

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU
DIPLÔME
DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE
SPECIALITE: AUTOMATIQUE
THEME

**Commande adaptative à modèle de référence
d'ordre fractionnaire**

Proposé et dirigé par :

- Mr. KHETTAB Khatir

Présenté par :

- DELOUM Abdennour

Année Universitaire: 2011/2012

N° d'ordre : 8

Remerciements

Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de master

*Mon remerciement s'adresse à mon promoteur **Mr. KHETTAB.K** pour avoir proposé et dirigé ce modeste travail et pour son continuel suivi tout le long de la correction de ce mémoire.*

*Je remercie vivement **Mr. BENJAIMA.B** le chef de département de génie électrique pour sa disponibilité et sa générosité.*

*Je remercie profondément le professeur **ABDEL FATAH CHAREF** pour son aide et conseils et pour ses grandes valeurs humaines.*

Je remercie également tous les membres de jury d'avoir accepté de juger notre travail.

Je tiens à remercier vivement toute personne qui m'a aidé de près ou de loin à accomplir ce travail.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

*À mes parents qui m'ont soutenu et aider tout le long de mon
parcourt et sans qui je ne serais pas ou j'en suis*

À mes chers frères et mes sœurs, à toute ma famille

*À tout mes amis de l'université de M'sila avec qui j'ai eu
d'agréable moments et appris beaucoup de choses.*

Sommaire

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I : systèmes d'ordre fractionnaire

I.1. Introduction.....	3
I.1.1 Historique.....	3
I.1.2 Applications du calcul d'ordre fractionnaire	4
I.2. Définitions fondamentales	4
I.2.1. Définition de Riemann-Liouville.....	5
I.2.2 Définition de Caputo.....	5
I.2.3 Définition de Grundwald-Leitnikov.....	5
I.3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire	6
I.4 Transformée de Laplace.....	7
I.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire.....	7
I.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire.....	7
I.4.2.1 Définition de Riemann-Liouville.....	7
I.4.2.2 Définition de Caputo.....	7
I.4.2.3 Définition de Gründwald-Leitnikov.....	8
I.5 Équations différentielles d'ordre fractionnaires et fonctions de transfert	8
I.6 Exemples de calcul de dérivée non entière.....	9
I.6.1 Dérivation non entière d'une exponentielle.....	9
I.6.2 Dérivation non entière d'un cosinus (ou d'un sinus).....	9
I.6.3 Dérivation non entière d'une fonction sinusoïdale amortie.....	9
I.7 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaires	9
I.7.1 Cas continu.....	10
I.7.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation	10
I.7.1.2 Méthode d'Oustaloup.....	10

I.7.1.3 Méthode de Charef (fonction de singularité).....	11
I.7.2 Cas discret.....	15
I.7.2.1 Approximation discret en utilisant l'intégration et l'expansion de série entière....	15
I.7.2.2 Approximation discret en utilisant l'intégration numérique et EFC.....	15
I.8 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	16
I.8.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire	16
I.8.2 Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	18
I.8.3 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire	20
I.8.4 Exemple de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.....	22
I.8.5 Implémentation par des circuits électriques analogiques	23
I.8.5.1 Intégration d'ordre fractionnaire.....	23
I.8.5.2 Dérivée d'ordre fractionnaire.....	24
I.9 Performances des systèmes d'ordre fractionnaire.....	25
I.10 Conclusion.....	28

Chapitre II : Commande adaptative à modèle de référence

II.1 Introduction.....	29
II.2 Régulateurs adaptatifs déterministes	29
II.2.1 Modèle du processus.....	29
II.2.2 Poursuite de modèle.....	31
II.2.3 Conditions de causalité.....	32
II.3 Commande adaptative à modèle de référence.....	33
II.3.1 Principe.....	33
II.3.2 Loi de M.I.T.....	34
II.3.3 Réalisation du Régulateur du CAMR.....	36
II.3.3.1 Structure du Régulateur.....	37
II.3.3.2 L'erreur de modèle.....	37
II.4 Exemples de simulation.....	38
II.4.1 Résultats pour un système du 1 ^{er} ordre	38
II.4.2 Résultats pour un système du 2 nd ordre.....	39
II.5 Conclusion.....	40

Chapitre III : Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire

III.1 Introduction.....	41
III.2 CAMR avec modèle fractionnaire.....	41
III.2.1 Principe.....	41
III.2.2 Stratégie de commande.....	41
III.2.3 simulations et commentaires.....	43
III.2.3.1 Résultats pour un système SISO de premier ordre.....	43
III.2.3.2 Commande en vitesse d'un moteur à Courant continu.....	44
III.2.3.3 Commentaires.....	48
III.3 CAMR avec intégration d'ordre fractionnaire.....	48
III.3.1 Principe.....	48
III.3.2 Stratégie de commande.....	48
III.3.3 Simulations et commentaires.....	49
III.3.3.1 Simulations.....	49
III.3.3.2 Commentaires.....	51
III.4 CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire en feedback.....	52
III.4.1 Principe.....	52
III.4.2 Stratégie de commande.....	52
III.4.3 Simulations et commentaires.....	53
III.4.3.1 Résultats pour un système SISO de premier ordre.....	53
III.4.3.2 Résultats pour un système SISO de second ordre.....	54
III.4.3.2 Commentaires.....	56
III.4 Conclusion.....	57

Liste des figures

Chapitre I : Systèmes d'ordre fractionnaire

Figure (I.1) : Diagramme de Bode de $1/(1+s/p_T)^m$	12
Figure (I.2) : Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.4}$	19
Figure (I.3) : Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.8}$	23
Figure (I.4) : Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	24
Figure (I.5) : Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire.....	25
Figure (I.6) : Réponses indicielles du système du premier d'ordre fractionnaire approximé à l'ordre 6 (N=6).....	26
Figure (I.7) : Réponses indicielles du système du premier d'ordre fractionnaire.....	27
Figure (I.8) : Réponses indicielles du système du premier d'ordre entier et d'ordre fractionnaire.....	27
Figure (I.9) : Réponses indicielles du système du second d'ordre entier et d'ordre fractionnaire.....	28

Chapitre II : Commande Adaptative à Modèle de Référence

Figure (II.1) : Un régulateur linéaire général à deux degrés de liberté.....	30
Figure (II.2) : Commande adaptative directe à modèle de référence.....	34
Figure (II.3) : Algorithme classique d'Adaptation.....	35
Figure (II.4) : Réponse du CAMR pour un système de 1 ^{er} ordre.....	39
Figure (II.5) : Réponse du CAMR pour un système de 2 nd ordre.....	39

Chapitre III : Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire

Figure (III.1) : CAMR directe à modèle d'ordre fractionnaire.....	43
Figure (III.2.a) : CAMR avec modèle de référence d'ordre entier pour un système de 1 ^{er} ordre.....	46
Figure (III.2.b): CAMR avec modèle de référence d'ordre fractionnaire pour système de 1 ^{er} ordre.....	47
Figure (III.3.a) : CAMR avec modèle de référence d'ordre entier pour un MCC.....	47
Figure (III.3.b) : CAMR avec modèle de référence d'ordre fractionnaire pour un MCC.....	47
Figure (III.4) : Algorithme d'adaptation avec Intégration d'ordre fractionnaire.....	49
Figure(III.5) : CAMR avec intégration d'ordre fractionnaire, ordres d'intégration : $\lambda = 0.3 - 1.2$	51
Figure(III.6): Algorithme d'adaptation utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire de la sortie...	53
Figure(III.7.a) : CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus du 1 ^{er} ordre en présence des bruits aléatoires à l'entrée.....	55
Figure(III.7.b) : CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus du 1 ^{er} ordre en présence des bruits aléatoires à la sortie.....	55
Figure(III.8.a) : CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus du 2 nd ordre en présence des bruits aléatoires à l'entrée.....	55
Figure(III.8.b) : CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus du 2 nd ordre en présence des bruits aléatoires à la sortie.....	56
Figure (III.9) : Algorithme d'adaptation équivalent.....	57

Introduction générale

1. Généralités

Dans ses débuts, la théorie de la commande reposait sur des méthodes d'analyse et de synthèse dans le domaine des fréquences, mais ces techniques sont limitées aux systèmes monovariables (SISO), vu la complexité des systèmes, l'accroissement de leurs dimensions et le nombre de variable obligent les chercheurs d'utiliser des théories modernes de commande, telles que la commande par placement des pôles, optimale, adaptative et prédictive.

La commande adaptative est l'une des techniques de commande qui a connu une grande notoriété dans les applications industrielles, un travail de recherche considérable sur la commande adaptative a été effectué depuis le début des années cinquante [13] dans le but d'améliorer les performances des avions, l'approche la plus utilisée dans la commande adaptative est la commande adaptative à modèle de référence (CAMR), cette dernière permet d'ajuster les paramètres du régulateur pour que la sortie du processus suive asymptotiquement celle du modèle de référence.

L'une des théories qu' à connu actuellement une grande popularité chez les chercheurs aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénierie est le calcul fractionnaire, dont les premières prémices datent de plus de trois siècles.

Le concept de commande d'ordre fractionnaire signifie que les systèmes utilisées dans la commande sont décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire [10], et le but principal de cette commande est d'améliorer les performances des systèmes de commande classique par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans les algorithmes de commande.

2. Objectif du mémoire

L'objectif de ce mémoire est de faire la jonction entre deux domaines d'automatique, les systèmes d'ordre fractionnaire et la commande adaptative. Où le but est d'étudier l'utilisation des systèmes d'ordre fractionnaire comme modèle de référence, et les opérateurs d'ordre fractionnaire (intégrateur et dérivateur) dans la loi de la commande dans une boucle de commande adaptative directe, et ce afin de pouvoir mettre à profit les bonnes performances effectuées par les structures d'ordre fractionnaire dans le domaine du CAMR, pour améliorer

les performances des systèmes de commande de processus sur lesquelles peu d'informations sont disponibles.

Plusieurs exemples de simulations seront étudiés pour mettre en évidence les avantages d'une telle stratégie de commande.

3. Structure du mémoire

Pour satisfaire les besoins de ce mémoire, notre travail s'articule autour de trois chapitres

- Le premier chapitre est un rappel de quelques notions de base sur le calcul d'ordre fractionnaire. Une présentation de la méthode de Charef est donnée pour être utilisée comme méthode d'approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire. Enfin, l'approximation des opérateurs d'intégration et de dérivée d'ordre fractionnaire, ainsi que l'implémentation analogique de ces opérateurs et les performances des systèmes d'ordre fractionnaire, sont données en fin de chapitre.

- Le deuxième chapitre présente l'algorithme de la commande adaptative directe à modèle de référence (CAMR) basé sur la représentation polynomiale des systèmes SISO continus.

- Le troisième chapitre est consacré à la commande adaptative directe à modèle de référence d'ordre fractionnaire. Plusieurs schémas de commande sont étudiés avec des exemples de simulation.

En fin, une conclusion générale et plusieurs recommandations sont données à la fin de ce mémoire.

Chapitre I

Systemes d'ordre fractionnaire

I.1 Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre arbitraire, pas nécessairement un nombre entier) est un vieux concept qui date de l'époque de Cauchy, Riemann Liouville et Leitnikov au 19^{ème} siècle. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire [10]

Généralement les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires, qui simplifient de manière significative leur utilisation pour résoudre des problèmes appliqués dans de divers domaines de la science. La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire n'ont aucune interprétation géométrique et physique acceptable pendant plus de 300 ans [1]. Et comme ils sont une généralisation des notions de la différentiation et de l'intégration d'ordre entière, il serait alors idéal d'avoir de telles interprétations physiques et géométriques qui fourniront également le lien des interprétations classiques de différentiation et d'intégration d'opérateur d'ordre entier.

I.1.1 Historique [1]

Le calcul d'ordre fractionnaire est le domaine des mathématiques qui traite l'étude et l'application des intégrales et dérivées d'ordre arbitraire. Il est considéré comme un ancien concept. Les graines du calcul d'ordre fractionnaire ont été plantées il y a 300 années. De nombreux mathématiciens comme, N.H. Abel, M. Caputo, L. Euler, J. Fourier, A.K. Grünwald, J. Hadamard, G.H. Hardy, O. Heaviside, H. J. Holmgren, P.S. Laplace, G.W. Leibniz, A.V. Letnikov, J. Liouville, B. Riemann, M. Riesz et H. Weyl ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé. Cependant, on peut considérer le calcul d'ordre fractionnaire comme un nouvel axe de recherche, puisque ce n'est que depuis un peu plus d'une trentaine d'années qu'il fait l'objet de beaucoup de travaux. Le premier livre dédié au calcul d'ordre fractionnaire a été publié en 1974, il revient à K.B. Oldham et J. Spanier, après un travail de collaboration entamé en 1968. Sur le plan mathématique, il faut citer l'ouvrage russe de Samko, Kilbas et Marichev paru en 1993, qui regroupe un ensemble de définitions et de théories importantes sur le calcul d'ordre fractionnaire. Aujourd'hui, l'intérêt du calcul d'ordre fractionnaire et ces applications ne cesse de grandir, dans plusieurs domaines. A partir de 2004, un workshop, qui se déroule tous les deux ans, spécialement dédié au calcul d'ordre fractionnaire et ses applications, a été créé.

I.1.2 Applications du calcul d'ordre fractionnaire [1]

Pendant la décennie passée le calcul d'ordre fractionnaire a été appliqué à presque chaque domaine de la science, l'ingénierie, et les mathématiques. Le calcul d'ordre fractionnaire a fait un impact profond dans les domaines de viscoélasticité et rhéologie, génie électrique, électrochimie, biologie, biophysique et technologie biologique, traitement de signal et d'image, mécanique, mécatronique, physique, et théorie de commande. Bien que certaines issues mathématiques restent non résolues, la plupart des difficultés ont été surmontées, et la plupart des problèmes mathématiques principaux documentés dans le domaine du calcul d'ordre fractionnaire ont été résolues à un point où plusieurs outils mathématiques pour le calcul d'ordre entier et fractionnaire sont identiques.

Les livres et les monographies de Oldham and Spanier , Oustaloup, Miller et Ross, Samko, Kilbas, et Marichev , Gorenflo et Mainardi, Podlubny, et Hilfer ont été utiles pour l'introduction du calcul d'ordre fractionnaire aux communautés d'ingénierie, de science, d'économie et finances, de mathématiques théoriques et appliquées. Le progrès dans ce domaine continue. Quatre livres récents dans ce domaine sont édités par Petras, Podlubny, O'Leary, Dorcak, et Vinagre, Kilbas, Srivastava et Trujillo, et Magin.

Malgré le progrès accompli dans le domaine du calcul d'ordre fractionnaire et ses applications, beaucoup de chercheurs continuent à demander: "Quelles sont les applications de ce domaine?". La réponse peut être trouvée dans[1]. Ce livre contient des travaux de recherches sur les applications du calcul d'ordre fractionnaire. Ces travaux de recherches ont été divisés en sept catégories basées sur leurs thèmes et applications, à savoir, techniques analytiques et numériques, mécanique classique et physique de particules, systèmes diffusifs, medias viscoélastiques et désordonnés, systèmes électriques, modélisation, et commande. Les applications, les théories, et les algorithmes présentés dans sont contemporains, et elles avancent l'état de la connaissance dans le domaine du calcul d'ordre fractionnaire et ses applications.

I.2. Définitions fondamentales [2,3]

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire .On peut mentionner les trois définitions suivantes :

I.2.1. Définition de Riemann-Liouville

L'intégrale dite de Riemann-Liouville est définie ainsi :

Définition 1 : Soient C et R les anneaux des nombres complexes et réels respectivement, $R(\cdot)$ symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient $m \in C$ avec $R(\cdot) > 0$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[0, +\infty)$.

L'intégrale d'ordre m de f est définie par :

$${}_{RL}I^m f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{(0)}^t (t-\varepsilon)^{m-1} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (I.1)$$

Avec $t \geq 0$ et $\Gamma(m) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{m-1}$ est la fonction gamma d'Euler.

Définition 2 : Soient $m \in C$ avec $\Re(m) > 0$, n un entier positif et f une fonction localement intégrable définie sur $[0, +\infty[$. La dérivée d'ordre m de f est définie par :

$${}_{RL}D^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-m-1} f(\tau) d\tau \quad (I.2)$$

Où le nombre entier n est tel que $(n-1) < m < n$.

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (I.1) comme suit :

$${}_{RL}D^m f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ I^{(n-m)} f(t) \right\} \quad (I.3)$$

I.2.2 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit :

$${}_cD^m f(t) \square I^{n-m} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{(n-m-1)}} d\tau \quad (I.4)$$

Avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité $(n-1) < m < n$.

I.2.3 Définition de Grunwald-Leitnikov

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $m > 0$ de G-L est donnée par :

$${}_{GL}D^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} f(t - k \cdot h) \quad (I.5)$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients

$$\binom{m}{k} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+1)} = C_k^{(m)} \quad (\text{I.6})$$

Avec $C_0^{(m)} = \binom{m}{0} = 1$, sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1-z)^m = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(m)} z^k \quad (\text{I.7})$$

La définition de Grundwald-Leitnikov de l'intégration d'ordre fractionnaire est formulée comme suit :

$${}_{GL}D^m f(t) = {}_{GL}D^{-m} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} f(t-k.h) \quad (\text{I.8})$$

où h est la période d'échantillonnage et les coefficients $C_k^{(-\lambda)} = \binom{-\lambda}{k} = 1$

Sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1-z)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\lambda}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(-\lambda)} z^k \quad (\text{I.9})$$

I.3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire [1,3]

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes:

1. Si $f(t)$ est une fonction analytique de t , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^m f(t)$ est une fonction analytique de t et m
2. La dérivation et l'intégration non entière est un opérateur linéaire. Ainsi, si f et g sont deux fonctions continues et (a, b) des nombres réels, on a :

$$D^m a f(t) + D^m b g(t) = a D^m f(t) + b D^m g(t) \quad (\text{I.10})$$

3. Pour $m=0$, l'opération $D^0 f(t)$ est l'opérateur identité :

$$D^0 f(t) = f(t) \quad (\text{I.11})$$

4. La loi additive d'index :

$${}_0D_t^m {}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^\alpha {}_0D_t^m f(t) = {}_0D_t^{m+\alpha} f(t) \quad (\text{I.12})$$

Avec m et α deux nombres réels.

