REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et Numérique

Thème

Sur les méthodes de quadrature de Gauss : étude et applications

---

Présenté par :
M^{elle} *KHODJA* Linda

Soutenu publiquement le : 10/06/2024.

Devant le jury composé de :

Président :	*M*^{r} *ABDELKEBIR* Saad	M.C.B,	Université de M'sila
Encadreur :	*M*^{r} *SEGHIRI* Fakhreddine	M.A.A,	Université de M'sila
Examinateur :	*M*^{r} *KHADRAOUI* Abdelmalek	M.A.A,	Université de M'sila

Année universitaire 2023/2024.

Dédicaces

*Je souhaite dédier ce travail à mon père bien-aimé, "**SEGHIR** ", qui a été mon premier enseignant, qui a su m'initier à la vie, et a été mon pilier et ma source d'encouragement depuis mon enfance. Je lui dédie toutes mes réussites, car il le mérite grandement. J'espère que Dieu me donnera la force de toujours le rendre fier de moi.*

Je suis également reconnaissante envers ma chère mère qui m'a inondé d'amour et qui a consacré sa vie à mon bien-être Elle a toujours été présente pour me soutenir sans relâche. Tu es comme une étoile qui illumine mes sombres nuits, et je te suis infiniment reconnaissant pour ta tendresse et tes bénédictions .....

Je le dédie à mon mari " Djamal Eddine " de sa grande patience, Je le remercie chaleureusement surtout pour son soutien morale ininterrompu et ses nombreux conseils tout le long de ma thèse.

À mes frères et sœurs qui ont toujours été présents pour moi, me soutenant à chaque étape de ma vie. Vous êtes ma famille, ma force et ma source d'inspiration...

Je dédie également cet travail à la famille de mon mari et à mes fidèles amies qui ont partagées toutes mes joies et mes peines en offrant leur soutien et leur amitié sincère. Vous êtes de véritables trésors dans ma vie...

....

Enfin, je dédie ce travail à tous ceux qui m'ont encouragé et inspiré tout au long de mon parcours académique. Vos conseils, vos encouragements et vos exemples de réussite m'ont aidé à avancer vers mes ambitions..

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite exprimer ma gratitude envers Dieu, qui m'a donné la force et la motivation nécessaires pour rédiger ce modeste travail.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude et mon appréciation au superviseur de mon mémoire, Mr. SEGHIRI Fakhreddine pour ses précieux conseils, son encadrement et son soutien à mon travail, ainsi pour sa grande disponibilité et ses précieux conseils durant tout le processus de rédaction.

Toute ma gratitude au président du jury, Mr. ABDELKEBIR Saad et au membre du jury l'examinateurs Mr KHADRAOUI Abdelmalek pour avoir consacré leur temps et leurs efforts à la lecture et à l'examen de mon travail.

Enfin, un grand merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, et à tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des figures

INTRODUCTION

Dans le domaine de l'analyse numérique, les méthodes de quadrature jouent un rôle crucial en permettant d'approximer les valeurs d'intégrales définies. Ces méthodes sont essentielles pour résoudre une vaste gamme de problèmes mathématiques et scientifiques, offrant des solutions précises et efficaces là où les approches analytiques traditionnelles peuvent être impraticables ou impossibles.

En effet, de nombreux phénomènes réels sont souvent définis par des intégrales complexes ou difficiles à évaluer analytiquement. Les méthodes de quadrature offrent une approche systématique pour calculer ces intégrales numériquement, en découpant la région d'intégration en petits morceaux gérables et en approximant la valeur de l'intégrale sur chacun de ces morceaux.

Ce mémoire explorera l'importance de ces méthodes, leur application dans divers domaines scientifiques et leur contribution à la résolution de problèmes pratiques et théoriques. Ou nous explorerons les principes fondamentaux des méthodes de quadrature de Gauss, leurs avantages par rapport à d'autres techniques numériques, ainsi que quelques-unes de leurs variantes les plus couramment utilisées.

Dans le contexte du calcul numérique, la quadrature est une méthode utilisée pour estimer la valeur d'une intégrale définie numériquement. Les méthodes de quadrature sont essentielles dans de nombreux domaines scientifiques et techniques où il est nécessaire d'approximer numériquement l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné.

Dans le premier chapitre, on donne quelques définitions et notions de base dont nous aurons besoin tout au cours dans notre mémoire, car la quadrature de Gauss s'appuie sur une construction mathématique sophistiquée basée sur l'interpolation et sur les propriétés des polynômes orthogonaux, la minimisation de l'erreur d'approximation. Ces principes mathématiques fournissent une base solide pour le développement de formules de quadrature de Gauss.

En deuxième chapitre on survole les différentes méthodes classiques et de leur utilisation pour l'estimation numérique d'intégrales. en tenant compte de présenter leurs avantages et leurs limitations.

On aborde dans le troisième chapitre l'étude de la méthode de quadrature de Gauss qui constitue un domaine fascinant et crucial en mathématiques numériques. En premier lieu on retrace l'histoire de la méthode de quadrature de Gauss. en deuxième lieu on expliquer les principes sous-jacents à la méthode de quadrature de Gauss. Ces méthodes visent à estimer numériquement l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné en utilisant une approche basée sur des poids et des abscisses spécialement sélectionnés. L'objectif est d'obtenir des résultats précis avec un nombre minimal de points d'évaluation de la fonction. Ces méthodes, nommées d'après le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss, ont des applications étendues dans de nombreux domaines, notamment l'ingénierie, la physique, la finance et bien d'autres encore. Dans cet chapitre, nous explorerons les principes fondamentaux des méthodes de quadrature de Gauss, leurs avantages par rapport à d'autres techniques numériques.

Le dernier chapitre explorer les différentes variantes de la méthode de quadrature de Gauss, et on comparer les avantages et les inconvénients de chaque variante. Enfin,pour illustrer l'efficacité de ces approches, on présente des exemples d'applications.

Chapitre 1

Préliminaire

Nous débuterons ce chapitre par quelques rappels sur les principaux concepts d'analyse numérique liés aux intégrales et à l'approximation numérique.

Le calcul des intégrales est nécessaire dans nombreux champs d'application de divers domaines scientifiques (physique,chimie,biologie...).

Il est facile de calculer l'intégrale d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ de manière analytique lorsqu on connaît sa primitive, mais c'est pas toujours le cas.

Dans la plupart des cas la fonction qu'on souhaite à intégrer na pas de primitive évidente (généralement à cause de la complexité des son expression analytique), ou bien elles doit représentée sous forme d'un tableau (c'est à dire évaluée en certains points de l'intervalle).

Par conséquent, la réalisation de l'intégration par les méthodes analytiques usuelles sera impossible, donc on va chercher des méthodes numériques qui servent à obtenir une valeur approchée d'une expression intégrale notée :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \tag{1.1}$$

que l'on suppose convergente.

Les systèmes diffèrent autant par les méthodes à proprement parler que par la façon de les appliquer, que l'on pourrait appeler la stratégie d'intégration. Nous allons faire un panorama de ces méthodes et stratégies.

Avant d'entrer aux détails, il est nécessaire de citer quelques notions de base qui seront utiles tout au cours dans notre mémoire.

Il n'est pas question ici de décrire en détail toutes les propriétés connues. Pour cela, il sera utile de consulter[Leg10, eAH14] [Sel23] et d'autre.

