, ..., m)$ telles que*

$$\|T(x^1, ..., x^m)\| \leq C \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{B_{X_j^*}} |x^j(x^*)|^p \, d\mu_j(x^*)\right)^{1/p}, \tag{2.4}$$

pour tout $x^j \in X_j$. De plus, on a

$$\delta_p(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité } (2.4)\}.$$

2.5 Opérateurs multilinéaires fortement p-sommants

Cette classe d'opérateurs a été introduite par Dimant en 2003.

Définition 2.8. Soit $1 \leq p < \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. L'opérateur T est fortement p-sommants s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$, $(j = 1, ..., m)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i^1, ..., x_i^m)|^p\right)^{1/p}. \tag{2.5}$$

La classe des opérateurs m-linéaires fortement p-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, notée $\mathcal{L}_s^p(X_1, ..., X_m; Y)$; est un espace de Banach pour la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}_s^p} = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité (2.5)}\}.$$

Théorème 2.9 [Dim03] . *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'opérateur T est fortement p-sommants.*

(ii) *Il existe une mesure de probabilité de Radon μ sur $\left(B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}, w^*\right)$ et une constante positive $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, ..., x_m)$ dans $X_1 \times ... \times X_m$, on a*

$$\left\|T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \leq C\left(\int_{B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}} \left|\Phi\left(x^1, ..., x^m\right)\right|^p d\mu(\Phi)\right)^{1/p}.$$

Proposition 2.10 [Dim03]. *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.*

(1) *l'espace $\mathcal{L}_s^p(X_1, ..., X_m; Y)$ est un idéal de Banach.*

(2) *Si $\widetilde{T}$ est p-sommants, alors T est fortement p-sommants.*

Proposition 2.11. *Soient $X_1, ..., X_m$, $E_1, ..., E_m$,Y ; Z des espaces de Banach. Soient $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, $R \in \mathcal{L}(Y; Z)$ et $S_j \in \mathcal{L}(E_j; X_j)$ $(1 \leq j \leq \infty)$.*

(1) *Si* T *est fortement* p*-sommants, alors* $R \circ T$ *est fortement* p*-sommants et*

$$\|R \circ T\|_{\mathcal{L}_s^p} \leq \|R\| \, \|T\|_{\mathcal{L}_s^p}.$$

(2) *Si* T *est fortement* p*-sommants, alors* $T \circ (S_1, ..., S_m)$ *est fortement* p*-sommants et*

$$\|T \circ (S_1, ..., S_m)\|_{\mathcal{L}_s^p} \leq \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| \, \|T\|_{\mathcal{L}_s^p}.$$

Preuve.

(1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x^1, ..., x^m \in X_j$, tel que $j = 1, ..., m$

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \|R \circ T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p)^{1/p} &\leq \|R\| (\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p)^{1/p} \\
&\leq \|R\| \, \|T\|_{\mathcal{L}_s^p} \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i^1, ..., x_i^m)|^p)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Alors $R \circ T$ est fortement p-sommants et $\|R \circ T\|_{\mathcal{L}_s^p} \leq \|R\| \, \|T\|_{\mathcal{L}_s^p}$.

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(e^1, ..., e^m) \in E_1, ..., E_m$. On a

$$\begin{aligned}
& (\sum_{i=1}^{n} \|T \circ (S_1, ..., S_m)(e_i^1, ..., e_i^m)\|^p)^{1/p} \\
= & (\sum_{i=1}^{n} \|T \circ (S_1(e_i^1), ..., S_m(x_i^m))\|^p)^{1/p} \\
\leq & \|T\|_{\mathcal{L}_s^p} \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |\Phi(S_1(e_i^1), ..., S_m(x_i^m))|^p)^{1/p} \\
= & \|T\|_{\mathcal{L}_s^p} \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |\Phi(S_1, ..., S_m)(e_i^1, ..., e_i^m)|^p)^{1/p} \\
\leq & \|T\|_{\mathcal{L}_s^p} \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| \sup_{\gamma \in B_{\mathcal{L}(E_1, ..., E_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |\gamma(e_i^1, ..., e_i^m)|^p)^{1/p},
\end{aligned}$$

tel que $\gamma = \frac{\Phi(S_1, ..., S_m)}{\Pi_{j=1}^{m} \|S_j\|}$. Ce qui entraîne,

$$\|T \circ (S_1, ..., S_m)\|_{\mathcal{L}_s^p} \leq \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| \, \|T\|_{\mathcal{L}_s^p}. \quad \blacksquare$$

Théorème 2.12 (*Théorème d'inclusion*). *Si* $1 \leq p \leq q < \infty$, *alors*

$$\mathcal{L}_s^p (X_1, ..., X_m; Y) \subset \mathcal{L}_s^q (X_1, ..., X_m; Y) \;\; et \;\; \|T\|_{\mathcal{L}_s^p} \leq \|T\|_{\mathcal{L}_s^q} .$$

2.6 Théorème de Kwapień dans le cas multilinéaire.

Le théorème suivant est une généralisation naturelle du théorème de Kwapień au cas multilinéaire.