5. Pour $m = n$, où n est un entier, l'opération $D^m f(t)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .

I.4 Transformée de Laplace [3,4]

I.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $m > 0$ définie par (I.1) qu'on peut écrire comme une convolution

des fonctions: $g(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1}$ et $f(t)$

$$I^m f(t) = D^{-m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1} * f(t) \quad (\text{I.13})$$

La transformée de Laplace de la fonction t^{m-1} est :

$$G(s) = L\{t^{m-1}\} = \Gamma(m) s^{-m} \quad (\text{I.14})$$

Donc la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville

$$L\{I^m [f(t)]\} = s^{-m} F(s) \quad (\text{I.15})$$

De la même façon la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire défini par Gröndwald-Leitnikov et Caputo est aussi donné par l'équation (I.15)

I.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée.

I.4.2.1 Définition de Riemann-Liouville

$$L\{D^m f(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[D^{m-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad (\text{I.16})$$

Avec $n-1 < m < 1$ cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue. Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t = 0$.

I.4.2.2 Définition de Caputo

$$L\{D^m [f(t)]\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{m-k-1} f^k(0) \quad (\text{I.17})$$

L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter telles que $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$ etc. De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à $t = 0$. La seule exception est quand on prend $t = -\infty$ comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville.

Cependant, quand on s'intéresse à des processus transitoires, on ne peut pas accepter de placer le point de départ à $-\infty$; dans ce cas la définition de Caputo semble être la plus appropriée quand on la compare aux autres.

I.4.2.3 Définition de Grűndwald-Leitnikov

$$L\{D^m[f(t)]\} = s^m F(s) \quad (\text{I.18})$$

Remarque

La résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec la transformée de Laplace se fait de la même manière qu'avec les équations différentielles d'ordre entier.

I.5 Équations différentielles d'ordre fractionnaires et fonctions de transfert [5]

Un système d'ordre fractionnaire peut être décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme :

$$\sum_{i=0}^N a_i D^{m_i} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j D^{\beta_j} u(t) \quad (\text{I.19})$$

Où par une fonction de transfert continue de la forme :

$$G(s) = \frac{b_l s^{\beta_l} + b_{l-1} s^{\beta_{l-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_k s^{m_k} + a_{k-1} s^{m_{k-1}} + \dots + a_0 s^{m_0}} \quad (\text{I.20})$$

Où $D^m = {}_0 D_t^m \dots; a_i (i = 0, 1 \dots k), b_i (i = 0, 1 \dots l)$ sont des constantes, et $m_i (i = 0, 1 \dots k)$

$\beta_i (i = 0, 1 \dots l)$ sont des nombres réels arbitraires.

I.6 Exemples de calcul de dérivée non entière [6]

I.6.1 Dérivation non entière d'une exponentielle

Pour un nombre z quelconque, on a :

$$D^{(m)}[\exp(z.t)] = z^m \cdot \exp(z.t) \quad (\text{I.21})$$

où $D^{(m)}$ est la dérivation d'ordre m par rapport à la variable t .

I.6.2 Dérivation non entière d'un cosinus (ou d'un sinus)

En utilisant le fait qu'un cosinus (resp. un sinus) est égal à la partie réelle(resp.imaginaire) d'une exponentielle, et que l'opérateur dérivée non entière est linéaire, on peut déterminer facilement la dérivation non entière d'ordre m d'un cosinus (resp un sinus).Ainsi :

$$D^{(m)}[\cos(w_0.t - \varphi)] = w_0^m \cdot \cos\left(w_0.t - \varphi + m \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{I.22})$$

$$D^{(m)}[\sin(w_0.t - \varphi)] = w_0^m \cdot \sin\left(w_0.t - \varphi + m \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{I.23})$$

I.6.3 Dérivation non entière d'une fonction sinusoïdale amortie

En utilisant le fait qu'un sinus est égal à la partie imaginaire d'une exponentielle et que l'opérateur dérivé non entière est linéaire, on trouve la relation suivante :

$$D^{(m)}\left[\sin(w_0.t) \cdot \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] = R^m \cdot \sin(w_0.t + m.\theta) \cdot \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{I.24})$$

Avec :

$$R = \left| \frac{1}{\tau} + i.w_0 \right| \text{ et } \theta = \text{Arg}\left(\frac{1}{\tau} + i.w_0\right) \quad (\text{I.25})$$

I.7 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaires [7-10]

Dans la suite nous allons présenter quelque méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire qui peuvent être divisées en deux catégories (continu ; discret), avec un intérêt particulier à la méthode de la fonction singulière, qui sera entièrement détaillée dans la section (I-8)

I.7.1 Cas continu

D'habitude les simulations sont effectuées avec un logiciel préparé pour traiter seulement les puissances d'ordre entier de s . Alors il est très important de trouver des approximations d'ordre entier pour des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire.

Autrement dit, lorsque les simulations doivent être exécutées ou les correcteurs doivent être implémentés, les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire sont remplacées par des fonctions de transfert d'ordre entier, avec un comportement assez identique à celles désirées, mais beaucoup plus facile à manipuler.

Il existe différentes méthodes pour trouver de telles approximations, les approximations disponibles dans le domaine s sont appelées des approximations analogiques ou des approximations du domaine fréquentiel.

I.7.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation

En général, une approximation rationnelle de la fonction $G(s) = s^{-m}$; $0 < m < 1$ (Intégration d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace) peut être obtenue en utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions:

$$G_h(s) = \frac{1}{(1 + s.T)^m} \quad (\text{I.26})$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^m \quad (\text{I.27})$$

Où $G_h(s)$ est l'approximation dans les hautes fréquences ($\omega T \gg 1$), et $G_l(s)$ est l'approximation dans les basses fréquences ($\omega \ll 1$)

I.7.1.2 Méthode d'Oustaloup

La méthode est basée sur l'approximation de la fonction de la forme:

$$H(s) = s^m \quad m \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{I.28})$$

Par la fonction rationnelle suivante :

$$\hat{H}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1 + S/w_k}{1 + S/w'_k} \quad (\text{I.29})$$

En utilisant les formules de synthèse suivantes :

$$w'_0 = \alpha^{-0.5} \cdot w_u \quad w_0 = \alpha^{0.5} w_u \quad \frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \frac{w_{k+1}}{w_k} = \alpha \cdot \eta > 1 \tag{I.30}$$

$$\frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \alpha \cdot \eta > 1; \quad \frac{w_k}{w'_k} = \alpha > 0; \quad N = \frac{\log(w_N/w_0)}{\log(\alpha \cdot \eta)}; \quad m = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \cdot \eta)} \tag{I.31}$$

Avec w_u la fréquence du gain unité tel que, $w_u = \sqrt{w_h \cdot w_b}$ w_h et w_b sont les fréquences transitoires hautes, et basse respectivement.

I.7.1.3 Méthode de Charef (fonction de singularité)

Dans le but d'implémenter des modèles d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande présentés dans ce travail, nous utiliserons la méthode appelée "méthode de la fonction de singularité" développée par Charef [9], qui est présentée dans cette section. Cette approche repose sur une méthode graphique, elle consiste à approximer la ligne de pente fractionnaire sur le tracé de Bode de la fonction de transfert irrationnelle par un nombre de lignes sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente correspondant à une alternance de pôles et de zéros.

La méthode d'approximation sera déférente selon que le transfert d'ordre fractionnaire à approximer soit du premier ou du second ordre.

a) Système du premier ordre fractionnaire

Pour un système d'ordre fractionnaire du premier ordre la modélisation se fait sous la forme :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} \tag{I.32}$$

m : Exposant fractionnaire ($0 < m < 1$)

p_T : Pôle fractionnaire qui exprime la fréquence de coupure.

On peut réécrire la fonction de l'équation (I.32) comme suit:

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \tag{I.33}$$

Où $(N + 1)$ est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de

fréquences du système.

L'équation (I.33) peut être tronquée à un nombre fini N , et l'approximation devient :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.34})$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$P_i = (ab)^i P_0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.35})$$

$$Z_i = (ab)^i aP_0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{I.36})$$

Avec

$$P_0 = w_c \sqrt{b} \quad (\text{I.37a})$$

$$a = 10^{\left(\frac{\mathcal{E}}{10(1-m)}\right)} \quad (\text{I.37b})$$

$$b = 10^{\left(\frac{\mathcal{E}}{10m}\right)} \quad (\text{I.37c})$$

$$m = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.37d})$$

\mathcal{E} est l'erreur tolérée en dB.

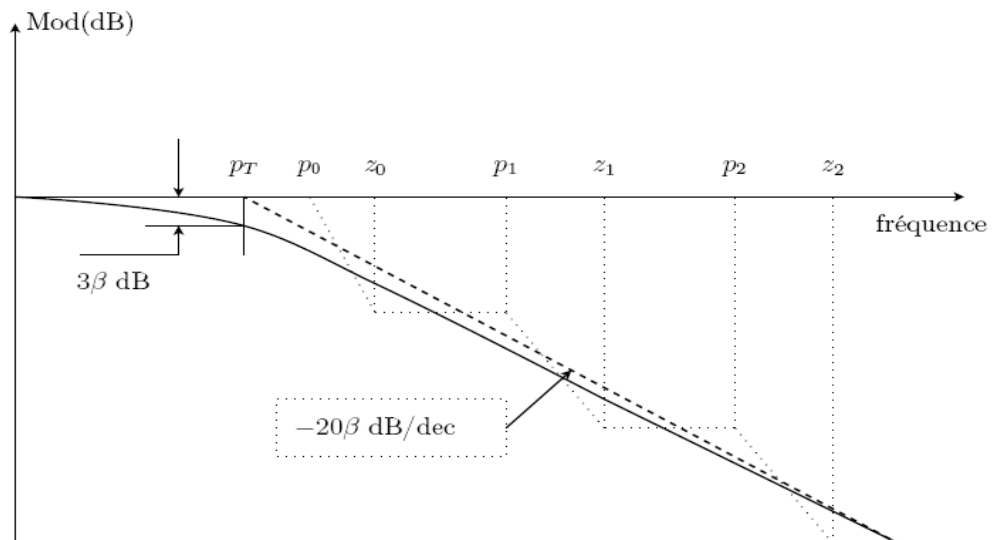


Figure (I.1) : Diagramme de Bode de $1/(1 + s/p_T)^m$ dB/dec et son approximation par des lignes droites en zig-zag avec des pentes individuelles de - 20dB/dec et 0 dB/dec.

b) Système du second ordre fractionnaire

Pour un système de second ordre, représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\xi \frac{s}{w_n} + 1\right)^m} \quad (\text{I.38})$$

avec m un nombre réel positif tel que $0 < m < 1$, on peut distinguer deux cas :

Pour $0 < m < 0.5$:

On peut exprimer la fonction comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \left(\frac{s}{w_n + 1}\right)^\eta}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1\right)} \quad (\text{I.39})$$

avec $\alpha = \xi^m$ et $\eta = 1 - 2m$, ce qui peut aussi être approximé par la fonction,

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.40})$$

Les singularités (pôles P_i et Z_i zéros) sont données par les formules suivantes :

$$P_i = (ab)^{i-1} aZ_0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.41})$$

$$Z_i = (ab)^{i-1} Z_0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{I.42})$$

avec

$$Z_0 = w_n \sqrt{b} \quad (\text{I.43a})$$

$$a = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10(1-m)}\right)} \quad (\text{I.43b})$$

$$b = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)} \quad (\text{I.43c})$$

$$m = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.43d})$$

ε est l'erreur tolérée en dB

L'ordre d'approximation N est calculé en fixant la bande de fréquences de travail, spécifiée par

w_{\max} telle que : $P_{N-1} < w_{\max} < P_N$, ce qui mène à la valeur suivante :

$$N = \text{partie entière} \left[\frac{\log \left[\frac{w_{\max}}{P_0} \right]}{\log(ab)} \right] \quad (\text{I.44})$$

$G(s)$ peut alors être écrite sous la forme d'une fonction paramétrique d'ordre $N + 2$:

$$G_e(s) = \frac{b_{m0}s^N + b_{m1}s^{N-1} + \dots + b_{mN}}{s^{N+2} + a_{m1}s^{N+1} + \dots + a_{mN+2}} \quad (\text{I.45})$$

Les coefficients a_{m_i} et b_{m_i} sont calculés à partir des singularités P_i, Z_i ainsi que α et w_n

Pour $0.5 < m < 1$:

La fonction d'approximation est donnée comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1 \right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1 \right) \left(\frac{s}{w_n} + 1 \right)^\eta} \quad (\text{I.46})$$

Où $\alpha = \xi^m$ et $\eta = 2m - 1$, qui développée comme précédemment avec les valeurs singulières suivantes :

$$P_i = (ab)^{i-1} P_0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.47})$$

$$Z_i = (ab)^{i-1} aP_0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{I.48})$$

$$P_0 = w_n \sqrt{b} \quad (\text{I.49a})$$

$$a = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10(1-m)} \right)} \quad (\text{I.49b})$$

$$b = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m} \right)} \quad (\text{I.49c})$$

$$m = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.49d})$$

ε est l'erreur tolérée en dB

$G_e(s)$ peut alors être écrite sous la forme de la fonction paramétrique (I.45).

I.7.2 Cas discret [7]

I.7.2.1 Approximation discret en utilisant l'intégration et l'expansion de série entière

En utilisant la fonction génératrice correspondant à la règle de Backward

$w(z^{-1}) = (1-z^{-1})$ et en utilisant l'expansion de série entière (PSE) de $(1-z^{-1})^m$, la formule de Grundwald-Leitnikov de la dérivée d'ordre fractionnaire pour un ordre m , est obtenue :

$$\nabla_T^m f(nT) = T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} f((nT-k)T) \quad (\text{I.50})$$

L'exécution de la PSE de la fonction $(1-z^{-1})^m$ mène à la formule donnée par Lubich pour l'intégral d'ordre fractionnaire d'ordre m :

$$\nabla_T^m f(nT) = T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} f((nT-k)T) \quad (\text{I.51})$$

La fonction de transfert résultante, rapprochant l'opérateur d'ordre fractionnaire est donnée par la relation :

$$Y(z) = T^{\pm m} \text{PSE} \left[(1-z^{-1})^{\pm m} \right] F(z) \quad (\text{I.52})$$

où T est la période d'échantillonnage, $Y(z)$ est la transformée en z de la séquence de sortie $y(nT)$, $f(nT)$ est la transformée en z de la séquence d'entrée $f(nT)$. $\text{PSE}[m]$ dénote l'expression qui résulte de l'expansion de série entière de la fonction z , faire ainsi donné :

$$D^{\pm m}(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = T^{\pm m} \text{PSE} \left[(1-z^{-1})^{\pm m} \right] F(z) \quad (\text{I.53})$$

Où $D^{\pm m}(z)$ dénote l'équivalent discret de l'opérateur d'ordre fractionnaire.

Une autre possibilité pour l'approximation est l'utilisation de la règle trapézoïdale, comme une fonction génératrice :

$$w(z^{-1}) = 2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \quad (\text{I.54})$$

I.7.2.2 Approximation discret en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue

Une méthode pour obtenir l'équivalent discret de l'opérateur d'ordre fractionnaire, qui combine la règle trapézoïdale et l'expansion des fractions continues.

Cette méthode implique l'utilisation de la fonction génératrice :

$$w(z^{-1}) = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

où z est la variable complexe, z^{-1} est l'opérateur de retard, et l'expansion de fraction continu (CFE) de :

$$\left(w(z^{-1}) \right)^{\pm m} = \left(2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^{\pm m} \quad (\text{I.55})$$

Pour obtenir les coefficients et le forma de l'approximation.

La fonction de transfert résultante, rapprochant l'opérateur d'ordre fractionnaire peut être exprimée sous la forme :

$$\begin{aligned} D^{\pm m}(z) &= T^{\pm m} CFE \left[\left(2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^{\pm m} \right]_{p,q} \\ &= T^{\pm m} \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})} \end{aligned} \quad (\text{I.56})$$

où T est la période d'échantillonnage, $CFE[m]$ dénote la fonction de transfert résultante de l'application de l'expansion continu de la fonction m , $Y(z)$ est la transformée en m de la séquence de sortie $y(nT)$, $F(z)$ est la transformée en m de la séquence d'entrée $f(nT)$, p et q sont les ordres de l'approximation, P et Q sont des polynômes de degré p et q correspondant au variable z^{-1}

I.8 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

I.8.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire [3]

La fonction de transfert de l'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_i(s) = \frac{1}{s^m} \quad (\text{I.57})$$

Avec $s = j\omega$ la fréquence complexe et m est un nombre positif tel que $0 < m < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[w_b, w_h]$, cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$H_i(s) = \frac{K_i}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \quad (\text{I.58})$$

Si on suppose que pour $w \in [w_b, w_h]$ on a $w \gg w_c$, on peut écrire :

$$H_i(s) = \frac{K_i}{\left(\frac{s}{w_c}\right)^m} = \frac{K_i w_c}{s^m} = \frac{1}{s^m} \quad (\text{I.59})$$

Avec $K_i = \frac{1}{w_c^m}$ et w_c est la fréquence de coupure de PPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence w_b : $w_c = 0.001w_b$

Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.58), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle.

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de $-20\text{dB}/\text{dec}$ sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente $-20\text{dB}/\text{dec}$ et $0\text{dB}/\text{dec}$ correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que $P_0 < Z_0 < P_1 < Z_1 < \dots < Z_{N-1} < P_N$. D'où l'approximation suivante :

$$H_i(s) = \frac{K_i}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \cong K_i \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)} \quad (\text{I.60})$$

Les P_i et les Z_i sont les pôles et les zéros de l'approximation. En utilisant la méthode de la fonction de singularité (méthode graphique simple), les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation ε en dB et une bande de fréquence d'approximation w_{\max} .