1.1 Interpolation

On dispose d'une fonction f, connue par exemple uniquement par ses valeurs en certains points, et on cherche à remplacer ou à approcher f par une fonction plus simple, le plus souvent par un polynôme. Nous verrons dans ce contexte, l'interpolation qui consiste à rechercher un polynôme qui passe exactement par les points donnés,

1.1.1 Interpolation de Lagrange

La méthode d'interpolation par les polynômes de Lagrange est la méthode la plus connue car elle correspond à la base d'interpolation la plus simple $x^n; n \in \mathbb{N}$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ connue en $n + 1$ points distincts $x_0, x_1, ...x_n$ de l'intervalle $[a, b]$.

Il s'agit de construire un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que

$$\forall i = 0, 1, ...n, \ \ P(x_i) = f(x_i) \tag{1.2}$$

Théorème 1.1. *Il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n solution de 1.2 .*

Le polynôme s'écrit

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) \tag{1.3}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{k=0 \ \ k\neq i} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \tag{1.4}$$

Démonstration . Voir [eAH14]

Remarque 1.2. Le polynôme P_n est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $x_0, x_1, ...x_n$. Les polynômes $L_i(x)$ sont appelés polynômes de base de Lagrange associés à ces points.

1.1.2 Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Le but de l'interpolation étant de remplacer l'évaluation de $f(x)$ par celle de $P_n(x)$, il est important de connaître l'erreur

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x), \ \ x \in [a, b].$$

Théorème 1.3. *Soit* $f : [a, b]- \to \mathbb{R}$, $n + 1$ *fois continument diérentiable et* P_n *le polynôme* *d'interpolation de Lagrange aux points* $x_0, x_1, ..., x_n$ *de* $[a, b]$*. Alors*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{Mn+1}{(n+1)!}|\pi_n(x)| \tag{1.5}$$

où

$$M_{n+1} = max_{a \leq x \leq b} \left| f_{(n+1)}(x) \right| \tag{1.6}$$

et

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{1.7}$$

Démonstration . Voir [Leg10]

1.2 Polynômes Orthogonaux

Les polynômes orthogonaux est une branche très vaste de mathématiques, de la physique théorique et de la physique mathématique. Ces polynômes sont un sujet d'étude depuis longtemps. Au début du XIXe siècle, plus précisément en 1939, les polynômes orthogonaux ont reçu leur premier étude détaillé par [Sze39][Lud00][BW16]. Les suites de polynômes orthogonaux sont apparues comme solutions des équations de la physique mathématiques, particulièrement les équations aux dérivées partielles. Parmi les polynômes orthogonaux classiques les plus importants, nous mentionnons les polynômes de Jacobi, Tchebyshev, Legendre, Hermite, etc.

1.2.1 Espace des polynômes

L'étude des polynômes orthogonaux à une variable nécessite de travailler dans l'espace vectoriel des polynômes à une variable réelle $\mathbb{R}[x]$.

Une base de cet espace est constituée des monômes $x^n; n \in \mathbb{N}$. Un polynôme $P_n(x)$ est de degré n s'il s'écrit de la forme

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$$

avec $a_n \neq 0$.

Les constantes non nulles sont donc des polynômes de degrée 0.

1.2.2 Polynômes orthogonaux

Soient $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\omega : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction poids qui est continue strictement positive.

Le produit scalaire entre deux fonction $f(x)$ et $g(x)$ définit par l'intégrale : [BW16]

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx. \tag{1.8}$$

Cest la généralisation de l'idée dun produit scalaire de deux vecteurs de dimention ni a un dimention infinie. Si le produit scalaire est nule, nous disons que les deux fonctions $f(x)$ et$g(x)$ sont orthogonales.

Etant donnés deux polynômes réels de x, $P(x)$ et $Q(x)$ on notera $\langle P, Q\rangle = \int_a^b \omega(x)P(x)Q(x)dx$.

L'intégrale $\langle P, Q\rangle$ existe toujours compte tenu des hypothèses précédentes ; elle posséde toutes les propriétés d'un produit scalaire.

$$\langle P, P\rangle = \int_a^b \omega(x)P^2(x)dx > 0. \text{ si } P(x) \neq 0.$$

Les polynômes P et Q sont dits orthognaux, si : $\langle P, Q\rangle = 0$.

La famille de polynômes $\{P_n(x)\}$, où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n est dite **famille ou suite de polynômes orthogonaux** par rapport au poids $\omega(x)$ sur l'intervalle (a, b) si :$\langle P_n, P_m\rangle = 0$. pour $n \neq m$

La suite des P_n est dite orthonormale si :

$$\langle P_n, P_m\rangle = \delta_{mn}$$

où δ_{mn} est le symbole de Kronecker.

Remarque 1.4. Si $P(x)$ est un polynôme de degré m et $P_n(x)$ une suite de polynômes orthogonaux on peut écrire :

$$P(x) = \sum_{n=0}^m c_n P_n(x), \text{ avec } c_n = \frac{\langle P_n, P\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle}.$$

1.2.3 Relation de réccurence

Proposition 1.5. *Soit $\{P_n(x)\}$ une famille de polynômes orthogonaux, alors il existe une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_net P_{n-1}, cest-à-dire il existe des réelsa_n, b_n et c_n ; tels que pour $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$P_{n+1} = (a_n X + b_n)P_n + c_n P_{n-1} \tag{1.9}$$

Preuve voir [Sze39].

1.2.4 Exemples classiques de polynômes orthogonaux

(1) $[a,b] = [-1,1]$ et $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ avec $\alpha > -1$ et $\beta > -1$: on obtient les polynômes de Jacobi. On leur attribue des noms différents dans les cas particuliers suivants :[BW16]

- $\alpha = \beta = 0$: **polynômes de Legendre**. Une fois les polynômes normalisés, on a la relation de récurrence :

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{n+1}$$

- $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$: on retrouve les **polynômes de Chebyshev de première espèce** définis par la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

- $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:polynômes de Chebyshev de seconde espèce.

(2) $[a,b[\, = [0,+\infty[$ et $\omega(x) = x^{\alpha}e^{-x}$, avec $\alpha > -1$:on a les polynômes de Laguerre généralisés. La relation de récurrence s'ecrit :

$$P_{n+1}(x) = -\frac{1}{n+1}(x - 2n - \alpha - 1)P_n(x) + (n+\alpha)P_{n-1}(x).$$

(3) $]a,b[\, = \,]-\infty,+\infty[$ et $\omega(x) = e^{-x^2}$, polynômes de Hermite. La relation de récurrence s'ecrit :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Chapitre 2

Méthode de Quadrature

2.1 Étude générale d'une méthode de quadrature

En mathématiques, le terme quadrature est une opération géométrique visant a rechercher et construire un carré d'aire égale à une surface donnée. La quadrature la plus célèbre est probablement la quadrature du cercle, problème vieux de 2000 ans tout simplement impossible à réaliser à la régle et au compas.

Depuis le XVIIe siècle, le terme quadrature est associé au calcul d'aires et au calcul intégral.

Soit f une fonction dont on ne connaît les valeurs qu'en un nombre fini de points (mesures) ou que la primitive ne peut se calculer analytiquement. La quadrature vise a approcher la quantite I suivante :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \tag{2.1}$$

Il s'agit donc de déterminer l'aire de la surface délimitée par l'axe (Ox), les droites d'equation $x = a$ et $x = b$ et la courbe d'equation $y = f(x)$.