Théorème 2.13 [Saa10]**.** *Fixons* $m \geq 2$. *Soient* X_j $(1 \leq j \leq m)$ *des espaces de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *Les espaces* $X_1, ..., X_m$ *sont isomorphes aux espaces de Hilbert.*
(2) *Pour tous* $1 < p, q < \infty$, et *tout espace de Banach* Y,

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_q^m(X_1, ..., X_m; Y).$$

(3) *Pour tout espace de Banach* Y, $\mathcal{L}_d^2(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_2^m(X_1, ..., X_m; Y)$.

Preuve

(1) $\Longrightarrow$ (2) est immédiate par le théorème de Bu multilinéaire.

(2) $\Longrightarrow$ (3) est évidente.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Soit $1 \leq j \leq m$. Soit $u \in \Pi_2 (X_j; Y)$, on va montrer que $u \in \mathcal{D}_2 (X_j; Y)$. Pour $1 \leq k \leq m$ $(k \neq j)$ on fixe $x^k \in B_{X_k}$ et $x_k^* \in B_{X_k^*}$ tels que $x_k^* \left(x^k\right) = 1$. Vérifions que l'opérateur multilinéaire

$$T = x_1^* \otimes ... \otimes u \otimes ... \otimes x_m^* : X_1 \times ... \times X_m \to Y$$

appartient à $\mathcal{L}_d^2(X_1, ..., X_m; Y)$. En effet,

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(g_i^1, ..., g_i^m\right) \right\|^{\frac{2}{m}})^{\frac{m}{2}} &= (\sum_{i=1}^{n} \left| x_1^*\left(g_i^1\right) \right|^{\frac{2}{m}} ... \left\| u\left(g_i^j\right) \right\|^{\frac{2}{m}} ... \left| x_m^*\left(g_i^m\right) \right|^{\frac{2}{m}})^{\frac{m}{2}} \\
&\leq (\sum_{i=1}^{n} \left| x_1^*\left(g_i^1\right) \right|^2)^{\frac{1}{2}} ... (\sum_{i=1}^{n} \left\| u\left(g_i^j\right) \right\|^2)^{\frac{1}{2}} ... (\sum_{i=1}^{n} \left| x_m^*\left(g_i^m\right) \right|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \pi_2(u) \left\| \left(g_i^1\right) \right\|_{l_2^{n,w}} ... \left\| \left(g_i^m\right) \right\|_{l_2^{n,w}}.
\end{aligned}$$

Alors, par hypothèse, $T \in \mathcal{D}_2^m(X_1, ..., X_m; Y)$. Sa linéarisation $\tilde{T}$ est donc Cohen fortement 2-sommants. Posons $v : X_j \to X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$, définie par

$$v = x^1 \otimes ... \otimes id_{X_j} \otimes ... \otimes x^m.$$

Alors $u = \tilde{T} \circ v$ est Cohen fortement 2-sommants. Par le théorème de Kwapień, X_j est isomorphe à un Hilbert. ■

Théorème 2.14 [Saa10]**.** *Fixons $m \geq 2$. Soit Y un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *Y est isomorphe à un espace de Hilbert.*

(2) *Pour tous espaces de Banach $X_1, ..., X_m$* et tous $1 < p, q < \infty$,

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^q(X_1, ..., X_m; Y).$$

(3) *Pour tous espaces de Banach $X_1, ..., X_m$; $\mathcal{D}_2^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^2(X_1, ..., X_m; Y)$.*

Preuve

(1) $\Longrightarrow$ (2) Soit $Y = H$ un espace de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; H)$; T^* est p^*-sommants par la proposition (2.5). Le théorème linéaire de Bu [Bu03], entraine que

$$T^* \in \mathcal{D}_{q^*}(H; (X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*), 1 < q^* < \infty.$$

Alors $T \in \mathcal{L}_s^q(X_1, ..., X_m; Y)$. Ce résultat reste vrai si Y est isomorphe à un Hilbert.