Pour déterminer le nombre N , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit ' w_{\max} ' cette bande, telle que w_{\max} soit égal à 100 fois w_h , son expression est donné par :

$$N = \text{Partie entière} \left[\frac{\log \left[\frac{w_{\max}}{P_0} \right]}{\log(ab)} \right] \quad (\text{I.61})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} P_i &= (ab)^i P_0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \\ Z_i &= (ab)^i aP_0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

où a et b sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de ε et m sont données par :

$$a = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10(1-m)}\right)}, \quad b = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)}$$

Et le premier pôle P_0 et le premier zéro Z_0 sont donnés par :

$$P_0 = w_c \sqrt{b}, \quad Z_0 = aP_0$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation. On doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$H_i(s) = K_i \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{s}{(ab)^j aP_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{s}{(ab)^j P_0} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_i} \right)} \quad (\text{I.62})$$

où les coefficients h_i sont les résidus qui sont déterminés par :

$$h_i = K_i \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^j P_0}{(ab)^j aP_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{(ab)^j P_0}{(ab)^j P_0} \right)} = K_i \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{(i-j)} \right)}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.63})$$

I.8.2 Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Pour le but d'illustration prenons un exemple numérique pour un intégrateur d'ordre fractionnaire représenté par :

$$H_i(s) = \frac{1}{s^{0.4}}$$

Pour obtenir la fonction rationnelle d'approximation de cet opérateur d'ordre fractionnaire, on suppose que la bande de fréquence $[w_b, w_h] = [0.1, 10 \text{ rad/s}]$, on obtient : $w_c = 0.0001$ et $K_i = 39.8107$ par suite le modèle PPF de cet opérateur d'ordre fractionnaire est donné par :

$$H_i(s) = \frac{39.8107}{\left(1 + \frac{s}{10^{-4}}\right)^{0.4}}$$

On choisit l'erreur du PPF par une fonction rationnelle $\varepsilon = 1 \text{ dB}$ et la bande fréquentielle d'approximation $w_{\max} = 100w_h = 10 \text{ rad/sec}$, les paramètres a, b, P_0, Z_0 , et N peuvent être facilement calculés et ils sont donnés comme suit :

$$a = 1.4678, b = 1.7783, P_0 = 1.3335 * 10^{-4}, Z_0 = 1.9573 * 10^{-4} \text{ et } N = 17$$

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes:

$$P_i = 1.3335 * 10^{-4} (2.6102)^i \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, 17$$

$$Z_0 = 1.9573 * 10^{-4} (2.6102)^i \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, 16$$

Les tracés de Bode de la fonction rationnelle d'approximation sont présentés dans la figure (I.2)

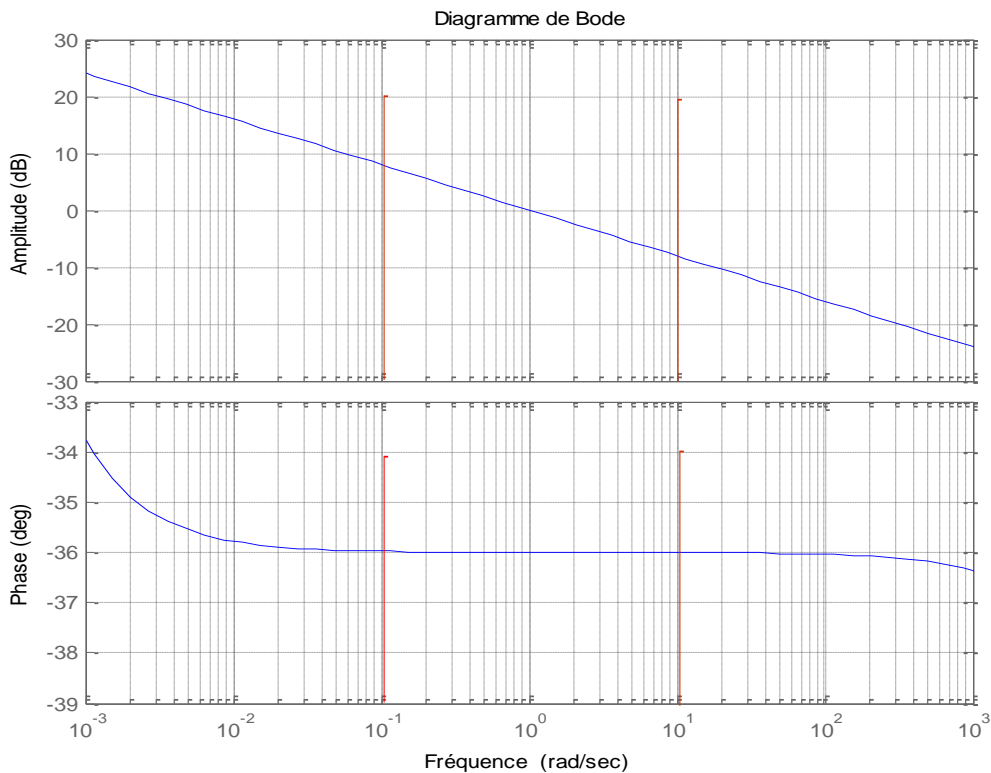


Figure (I.2) : Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.4}$

Le tracé de Bode [4] de la fonction de transfert idéale donne une pente constant de $(-m.20dB/dec)$, et une phase en ligne horizontale de $(-m.\pi/2)$ avec m : exposant d'ordre fractionnaire, et par comparaisons avec les résultats obtenus, on remarque bien que dans la plage de fréquence $[w_b, w_h] = [0.1, 10 rad/s]$, la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire à une pente de $-8dB/dec (-20.m)$ et la phase de $-36^\circ (-m.\pi/2)$, ce qui implique la justesse de l'approximation.

I.8.3 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire [3]

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \quad (I.64)$$

Avec $s = jw$ la fréquence complexe et m est un nombre positif tel que $0 < m < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[w_b, w_h]$ cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit :

$$G_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{w_c} \right)^m \quad (I.65)$$

Si on suppose que pour $w \in [w_b, w_h]$ on a $w \gg w_c$, on peut écrire :

$$G_D(s) = K_D \left(\frac{s}{w_c} \right)^m = \frac{K_D}{w_c^m} s^m = s^m \quad (I.66)$$

Avec $K_D = w_c^m$ et w_c est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence w_b : $w_c = 0.001w_b$

Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (I.65), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de $20mdB/dec$ sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente $20 dB/de$ et $0 dB/dec$ correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que $Z_0 < P_0 < Z_1 < P_1 < \dots < Z_{N-1} < P_N$.

D'où l'approximation suivante :

$$G_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)} \quad (\text{I.67})$$

Les P_i et les Z_i sont les pôles et les zéros de l'approximation

En utilisant la méthode de la fonction de singularité (méthode graphique simple).

Les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation ε en dB et une bande de fréquence d'approximation w_{\max}

la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée, soit ' w_{\max} ' cette bande, telle que w_{\max} soit égal à 100 fois w_h ,

Le nombre de pôles d'approximation N est donné par :

$$N = \text{partie entière} \left[\frac{\log \left[\frac{w_{\max}}{P_0} \right]}{\log(a.b)} \right] \quad (\text{I.68})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$Z_i = (ab)^i Z_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$P_i = (ab)^i aZ_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

Avec

$$a = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10(1-m)}\right)}, \quad b = 10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)}$$

Et le premier pôle P_0 et le premier zéro Z_0 sont donnés par :

$$Z_0 = w_c \sqrt{b}, \quad P_0 = aZ_0$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation. On doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$G_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i Z_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i aZ_0}\right)} \quad (\text{I.69})$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on va développer $\frac{G(s)}{s}$ en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{G_D(s)}{s} = \frac{1}{s} K_D \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i Z_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i aZ_0}\right)} \quad (\text{I.70})$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.71})$$

Avec $G_0 = K_D$, et

$$g_i = K_D \frac{\prod_{j=0}^N \left(1 - (ab)^{(i-j)} a\right)}{\left(- (ab)^{(i)} aZ_0\right) \prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{(i-j)}\right)} \quad \text{Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.72})$$

1.8.4 Exemple de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire

Pour le but d'illustration prenons un exemple numérique pour un intégrateur d'ordre fractionnaire représenté par :

$$G_D(s) = s^{0.8}$$

De la même façon que l'exemple de PPF, le modèle ZPF du dérivateur d'ordre fractionnaire est donné par :

$$G_D(s) = 6.3096 * 10^{-4} \left(1 + \frac{s}{10^{-4}}\right)^{0.8}$$

Avec: $K_D = 6.3096 * 10^{-4}$, $[w_b, w_h] = [0.1, 1000 \text{ rad} / s]$, $w_c = 0.001 w_b = 0.0001 \text{ rad} / s$

On choisit l'erreur du ZPF par une fonction rationnelle $\varepsilon = 0.8 \text{ dB}$ et la bande fréquentielle d'approximation $w_{\max} = 100 w_h = 10^5 \text{ rad} / s$, les paramètres a, b, P_0, Z_0 , et N peuvent être facilement calculés et ils sont donnés comme suit :

$$a = 2.5119, b = 1.2589, Z_0 = 1.122 * 10^{-4}, P_0 = 2.8184 * 10^{-4} \text{ rad/s}, \text{ et } N = 18$$

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes:

$$P_i = 2.8184 * 10^{-4} (3.1623)^i, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, 18$$

$$Z_i = 1.122 * 10^{-4} (3.1623)^i, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, 18$$

Les tracés de Bode de la fonction rationnelle d'approximation sont présentés dans la figure (I.3)

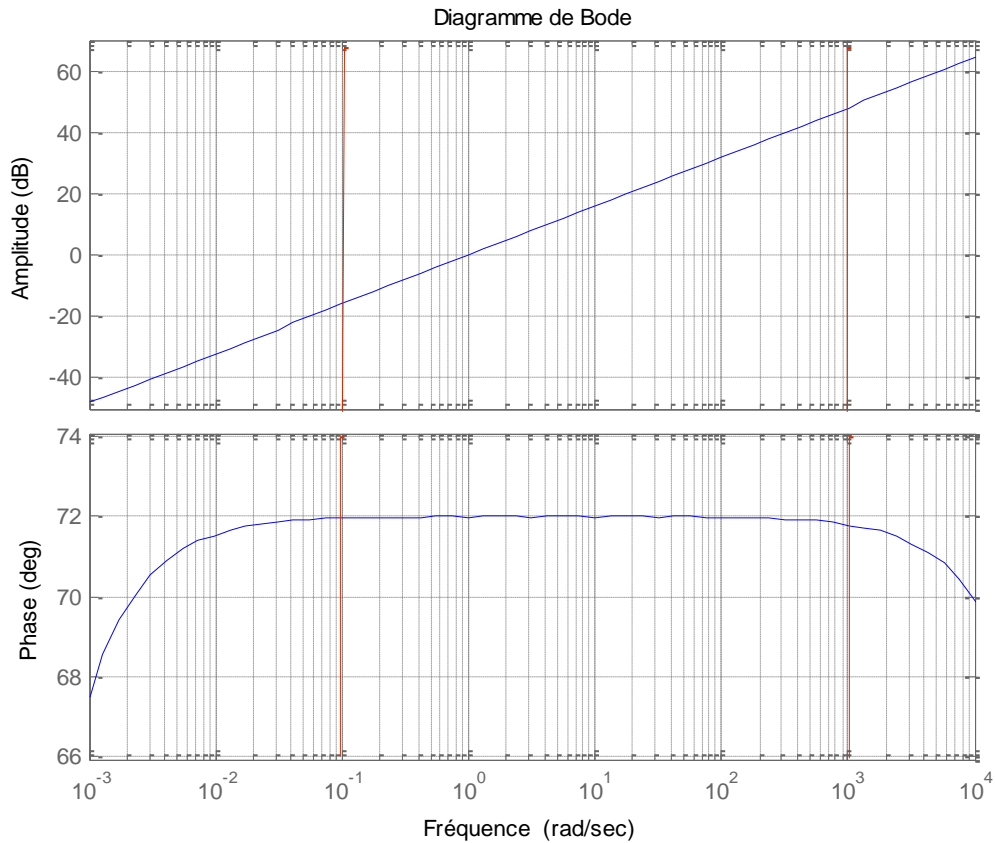


Figure (I.3) : Tracés de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.8}$

On voit bien que dans la plage de fréquence $[w_b, w_h] = [0.1, 1000 \text{ rad} / \text{s}]$, la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire à une pente de $16 \text{ dB} / \text{dec}$ ($20m$) et la phase 72° ($m.\pi / 2$), ce qui implique la justesse de l'approximation.

I.8.5 Implémentation par des circuits électriques analogiques [7, 11,12]

I.8.5.1 Intégration d'ordre fractionnaire

L'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme:

$$H_i(s) = \frac{K_i}{s^m} = \frac{K_i}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \cong K_i \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)} \quad (I.73)$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant l'intégrateur d'ordre fractionnaire $H_i(s)$ donne

$$H_i(s) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (I.74)$$

Où h_i les sont les résidus des pôles donnés par l'équation (I.63)

Cette équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Forster de la 1^{ère} forme dont le schéma est représenté dans la figure (1.4).

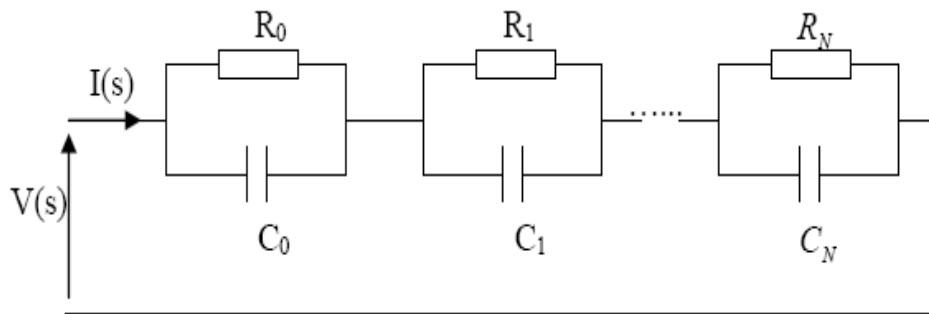


Figure (I.4) : Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

L'impédance de ce réseau est donnée par :

$$Z(s) = \sum_{i=0}^N \frac{R_i}{(1 + sR_iC_i)} \quad (I.75)$$

Que l'on peut faire correspondre à (I.74) en mettant :

$$R_i = h_i, \quad C_i = \frac{1}{P_i h_i} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (I.76)$$

I.8.5.2 Dérivée d'ordre fractionnaire

De la même manière, l'approximation rationnelle de la dérivée d'ordre fractionnaire peut être donnée par une fonction de la forme:

$$G_D(s) = K_D s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i Z_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i aZ_0}\right)} \quad (I.77)$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle obtenue donne :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (I.78)$$

Où g_i les sont les résidus donnés par (1.72).

Cette équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Forster de la 2^{ème} forme, dont le schéma est représenté à la figure (I.5).

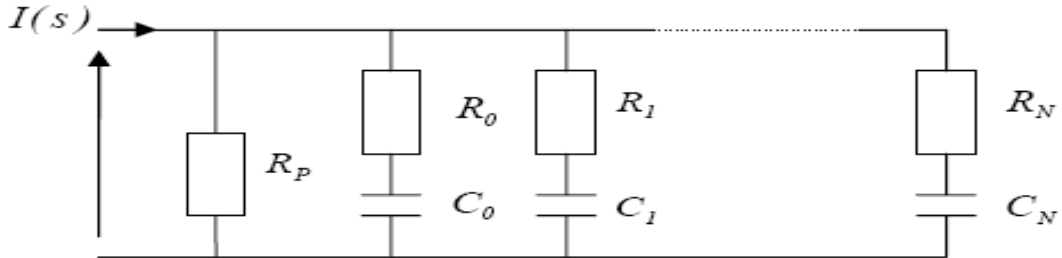


Figure (I.5) : Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

$$\text{L'admittance de ce réseau est de la forme : } Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left(\frac{sC_i}{1 + sR_iC_i} \right) \quad (\text{I.79})$$

Que l'on peut faire correspondre à (I.78) en mettant :

$$C_i = g_i, R_i = \frac{1}{g_i P_i} \text{ et } R_p = \frac{1}{G_0} \quad \text{Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.80})$$

I.9 Performances des systèmes d'ordre fractionnaire

Dans cette section on va exprimer les caractéristiques des systèmes d'ordre fractionnaire, cela parcequ'on s'intéresse de plus à leur comportement dans le domaine temporel .ce type de système sera utilisé comme modèle de référence, donc il faut connaitre l'influence des paramètres m, ε, w_c et w_{\max} sur la dynamique du système.

Pour fait les tests de simulations on utilise les systèmes suivants [13]:

a- système premier ordre entier :

$$G_m(s) = \frac{1}{0.1s + 1} \quad (\text{I.81})$$

b- système premier ordre fractionnaire :

$$G_m(s) = \frac{1}{(0.1s + 1)^{0.1}} \quad (\text{I.82})$$

c- système second ordre entier :

$$G_m(s) = \frac{100}{s^2 + 19s + 1} \quad (\text{I.83})$$

b-système premier second fractionnaire :

$$G(s) = \frac{100}{(s^2 + 19s + 100)^{0.55}} \quad (\text{I.84})$$

L'exposant fractionnaire m est proportionnel au temps de réponse et au temps de montée, c'est-à-dire que si m diminue, le temps de réponse et le temps de montée diminuent aussi le système devient rapide.

La fréquence de coupure w_c influe proportionnellement sur la rapidité du système, si w_c augmente le temps de réponse et le temps de montée diminuent. (Voir figure (1.6)).

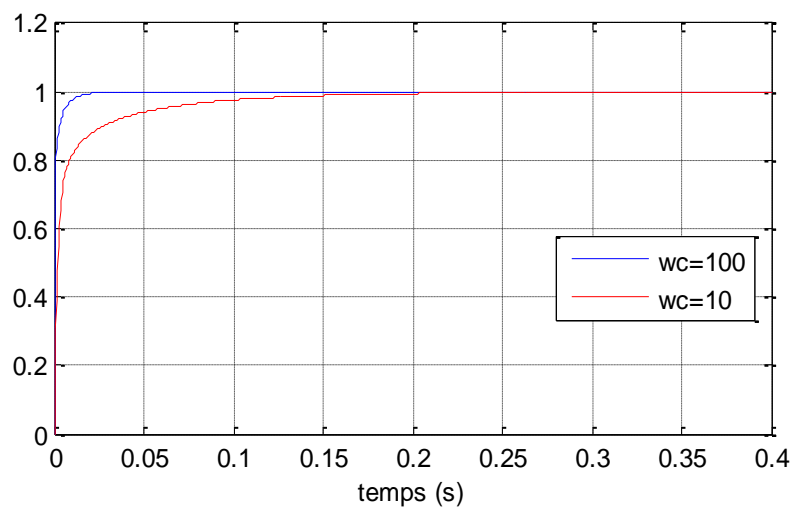


Figure (I.6) : Réponses indicielles du système du premier ordre fractionnaire approximé à l'ordre 6 ($N=6$)

La plage de fréquence w_{\max} , n'influe pas sur le temps de réponse et le temps de montée.

Pour que l'approximation soit bonne, il faut prendre N le plus grand possible, ce qui est possible si l'erreur prescrite ε est petite.

Alors pour avoir un système du premier ordre fractionnaire, rapide et précise, il faut choisir m, ε, w_c et w_{\max} de telle façon que N soit important.

La comparaison entre plusieurs ordre fractionnaire N , nous permet de constater qu'à partir d'un certain ordre N , le changement de la réponse indicielle n'est pas considérable. (Voir figure (I.7)).