2.1.1 Définitions d'une Quadrature

On donne quelques définitions qui sont extraites de [MH18]

Définition 2.1. On appelle **formule de quadrature** la formule de type :

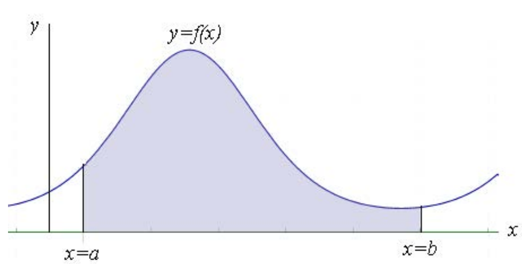

Figure 2.1 – Surface délimitée

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) \tag{2.2}$$

une combinaison linéaire des valeurs discrètes de la fonction f qui sert à approcher l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(t)dt$ où les $x_i, i = \{0, 1, 2, ..., n\}$ sont les points d'intégration , et les α_i sont les poids.

• La formule de quadrature est dite **fermée** si $x_0 = a \; et \; x_n = b$, et ouverte sinon.

Définition 2.2. On appelle erreur de la méthode l'écart entre la valeur approchée donnée par la formule de quadrature et la valeur exacte de l'intégrale :

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f).$$

• La formule de quadrature est dite **exacte** sur l'ensemble F si : $E_n(f) = 0 \, \forall f \epsilon F.$

• Le degré (**la précision**) de la formule est q si celle-ci est exacte sur $R_q[x]$ et non exacte sur $R_m[x]; \forall m > q$.

• La formule est dite **convergente** pour la fonction f si $E_n(f) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Elle est d'ordre p si $E_n(f) = O(h^p)$ avec $h = \underset{i\in\{0,1,2,...n\}}{Max} |x_{i+1} - x_i|$.

2.2 Quadrature de type interpolation

2.2.1 Méthode des rectangles

La méthode des rectangles consiste à :

- diviser l'intervalle $[a, b]$ en n segments égaux. On obtient ainsi $n+1$ points équidistants :

On pose : $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, n$ avec $h = \frac{b-a}{n}$

- approximer la surface de chaque "tranche" par un rectangle .

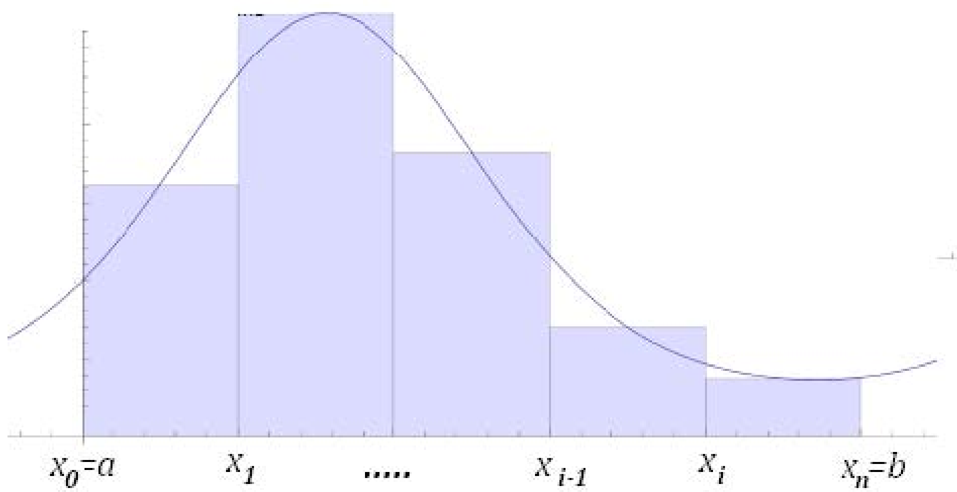

FIGURE 2.2 – Méthode des rectangles

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = (x_i - x_{i-1})\, f(\alpha_i) = hf(\alpha_i),\ \ \alpha_i \epsilon [x_{i-1}, x_i].$$

La fonction est donc remplacée par une constante (polynôme de degré 0) sur chaque sous-intervalle.

On peut prendre $\alpha_i = x_i$ (point à droite) ou $\alpha_i = x_{i-1}$ (point à gauche), mais la meilleur valeur de α_i est celle du point milieu, c'est-à-dire

$\alpha_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$.

En additionnant la somme des surfaces de tous les rectangles, on obtient :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\alpha_i)dx.$$

Ce qui donne après calcul :

$$I_n(f) = h \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i).$$

Calcul de l'erreur :

On peut montrer que pour la formule de rectangle, l'erreur est donnée par :

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2.$$

Avec $M_2 = \underset{x\in[a,b]}{sup} \left|f''(x)\right|$.

- rectangles à gauche :$\alpha_i = x_{i-1} \rightarrow \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_{i-1})$

- rectangles à droite :$\alpha_i = x_i \rightarrow \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n h_i f(x_i)$
- formule du point milieu : $\alpha_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} \rightarrow \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n h_i f(x_{i-\frac{1}{2}})$.

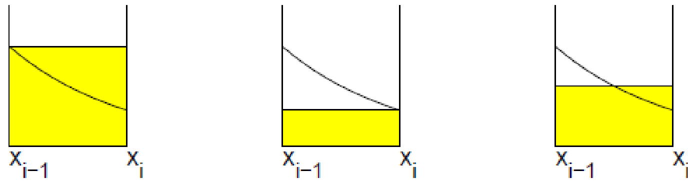

FIGURE 2.3 – Formule des rectangles à gauche, des rectangles à droite, du point milieu

2.2.2 Méthode des trapèzes

La méthode de Trapèzes consiste à :

- diviser l'intervalle $[a, b]$ en n segments égaux. On obtient ainsi $(n + 1)$ points équidistants. On pose : $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, n$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.

- approximer la surface de chaque "tranche" par un trapèze construit à partir des valeurs de la fonction aux bornes de chaque sous-intervalle.

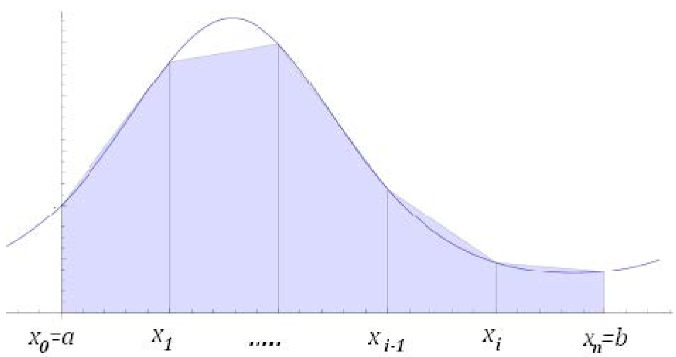

FIGURE 2.4 – Méthode des trapèzes

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[(f(x_i) + f(x_{i-1})\right]$$

La fonction f est donc remplacée par une droite (polynôme de degré 1) sur chaque sous-intervalle. En additionnant la somme des surfaces de tous les trapèzes, on obtient :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = & \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx. \\ = & \tfrac{h}{2}\left[(f(x_0)+f(x_1)\right] + \tfrac{h}{2}\left[(f(x_1)+f(x_2)\right] + \tfrac{h}{2}\left[(f(x_{n-1})+f(x_n)\right].\end{aligned}$$

Ce qui donne après calcul :

$$I_n(f) = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right].$$

Calcul de l'erreur :

On peut montrer que pour la formule de Trapèze, l'erreur est donnée par :

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2.$$

Avec $M_2 = \underset{x\in[a,b]}{sup} \left|f''(x)\right|$.