(2) $\Longrightarrow$ (3) est évidente.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Soit X un espace de Banach et $u : X \to Y$ un opérateur Cohen 2-sommants. Pour $2 \leq j \leq m$ on considère $x^j \in B_{X_j}$ et $x_j^* \in B_{X_j^*}$ tels que $x_j^*(x^j) = 1$. Il est facile de voir que l'opérateur multilinéaire

$$T = u \otimes x_2^* \otimes ... \otimes x_m^* : \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \to Y$$

est Cohen fortement 2-sommants. Alors, par hypothèse, $T \in \mathcal{L}_s^2(X, ..., X; Y)$. Donc, pour $g^1, ..., g^n \in X$

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^n \left\|u\left(g^i\right)\right\|^2)^{\frac{1}{2}} &= (\sum_{i=1}^n \left\|T\left(g^i, x^2, ..., x^m\right)\right\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X,...,X)}} (\sum_{i=1}^n \left|\Phi\left(g^i, x^2, ..., x^m\right)\right|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^n \left|x^*\left(g^i\right)\right|^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

puisque $x \to \Phi(x, x^2, ..., x^m)$ est une forme linéaire sur X de norme ≤ 1, donc $u \in \Pi_2(X; Y)$. Par la forme dual du théorème de Kwapień, Y est isomorphe à un Hilbert.■

Notons que l'implication (3) $\Longrightarrow$ (1) de ce théorème est un cas particulier du théorème 3.5 qui va suivre.

Corollaire 2.15 [Saa10]**.** *Soient* $H_1, ..., H_m, H$ *des espaces de Hilbert, alors*

$$\mathcal{L}_d^p(H_1, ..., H_m; H) \subset \mathcal{D}_q^m(H_1, ..., H_m; H) \subset \mathcal{L}_s^r(H_1, ..., H_m; H)$$

pour tous $1 < p, r, q < \infty$.

Chapitre 3

Caractérisation polynomial d'un espace de Hilbert

Dans ce chapitre on va donner une version polynômiale de théorème de Kwapień. Commençons par un survol sur les polynômes homogènes de degré m. Puis on rappelle les définitions et les propriétés des polynômes Cohen fortement p-sommants, fortement p-sommants de Dimant et p-dominés. Certaines inclusions entre ces derniers types ont été données. On termine ce chapitre par le théorème de Kwapień dans le cas des polynômes homogènes de degré m. Les résultats de ce chapitre sont trouvés dans les travaux de Achour et Saadi à leurs article [ASaa10].

3.1 Polynômes homogène de degré m

Commençons par la définition des opérateurs multilinéaires symétriques.

Définition 3.1. *(Multilinéaire symétrique). Soient X, Y deux espaces de Banach. Soit $T : \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \to Y$ un opérateur multilinéaire ; T est dit symétrique si*

$$T \circ \sigma (x_1, ..., x_m) := T \left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right) = T (x_1, ..., x_m)$$

pour toute permutation σ. On note $\mathcal{L}_S\left({}^m X;Y\right)$ l'espace des opérateurs multilinéaires symétriques.

A chaque opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}\left({}^m X;Y\right)$ on peut associer un opérateur symétrique $T_S \in \mathcal{L}_S\left({}^m X;Y\right)$. En effet, soit $T : \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \to Y$ un opérateur m-linéaire, posons

$$T_S = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma} T \circ \sigma$$

L'opérateur T_S s'appelle *opérateur symétré* de T. On a

(1) Si $T \in \mathcal{L}\left({}^m X;Y\right)$ alors $T_S \in \mathcal{L}_S\left({}^m X;Y\right)$.

(2) $T_S = T$ si et seulement si T est symétrique.

(3) L'opérateur linéaire $S : \mathcal{L}\left({}^m X;Y\right) \to \mathcal{L}_S\left({}^m X;Y\right) : T \to S(T) = T_S$ est un projection.

Définition 3.2 (*Polynôme homogène de degré m*). *Fixons $m \in N^*$. Soient X, Y deux espaces de Banach. L'application $P : X \to Y$ est un polynôme homogène de degré m s'il existe un opérateur multilinéaire symétrique $\widehat{T} \in \mathcal{L}_S\left({}^m X;Y\right)$ tel que*

$$P(x) = \widehat{T}\left(x, \overset{m}{\dots}, x\right).$$

On note $\mathcal{P}\left({}^m X;Y\right)$, l'espace des polynômes homogènes de dégré m de X dans Y muni de la norme

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup\left\{\|P(x)\| \,/\, \|x\| \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{C : \|P(x)\| \leq C\|x\|^m \text{ pour tout } x \in X\right\} \end{aligned}$$

Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit simplement $\mathcal{P}\left({}^m X\right)$.

Si $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$, on définie sa linéarisation $\widetilde{P} : \widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X \to Y$ par

$$\widetilde{P}(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)$$

où $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in X$.