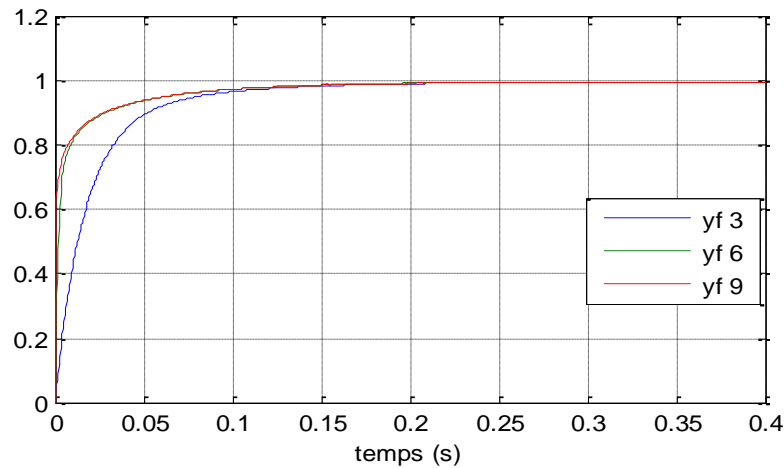


Figure (I.7) : Réponses indicielles du système du premier ordre fractionnaire
 yf 3 : approximation d'ordre 3 ($N=3$), yf 6 : approximation d'ordre 6 ($N=6$)
 yf 9 : approximation d'ordre 9 ($N=9$)

Le système du second ordre fractionnaire, se caractérise par des oscillations (pour $\varepsilon < 1$). Ces derniers ne sont pas souhaitables dans la plupart des cas, alors une petite valeur de m réduit ces oscillations, ainsi qu'elle élimine l'influence de la résonance, se qui assure une bonne stabilité.

L'approximation d'un système du second ordre fractionnaire revient à approximer un système à pole à puissance fractionnaire, donc les paramètres m, ε, w_c et w_{\max} influent sur le système du second ordre fractionnaire tout comme sur le système du premier ordre fractionnaire.

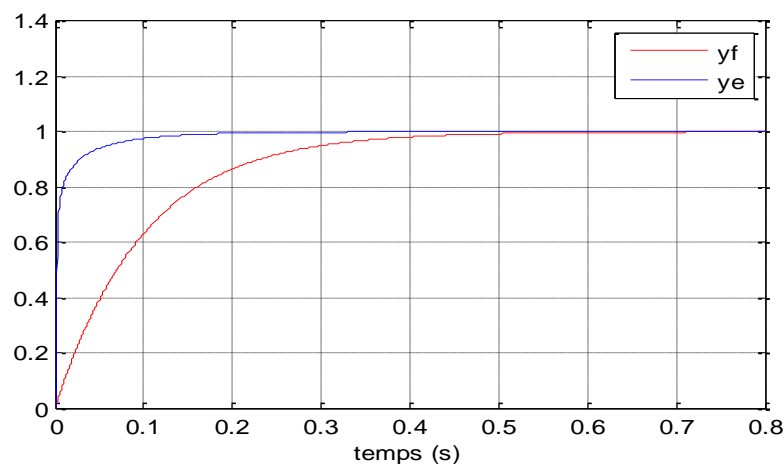


Figure (I.8) : Réponses indicielles du système du premier ordre entier et d'ordre fractionnaire

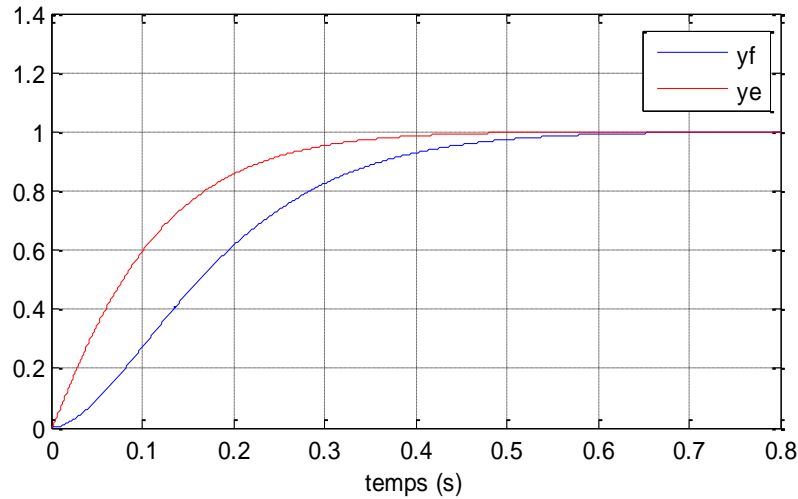


Figure (I.9) : Réponses indicielles du système du second ordre entier et d'ordre fractionnaire

I.10 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul d'ordre fractionnaire. Quelques notions essentielles sur le calcul d'ordre fractionnaire nécessaire sont présentées pour la compréhension de notre travail sur la commande adaptative d'ordre fractionnaire. Après un historique sur le calcul d'ordre fractionnaire, nous avons présenté les définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire. Les caractéristiques et les méthodes de représentation et d'approximation de ces opérateurs sont également étudiées. Enfin, nous avons présentés les performances des systèmes d'ordre fractionnaire.

Dans Le chapitre qui suit, on va étudier la commande adaptative à modèle de référence avec ses lois de commande et sa structure de régulation.

Chapitre II

Commande Adaptative à Modèle de Référence

II.1 Introduction

La commande adaptative joue un rôle très important dans les applications industrielles, qui comme son nom l'indique, consiste à adapter le régulateur en ligne aux variations du processus régulé pour assurer une qualité constante des performances. Elle peut être divisée en deux types [13]. Commande adaptative indirecte, i.e. le calcul des paramètres du régulateur passe par l'estimation en temps réel des paramètres du processus à commander. Commande adaptative directe, i.e. le processus à commander n'est pas identifié, et les paramètres du régulateur sont estimés directement selon une structure imposée par le concepteur.

La commande adaptative à modèle de référence se présente comme l'une des principales méthodes de la commande adaptative, est une manière pratique d'imposer des spécifications au système de commande.

Dans ce chapitre, nous présentons la commande adaptative à modèle de référence avec ses lois de commande et sa structure de régulation.

II.2 Régulateurs adaptatifs déterministes [10 ,13]

Dans cette partie on présentera une méthode algébrique simple de conception de la commande adaptative. L'idée est de déterminer le régulateur qui impose les pôles désirés en boucle fermée. De plus, on veut que le système suive le signal de référence d'une manière spécifiée.

Cette méthode permet en plus d'avoir une meilleure compréhension de la commande adaptative.

II.2.1 Modèle du processus

On considère un processus décrit par un système à une entrée et une sortie (SISO). Même si on traitera essentiellement des systèmes discrets, on peut étudier simultanément les systèmes continus en écrivant [10]:

$$Ay(t) = B(u(t) + v(t)) \quad (\text{II.1})$$

Où A et B représentent des polynômes fonctions.

On suppose que A et B sont coprimes (premiers entre eux), i.e. ils n'ont aucun facteur commun. De plus A est supposé normalisé (monique), i.e. le coefficient du plus haut degré dans A est l'unité.

Un régulateur linéaire général peut être décrit par :

$$Ru(t) = Tu_r(t) - Sy(t) \tag{II.2}$$

Où R , S et T sont des polynômes. Cette loi de commande représente une contre réaction (ou feedback) négative avec l'opérateur de transfert $-\frac{S}{R}$ et une action directe (ou feedforward)

Avec un opérateur de transfert $\frac{T}{R}$. Il possède donc deux degrés de liberté. Un schéma-bloc du système en boucle fermée est montré dans la figure (2.1)

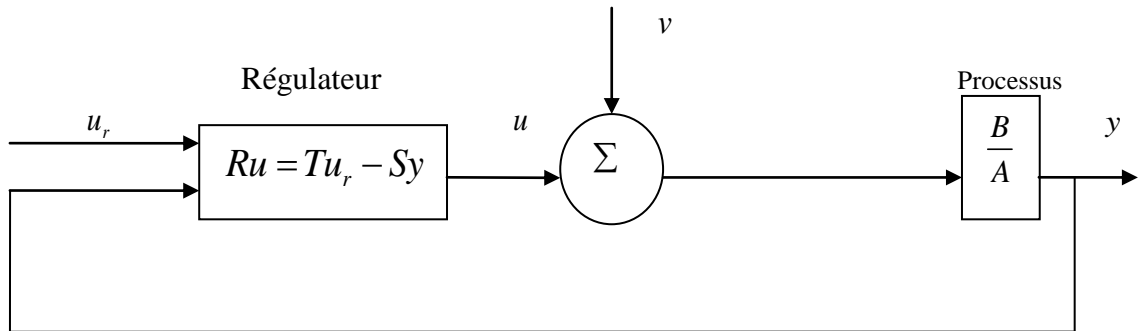


Figure (II.1) : Régulateur linéaire général à deux degrés de liberté

Le système en boucle fermée :

$$y(t) = \frac{BT}{AR + BS} u_r(t) + \frac{BR}{AR + BS} V(T)$$

$$u(t) = \frac{AT}{AR + BS} u_r(t) + \frac{BS}{AR + BS} V(T) \tag{II.3}$$

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est donc,

$$AR + BS = A_r \tag{II.4}$$

L'idée clé de la méthode de conception est de spécifier le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée A_r .

Les polynômes R et S peuvent être déterminés à partir de l'équation (II.4). Noter que dans cette procédure de conception on considère le polynôme A_r comme paramètre de conception, qui est choisi pour donner les propriétés désirées du système en boucle fermée.

L'équation (II.4), qui joue un rôle fondamental en Algèbre, est appelée l'équation Diophantine, on l'appelle aussi identité de Bezout ou équation de Aryabhata.

Cette équation possède toujours une solution si les polynômes A et B n'ont aucun facteur commun. La solution peut être cependant mal conditionnée si les polynômes ont des facteurs trop proches. Elle peut être obtenue en introduisant des polynômes avec des coefficients inconnus et en résolvant les équations linéaires obtenues [10].

II.2.2 Poursuite du modèle [10]

L'équation Diophantine (II.4) ne détermine que les polynômes R et S . D'autres conditions doivent être introduites pour déterminer le polynôme T dans le régulateur (II.2) également. Pour ce faire, il est requis que la réponse de la sortie au signal de référence u_r soit décrite par les dynamiques :

$$A_m y_m(t) = B_m u_r(t) \quad (\text{II.5})$$

Il vient alors de l'équation (II.4) que la condition suivante doit être vérifiée

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{BT}{A_r} = \frac{B_m}{A_m} \quad (\text{II.6})$$

Cette condition de poursuite de modèle implique que la réponse du système en boucle fermée aux signaux de référence soit spécifiée par le modèle (II.5). La réalisation de la poursuite de modèle dépend du modèle, du processus et des signaux de référence. S'il est possible d'annuler l'erreur pour tous les signaux de référence, alors la poursuite parfaite du modèle est réalisée.

Maintenant, on discute des conséquences de la condition de la poursuite de modèle. L'équation (II.6) implique qu'il existe des simplifications des facteurs communs de BT et A_r . On factorise le polynôme B comme suit

$$B = B^+ B^- \quad (\text{II.7})$$

où B^+ est un polynôme monique dont les racines sont stables et si bien amorties qu'on peut les compenser par le régulateur et B^- correspond aux facteurs instables ou faiblement amortis.

Il s'en suit que B^- doit être un facteur de B_m soit

$$B_m = B^- B_m' \quad (\text{II.8})$$

Puisque B^+ est compensé, il doit être un facteur de A_r . De plus, il vient de l'équation (II.7) que A_m doit aussi être un facteur de A_r . Le polynôme caractéristique de la boucle fermée prend donc la forme :

$$A_r = A_0 A_m B^+ \quad (\text{II.9})$$

Puisque B^+ est un facteur de B et A_r , il vient de l'équation (II.5) qu'il divise R aussi, soit

$$R = R' B^+ \quad (\text{II.10})$$

et l'équation Diophantine (II.5) est réduite à :

$$AR' + B^- S = A_0 A_m = A_r' \quad (\text{II.11})$$

En introduisant les équations (2.7), (2.8) et (2.9) dans l'équation (2.6) on obtient :

$$T = A_0 B_m' \quad (\text{II.12})$$

II.2.3 Conditions de causalité [10]

Pour obtenir un régulateur causal dans le cas discret ou propre dans le cas continu, on doit imposer les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \deg S &\leq \deg R \\ \deg T &\leq \deg R \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

L'équation Diophantine (II.5) possède plusieurs solutions, car si R^0 et S^0 sont solutions, alors de même, les polynômes R et S sont solutions, tels que

$$\begin{aligned} R &= R^0 + QB \\ S &= S^0 - QA \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Où Q est un polynôme arbitraire. Puisqu'il existe plusieurs solutions, on peut choisir la solution qui donne le régulateur de plus petit degré. On l'appelle la solution du degré minimal. Puisque $\deg A > \deg B$, le terme du plus haut degré sur le coté gauche de l'équation (II.4) est AR . Soit :

$$\deg R = \deg A_r - \deg A$$

A cause de l'équation (II.14) il y a toujours une solution telle que $S < \deg A = n$.

On peut donc toujours trouver une solution dans laquelle le degré de S est au plus égal à $\deg A - 1$. Ceci est appelé la solution du degré minimal de l'équation Diophantine.

La condition $\deg S \leq \deg R$ implique alors que

$$\deg A_r = 2 \deg A - 1$$

Il vient de l'équation (II.12) que la condition $\deg T \leq \deg R$ implique que

$$\deg A_m - \deg B_m' = \deg A - \deg B^+$$

En ajoutant $\deg B^-$ aux deux cotés, on trouve que c'est équivalent à $\deg A_m - \deg B_m \geq d_0$

où d_0 est le degré relatif du processus.

Cela veut dire dans le cas discret que le temps de retard du modèle doit être au moins égal au temps de retard du processus, ce qui est une condition très naturelle.

En résumé, les conditions de causalité (II.13) peuvent être réécrites ainsi

$$\deg A_r = 2 \deg A - 1$$

$$\deg A_m - \deg B_m = \deg A - \deg B = d_0 \quad (\text{II.15})$$

Il est naturel de choisir une solution dans laquelle le régulateur a le plus petit degré possible. Dans le cas discret il est aussi raisonnable d'exiger qu'il n'y ait pas de retard supplémentaire dans le régulateur. Ceci n'implique que les polynômes R , S et T doivent avoir le même degré [10].

II.3 Commande adaptative à modèle de référence [10, 13]

II.3.1 Principe

La commande adaptative à modèle de référence a été proposée par Whitaker et al en 1958. Le développement de cette technique repose sur une hypothèse fondamentale, où pour toutes valeurs possibles des paramètres du procédé, on suppose qu'il existe un contrôleur de structure donnée qui peut assurer la réalisation des performances désirées. Le rôle de la boucle d'adaptation se limite uniquement à trouver les bonnes valeurs des paramètres de ce contrôleur.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la commande adaptative directe, un schéma bloc représente le principe de cette approche est donné dans la figure (II.2).

Le schéma possède une boucle de réaction (feedback) ordinaire composée du processus et du régulateur et une autre boucle de réaction (feedback) qui permet de changer les paramètres du régulateur. Les paramètres sont variés en fonction de l'erreur, qui est la différence entre la sortie du processus et celle du modèle de référence. La boucle de réaction ordinaire est appelée boucle interne, celle de l'ajustement des Paramètres est appelée boucle externe.

Le mécanisme d'ajustement des paramètres peut être obtenu de deux manières : en utilisant la méthode du gradient ou en appliquant la théorie de la stabilité.

La CAMR ont été développés à l'origine pour les systèmes continus déterministes, puis étendus aux systèmes discrets et aux systèmes avec perturbations stochastiques.

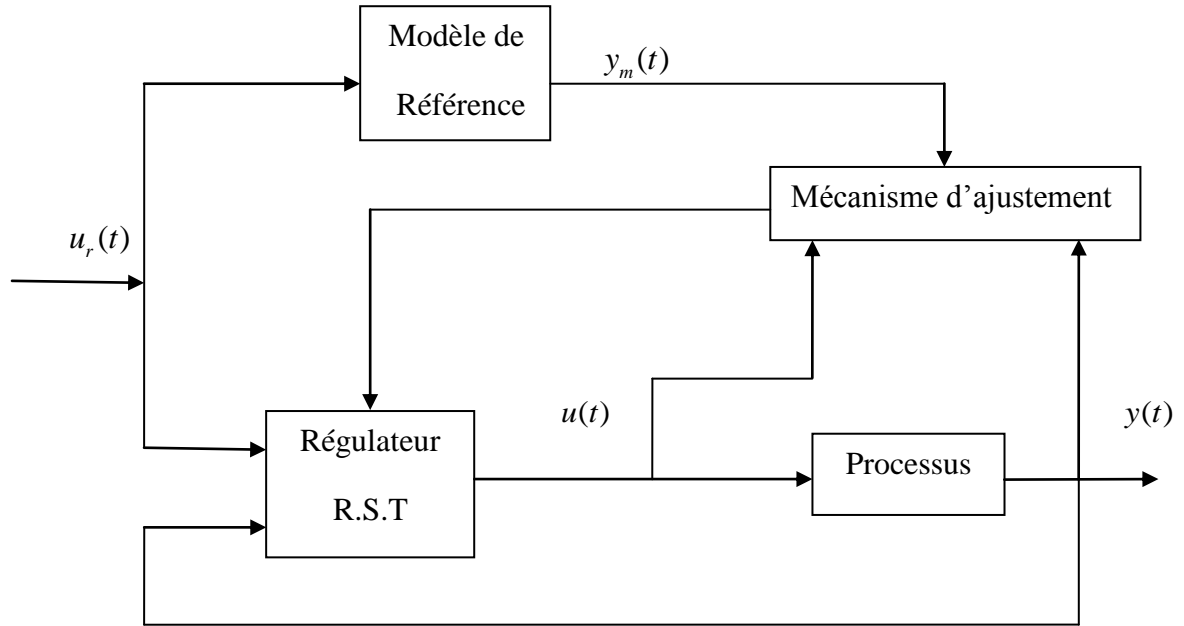


Figure (II.2) : Commande adaptative directe à modèle de référence

II.3.2 Loi de M.I.T [10]

La loi de M.I.T. est l'approche originale pour la commande adaptative à modèle de référence (CAMR). Le nom est dérivé du fait qu'elle a été développée au laboratoire d'instrumentation (Maintenant Laboratoire de Draper) à l'université de M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology).