2.2.3 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à :

- diviser l'intervalle $[a, b]$ en n segments égaux avec n un nombre pair $n = 2m$. On obtient ainsi $2m + 1$ points équidistants $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, n$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.

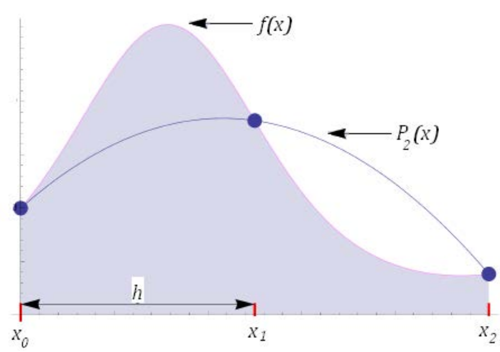

FIGURE 2.5 – Méthode de Simpson

- approximer la fonction sur chaque "tranche" par une parabole construite à partir de trois points consécutifs.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx$$

Entre x_0 et x_2 et passant par x_1, il y a trois points d'interpolation, on peut donc remplacer la fonction $f(x)$ par un polynôme de degré 2. D'après la forme de Lagrange, ce polynôme s'écrit

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

avec

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Si on pose : $x - x_1 = th$, alors :

$$x - x_2 = (x - x_1) - (x_2 - x_1) = th - h = h(t-1)$$

et

$$x - x_0 = (x - x_1) + (x_1 - x_0) = th + h = h(t+1).$$

Ce qui donne après calcul :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = \tfrac{f(x_0)}{3}h + 4\tfrac{f(x_1)}{3}h + \tfrac{f(x_2)}{3}h = \tfrac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

et finalement

$$I_n(f) = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})\right].$$

Calcul de l'erreur :

On peut montrer que pour la formule de Simpson, l'erreur est donnée par :

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4.$$

Avec $M_4 = \underset{x\in[a,b]}{sup} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

2.2.4 Quadrature de Newton-Côtes

On peut constater que les méthodes précédentes utilisent le même principe d'approximation, c'est-à-dire remplacer la fonction par un polynôme d'un certain degré :

— degré 0 pour la méthode des rectangles,

— degré 1 pour la méthode des trapèzes,

— degré 2 pour Simpson.

On peut donc généraliser cette démarche. On parle alors de méthode de Newton-Cotes de degré d.

La méthode de Simpson devient alors la méthode de Newton-Cotes de degré 2.

Par exemple, pour la méthode de Newton-Cotes de degré 3, on obtient la formule suivante :

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{h}{8}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\right].$$

Ce sont des formules de quadrature de type interpolation avec subdivision régulière.

• Si les deux extrémités de l'intervalle sont des points d'interpolation il s'agit de Newton-Côtes fermé (méthodes des trapèzes, de Simpson...)

• Si les deux bornes de l'intervalle d'intégration ne sont pas des points d'interpolation il s'agit de Newton-Côtes ouvert (méthode de Poncelet...)

2.3 Avantages et limitations des méthodes classiques.

Voici une présentation des avantages et des limitations des méthodes quadrature classiques :

Avantages :

Précision contrôlable : Les méthodes de quadrature classiques offrent un contrôle précis sur la précision du calcul de l'intégrale. En ajustant le nombre de points d'évaluation ou d'autres paramètres de la méthode, il est possible d'obtenir une précision souhaitée pour l'estimation de l'intégrale.

Exemple : Supposons que nous devions calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné avec une précision de 10^{-6} . En utilisant la méthode de Simpson, nous pouvons ajuster le nombre de subdivisions jusqu'à ce que la différence entre deux approximations successives soit inférieure à 10^{-6}, garantissant ainsi la précision requise.

Applicabilité à des fonctions complexes : Les méthodes de quadrature classiques peuvent être utilisées pour intégrer des fonctions qui n'ont pas de forme analytique simple ou pour lesquelles une intégration symbolique est difficile voire impossible. Elles offrent une approche pratique pour évaluer numériquement des intégrales dans une grande variété de situations.

Limitations :

Sensibilité à la discrétisation : Comme toute méthode numérique, les méthodes de quadrature classiques sont sensibles à la discrétisation de l'intervalle d'intégration. Un mauvais choix du nombre de points d'évaluation ou de l'algorithme de quadrature peut entraîner une estimation incorrecte de l'intégrale.

Exemple : Supposons que nous devions calculer l'intégrale d'une fonction oscillante telle que $sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. La méthode des rectangles avec un nombre de subdivisions insuffisant pourrait sous-estimer l'intégrale en ne capturant pas correctement les oscillations de la fonction, car les points d'évaluation pourraient tomber au mauvais endroit.

Limitations dans les dimensions élevées : La plupart des méthodes de quadrature classiques deviennent inefficaces dans les dimensions élevées en raison de lamalédiction de la dimensionnalité. Le nombre de points d'évaluation nécessaire pour maintenir une précision raisonnable augmente exponentiellement avec le nombre de dimensions de l'intégrale.

Dépendance à la régularité de la fonction : Certaines méthodes de quadrature classiques peuvent être moins efficaces pour intégrer des fonctions qui ne sont pas régulières sur l'intervalle d'intégration. Des phénomènes tels que les singularités ou les discontinuités peuvent poser des défis supplémentaires pour certaines méthodes de quadrature.

Exemple : L'intégrale de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ présente une singularité en $x = 0$. Certaines méthodes de quadrature classiques peuvent avoir du mal à gérer cette singularité, conduisant à des estimations inexactes de l'intégrale si elles ne sont pas correctement traitées.

En résumé, les méthodes de quadrature classiques offrent un moyen efficace et contrôlable de calculer numériquement des intégrales, mais elles présentent également des limitations, notamment en termes de sensibilité à la discrétisation, d'inefficacité pour les fonctions à oscillations rapides et de difficulté dans les dimensions élevées. Il est important pour les praticiens de choisir judicieusement la méthode de quadrature appropriée en fonction des caractéristiques de la fonction à intégrer et des contraintes de calcul.

Chapitre 3

Quadrature de Gauss

La méthode de quadrature de Gauss est une technique numérique fondamentale utilisée pour l'approximation des intégrales définies, et plus particulièrement des intégrales de la forme .

Cette méthode se distingue par son efficacité et sa précision dans l'évaluation des intégrales, notamment en comparaison avec d'autres techniques de quadrature telles que la méthode des trapèzes ou la méthode de Simpson.

3.1 Historique de la Méthode

La méthode de quadrature de Gauss trouve ses origines dans les travaux de Carl Friedrich Gauss au début du 19e siècle. Gauss était un mathématicien prodige dont les contributions allaient bien au-delà de la méthode de quadrature. Il a travaillé sur une multitude de sujets, de l'algèbre à la géodésie en passant par l'astronomie.

L'histoire de la méthode de quadrature de Gauss est étroitement liée à son travail en astronomie. Gauss s'intéressait particulièrement à la détermination des orbites des corps célestes. Pour calculer ces orbites, il était nécessaire d'intégrer des fonctions complexes représentant les trajectoires des planètes et des comètes autour du soleil.