Proposition 3.3. *La correspondance $P \leftrightarrow \widehat{T}$ establit un isomorphisme entre $\mathcal{P}(^m X; Y)$ et $\mathcal{L}_S(^m X; Y)$.*

Proposition 3.4. *(formule de polarisation) Nous avons pour tout $T \in \mathcal{L}_S(^m X; Y)$* [Muj86]

$$T\left(x^1, ..., x^m\right) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1\leq i\leq m}} \epsilon_1 ... \epsilon_m P_T(\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j x^j).$$

où P_T est le polynôme associe à T. De plus, P_T est borné sur la boule unité de X ssi T est borné. Les deux normes vérifient l'inégalité suivante [Muj86]

$$\|P_T\| \leq \|T\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P_T\|.$$

Opérateurs diagonaux. On introduit les plongements naturels de X dans $\underbrace{X \times ... \times X}_{m}$ et $\widehat{\otimes}^m_\pi X$, notés Δ_m et δ_m respectivement. Ils sont définis par

$$\begin{array}{cccc} \Delta_m : & X & \to & X \times ... \times X \\ & x & \to & (x, ..., x) \end{array}, \quad \begin{array}{cccc} \delta_m : & X & \to & \widehat{\otimes}^m_\pi X \\ & x & \to & x \otimes ... \otimes x \end{array}$$

Clairement, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \Delta_m \downarrow & \overset{\delta_m}{\searrow} & \\ \underbrace{X \times ... \times X}_{m} & \underset{i_m}{\to} & \widehat{\otimes}^m_\pi X \end{array}$$

i.e. $i_m \circ \Delta_m = \delta_m$, où i_m est l'opérateur *multilinéaire* canonique, de $X_1 \times ... \times X_m$ dans $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ défini par

$$i_m (x_1, ..., x_m) = x_1 \otimes ... \otimes x_m$$

Avec cette notation nous avons aussi le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times ... \times X_m & & \\ i_m \downarrow & \overset{T}{\searrow} & \\ X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m & \underset{\widetilde{T}}{\rightarrow} & Y \end{array}$$

Proposition 3.5. *Un opérateur $P : X \to Y$ est un polynôme de dégré m si et seulement s'il existe $T \in \mathcal{L}(^m X; Y)$ tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\Delta_m}{\rightarrow} & X \times ... \times X \\ \delta_m \downarrow & \searrow P & \downarrow T \\ \widehat{\otimes}_\pi^m X & \underset{\widetilde{T}}{\longrightarrow} & Y \end{array}$$

Preuve. Soit T_S l'opérateur symétrié de T. Par définition et le diagramme ci-dessus, on a $S_T (x, ..., x) = T (x, ..., x) = T \circ \Delta_m (x) = P (x)$. ■

3.2 Polynômes homogène Cohen fortement p-sommants

Cette définition a été introduite par Achour et Saadi dans [ASaa10] . C'est une généralisation naturelle de celle de Cohen de cas linéaire.

Définition 3.6. *On fixe $m \in N$. Soient $1 < p \leq \infty$ et X, Y des espaces de Banach. Un polynôme homogène de degré m $P : X \longrightarrow Y$ est Cohen fortement p-sommants, s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle P (x_i) , y_i^* \rangle| \leq C (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n} . \tag{3.1}$$

La classe des polynômes homogènes de degré m Cohen fortement p-sommants sera notée $P_{Coh}^{p}(^{m}X;Y)$; elle espace de Banach muni de la norme $d_p(P)$, qui est la plus petite constante C vérifiant l'inégalité (3.1). Pour $p=1$ nous avons $\mathcal{P}_{Coh}^{1}(^{m}X;Y)=\mathcal{P}(^{m}X;Y)$.

Exemple. Soient $m \in \mathbb{N}$, $u : X \rightarrow Y$ un opérateur fortement p-sommants et $\varphi \in X^{*}$. Le polynôme

$$P : X \rightarrow Y : P(x) = \varphi^{m-1}(x)\, u(x)$$

est Cohen fortement p-sommants. En effet, soient $x_1, ..., x_n \in X$, $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \left|\langle P(x_i), y_i^*\rangle\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\langle \varphi^{m-1}(x_i)\, u(x_i), y_i^*\rangle\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|\langle u(\varphi^{m-1}(x_i)\, x_i), y_i^*\rangle\right| \\
&\leq d_p(u) \left\|\varphi\right\|^{m-1} (\sum_{i=1}^{n} \left\|x_i\right\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{i=1}^{n} \left|y_i^*(y)\right|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}$$

Donc, P est Cohen fortement p-sommants et $d_p(P) \leq \left\|\varphi\right\|^{m-1} d_p(u)$.