Pour représenter la loi M.I.T., on considère un système en boucle fermée dans lequel le régulateur possède un vecteur θ de paramètres ajustables. La réponse désirée en boucle fermée est spécifiée par la sortie y_m du modèle de référence.

Soit e l'erreur entre la sortie y de la boucle fermée et celle du modèle de référence y_m .

L'ajustement des paramètres est fait de manière à minimiser une fonction coût J définie par :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \quad (\text{II.16})$$

Pour minimiser J , il faut changer les paramètres dans la direction du gradient négatif de J , soit

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\delta J}{\delta \theta} = -\gamma \frac{\delta e}{\delta \theta} \quad (\text{II.17})$$

L'équation (II-17) est la fameuse loi de M.I.T. La dérivée partielle $\frac{\delta e}{\delta \theta}$, appelée dérivée de la sensibilité du système, exprime l'influence des paramètres ajustables sur l'erreur.

En supposant que la variation des paramètres est plus lente que celle des autres variables du système, la dérivée $\frac{\delta e}{\delta \theta}$ peut être évaluée en considérant que θ est constant, voir figure(II.4)

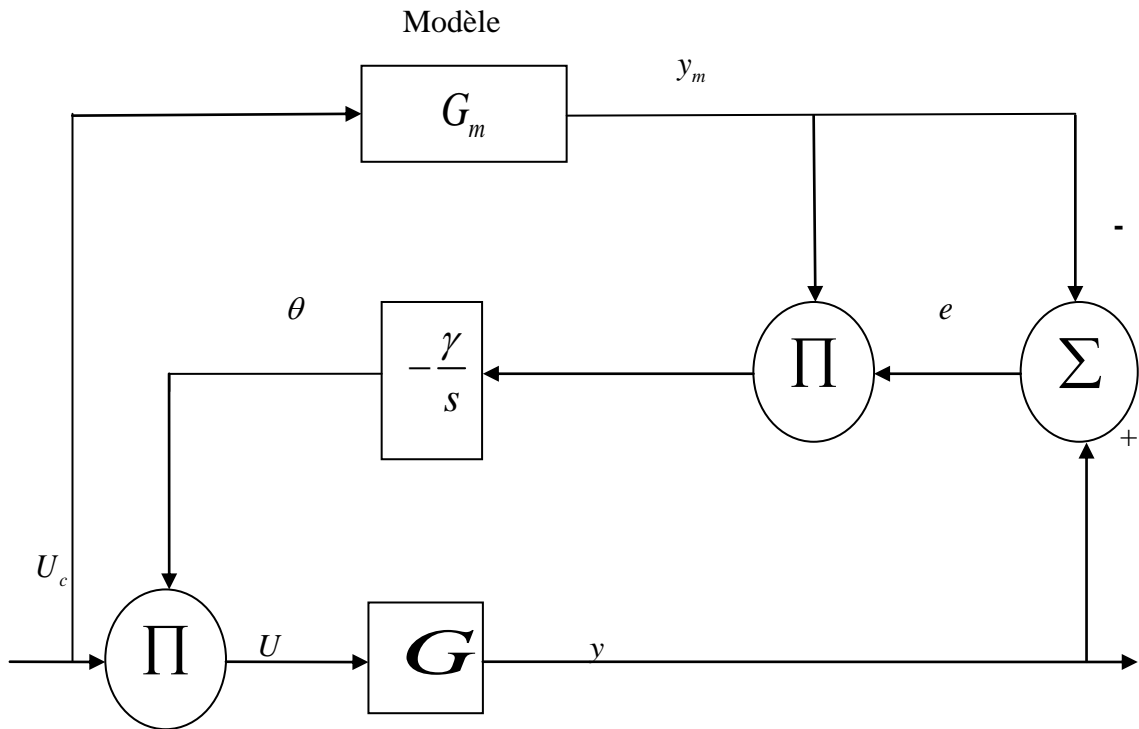


Figure (II.3) : Algorithme classique d'Adaptation.

Il existe plusieurs alternatives à la fonction de coût donnée par l'équation (II.16). Si on choisit

$$J(\theta) = |e| \tag{II.18}$$

La méthode du gradient donne

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\delta e}{\delta \theta} \text{sign}(e) \tag{II.19}$$

Le premier SAMR(Système Adaptatif à Modèle de Référence) qui fût implémenté était basé sur cette formule. Cependant il existe beaucoup d'autres possibilités, par exemple

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \text{sign}\left(\frac{\delta e}{\delta \theta}\right) \text{sign}(e) \tag{II.20}$$

qui est appelée l'algorithme du sign-sign. Une version discrète de cet algorithme est utilisée en télécommunications, dans laquelle une implémentation simple et des calculs rapides sont requis.

On peut décrire le problème de la commande à modèle de référence comme suit :

Soit $G_m(s)$ la fonction de transfert du modèle de référence spécifiant les performances désirées. Soit $G_{BF}(s, \theta)$ la fonction de transfert du processus en boucle fermée où θ est le vecteur des paramètres ajustables. r est le signal de référence.

Le CAMR essaie de varier les paramètres du régulateur tel que l'erreur :

$$e(t) = (G_{BF}(s, \theta) - G_m(s))r(t) = y - y_m$$

tende vers zéro.

La loi de M.I.T. donnée par :

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e \quad (\text{II.21})$$

Où $\varphi = -\frac{de}{dt}$ et γ le gain d'adaptation, peut être interprété comme une méthode du gradient

pour minimiser l'erreur.

L'algorithme normalisé :

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \frac{\varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi} \quad (\text{II.22})$$

Remarque [10]:

- Le but des CAMR est de faire converger l'erreur $e = y - y_m$ vers zéro. Cela n'implique pas nécessairement que les paramètres du régulateur convergent vers leurs valeurs correctes.
- Le choix du gain d'adaptation est crucial et dépend des niveaux des signaux. est moins sensible aux niveaux des signaux.
- Le système obtenu avec la loi de M.I.T fonctionne comme prévu pour de petits gains d'adaptation. Des comportements plus complexes peuvent apparaître pour de grands gains d'adaptation.

II.3.3 Réalisation du Régulateur du SAMR [10]

On considère un processus SISO. On suppose que toutes les dynamiques sont linéaires. L'idée clé est que le régulateur peut être paramétré de manière à ce que l'erreur soit linéaire par rapport aux paramètres du régulateur.

La méthode de conception du régulateur peut être résumée comme suit :

1. Trouver une structure du régulateur qui permet une poursuite parfaite de la sortie
2. Calculer l'erreur de modèle
3. Utiliser la loi d'ajustement des paramètres (II.6) ou la loi normalisée (II.7)

II.3.3.1 Structure du Régulateur [10]

On suppose que le processus est décrit par le modèle continu

$$Ay(t) = b_0 Bu(t) \quad (\text{II.23})$$

Où les polynômes A et B sont supposés ne pas avoir de facteurs communs et le polynôme B est manique et a tous ses zéros dans le demi-plan gauche. La variable b_0 est dite gain instantané ou gain à hautes fréquences.

Le régulateur peut être écrit sous la forme suivante :

$$Ru(t) = Tu_r(t) - Sy(t)$$

Où u_r est le signal de référence. Puisque le polynôme B est stable, les pôles correspondant peuvent être compensés par le régulateur. Cela correspond à $R = R_1 B$

Le système en boucle fermée obtenu quand le régulateur est appliqué au processus (II.9) est décrit par :

$$(AR_1 + b_0 S)y = b_0 Tu_r \quad (\text{II.24})$$

Si le polynôme T est choisi tel que $T = t_0 A_0$, où A_0 est un polynôme monique stable et R_1 et S satisfont :

$$AR_1 + b_0 S = A_0 A_m \quad (\text{II.25})$$

Il est possible de réaliser une poursuite de modèle parfaite avec le modèle :

$$A_m y_m(t) = b_0 t_0 u_r(t) \quad (\text{II.26})$$

II.3.3.2 L'erreur de modèle [10]

A partir des équations (II.23) et (II.24) il vient que :

$$A_0 A_m y = AR_1 y + b_0 S y = R_1 b_0 B u + b_0 S y \quad (\text{II.27})$$

Introduisons l'erreur $e = y - y_m$ il vient à partir des équations (II-26) et (II-27) que :

$$A_0 A_m e = A_0 A_m (y - y_m) = b_0 (Ru + Sy - Tu_r)$$

Ou bien
$$e = \frac{b_0}{A_0 A_m} (Ru + Sy - Tu_r) \quad (\text{II.29})$$

Soient k, l et m les degrés des polynômes R, S et T respectivement. Introduisons le vecteur des vrais paramètres du régulateur :

$$\theta^0 = (r_1 \dots r_k s_0 \dots s_l t_0 \dots t_m) \quad (\text{II.30})$$

et introduisons le vecteur de régression (ou de mesures) φ :

$$\begin{aligned}\varphi^T &= - \left[\frac{\delta e}{\delta r_1} \frac{\delta e}{\delta r_2} \dots \frac{\delta e}{\delta r_k} \frac{\delta e}{\delta s_0} \frac{\delta e}{\delta s_1} \dots \frac{\delta e}{\delta s_l} \frac{\delta e}{\delta t_1} \dots \frac{\delta e}{\delta t_m} \right] \\ &= \frac{b_0}{A_0 A_m} \left[p^{k-1} u \dots u p^l y \dots y - p^m u_r \dots - u_r \right]\end{aligned}\quad (\text{II.31})$$

L'erreur pourra s'écrire :

$$e = \varphi^T \theta^0 \quad (\text{II.32})$$

Les polynômes R, S et T doivent vérifier les conditions :

$$\begin{aligned}R(p) &= p^k + r_1 p^{k-1} + r_2 p^{k-2} + \dots + r_k \\ S(p) &= s_0 p^l + s_1 p^{l-1} + s_2 p^{l-2} + \dots + s_l \\ T(p) &= t_0 p^m + t_1 p^{m-1} + t_2 p^{m-2} + \dots + t_m\end{aligned}\quad (\text{II.33})$$

Avec

$$\begin{aligned}\deg A_m - \deg B_m &\geq \deg A - \deg B \\ \deg A_0 &\geq 2 \deg A - 2 \deg A_m - \deg B^+ - 1\end{aligned}\quad (\text{II.34})$$

Ces deux conditions sont toujours vérifiées, même dans le cas où $A_0 = 1$ car on utilise un modèle tel que $A_m > \deg A$

$$\begin{aligned}k &= \deg R = \deg R_1 + \deg B = \deg A_m + \deg B - \deg A \\ l &= \deg S \leq \deg R\end{aligned}\quad (\text{II.35})$$

donc on prendra :

$$\deg S = \deg R$$

ou bien

$$\deg S = \deg R - 1$$

et

$$m = \deg T = \deg B_m$$

Généralement on prend $\deg S = \deg R - 1$ pour que le filtre S/R soit causal [10].

II.4 Exemples de simulation

II.4.1 Résultats pour un système du premier ordre :

Le processus est un système du premier ordre, régi par l'équation suivante [10] :

$$G(s) = \frac{0.5}{s+1} \quad (\text{II.36})$$

et le modèle de référence d'ordre entier choisi comme :

$$G_m(s) = \frac{1}{s^2 + 1.8s + 1} \quad (\text{II.37})$$

Les résultats de simulation sont donnés par la figure (II.4)

II.4.2 Résultats pour un système du second ordre

Le processus est un système du 2nd ordre, régi par l'équation suivante [10] :

$$G(s) = \frac{0.5}{s^2 + 2s + 1} \quad (\text{II.39})$$

et le modèle de référence choisi :

$$G_m(s) = \frac{100}{s^2 + 9s + 100} \quad (\text{II.40})$$

Les résultats de simulation sont donnés par la figure (II.5)

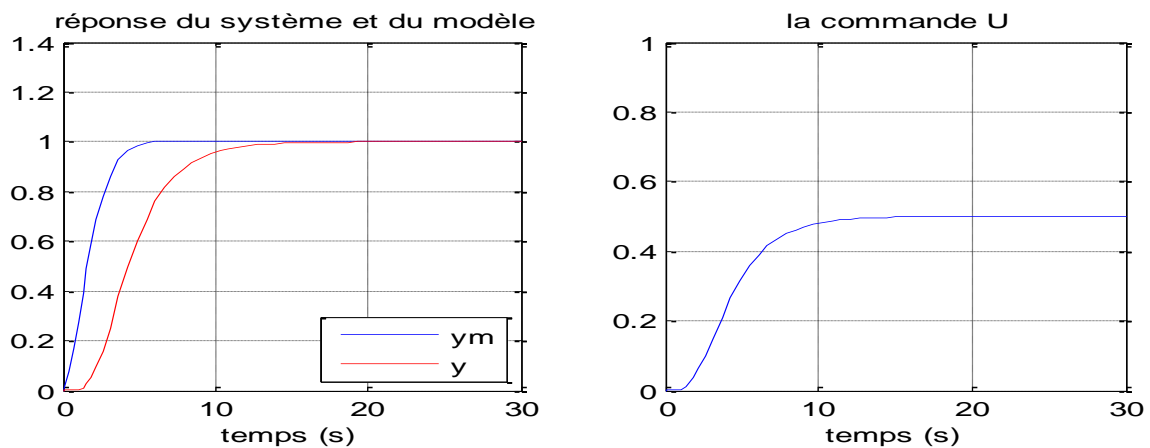


Figure (II.4) : Réponse du CAMR pour un système de 1^{er} ordre

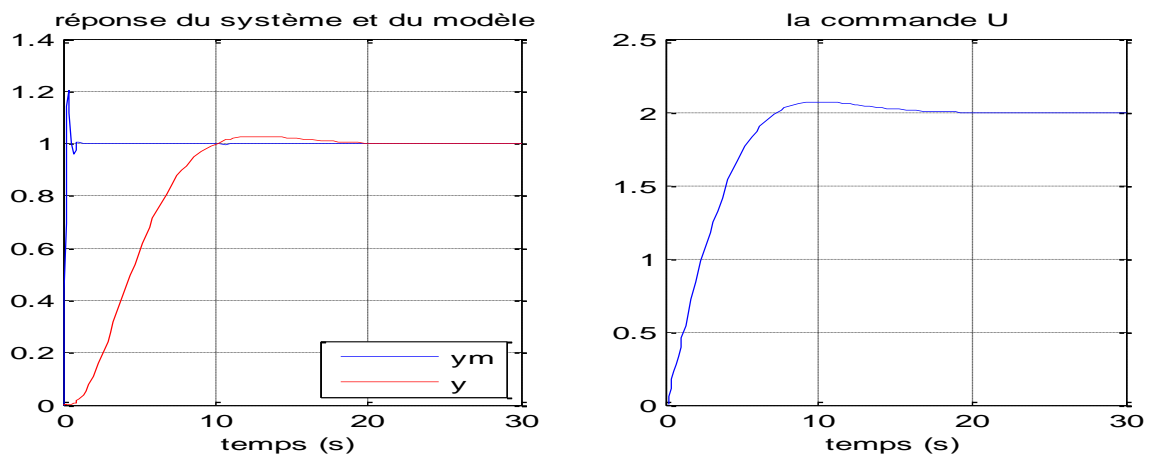


Figure (II.5) : Réponse du CAMR pour un système de 2nd ordre

D'après les résultats de simulation des figures (II.4) et (II.5), on remarque que la sortie du système suit le signal du modèle de référence, et la commande est bornée.

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté la commande adaptative à modèle de référence avec ses lois de commande et sa structure de régulation. Cet algorithme de commande (CAMR) est directe, l'identification du processus à commander n'est pas nécessaire, la synthèse du commande consiste à chercher la structure d'un contrôleur puis ajuster ses paramètres de façon à réaliser un suivi parfait du modèle, l'ajustement des paramètres est fait par la méthode MIT qu'est plus facile à implanter.

Des exemples de simulation (systèmes du premier et second ordre) sont faits sur le schéma de CAMR que réalisent le suivi du modèle (model-following) et montrent la validité de cette commande.

Dans le chapitre suivant, on va étudier le schéma du CAMR par l'utilisation des systèmes d'ordre fractionnaire comme modèle de référence, et l'introduisant les opérateurs d'ordre fractionnaire (intégrateur et dérivateur) dans la loi de commande.

Chapitre III

Commande adaptative
à modèle de référence
d'ordre fractionnaire

III.1 Introduction

Il était presque naturel que les chercheurs travaillant dans le domaine naissant de la commande d'ordre fractionnaire s'intéressent à la commande adaptative CAMR (commande adaptative à modèle de référence), en effet les premières tentatives d'introduction de modèles d'ordre fractionnaire dans la boucle de CAMR sont apparues depuis plus d'une décennie [13].

Plusieurs travaux étudiaient le schéma de commande CAMR plus loin [14,15], en introduisant en sus du modèle d'ordre fractionnaire les opérateurs intégrro-différentiels d'ordre non entier dans la loi de commande CAMR (Loi de M.I.T.), ces travaux permettent d'améliorer nettement le comportement dynamique et le domaine des stabilités en utilisant une intégration d'ordre fractionnaire dans la loi d'ajustement des paramètres du régulateur adaptatif.

Aussi une autre schéma de commande CAMR d'ordre fractionnaire a été proposé par [16] combinant l'utilisation d'un modèle d'ordre non entier avec l'introduction d'un filtre dérivateur d'ordre fractionnaire à la sortie du processus commandé, ce qui a permis d'obtenir une dynamique du système en boucle fermée, pour d'améliorer la robustesse du système en présence de bruits externes.

Dans ce chapitre, nous étudions les différents schémas de CAMR à modèle d'ordre fractionnaire avec des exemples illustratifs.

III.2 CAMR avec modèle fractionnaire [10, 13,14]

III.2.1 Principe

Le but de cette commande est de montrer que l'utilisation d'un système d'ordre fractionnaire comme modèle de référence dans l'algorithme de commande adaptative CAMR, permet d'améliorer la dynamique de la réponse du processus commandé.

III.2.2 Stratégie de commande :

Nous nous intéressons ici à la commande adaptative directe à modèle de référence (CAMR) et notamment à l'approche utilisant la loi de M.I.T. qu'a été présenté dans la section (II.3.2)

La structure du régulateur et la loi de commande reste donc inchangées et l'on se borne à utiliser une approximation d'ordre entier de la fonction de transfert du modèle d'ordre fractionnaire.