L'une des premières contributions significatives de Gauss à la méthode de quadrature est son développement des polynômes orthogonaux. En 1805, à l'âge de 18 ans, Gauss publie son livre "Disquisitiones generales circa seriem infinitam..."[Gau11], dans lequel il étudie les séries infinies et introduit les polynômes orthogonaux, qui sont essentiels pour la méthode de quadrature de Gauss.

En 1814, dans son ouvrage "Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium"[18774], (Théorie du mouvement des corps célestes autour du soleil dans des sections coniques), Gauss utilise pour la première fois une méthode de quadrature similaire à celle que nous connaissons aujourd'hui. Il s'en sert pour calculer des intégrales nécessaires à la détermination des orbites des planètes.

La méthode de Gauss repose sur le choix judicieux des points où évaluer la fonction à intégrer. *Gauss* a démontré que certains ensembles de points, appelés les points de Gauss,

FIGURE 3.1 – Carl Friedrich Gauss

associés à des poids spécifiques, permettent d'obtenir une approximation précise de l'intégrale. Ces points et poids sont déterminés de manière à minimiser l'erreur d'approximation.

Au fil du temps, la méthode de quadrature de Gauss a été étudiée en profondeur et généralisée pour s'adapter à une grande variété de situations. Elle est devenue un outil fondamental en calcul numérique, utilisé dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées et de la science.

Ainsi, l'histoire de la méthode de quadrature de Gauss est celle d'une idée brillante développée par un esprit mathématique exceptionnel, et qui a depuis révolutionné la façon dont nous approchons le calcul numérique des intégrales.

Le développement de la méthode de quadrature de Gauss implique plusieurs mathématiciens dont les contributions ont été majeures.

3.2 Principe fondamental

Son principe repose sur l'approximation d'une intégrale par une somme pondérée des valeurs de la fonction à des points spécifiques (appelés points de Gauss ou nœuds de Gauss) situés dans le domaine d'intégration. Contrairement à des méthodes plus simples qui utilisent des points d'échantillonnage régulièrement espacés, la méthode de Gauss choisit des points et des poids de manière optimale pour maximiser la précision.[Jed05]

Pour une intégrale de la forme $\int_b^a f(x)\,dx$ la quadrature de Gauss vise à trouver une approximation sous la forme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i)$$

où x_i sont les points de Gauss et ω_i sont les poids associés. Ces points et poids sont déterminés de manière à rendre l'approximation exacte pour les polynômes de degré aussi élevé que possible.

Voici les principes sous-jacents à la méthode de quadrature de Gauss :

Choix des points d'évaluation (nœuds) : La méthode de Gauss utilise une approche pour choisir les points d'évaluation où la fonction à intégrer sera évaluée. Ces points sont souvent choisis de manière à minimiser l'erreur d'approximation. Dans le cas de la quadrature de Gauss, ces points sont souvent les zéros des polynômes orthogonaux spécifiques définis sur l'intervalle d'intégration.

Choix des poids : En plus des points d'évaluation, la méthode de Gauss associe des poids à chaque point. Ces poids sont également choisis pour minimiser l'erreur d'approximation. Les poids sont déterminés en utilisant les propriétés des polynômes orthogonaux associés.

3.3 Mise en oeuvre de la méthode

Comme application de ce qui précède, examinons tout d'abord le cas du calcul d'une intégrale du type $\int_a^b f(x)\omega(x)\,dx$ où a et b sont deux réels.

Comme les polynômes orthogonaux sont mieux connus sur $[-1,1]$, on s'y ramène toujours (quand on travaille sur un intervalle borné) à l'aide du changement de variable : $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$, ce qui donne $dx = \frac{b-a}{2}dt$, et $f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t) = g(t)$

Ce changement de variable permet de ramener l'intervalle [a,b] à l'intervalle [-1,1],

$$I(g) = \int_{-1}^{1} g(x)\omega(x)dx$$

Choisir le nombre de points de Gauss n et appliquer la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} g(x)\omega(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i g(x_i)$$

D'où :

$$I_n(f) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i g(x_i). \tag{3.1}$$

Pour n choisi, l'équation 3.1 est exacte pour tout polynôme de degré $\leq m = 2n-1$.

Pour les valeurs de ω_i et t_i, on utilise le tableau suivant :

n	t_i	ω_i
1	0	2
2	$\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$8/9$
	$\mp\sqrt{\frac{3}{5}}$	$5/9$
4	$\mp\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6\sqrt{6/5}}$
...	...	...

Calcul de l'erreur :

On peut montrer que pour la formule de Gauss, l'erreur est donnée par :

$$|I(f)-I_n(f)| \leq \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3\,(2n+1)}M_{2n}.$$

Avec $M_{2n} = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(2n)}(x)\right|$.

3.4 Applications en Calcul Numérique

1- Résolution des équations différentielles

Utilisation de la quadrature de Gauss pour approximer les solutions d'équations différentielles ordinaires et partielles en utilisant des méthodes spectrales ou par éléments finis.

2- Simulation et modélisation stochastique

Intégration de fonctions complexes dans les modèles probabilistes et simulations Monte Carlo, en particulier lorsque les distributions sous-jacentes sont gaussiennes ou exponentielles.

3- Analyse numérique et optimisation

Approximation des intégrales apparaissant dans les problèmes d'optimisation, en particulier en économie et en finance où les fonctions à intégrer peuvent être très irrégulières ou définies sur des intervalles infinis.

4- Physique et ingénierie

Calcul des intégrales dans les problèmes de mécanique quantique, électromagnétisme, et dynamique des fluides, où les fonctions intégrées peuvent être complexes et oscillantes.

3.5 Comparaison avec d'autre méthodes

Les méthodes de quadrature traditionnelles, comme la méthode des rectangles, la méthode du trapèze ou la méthode de Simpson, utilisent une approche de découpage de la région sous la courbe en formes géométriques simples (rectangles, trapèzes, etc.) et estiment ensuite l'aire sous la courbe en calculant la somme de ces formes géométriques.

La méthode de Gauss, en revanche, est une méthode de quadrature numérique qui cherche à obtenir une meilleure précision en choisissant judicieusement les points où évaluer la fonction. Plutôt que de diviser la région sous la courbe en formes géométriques, la méthode de Gauss utilise une série de points d'évaluation soigneusement sélectionnés, appelés nœuds de Gauss, et leurs pondérations associées. Ces nœuds de Gauss sont choisis de manière à minimiser l'erreur d'approximation, souvent en exploitant des propriétés algébriques spécifiques des polynômes.

En résumé, les méthodes de quadrature traditionnelles utilisent une approche de découpage de la région en formes géométriques simples, tandis que la méthode de Gauss utilise une approche plus sophistiquée basée sur le choix stratégique des points d'évaluation pour minimiser l'erreur d'approximation.

Chapitre 4

Variantes et Applications

Nous discutons maintenant des relations entre les polynômes orthogonaux et les quadrature de Gauss. Le mécanisme d'une quadrature de Gauss est de rechercher la meilleure approximation numérique, il appartient a la famille des quadratures numériques.

$$\int_a^b f(x)\omega(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) + E_N[f] \tag{4.1}$$

La méthode utilisent une subdivision particulière où les points x_i sont les racines d'une famille de polynômes orthogonaux, qui ne sont pas régulièrement espacés, contrairement aux méthodes composées, ω_i sont les poids de la quadrature, et $E_N[f]$ est l'erreur de la quadrature.