Théorème de factorisation de Pietsch. *Soit $m \in \mathbb{N}$. Un polynôme homogène de degré m $P \in \mathcal{P}(^{m}X;Y)$ est Cohen fortement p-sommants $(1 < p \leq \infty)$ si et seulement s'il existe une mesure de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ et $C > 0$* telles que *pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$*

$$\left|\langle P(x), y^*\rangle\right| \leq C \left\|x\right\|^{m} (\int_{B_{Y^{**}}} \left|y^*(y^{**})\right|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.2}$$

De plus, dans ce cas $d_p(P) = \min\{C : C$ vérifiant $(3.2)\}$.

Une conséquence immédiate de ce dernier théorème est le corollaire suivant.

Corollaire 3.7. *Soient $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$.*

Si $P \in \mathcal{P}_{Coh}^{p_2}(^{m}X;Y)$, alors $P \in \mathcal{P}_{Coh}^{p_1}(^{m}X;Y)$ et $d_{p_1}(P) \leq d_{p_2}(P)$.

Théorème 3.8. *Un polynôme $P \in \mathcal{P}(^{m}X;Y)$ est Cohen fortement p-sommants si et seulement si l'opérateur m-linéaire symétrique associer $\tilde{P} \in \mathcal{L}(^{m}X;Y)$ est Cohen fortement p-sommants.*

Preuve. On suppose que $\tilde{P}$ est Cohen fortement p-sommants. Soit $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$; alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \tilde{P} \langle (x_i, ..., x_i), y_i^* \rangle \right| \\ &\leq d_p^m(\tilde{P}) (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{l_{p^*}^n} . \end{aligned}$$

donc P est Cohen fortement p-sommants, et $d_p(P) \leq d_p^m(\tilde{P})$.

Inversement : Soit $P \in \mathcal{P}_{Coh}^p(^m X; Y), x^j \in B_X (1 \leq j \leq m)$ et $y^* \in Y^*$; alors par la formule de polarisation (1.3) on a : $1 \leq i \leq m$

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \tilde{P}(x^1, ..., x^m), y^* \right\rangle \right| &= \left| \left\langle \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 ... \varepsilon_m P(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j x^j)., y^* \right\rangle \right| \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left| \left\langle P(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j x^j)., y^* \right\rangle \right| \end{aligned}$$

par le théorème de Pietsch

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \tilde{P}(x^1, ..., x^m), y^* \right\rangle \right| &\leq \frac{1}{m!2^m} d_p(P) \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} (\sum_{j=1}^{m} \|\varepsilon_j x^j\|)^m (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} d_p(P) \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} (\sum_{j=1}^{m} \|x^j\|)^m (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} d_p(P) 2^m m^m (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \frac{m^m}{m!} d_p(P) (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

et pour $x^j \in X (x^j \neq 0)$

$$\left| \left\langle \tilde{P}(\frac{x^1}{\|x^1\|}, ..., \frac{x^m}{\|x^m\|}), y^* \right\rangle \right| \leq \frac{m^m}{m!} d_p(P) (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$$

alors :

$$\left|\left\langle \tilde{P}(x^1,...,x^m),y^*\right\rangle\right| \leq \frac{m^m}{m!}d_p(P)\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|(\int_{B_{Y^{**}}}|y^*(y^{**})|^{p^*}d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$$

donc $\tilde{P}$ est Cohen fortement p-sommants, et $d_p^m(\tilde{P}) \leq \frac{m^m}{m!}d_p(P)$. ■

Proposition 3.9 : *Soit* $1 < p \leq \infty, P : X \to Y$ *un polynôme* m*-homogène et* $\tilde{P}$ *sa linéarisation. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $P \in \mathcal{P}^p_{Coh}(^mX;Y)$.

(2) $\tilde{P} \in \mathcal{D}_p(\hat{\otimes}^m_{\pi,s}X;Y)$.

Preuve. On suppose que $\tilde{P} \in \mathcal{D}_p(\hat{\otimes}^m_{\pi,s}X;Y)$. Pour $x_1,...,x_n \in X$ et $y_1^*,...,y_n^* \in Y^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|\langle P(x_i),y_i^*\rangle| &= \sum_{i=1}^{n}\left|\tilde{P}\left\langle(x_i\otimes...\otimes x_i),y_i^*\right\rangle\right| \\ &\leq d_p(\tilde{P})(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\otimes...\otimes x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}\sup_{y\in B_Y}\|y_i^*(y)\|_{l^n_{p^*}} \\ &\leq d_p(\tilde{P})(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^{mp})^{\frac{1}{p}}\sup_{y\in B_Y}\|y_i^*(y)\|_{l^n_{p^*}}\end{aligned}$$

alors $P \in \mathcal{P}^p_{Coh}(^mX;Y)$, et $d_p^m(P) \leq d_p(\tilde{P})$.