En effet soit $G(s)$ la fonction de transfert du système à commander :

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Et $G_m(s)$ soit la fonction de transfert du modèle d'ordre fractionnaire choisi avec :

$$G_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)}$$

Et $G_m^*(s)$ l'approximation d'ordre entier obtenu par la méthode de la fonction des singularités (voir section (I.7) telle que :

$$G_m^*(s) = \frac{B_m^*(s)}{A_m^*(s)}$$

Nous utiliserons le polynôme caractéristique approximé $A_m^*(s)$ au lieu $A(s)$ dans l'équation(III.27)

$$A_0 A_m^* y = A R_1 y + b_0 S y = R_1 b_0 B u + b_0 S y \quad (\text{III.1})$$

On obtient d'après la loi de M.I.T. de l'équation (II.21)

$$\theta = -\frac{\gamma}{s} y_m (y - y_m) = -\frac{\gamma}{s} y_m e$$

Donc

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_m(t) e(t) \quad (\text{III.2})$$

et

$$\theta(t) = -\gamma \int_0^t y_m(t) e(t) dt \quad (\text{III.3})$$

où d'après les équations (II.30), (II.31) et (II.32) :

$$\theta^0 = (r_1 \dots r_k s_0 \dots s_1 t_0 \dots t_m)$$

le vecteur de régression

$$\varphi^T = \frac{b_0}{A_0 A_m} \left[p^{k-1} u \dots u p^l y \dots y - p^m u_r \dots - u_r \right]$$

et l'erreur

$$e = \varphi^T \theta^0$$

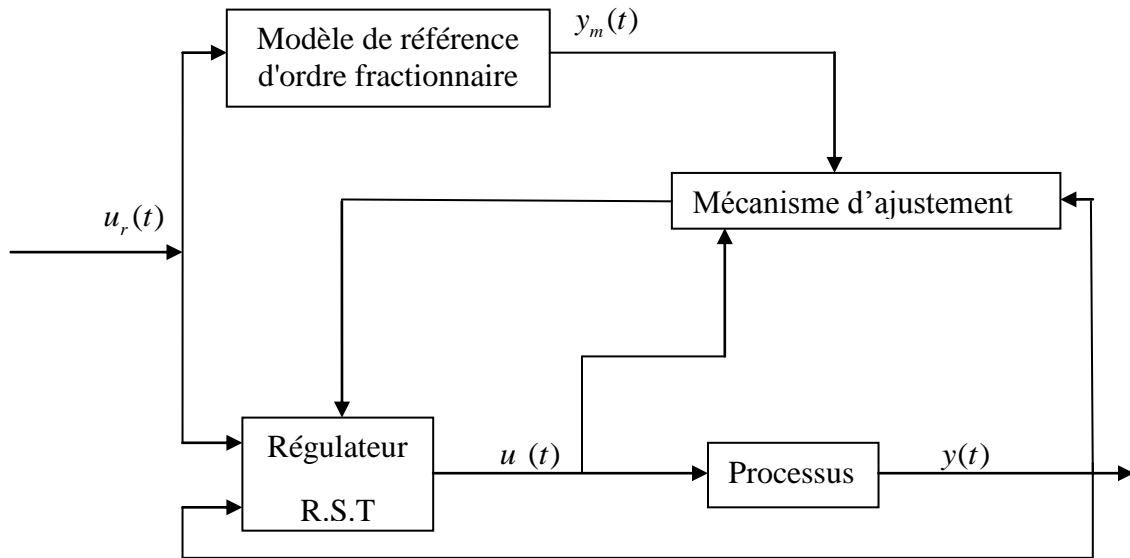


Figure (III.1) : CAMR directe à modèle d'ordre fractionnaire

III.2.3 Simulations et commentaires

Nous ferons deux essais avec un modèle d'ordre entier, puis avec un modèle d'ordre fractionnaire pour les applications suivantes

III.2.3.1 Résultats pour un système SISO du premier ordre :

Le processus est un système du premier ordre, régi par l'équation suivante :

$$G(s) = \frac{0.5}{s+1} \quad (\text{III.4})$$

a- le modèle de référence d'ordre entier est :

$$G_m(s) = \frac{10}{s+10} \quad (\text{III.5})$$

b- le modèle de référence d'ordre fractionnaire est :

$$G_m(s) = \frac{1}{(0.1s+1)^{0.1}} \quad (\text{III.6})$$

$G_m(s)$ est approximée par une fonction d'ordre entier en utilisant la méthode de la fonction de singularité de Charef [9], ce qui donne :

$$G_m(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^{0.1}} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} = \frac{B_m(s)}{A_m(s)}$$

$$(III.7) G_m(s) = \frac{4.4668e^2 s^5 + 2.6802e^5 s^4 + 4.9686e^7 s^3 + 3.5175e^9 s^2 + 9.5097e^{10} s + 7.943e^{11}}{s^6 + 1.2113e^3 s^5 + 4.5974e^5 s^4 + 6.8807e^7 s^3 + 4.2577e^9 s^2 + 1.039e^{11} s + 7.9432e^{11}}$$

(III.8)

Les résultats de simulation sont donnés par les figures (III.2.a) et (III.2.b)

III.2.3.2 Commande en vitesse d'un moteur à Courant continu

Nous considérons un moteur à courant continu alimenté par un hacheur. Les équations différentielles régissant l'ensemble (convertisseur + moteur) sont [8] :

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L} i(t) - \frac{k_e}{L} y(t) + \frac{k}{L} u(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\frac{k_e}{J} i(t) - \frac{f}{J} y(t) + \frac{1}{J} C_r(t) \end{aligned} \quad (III.9)$$

Où $i(t)$ représente le courant d'induit, $y(t)$ la vitesse angulaire du moteur, $u(t)$ la tension de commande et $C_r(t)$ le couple résistant (perturbation).

Ce moteur est à faible puissance, ses caractéristiques sont :

- Moment d'inertie $J = 0.018 \text{ kg.m}^2$
- Coefficient d'amortissement $f = 0.0055 \text{ nm / rad.sec}$
- Constante du couple moteur $k_e = 1$
- Résistance du moteur $R = 6.25 \Omega$
- Inductance du moteur $L = 0.024 \text{ H}$
- Constante d'amplification $k = 35$

En utilisant l'opérateur de différentiation, le système (III.13) devient comme suit :

$$i(t) = \frac{-k_e y + k u}{Ls + R} \quad (III.10a)$$

$$y(t) = \frac{k_e i(t) - C_r(t)}{Js + f} \quad (\text{III.10b})$$

En substituant l'équation (III.5a) dans (III.5b), on trouve :

$$y(t) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_2} u(t) - \frac{br_0 s + br_1}{s^2 + a_1 s + a_2} C_r(t) \quad (\text{III.11})$$

Avec

$$- b_0 = \frac{k_e k}{J.L}$$

$$- br_0 = \frac{1}{J}$$

$$- br_1 = \frac{R}{J.L}$$

$$- a_1 = \frac{J.R + L.f}{J.L}$$

$$- a_2 = \frac{f.R + ke^2}{J.L}$$

Et le système devient après remplacement des valeurs numériques des paramètres :

$$y(t) = \frac{81018}{s^2 + 260.7s + 2394} u(t) - \frac{55.55s + 14460}{s^2 + 260.7s + 2394} C_r(t) \quad (\text{III.12})$$

avec $C_r = 0$

a- le modèle de référence d'ordre entier est :

$$G_m(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

Avec $w_n = 10, \xi = 0.95$ ce qui donne :

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 19s + 100} \quad (\text{III.13})$$

b- le modèle de référence d'ordre fractionnaire est :

$$G_m(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\xi \frac{s}{w_n} + 1 \right)^m}$$

Avec

$w_n=10, \xi=0.95$ et $m=0.55$ ce qui donne :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{100} + 1.9\frac{s}{10} + 1\right)^{0.55}} \tag{III.14}$$

$G_m(s)$ est approximée par une fonction d'ordre entier en utilisant la méthode de la fonction de singularité de Charef [5], où :

$$\eta = 2m - 1 = 0.1$$

$$\alpha = (0.95)^m = 0.97218$$

$$G_m(s) = \frac{\left(\frac{s}{10} + 1\right) \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{100} + 1.9\frac{s}{10} + 1\right) \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} \tag{III.15}$$

$$G_m(s) = \frac{4.4668e^3s^6 + 2.7249e^6s^5 + 4.9686e^7s^4 + 4.014e^{10}s^3 + 1.3027e^{12}s^2 + 7.943e^{13}s + 7.943e^{13}}{s^8 + 1.2307e^3s^7 + 4.8339e^5s^6 + 7.7867e^7s^5 + 5.6415e^9s^4 + 1.9357e^{11}s^3 + 3.2403e^{12}s^2 + 2.5834e^{13}s + 7.943e^{13}}$$

Les résultats de simulation sont donnés par les figures (III.3.a) et (III.3.b)

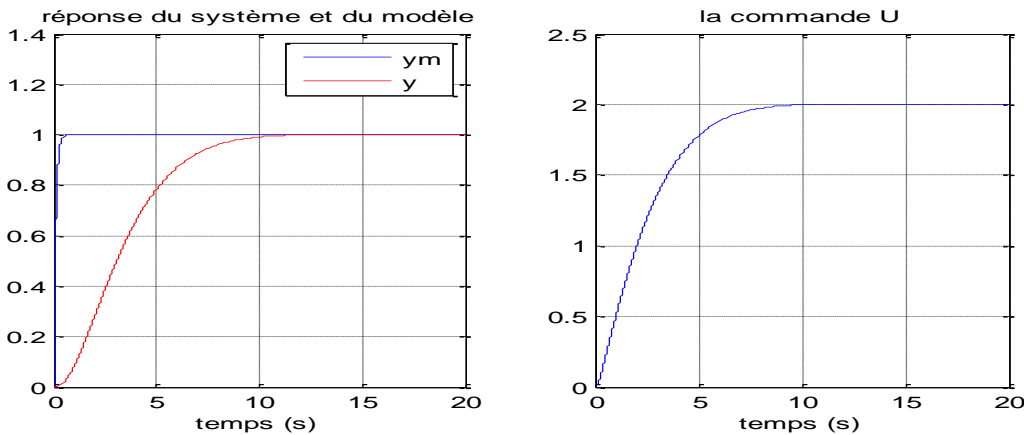


Figure (III.2.a) : CAMR avec modèle de référence d'ordre entier pour un système de 1^{er} ordre

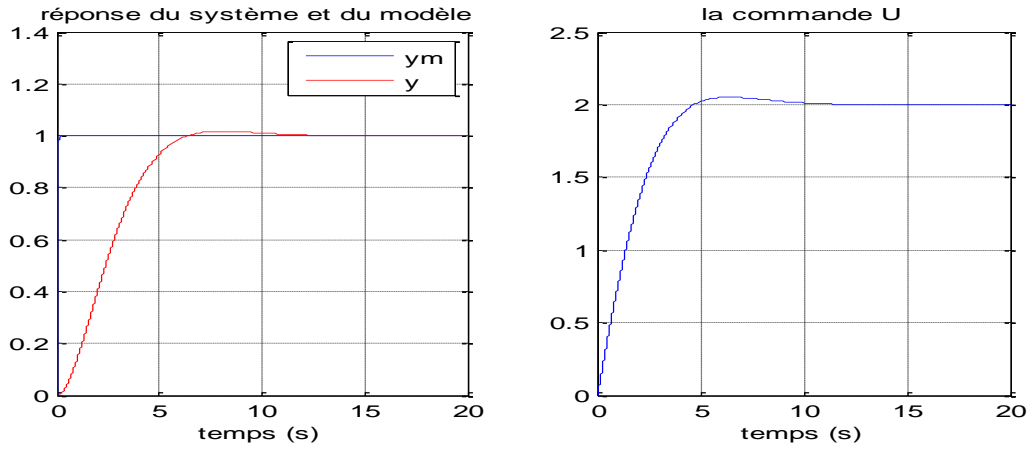


Figure (III.2.b): CAMR avec modèle de référence d'ordre fractionnaire pour système de 1^{er} ordre

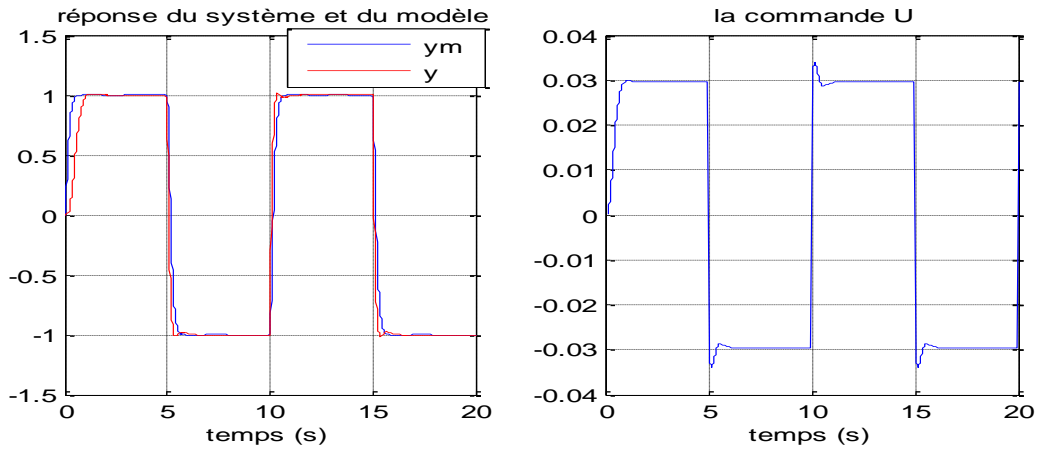


Figure (III.3.a) : CAMR avec modèle de référence d'ordre entier pour un MCC

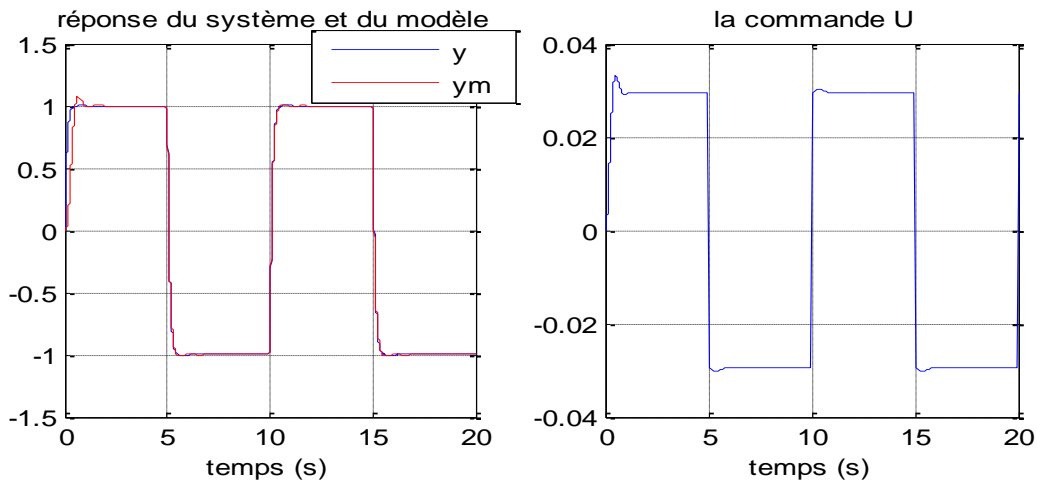


Figure (III.3.b) : CAMR avec modèle de référence d'ordre fractionnaire pour un MCC

III.2.3.1 Commentaires

Les réponses obtenues pour le cas du modèle d'ordre entier et le cas du modèle d'ordre fractionnaire, montrent une nette amélioration de la dynamique du système de commande en boucle fermée

La valeur du paramètre gain d'adaptation nécessaire pour stabiliser le système adaptatif est petite dans le cas du modèle d'ordre fractionnaire ce qui permet d'augmenter la marge de stabilité du système. En effet, l'augmentation de la valeur a tendance à déstabiliser le système.

III.3 CAMR avec intégration d'ordre fractionnaire [14,15]

III.3.1 Principe

L'introduction d'une intégration d'ordre fractionnaire dans la CAMR permettait d'élargir le domaine de variation de l'amplitude du signal de référence où la stabilité du système de commande en boucle fermée est maintenue. En effet, cet objectif de stabilité de la commande est mieux atteint avec un paramètre de réglage et une amplitude du signal de référence suffisamment petits. C'est pourquoi on peut stabiliser la boucle de commande adaptative en utilisant une intégration d'ordre fractionnaire.