Si $E_N[f] = 0$, on dit que la formule de quadrature est exact pour f.

Nous supposons que les noeuds x_i sont distincts. Si $f(x) \in C^{N+1}[a;b]$: On à Voir [DR07] :

$$E_N[f] = \frac{1}{(N+1)!}\int_a^b f^{(N+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx.$$

Théorème 4.1. *Soit $\{x_i\}_{i=0}^N$ l'ensemble du zéros des polynômes orthogonaux P_{N+1}, alors il exist un ensemble unique de poids de quadrature $\{\omega_i\}_{i=0}^N$, tel que :*

$$\int_a^b p(x)\omega(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N} \omega_i p(x_i), \quad \forall P \in \mathbb{P}_{2N+1}.$$

où les poids de quadrature sont tous positifs .

Preuve. voir [STW11] p : 58

4.1 Variantes de la Méthode de Gauss

En quadrature de Gauss, les polynômes orthogonaux jouent un rôle central pour l'approximation des intégrales. Ces polynômes sont choisis de telle sorte qu'ils forment une base orthogonale dans un certain espace vectoriel avec un produit scalaire spécifique. Les points de quadrature et les poids associés sont alors sélectionnés de manière à minimiser l'erreur d'approximation de l'intégrale d'une fonction.

Les polynômes orthogonaux les plus couramment utilisés en quadrature de Gauss sont :

1. **Polynômes de Legendre** : Utilisés pour l'intégration sur l'intervalle $[-1, 1]$. Les points de quadrature de Gauss-Legendre sont souvent utilisés pour intégrer des fonctions sur des intervalles de forme générale.

2. **Polynômes de Chebyshev** : Principalement utilisés pour l'intégration sur l'intervalle $[-1, 1]$, bien qu'ils puissent également être adaptés à d'autres intervalles. Les points de quadrature de Gauss-Chebyshev sont souvent utilisés pour intégrer des fonctions oscillantes.

3. **Polynômes de Hermite** : Utilisés pour l'intégration sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Les points de quadrature de Gauss-Hermite sont utiles pour intégrer des fonctions pondérées par des distributions gaussiennes.

4. **Polynômes de Laguerre** : Utilisés pour l'intégration sur l'intervalle $[0, +\infty)$. Les points de quadrature de Gauss-Laguerre sont adaptés pour intégrer des fonctions pondérées par des distributions exponentielles.

En général, le choix du polynôme orthogonal dépend de la fonction à intégrer et de l'intervalle sur lequel l'intégration est effectuée. Les points de quadrature de Gauss associés à ces polynômes garantissent une précision élevée pour l'approximation numérique de l'intégrale.

Il existe plusieurs variantes de cette méthode, chacune adaptée à des types spécifiques d'intégrales ou à des exigences de précision. Voici une exploration des principales variantes :

4.2 Quadrature de Gauss-Legendre

La quadrature de Gauss-Legendre est la forme la plus courante de la quadrature de Gauss. Elle est utilisée pour approximer l'intégrale de fonctions sur l'intervalle $[-1, 1]$.[FÉpM94]

Pour le problème d'intégration le plus classique, on utilise la méthode de Gauss-Legendre. Il s'agit d'intégrer la fonction f sur le segment $[-1, 1]$.

Les points de Gauss x_i sont les racines des polynômes de Legendre $P_n(x)$, de degré n. Les poids ω_i sont déterminés de telle sorte que la formule de quadrature soit exacte pour tous les polynômes de degré jusqu'à $2n - 1$.[DR07]

4.2.1 Calcul des Points de Gauss

Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ peuvent être définis par la relation de récurrence suivante :

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

Les points de Gauss x_i sont les racines de $P_n(x)$.

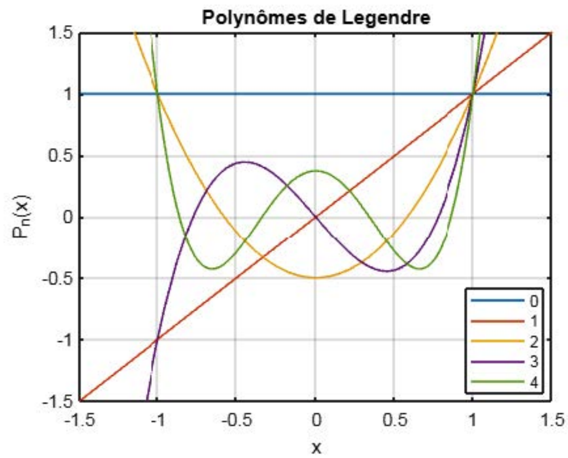

FIGURE 4.1 – Polynômes de Legendre de degré 0 à 4

4.2.2 Calcul des Poids de Gauss

Les poids ω_i peuvent être calculés en utilisant la formule : [AS64]

$$\omega_i = \int_{-1}^{1} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_i)} dx.$$

Pour le polynôme de Legendre, une formule pratique pour les poids est :

$$\omega_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)\,[P_n'(x_i)^2]}$$

.

ou P_n' est la dérivé de P_n.

Le tableau suivant donne l'ensemble des informations pour réaliser le calcul approché de I pour les formules à un, deux et trois points.

4.2.3 Exemple

Prenons un exemple pour illustrer la quadrature de Gauss-Legendre avec $n = 2$. Les points de Gauss et les poids pour $n = 2$ sont :

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$,$\omega_1$=$\omega_2 = 1$.

Pour une fonction $f(x)$ à intégrer sur $[-1, 1]$, la quadrature de Gauss-Legendre donne :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 1f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + 1f(-\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Nombre de points, n	Poids (ω_i)	Points (x_i)	Polynôme de Legendre
1	2	0	x
2	1, 1	$-\sqrt{1/3}$, $\sqrt{1/3}$	$(3x^2 - 1)/2$
3	5/9, 8/9, 5/9	$-\sqrt{3/5}$, 0, $\sqrt{3/5}$	$(5x^3 - 3x)/2$

FIGURE 4.2 – Gauss-Legendre

4.3 Méthodes de Gauss-Tchebychev

La quadrature de Chebyshev-Gauss, également appelée quadrature de Chebyshev, est une quadrature gaussienne sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec fonction de pondération $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$. elle utilise les polynômes de Chebyshev de première espèce $T_n(x)$ pour choisir les points et les poids de l'intégration. Les polynômes de Chebyshev sont définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ et ont des propriétés orthogonales qui les rendent particulièrement adaptés pour certaines classes d'intégrales.[GW67][Lau01][DR07]

La formule de la quadrature de Gauss-Chebyshev pour une intégrale de la forme ci-dessus est donnée par :

$$I = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i)$$

où les x_i sont les racines des polynômes de Chebyshev de première espèce $T_n(x)$, et les ω_i sont les poids associés.

4.3.1 Points de la Quadrature (x_i)

Les racines des polynômes de Chebyshev de première espèce de degré n sont données par : $x_i = cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right], i = 1, 2, 3, ...$

Ces x_i sont les points où la fonction $f(x)$ sera évaluée.

4.3.2 Poids de la Quadrature ω_i

Les poids pour la quadrature de Gauss-Chebyshev sont constants et égaux pour tous les points, donnés par :$\omega_i = \frac{\pi}{n}$, $i = 1, 2, 3, ...$

4.3.3 Exemple

Prenons un exemple pour illustrer la quadrature de Gauss-Chebyshev avec $n = 3$. Les points de Gauss et les poids pour $n = 3$ sont :

$x_1 = cos\left[\frac{\pi}{6}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = cos\left[\frac{\pi}{2}\right] = 0, x_3 = cos\left[\frac{5\pi}{6}\right] = \frac{-\sqrt{3}}{2}.$

Pour $n = 3$, les poids sont $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{\pi}{3}$.