Inversement : on suppose que $P \in \mathcal{P}^p_{Coh}(^mX;Y)$; Soient $v \in \hat{\otimes}^m_{\pi,s}X(v \neq 0)$ et $y^* \in Y^*$, supposons que $v = \sum_{i=1}^n x_i\otimes...\otimes x_i$, alors :

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\tilde{P}(v),y^*\right\rangle\right| &\leq \sum_{i=1}^{n}|\langle P(x_i),y^*\rangle| \\ &\leq d_p^m(P)\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^m(\int_{B_{Y^{**}}}|y^*(y^{**})|^{p^*}d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}\end{aligned}$$

si on prend l'infimum pour tout représentation de v, on trouve :

$$\left|\left\langle \tilde{P}(v), y^* \right\rangle\right| \leq d_p^m(P)\, \|v\| \, (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} \, d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$$

alors $\tilde{P} \in \mathcal{D}_p(\hat{\otimes}^m_{\pi,s} X; Y)$ et $d_p(\tilde{P}) \leq d_p^m(P)$. Finalement :$d_p(\tilde{P}) = d_p^m(P)$. ■

Corollaire 3.10. Soit $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $P \in \mathcal{P}^p_{Coh}(^m X; Y)$.

(b) $\tilde{P} \in \mathcal{D}_p(\hat{\otimes}^m_{\pi,s} X; Y)$.

(c) Il existe un opérateur u Cohen fortement p-sommants et Q un polynôme, tel que :$P = u \circ Q$.

Preuve.

$(a) \Leftrightarrow (b)$: Par la proposition 3.9.

$(b) \Rightarrow (c)$: On a le diagrame suivant :

$$\begin{tikzcd} \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\delta_m"'] & Y \\ \hat{\otimes}^m_{\pi,s} X \arrow[ur, "\tilde{P}"'] & \end{tikzcd}$$

Donc $P = \tilde{P} \circ \delta_m$, avec $\tilde{P} \in \mathcal{D}_p(\hat{\otimes}^m_{\pi,s} X; Y)$ et δ_m un polynôme.

$(c) \Rightarrow (a)$: On suppose que (c) est vraie, alors il existe un espace de Banach Z, un opérateur linéaire $u \in \mathcal{D}_p(Z; Y)$ et $Q \in \mathcal{P}(^m X; Z)$ tel que : $\forall x_1, ..., x_n \in X$ et

$\forall y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle u \circ Q(x_i), y_i^* \rangle| \\ &\leq d_p(u)(\sum_{i=1}^{n} \|Q(x_i)\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{l_{p^*}^n} \\ &\leq d_p(u) \|Q\| (\sum_{i=1}^{n} \|(x_i)\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{l_{p^*}^n}\end{aligned}$$

Donc $P \in \mathcal{P}_{Coh}^{p}(^{m}X; Y)$. ■

3.3 Les polynômes homogènes fortement p-sommants de Dimant

Définition 3.11. *Soient X, Y deux espaces de Banach et $1 \leq p \leq \infty$. Soit $P \in \mathcal{P}(^{m}X; Y)$, on dit que le polynôme P est fortement p-sommants s'il existe une constante $C > 0$, tel que : $\forall x_1, ..., x_m \in X$ on a :*

$$(\sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^{p})^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{P}(^{m}X)}} (\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^{p})^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

La classe des polynômes homogènes fortement p-sommants est notée $\mathcal{P}_{ss}^{p}(^{m}X; Y)$. Si on lui muni par la norme $\|P\|_{ss,p} = \inf \{C, \text{ vérifiant l'inégalité (3.3)}\}$, l'espace $(\mathcal{P}_{ss}^{p}(^{m}X; Y), \|P\|_{ss,p})$ revient un espace de Banach.