III.3.2 Stratégie de commande

Dans l'algorithme d'ajustement représenté par le schéma-blocs de la figure (III.1) on utilise une intégration d'ordre λ , où λ est un nombre réel positif non nul vérifiant :

$$0 < \lambda < 2$$

On utilise aussi un modèle de référence G_m d'ordre fractionnaire, ce qui mène au schéma-bloc de la figure (III.5) On obtient

$$\theta = -\frac{\gamma}{s^\lambda} y_m (y - y_m) = -\frac{\gamma}{s^\lambda} y_m e$$

donc

$$\frac{d^\lambda \theta}{dt^\lambda} = -\lambda y_m e \tag{III.16}$$

et

$$\theta = -\gamma I^\lambda (y_m e) \tag{III.17}$$

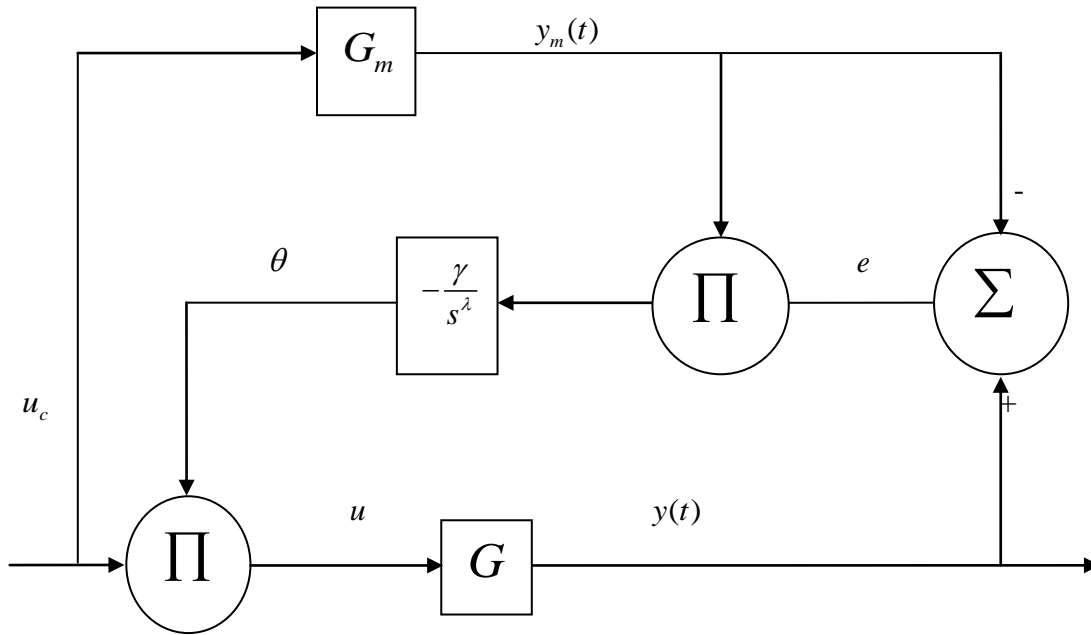


Figure (III.4) : Algorithme d'adaptation avec intégration d'ordre fractionnaire

III.3 .3 Simulations et commentaires

III.3.3.1 Simulations

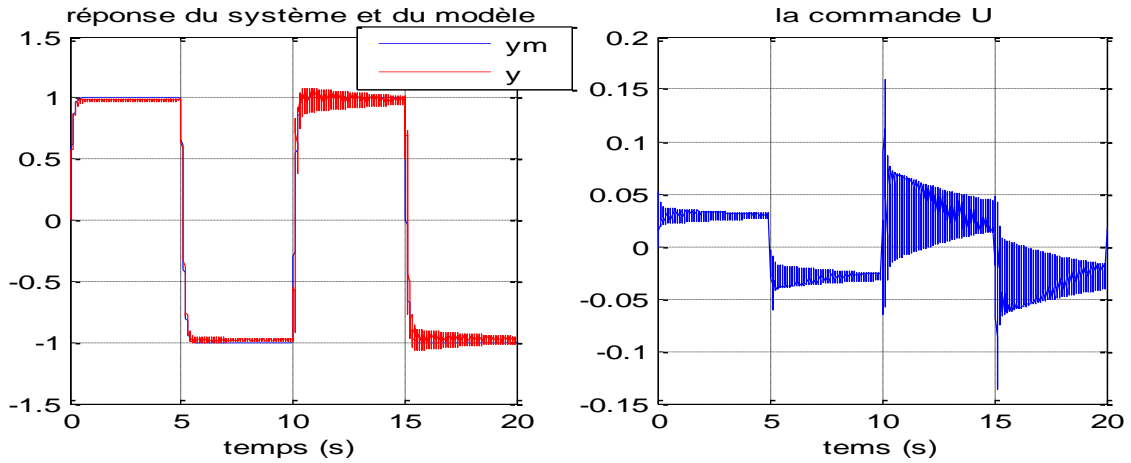
On applique l'algorithme adaptatif utilisant l'intégration d'ordre fractionnaire à la commande en vitesse d'un moteur à courant continu, dont la fonction de transfert identifiée est donnée par:

$$G(s) = \frac{81018}{s^2 + 260.7s + 2394} \tag{III.18}$$

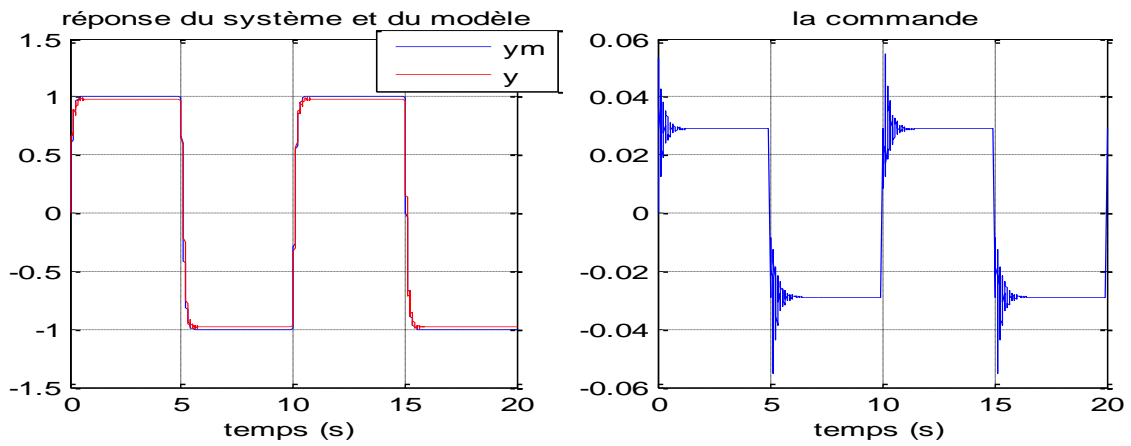
Et le modèle de référence choisi est :

$$G_m^f(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{100} + 1.9 \frac{s}{10} + 1\right)^{0.55}} \tag{III.19}$$

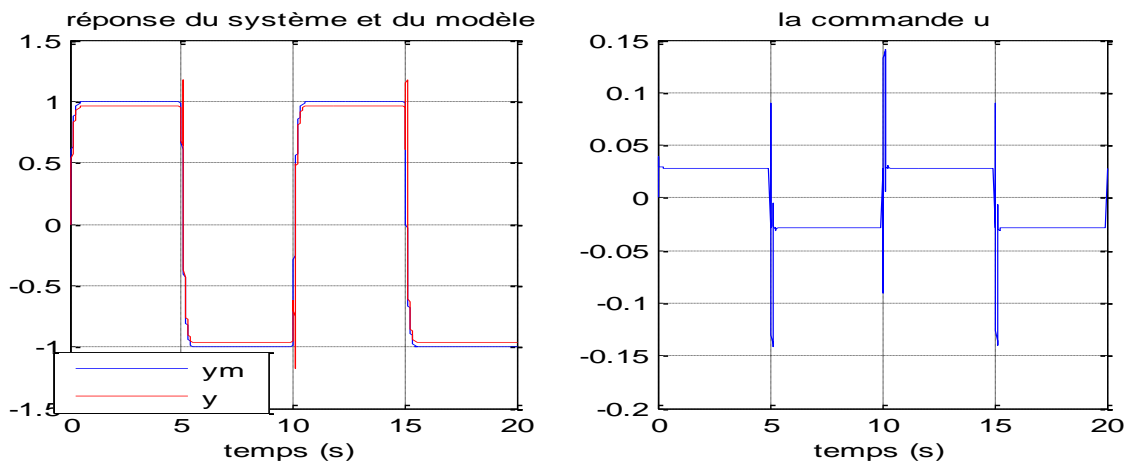
On obtient les réponses données dans la figure (III.6), pour différentes valeurs de l'ordre d'intégration λ .



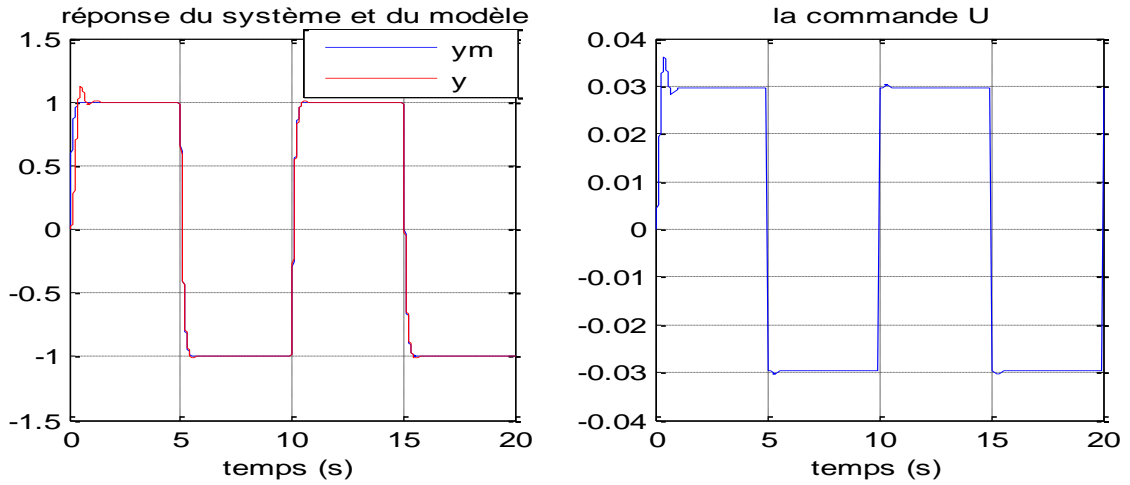
Cas1. Pour un ordre d'intégrateur $\lambda = 0.3$



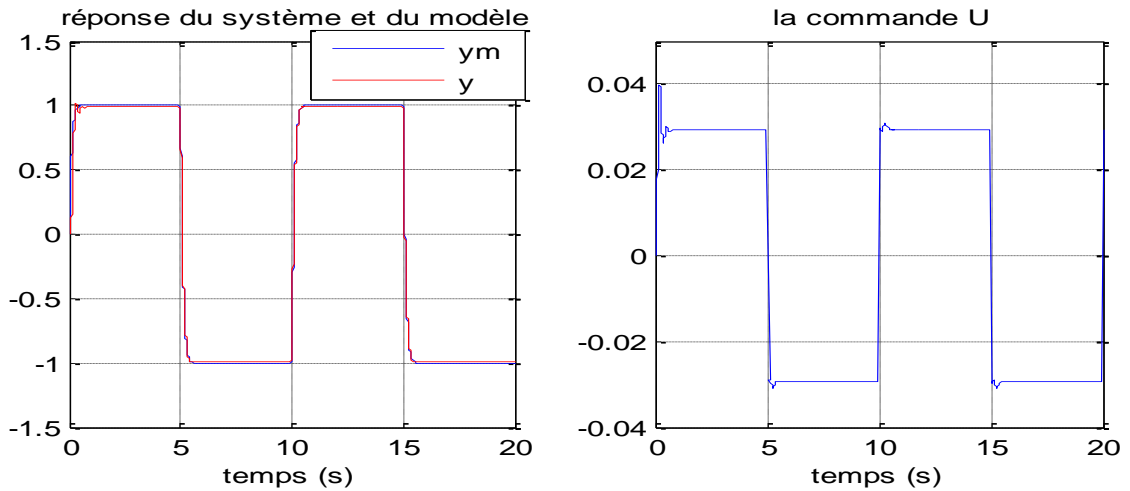
Cas3. Pour un ordre d'intégrateur $\lambda = 0.7$



Cas3. Pour un ordre d'intégrateur $\lambda = 0.8$



Cas4. Pour un ordre d'intégrateur $\lambda = 1$



Cas5. Pour un ordre d'intégrateur $\lambda = 1.2$

Figure(III.5) : CAMR avec intégration d'ordre fractionnaire, ordres d'intégration : $\lambda = 0.3 - 1.2$

III.3.3.2 Commentaires

1. La stabilité de la boucle fermée est assurée pour toutes les valeurs de λ .
2. On peut remarquer que le niveau de performance est meilleur pour $\lambda = 1.2$, en termes de temps de réponse et de lissage de la courbe.
3. Pour les petites valeurs de l'ordre fractionnaire d'intégration ($\lambda \leq 0.3$), des oscillations apparaissent dans la réponse du système.

III.4 CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire en feedback [14 ,16]

III.4.1 Principe

Le principe de cette commande est l'introduction d'un dérivateur d'ordre fractionnaire dans la sortie du processus dans l'algorithme de commande adaptative CAMR combiné avec l'utilisation d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire.

III.4.2 Stratégie de commande

Dans ce schéma de commande on utilise un modèle de référence G_m ayant une fonction de transfert de second ordre fractionnaire. On introduit aussi un bloc de dérivation d'ordre fractionnaire à la sortie du processus, comme représenté dans la figure (III.7).

On suppose que le degré relatif de la fonction de transfert du processus SISO n est connu

$$G(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)} \quad (III.20)$$

avec

$$\deg(Den(s)) - \deg(Num(s)) = n \quad (III.21)$$

Alors quand $|s|$ est assez grand, on peut écrire :

$$G_m(s) = \frac{y_m}{u_c} = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\xi \frac{s}{w_n} + 1\right)^m} |s| \xrightarrow{\approx} \frac{1}{s^{2m}} \quad (III.22)$$

et aussi

$$G(s) = \frac{y}{u} |s| \xrightarrow{\approx} \frac{1}{s^n} \quad (III.23)$$

Donc pour pouvoir comparer $y_m(t)$ avec $\frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha}$ on doit avoir

$$\frac{s^\alpha}{s^n} = \frac{1}{s^{2m}} \quad (III.24)$$

en d'autres termes,

$$\alpha = n - 2m \quad (III.25)$$

Introduire une action dérivée dans un régulateur PD par exemple, permet d'améliorer le temps de réponse en boucle fermée, donc un effet similaire est prévu dans le cas de l'introduction d'une dérivée d'ordre fractionnaire qui est une généralisation de la dérivée d'ordre entier classique. En outre, le fait que le calcul de la dérivée d'ordre fractionnaire dépende de toute l'histoire du signal dérivé, donne de meilleures performances au vu des fluctuations du signal et des perturbations externes.

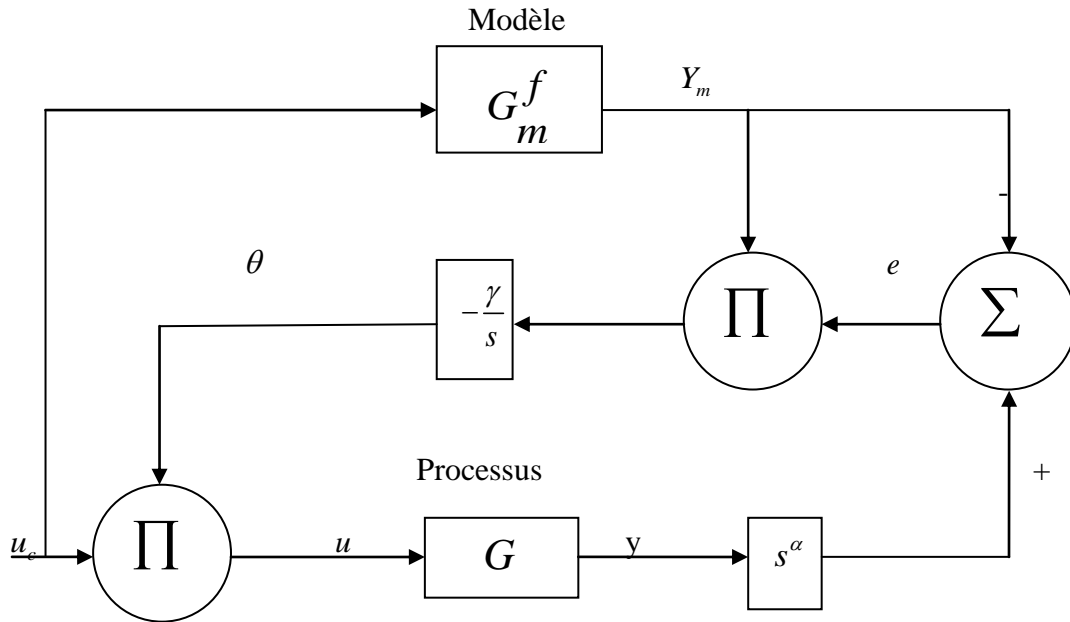


Figure (III.6) : Algorithme d'adaptation utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire de la sortie.

III.4.3 Simulations et commentaires

III.4.3.1 Résultats pour un système SISO de premier ordre

Nous appliquons cette commande à un processus SISO de premier ordre (III.4), en choisissant comme modèle de référence la fonction :

$$G_m^f(s) = \frac{1}{(s^2 + 1.8s + 1)^{0.4}} \tag{III.26}$$

La fonction de transfert $G_m^f(s)$ est approximée par un modèle d'ordre entier en utilisant la méthode de la fonction de singularité [9] (voir (I.7)).

On obtient les résultats de simulation donnés dans la figure (III.7), On présente une comparaison des deux schémas de commande adaptative pour des bruits additionnels aléatoires à la sortie et à l'entrée.

III.4.3.2 Résultats pour un système SISO de second ordre

Appliquons cette commande à un moteur à courant continu (III.18) dont la fonction de transfert est de second ordre, en choisissant comme modèle de référence [10] la fonction :

$$G_m(s) = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)^m}$$

Avec

$w_n = 10$, $\xi = 0.45$ et $m = 0.4$ ce qui donne :

$$G(s) = \frac{100}{(s^2 + 9s + 100)^{0.4}} \quad (\text{III.27})$$

$G_m(s)$ est approximée par une fonction d'ordre entier en utilisant la méthode de la fonction de singularité [9], ou :

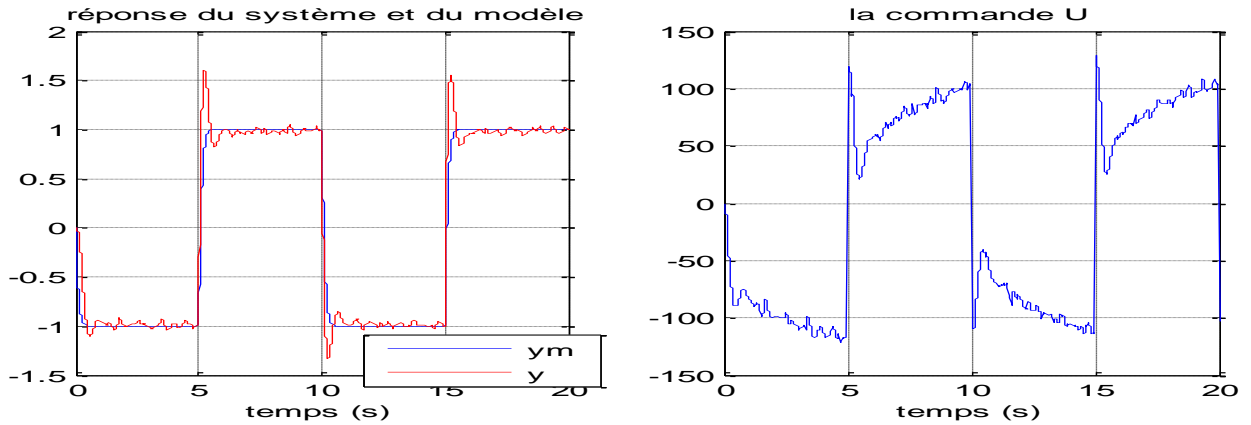
$$\eta = 1 - 2m = 0.2$$

$$\alpha = (0.45)^m = 0.7266$$

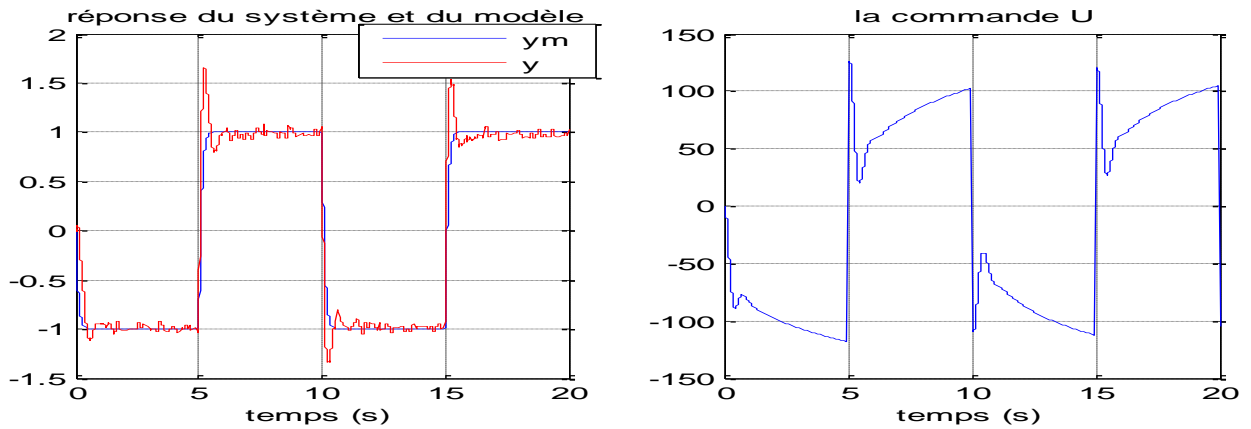
$$G_m(s) = \frac{\left(\frac{s}{10} + 1\right) \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{100} + 1.4532 \frac{s}{10} + 1\right) \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} \quad (\text{III.28})$$

$$G_m(s) = \frac{0.003162s^2 + 0.1316s + 1}{1.7781e^{-7}s^4 + 0.0001912s^3 + 0.01362s^2 + 0.2105s + 1} \quad (\text{III.29})$$