Pour une fonction $f(x)$ à intégrer sur $[-1, 1]$, la quadrature de Gauss-Legendre donne :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{f(x)}}{\sqrt{(1-\mathrm{x}^2)}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\left[f(\frac{\sqrt{3}}{2}) + f(0) + f(-\frac{\sqrt{3}}{2})\right].$$

Les deux tableaux suivants donnent les valeurs numériques et analytiques des premiers points et poids.

n	x_i	w_i
2	± 0.707107	1,5708
3	0	1,0472
	± 0.866025	1,0472
4	± 0.382683	0,785398
	± 0.92388	0,785398
5	0	0,628319
	± 0.587785	0,628319
	± 0.951057	0,628319

2	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\pi$
3	0	$\frac{1}{3}\pi$
3	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\pi$
4	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}\pi$
4	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}\pi$
5	0	$\frac{1}{5}\pi$
5	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}$	$\frac{1}{5}\pi$
5	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}$	$\frac{1}{5}\pi$

FIGURE 4.3 – Gauss-Tchebychev

4.4 Quadrature de Gauss-Hermite

La quadrature de Gauss-Hermite est une technique numérique utilisée pour approcher les intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx$$

où $f(x)$ est une fonction donnée. Cette méthode est particulièrement utile en statistique, en physique et en ingénierie, où de telles intégrales apparaissent fréquemment, notamment dans les distributions gaussiennes.

4.4.1 Principe de la Quadrature de Gauss-Hermite

La quadrature de Gauss-Hermite repose sur l'idée de remplacer l'intégrale par une somme pondérée des valeurs de la fonction en des points spécifiques (appelés nœuds) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Ici : -x_i sont les nœuds, c'est-à-dire les points où la fonction est évaluée.

- w_i sont les poids associés à chaque nœud.

Les nœuds x_i sont les racines du polynôme de Hermite $H_n(x)$, qui est un polynôme orthogonal défini par :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

Les poids w_i sont calculés en fonction de ces nœuds et du polynôme de Hermite. [AS64][Lau01][GW69][BV

4.4.2 Calcul des Nœuds et des Poids

1. **Calcul des Nœuds** : Les nœuds x_i sont les racines du polynôme de Hermite $H_n(x)$. Ces racines peuvent être trouvées numériquement.

2. **Calcul des Poids** : Les poids w_i sont donnés par :

$$w_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 \left[H_{n-1}(x_i)\right]^2}$$

4.4.3 Exemple de Quadrature de Gauss-Hermite

Considérons l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx$$

Supposons que nous voulons utiliser une quadrature de Gauss-Hermite avec $n = 3$ nœuds. Les nœuds x_i pour $H_3(x) = 0$ sont :

$$x_1, x_2, x_3$$

Les poids correspondants sont :

$$w_1, w_2, w_3$$

Ainsi, l'approximation de l'intégrale est :

$$I \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

Application Pratique

Pour une application pratique, on utilise souvent des tables ou des algorithmes numériques pour trouver les racines des polynômes de Hermite et les poids associés. Voici un exemple de nœuds et poids pour $n = 3$:

- Nœuds x_i : $x_1 = -\sqrt{3/2}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3/2}$ - Poids w_i : $w_1 = w_3 = \sqrt{\pi}/6, w_2 = 2\sqrt{\pi}/3$

L'intégrale serait alors approximée comme suit :

$$I \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6} f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \frac{2\sqrt{\pi}}{3} f(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{6} f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

La quadrature de Gauss-Hermite est une méthode puissante pour approximer les intégrales gaussiennes, exploitant les propriétés des polynômes de Hermite pour obtenir une approximation précise avec un nombre limité d'évaluations de la fonction.

4.5 Quadrature de Gauss-Laguerre

La quadrature de Gauss-Laguerre [AS64, BW16, DR07]est une méthode d'intégration numérique utilisée pour évaluer des intégrales de la forme :

$$I = \int_0^\infty f(x)e^{-x}\, dx$$

Cette méthode repose sur le choix judicieux des points et des poids afin de maximiser la précision de l'intégration pour une fonction \(f(x) \) qui est multipliée par une fonction pondératrice exponentielle décroissante \(e^{-x} \). Elle est particulièrement utile lorsque la fonction à intégrer décroît rapidement à l'infini.

Principe de la quadrature de Gauss-Laguerre

La quadrature de Gauss-Laguerre approche l'intégrale I par une somme pondérée des valeurs de la fonction en des points spécifiques, appelés les nœuds de Gauss-Laguerre. Formulée de manière générale, elle s'écrit :

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

où x_i sont les nœuds (ou points) et w_i sont les poids associés. Ces nœuds et poids sont déterminés de manière à ce que la quadrature soit exacte pour les polynômes de degré $2n - 1$ ou moins.

4.5.1 Calcul des nœuds et des poids

Les nœuds x_i de la quadrature de Gauss-Laguerre sont les racines des polynômes de Laguerre généralisés $L_n(x), où L_n(x)$ est le n-ième polynôme de Laguerre. Les polynômes de Laguerre sont définis par la relation de récurrence :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

Les poids w_i associés aux nœuds x_i sont donnés par :

$$w_i = \frac{x_i}{(n+1)^2[L_{n+1}(x_i)]^2}$$

4.5.2 Exemple pratique

Considérons l'intégrale suivante à évaluer à l'aide de la quadrature de Gauss-Laguerre avec $n = 3$:

$$I = \int_0^\infty f(x)e^{-x}\,dx$$

Supposons que $f(x) = x^2$.

1. Trouvons les racines des polynômes de Laguerre pour $n = 3$:

$L_3(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 18x - 6)$

Les racines x_i de $L_3(x) = 0$ sont approximativement : $x_1 = 0.4158, x_2 = 2.2943, x_3 = 6.2899$.

2. Calculons les poidsw_i pour chaque nœud x_i :

- $w_1 \approx 0.711 - w_2 \approx 0.278 - w_3 \approx 0.011$

Approximons l'intégrale :

$I \approx \sum_{i=1}^{3} w_i f(x_i) = 0.711 \cdot (0.4158)^2 + 0.278 \cdot (2.2943)^2 + 0.011 \cdot (6.2899)^2$

$I \approx 0.711 \cdot 0.173\ + 0.278 \cdot 5.263\ + 0.011 \cdot 39.567.$

$I \approx 0.123 + 1.464 + 0.435.$

$I \approx 2.022.$

La quadrature de Gauss-Laguerre est une méthode efficace pour les intégrales de la forme donnée, surtout quand \(f(x) \) présente une décroissance rapide ou une certaine forme permettant une intégration plus facile avec les fonctions pondératrices de type exponentiel. L'approximation de l'intégrale repose sur les nœuds (racines des polynômes de Laguerre) et les poids qui assurent une précision élevée pour les polynômes de degré élevé.

4.6 Comparaison et Applications

Gauss-Legendre est la méthode la plus générale et est utilisée pour des intégrales sur des intervalles finis sans pondération.

Gauss-Chebyshev est particulièrement efficace pour des fonctions avec une singularité à $\pm$ 1 ou pour des poids spécifiques.