Corollaire 3.12. *Soit $1 < p < \infty$. Si Y est un espace $\mathcal{L}_{p^*}$, alors :*

$$\mathcal{P}_{Coh}^{p}(^{m}X; Y) \subset \mathcal{P}_{ss}^{p^*}(^{m}X; Y).$$

Preuve. Soit $P \in \mathcal{P}_{Coh}^{p}(^{m}X; Y)$; Alors par le corollaire 3.10, $\exists u \in \mathcal{D}_p(Z; Y)$ et $Q : X \to Z$ tel que $P = u \circ Q$. Comme$Y$ est un espace $\mathcal{L}_{p^*}$ alors u est p^*-sommants. $\forall x_i \in X(1 \leq$

$i \leq n)$

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} &= (\sum_{i=1}^{n} \|u \circ Q(x_i)\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \pi_{p^*}(u) \sup_{z^* \in B_{Z^*}} (\sum_{i=1}^{n} |z^*(Q(x_i))|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}\end{aligned}$$

comme le polynôme $z^* \circ Q \in \mathcal{P}(^m X)$, on a :

$$(\sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \leq \|Q\| \, \pi_{p^*}(u) \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{P}(^m X)}} (\sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i)|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}$$

alors, $P \in \mathcal{P}_{ss}^{p^*}(^m X; Y)$, et $\|P\|_{ss,p^*} \leq \|Q\| \, \pi_{p^*}(u)$. ■

3.4 Les polynômes homogènes p-dominés

Définition 3.13. *Soient $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ et $1 \leq p < \infty$. P est p-*dominés *si : $\exists C > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x_1, ...x_n \in X$ on a :*

$$(\sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^{\frac{p}{m}})^{\frac{m}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^{p})^{\frac{m}{p}}. \tag{3.4}$$

On note par $\mathcal{P}_d^p(^m X; Y)$ l'espace des polynôme p-dominés de X dans Y et par $\delta_p(T) =$ $\inf\{C$, *vérifiant l'inégalité (3.4)*$\}$.

Proposition 3.14. *La constante $\delta_p(T)$ est une norme si $p \geq m$, et quasi-norme si $p < m$. Par conséquent, $\mathcal{P}_d^p(^m X; Y)$ est un Banach si $p \geq m$, sinon $\mathcal{P}_d^p(^m X; Y)$ est un quasi-Banach.*

Remarque 3.15. L'espace $\mathcal{P}_d^p(^m X; Y)$ est noté parfois l'espace des polynômes absolument $(\frac{p}{m}, p)$ sommants.

Corollaire 3.16. Soient $m \in \mathbb{N}^*, 1 < p, q < \infty$, H un espace de Hilbert et $P \in \mathcal{P}(^m H; Y)$.

Si P est un polynôme p-dominés, alors P est un polynôme Cohen fortement q-sommants. En d'autre termes

$$\mathcal{P}_d^p(^m H;Y) \subset \mathcal{P}_{Coh}^q(^m H;Y).$$

Preuve. Soient $1 < p,q < \infty$, $P \in \mathcal{P}(^m H;Y)$ et $\tilde{P} \in \mathcal{L}(^m H;Y)$ l'opérateur m-linéaire associe.$P \in \mathcal{P}_d^p(^m H;Y) \Rightarrow \tilde{P} \in \mathcal{P}_d^p(^m H;Y) \Rightarrow \tilde{P} \in \mathcal{P}_{Coh}^q(^m H;Y) \Longrightarrow P \in \mathcal{P}_{Coh}^q(^m H;Y)$. ■

3.5 Théorème de Kwapień dans le cas des polynômes

Le résultat suivant est une version polynômiale de théorème de Kwapień. Cette caractérisation utilise les polynômes homogènes Cohen fortement p-sommants et p-dominés.

Théorème 3.17. *Soient $m \in \mathbb{N}^*, 1 < p,q < \infty$ et X,Y deus espaces de Banach Y. Si* $\mathcal{P}_d^p(^m X;Y) \subseteq \mathcal{P}_{Coh}^q(^m X;Y)$, alors $\Pi_p(X;Y) \subseteq \mathcal{D}_q(X;Y)$.

Preuve. Soient $u \in \Pi_p(X;Y), x_0 \in B_X$ et $x_0^* \in B_{X^*}$ tel que $x_0^*(x_0) = 1$.On définit l'opérateur $\pi_j : \widehat{\otimes}_{\pi,s}^{j+1} X \to \widehat{\otimes}_{\pi,s}^{j} X$ $(1 \leq j \leq m-1)$ par :

$$\pi_j(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \overset{(j+1)}{\cdots} \otimes x_i) = \sum_{i=1}^n x_0^*(x_i) x_i \otimes \overset{(j)}{\cdots} \otimes x_i$$