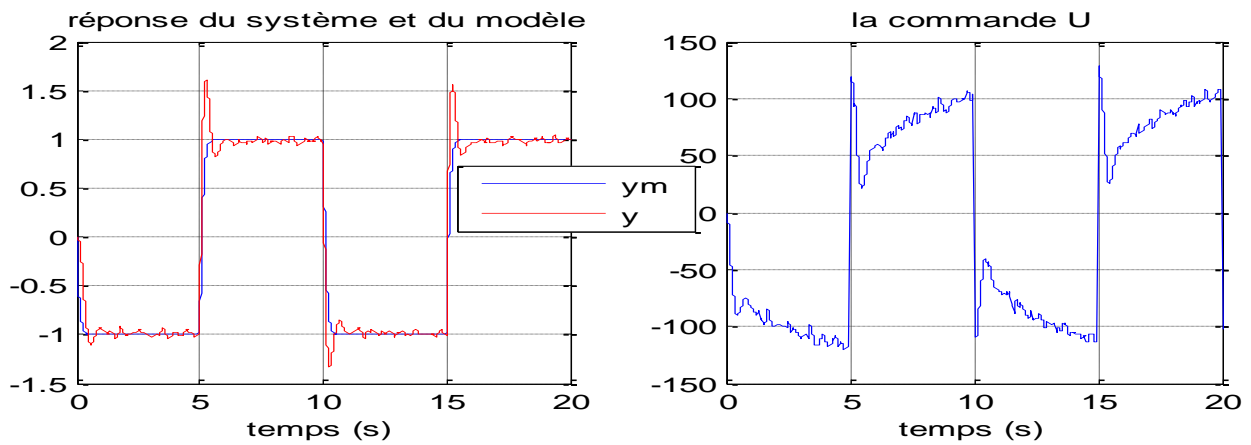
On obtient les résultats de simulation donnés dans la figure (III.8), On présente une comparaison des deux schémas de commande adaptative pour des bruits additionnels aléatoires à la sortie et à l'entrée.



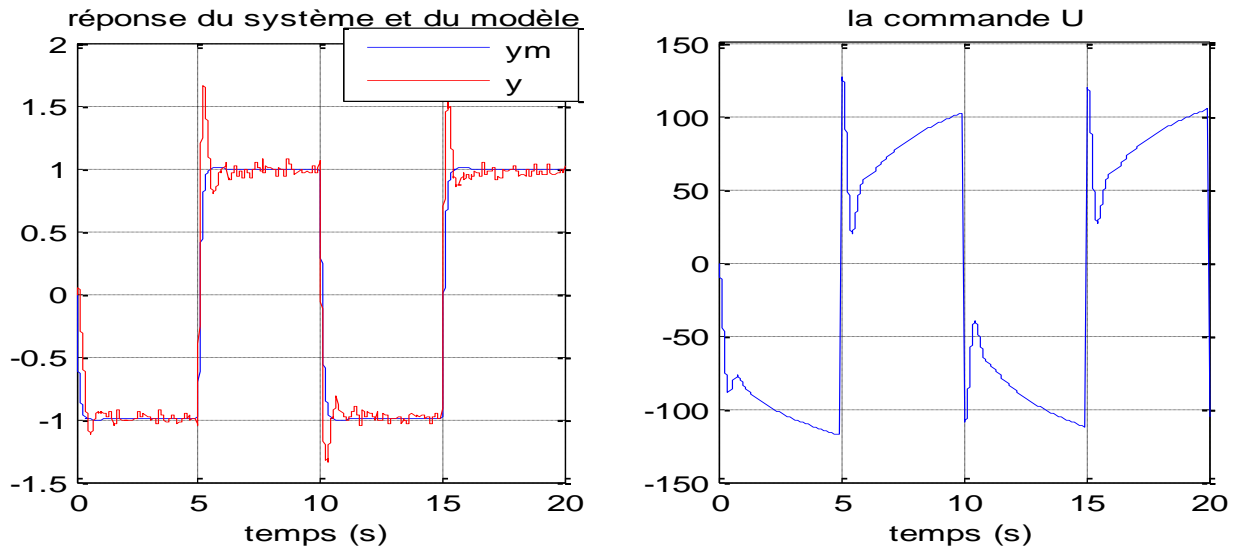
Figure(III.7.a) : CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus du 1^{er} ordre en présence des bruits aléatoires à l'entrée.



Figure(III.7.b) : CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus du 1^{er} ordre en présence des bruit aléatoires à la sortie.



Figure(III.8.a) : CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus du 2nd ordre en présence des bruits aléatoires à l'entrée.



Figure(III.8.b) : CAMR avec dérivée d'ordre fractionnaire, processus du 2nd ordre en présence des bruits aléatoires à la sortie.

III.4.3.2 Commentaires

- La stabilité de la boucle fermée est assurée dans les deux cas,
- L'algorithme de commande adaptative utilisant les opérateurs d'ordre fractionnaire présente une amélioration évidente du rejet des perturbations, tel que le dérivateur d'ordre fractionnaire agit comme un filtre à la sortie du processus ce qui améliore la robustesse de la commande contre les bruits et les perturbations.

On peut remarquer que le schéma bloc de la figure (III.6) peut être modifié sous la forme de la figure (III.9), ce qui est le même schéma adaptatif présenté dans figure (III.4) où une intégration d'ordre fractionnaire $1 - \alpha$ est utilisée avec un modèle de référence d'ordre fractionnaire dont la

fonction de transfert est $\frac{1}{s^\alpha G_m(s)}$.

Cependant, les deux schémas adaptatifs ne sont pas équivalents en performances. Il est plus pratique d'utiliser le calcul numérique de la dérivée d'ordre fractionnaire. De plus, nous sommes plus convaincus de la robustesse du schéma dérivatif par rapport aux bruits et aux perturbations (le signal de sortie est filtré par le dérivateur d'ordre fractionnaire avant d'être intégré) [14].

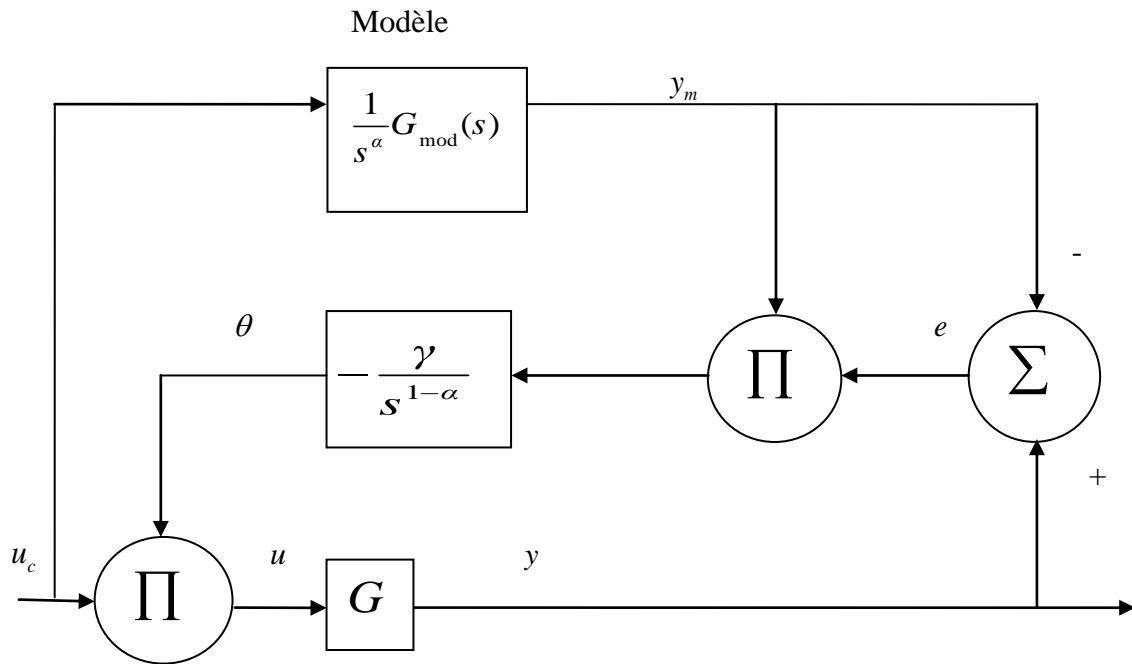


Figure (III.9) : Algorithme d'adaptation équivalent.

III.4 Conclusion

L'essentiel de ce chapitre a été consacré à la commande adaptative à modèle de référence (CAMR) d'ordre fractionnaire, avec la loi de commande M.I.T, cette méthode présente l'avantage d'être simple à mettre en œuvre.

Nous avons montré que l'introduction d'un modèle d'ordre fractionnaire comme modèle de référence dans l'algorithme de CAMR avait un effet bénéfique sur les performances du processus commandé, et a permis d'augmenter la rapidité de convergence du processus, et de garantir la stabilité de la boucle de commande. Des applications de ce schéma de commande est faite sur un système académique du 1^{er} ordre. Ainsi que pour un système typique, le moteur à courant continu commandé en vitesse. Elles montrent qu'un modèle de référence d'ordre fractionnaire peut sensiblement améliorer les performances de la boucle de commande adaptative.

L'introduction d'une intégration d'ordre fractionnaire combinée avec un choix de modèle de référence d'ordre fractionnaire approprié, a permis d'améliorer le niveau de performance de la

commande CAMR d'un processus SISO. Ainsi la réponse est plus rapide et la stabilité de la boucle fermée est assurée pour toutes les valeurs de l'ordre d'intégration.

L'introduction d'une dérivée d'ordre fractionnaire à la sortie du processus commandé, combinée avec un modèle de référence fractionnaire d'ordre compatible avec celui de la dérivée, garantit la stabilité de la boucle fermée, et offre un niveau satisfaisant de performances dynamiques avec une grande capacité à rejeter les perturbations externes.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté la commande adaptative directe à modèle de référence d'ordre fractionnaire, avec l'utilisation des opérateurs d'ordre fractionnaire (intégrateur et dérivateur) dans sa loi de commande. Le principe consiste à approximer d'abord le modèle de référence fractionnaire en utilisant l'une des méthodes d'approximation (Charef), et ensuite utiliser l'algorithme classique de la commande adaptative à modèle de référence. Alors, les travaux réalisés et les résultats obtenus faisant l'objet de ce mémoire sont présentés en trois chapitres.

Le chapitre I est réservé aux notions de base et l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire. Elle comporte deux parties :

- Dans la première partie, nous avons donné un bref rappel sur les principes généraux, différentes définitions de différentiation/intégration fractionnaire, leurs propriétés de base et les méthodes d'approximations les plus récentes.
- La deuxième partie, présente la méthode d'approximation de la fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle dans une bande fréquentielle donnée. Des exemples numériques ont été présentés. Des circuits analogiques ont aussi été tirés. Enfin, nous avons présenté les performances des systèmes d'ordre fractionnaire

Le deuxième chapitre a porté sur la commande adaptative. On a choisi un algorithme commande adaptative directe à modèle de référence, l'identification du processus est inutilisable, l'ajustement des paramètres est fait par la méthode MIT. Des exemples de simulation ont été présentés.

Dans le chapitre trois, nous avons commencé par l'introduction d'un modèle d'ordre fractionnaire dans le schéma de commande CAMR ; des exemples de simulations montrent un meilleur niveau de performance par rapport aux algorithmes originaux. En plus du modèle d'ordre fractionnaire, la dérivation et l'intégration d'ordres fractionnaires permettent d'augmenter la rapidité de convergence des algorithmes, et agissent dans la boucle de commande comme des filtres qui réduisent l'effet des bruits et fluctuations des signaux.

D'après cette étude, on constate que l'utilisation des systèmes d'ordre fractionnaire dans la boucle du CAMR permet d'améliorer le niveau de performance des systèmes de commande concernant la phase transitoire de la réponse, et d'obtenir une meilleure robustesse

Conclusion générale

contre les bruits et les perturbations.

A l'issue de ces travaux, ce mémoire ouvre de nouvelles perspectives de recherche parmi lesquelles nous citons :

- Utilisation d'autres formes d'approximations des systèmes d'ordre fractionnaire et leur application dans la commande.
- Généraliser les résultats obtenus au cas des systèmes MIMO.
- Application pratique de la commande en vitesse d'un moteur à courant continu avec une boucle commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire.

Bibliographie

- [1] K. BETTOU ‘ Analyse et Réalisation de correcteurs analogiques d’ordre fractionnaire’ Thèse Doctorat, Département d’électronique, université Mentouri de Constantine, 2011.
- [2] I. PODLUBNY, ‘ Fractional Differential Equations’, Academic Press, San Diego, 1999.
- [3] D. IDIOU, ‘ Implémentation analogique de dérivateur et d’intégrateur d’ordre fractionnaire variable ’, Mémoire de Magister, Département d’électronique, université Mentouri de Constantine, 2008.
- [4] A.SI AMMOUR, ‘ Contribution à la commande par mode glissants d’ordre fractionnaire’, Thèse de Doctorat, Département d’électronique, université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2011.
- [5] D. BOUCHERMA, ‘ Résolution de l’équation d’état d’ordre fractionnaire ’, Mémoire de Magister, Département d’électronique, université Mentouri de Constantine, 2007.
- [6] K. HAMDAOUI, ‘ Implémentation Analogique et Numérique de Dérivateur et d’Intégrateur d’Ordre Fractionnaire Variable ’, Mémoire de Magister, Département d’électronique, université Mentouri de Constantine, 2006.
- [7] T. BENSOUICI, ‘ Implémentation numérique RIF de dérivateur et d’intégrateur d’ordre Fractionnaire Variable ’, Mémoire de Magister, Département d’électronique, université Mentouri de Constantine, 2007.
- [8] PETRAS, I., PODLUBNY, I., O’LEARY, P., DORCAK, L., and VINAGRE, B.M., Analogue, ‘realization of fractional-order controllers’, Fakulta Berg, TU Kosice, 2002.
- [9] A. CHAREF, H.H. SUN, Y.Y. TSAO, and B. ONARAL, ‘ Fractal system as represented by singularity function ’, IEEE Trans. Auto. Control, 37, pp 1465-1470, sept 1992.
- [10] S. LADACI, ‘Contribution a la commande adaptative d’ordre fractionnaire’, Thèse de Doctorat, Département d’électronique, université Mentouri de Constantine, 2007.
- [11] A. CHAREF, ‘Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional $PI^l D^m$ controllers ’, IEE proceedings on control theory and Applications, Vol 153, Issue 6, pp 714-720, 2006.
- [12] A. CHAREF, A. DJOUAMBI, and A.V. BESANÇON, ‘ Optimal approximation, Simulation and analog realization of the fundamental fractional order transfer function ’, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., Vol. 17, No. 4, 455–462 DOI: 10.2478/v10006-007-0037-9, 2007.
- [13] M.L. HADJILI, ‘ Commande adaptative à modèle de référence d’ordre fractionnaire ’, Mémoire de Magister, Département d’électronique, université Mentouri de Constantine, 1994.

Bibliographie

- [14] S. LADACI and A. CHAREF, ‘ On fractional adaptive control ’. *Nonlinear Dynamics*, 43(4) :365_378, Springer, Mars 2006.
- [15] B.M. VINAGRE, I. PETRÁS, I. PODLUBNY, and Y.Q. CHEN, ‘ Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control’, *Nonlinear Dynamics*, 29 :269_279, 2002.
- [16] S. LADACI, J.J. LOISEAU, and A. CHAREF. ‘Using fractional order filter in adaptive control of noisy plants’ *Proc. ICAMEM, on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics*, Hammamet, Tunisia, December, 2006.

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME
DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE

SPECIALITE: AUTOMATIQUE

Proposé et dirigé par : Mr. KHETTAB Khatir

Présenté par : DELOUM Abdennour

Thème :

**Commande adaptative à modèle de référence
d'ordre fractionnaire**

Résumé :

Ce travail présente des idées pour améliorer les schémas de la commande adaptative à modèle de référence (CAMR) par l'introduction d'éléments du calcul fractionnaire, qui présente d'excellente performance dynamique (rapidité, précision et stabilité), où cette contribution comporte les schémas de commande suivants : Commande adaptative à modèle de référence avec des lois de commande utilisant une intégration d'ordre fractionnaire ou une dérivée d'ordre fractionnaire de la sortie du processus, et un modèle de référence d'ordre fractionnaire.

Le principe de ces commandes consiste à approximer d'abord le modèle de référence et les opérateurs d'ordre fractionnaire en utilisant l'une des méthodes d'approximation (Charef) et ensuite utiliser l'algorithme classique de la commande adaptative à modèle de référence.

Mots Clés : Système d'ordre fractionnaire, Commande adaptative, Méthodes d'approximation, Méthode de Charef, MRAC.

N ° d'ordre : 08