Gauss-Hermite est adaptée aux intégrales impliquant la fonction gaussienne, souvent utilisées en probabilités et statistiques.

Gauss-Laguerre est idéale pour des intégrales avec des fonctions exponentielles décroissantes, courantes en physique quantique et dans les processus de déclin.

Chaque méthode a ses avantages spécifiques en fonction de la nature de la fonction à intégrer et de l'intervalle d'intégration. L'efficacité et la précision de ces méthodes sont maximisées en choisissant

Conclusion

Ce mémoire sur les méthodes de quadrature de Gauss a permis de mettre en lumière l'importance et l'efficacité de cette technique en analyse numérique, en se concentrant sur plusieurs aspects clés.

Les recherches menées ont confirmé que la méthode de quadrature de Gauss offre une précision supérieure pour l'estimation numérique des intégrales par rapport aux méthodes classiques. Les résultats numériques des études de cas ont démontré la robustesse de cette méthode, particulièrement dans les contextes où l'exactitude des calculs est cruciale.

Les principales contributions de ce travail résident dans la démonstration de l'efficacité de la quadrature de Gauss et dans l'exploration de ses différentes variantes. En identifiant les avantages spécifiques de chaque variante, ce mémoire a enrichi la compréhension des applications potentielles de cette méthode. Cependant, certaines limitations ont été notées, notamment la complexité accrue de certaines variantes et les contraintes computationnelles dans les cas de très haute dimension.

Perspectives Futures Pour les recherches futures, plusieurs pistes sont suggérées :

Développer des algorithmes plus efficaces pour les variantes de la quadrature de Gauss, en particulier pour les problèmes de haute dimension.

Explorer de nouvelles applications pratiques dans divers domaines scientifiques et industriels, où la précision de l'intégration numérique est essentielle. Investir dans la recherche sur les méthodes adaptatives pour mieux gérer les intégrales avec des singularités ou des comportements complexes.

En conclusion, la quadrature de Gauss s'avère être une méthode incontournable pour les calculs numériques d'intégrales, avec un potentiel considérable pour des améliorations et des applications futures. Ce mémoire a non seulement illustré son efficacité actuelle mais aussi ouvert la voie à des développements futurs prometteurs.

ملخص

طريقة التربيع لجوص هي نهج قوي لحساب التكاملات عددياًا باستخدام مزيج ذكي من نقاط التقييم والأوزان، وذلك استناداً إلى خصائص كثيرات الحدود المتعامدة.

في سياق الحسابات العددية، التربيع هو طريقة تستخدم لتقدير قيمة تكامل محدد عددياًا. طرق التربيع أساسية في العديد من المجالات العلمية والتقنية حيث يكون من الضروري تقريب التكامل العددي لدالة على فترة معينة. تُستخدم هذه الطرق بشكل واسع في العديد من المجالات العلمية والهندسية، مثل ميكانيكا الهياكل، والفيزياء الكمومية، وطرق العناصر المحدودة، إلخ. تمت دراسة خصائصها الرياضية على نطاق واسع وتتمتع بالعديد من الأشكال المتنوعة التي تناسب أنواعاًا مختلفة من المشكلات.

كلمات مفتاحية: الحساب العددي ، طريقة التربيع لجوص ،نقاط التقييم ،دالة الثقل، كثيرات الحدود المتعامدة.

Résumé

La méthode de quadrature de Gauss est une approche puissante pour calculer des intégrales numériquement en utilisant une combinaison intelligente de points d'évaluation et de poids, basée sur les propriétés des polynômes orthogonaux.
Dans le contexte du calcul numérique, la quadrature est une méthode utilisée pour estimer la valeur d'une intégrale définie numériquement. Les méthodes de quadrature sont essentielles dans de nombreux domaines scientifiques et techniques où il est nécessaire d'approximer numériquement l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné. Ces méthodes sont très largement utilisées dans de nombreux domaines scientifiques et d'ingénierie, comme la mécanique des structures, la physique quantique, les méthodes des éléments finis, etc. Leurs propriétés mathématiques ont été largement étudiées et elles bénéficient de nombreuses variantes adaptées à différents types de problèmes.

Mots-clés : Calcul numérique, Méthode de quadrature de Gauss, Points d'évaluation, Poids, Polynômes orthogonaux

Abstract

The Gauss quadrature method is a powerful approach for numerically computing integrals using an intelligent combination of evaluation points and weights, based on the properties of orthogonal polynomials. In the context of numerical computation, quadrature is a method used to estimate the value of a definite integral numerically. Quadrature methods are essential in many scientific and technical fields where it is necessary to approximate the integral of a function over a given interval numerically. These methods are widely used in many scientific and engineering fields, such as structural mechanics, quantum physics, finite element methods, etc. Their mathematical properties have been extensively studied, and they benefit from numerous variants adapted to different types of problems.

Key words : Numerical calculation, Gauss quadrature method,Evaluation points,weights,Orthogonal polynomials.

Bibliographie

[18774] Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. 1874.

[AS64] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, ninth dover printing, tenth gpo printing edition, 1964.

[BW16] Richard Beals and Roderick Wong. *Special Functions and Orthogonal Polynomials*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016.

[DR07] Philip J Davis and Philip Rabinowitz. *Methods of numerical integration*. Courier Corporation, 2007.

[eAH14] Michel Pierre et Antoine Henrot. *Analyse Numérique, cours de Takéo Takahashi, cours électif CE33, Ecole des Mines de Nancy*, 2013-2014.

[FÉpM94] A. Fortin and Québec) École polytechnique (Montréal. *Analyse numérique pour ingénieurs*. Cours ... Presses internationales Polytechnique, 1994.

[Gau11] Carl Friedrich Gauss. *DISQUISITIONES GENERALES CIRCA SERIEM INFINITAM*. Cambridge University Press, 2011.

[GW67] Gene H. Golub and John H. Welsch. Calculation of gauss quadrature rules. In *Milestones in Matrix Computation*, 1967.

[GW69] Gene H Golub and John H Welsch. Calculation of gauss quadrature rules. *Mathematics of computation*, 23(106) :221–230, 1969.

[Jed05] Franck Jedrzejewski. *Introduction aux méthodes numériques*. Springer Science & Business Media, 2005.

[Lau01] Dirk P. Laurie. Computation of gauss-type quadrature formulas. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 127(1) :201–217, 2001. Numerical Analysis 2000. Vol. V : Quadrature and Orthogonal Polynomials.

[Leg10] Guillaume Legendre. *Méthodes Numériques. Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientique, cours, DAUPHINE université Paris*. 2009-2010.

[Lud00] Valet Ludovic. Généralités sur les polynômes orthogonaux. page 49, June 2000. Lecture.

[MH18] M. Marie-Hélène. *Méthodes numériques - Algorithmes numériques - Fondements théoriques et analyse pratique - Cours, exercices et applications avec MATLAB®* - *Niveau C.* Editions Ellipses, 2018.

[Sel23] CHERGUI Selma. La méthode de quadrature pour les équations intégrales. Master's thesis, University of Biskra, 20-Jun-2023.

[STW11] Jie Shen, Tao Tang, and Li-Lian Wang. *Orthogonal Polynomials and Related Approximation Results*, pages 47–140. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011.

[Sze39] Gabor Szeg. *Orthogonal polynomials*, volume 23. American Mathematical Soc, 1939.