on a $\delta_m : X \to \widehat{\otimes}_{\pi,s}^{m} X$, nous allons a montrer que $P := u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-1} \circ \delta_m : X \to Y$ est p-dominés. Soit $x_i \in X(1 \leq i \leq n)$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \|P(x_i)\|^{\frac{p}{m}} &= \sum_{i=1}^n \|u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-1} \circ \delta_m(x_i)\|^{\frac{p}{m}} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\| u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-1}(x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i) \right\|^{\frac{p}{m}} \\
&= \sum_{i=1}^n |x_0^*(x_i)|^{\frac{p}{m}} \left\| u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-2}(x_i \otimes \overset{(m-1)}{\cdots} \otimes x_i) \right\|^{\frac{p}{m}}
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{m} + \frac{1}{\frac{m}{m-1}} = 1$)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^{\frac{p}{m}} &\leq (\sum_{i=1}^{n} |x_0^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{m}} (\sum_{i=1}^{n} \|u \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ ... \circ \pi_{m-2} \circ \delta_{m-1}(x_i)\|^{\frac{p}{m-1}})^{\frac{m-1}{m}} \\
&\leq (\sum_{i=1}^{n} |x_0^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{m}} C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p)^{\frac{m-1}{p}})^{\frac{p}{m}} \\
&= C^{\frac{p}{m}} (\sum_{i=1}^{n} |x_0^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{m}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p)^{\frac{m-1}{m}} \\
&\leq C^{\frac{p}{m}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p
\end{aligned}$$

alors P est p-dominés et donc Cohen fortement q-sommants. Par la composition $P = \tilde{P} \circ \delta_m$, on a $\tilde{P} = u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-1}$ est Cohen fortement q-sommants, il existe un opérateur $k_j : \widehat{\otimes}^j_{\pi,s} X \to \widehat{\otimes}^{j+1}_{\pi,s} X$ ($1 \leq j \leq m-1$) définit en fonction de x_0^* et x_0 tels que l'application $\pi_j \circ k_j$ est l'identité sur $\hat{\otimes}^j_{\pi,s} X$. on a :

$$u = u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-1} \circ k_{j-1} \circ ... \circ k_1 : X \to Y$$

qui est, par la propriété d'idéal, Cohen fortement q-sommants. ■

Théorème 3.18. *Soit X un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *X est isomorphisme à un espace de Hilbert.*

(2) $\forall m \in \mathbb{N}^*, 1 < p, q < \infty$ *et pour tout espace de Banach Y, on a :*

$$\mathcal{P}_d^p(^mX;Y) \subseteq \mathcal{P}_{Coh}^q(^mX;Y)$$

(3) $\forall m \in \mathbb{N}^*$ *et* $\forall Y$ *un espace de Banach, alors :*

$$\mathcal{P}_d^2(^mX;Y) \subseteq \mathcal{P}_{Coh}^2(^mX;Y).$$

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2) Par le corollaire 3.16.

(2) $\Rightarrow$ (3) Evident.

(3) $\Rightarrow$ (1) Par le théorème 3.17 et le théorème de Kwapień. ■

Bibliographie

[AMez07] D. Achour and L. Mezrag. *On the Cohen strongly p-summing multilinear operators.* J. Math. Anal. Appl. **327** (1) (2007), 550-563.

[ASaa10] A. Achour and K. Saadi. *A polynomial caracterization of Hilbert spaces.* Collect. Math. 61, 3 (2010), 291 – 301

[BGV04] F. Bombal, D. Pérez-García, I. Villanueva. *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem.* Quart. J. Math. **55** (2004), 441-450.

[Bou81] Jean Bourgain. *New Classes of $\mathcal{L}_p$-spaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1981).

[Bu03] Q. Bu. *Some mapping properties of p-summing operators with hilbertian domain,* Contemp. Math. **328** (2003) 145–149.

[Coh73] J. S. Cohen. *Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates,* Math. Ann. **201** (1973), 177-200.

[DJT95] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. *Absolutely summing operators.* Cambridge University Press, (1995).

[Dim03] Verónica Dimant. *Strongly p-summing multilinear operators.* J. Math. Anal. Appl. **278** (2003) 182–193.

[DF93] A. Defant, K. Floret. *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland (1993).

[Kwa70] S. KWAPIEŃ, *A linear topological characterization of inner-product spaces*, STUDIA MATHEMATICA, T, XXXVIII, Warszawa. (1970) (277-278).

[LT96] J. LINDENSTRAUSS AND L. TZAFRIRI. *Classical Banach Spaces, I and II.* Springer-Verlag, Berlin (1996).

[Mat03] M. C. MATOS. *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings.* Collect. Math. **54**,111–136 (2003).

[Muj86] J.MUJICA. *Complex analysis in Banach spaces.* Math. Studies, Vol **120**, North Holland, Amsterdam, (1986).

[Saa10] K. SAADI. Les opérateurs multi p-sommants et leurs applications. Thèse de Doctorat soutenue en 2010, Batna, Algérie.

[Pie67] A. PIETSCH. *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen.* Studia Math. 28, 333–353(1967). 45