

RÉPUBLIQUE ALÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF -M'SILA-  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre: .....

# **T H È S E**

*Présentée pour l'obtention du diplôme  
de Doctorat en sciences*

Spécialité

Mathématiques

Option

Analyse fonctionnelle et numérique

Par

MIHOUBI HAMZA

Thème

---

**Simulations numériques des phénomènes des transferts  
thermiques par l'utilisation des systèmes des  
coordonnées curvilignes**

---

Soutenue le ...../...../2020 devant le jury composé de:

<b>BENHAMIDOUCHE Nouredine</b>	<b>Prof.,</b>	<b>Université de M'sila</b>	<b>Président</b>
<b>BOUDERAH Brahim</b>	<b>Prof.,</b>	<b>Université de M'sila</b>	<b>Encadreur</b>
<b>MEROUANI Abdelbaki</b>	<b>Prof.,</b>	<b>Université de Sétif 1</b>	<b>Examinateur</b>
<b>RAHMOUNE Azedine</b>	<b>MCA.,</b>	<b>Université de BBA</b>	<b>Examinateur</b>
<b>TAYEBI Tahar</b>	<b>MCA.,</b>	<b>Université de BBA</b>	<b>Examinateur</b>
<b>ARIOUA Yasine</b>	<b>MCA.,</b>	<b>Université de M'sila</b>	<b>Examinateur</b>

**Année Universitaire : 2019/2020**

## *Dédicace*

*Je dédie cet humble travail*

*À mon père, ma mère, ma femme et mes enfants, Alae Rahman,  
Yahya et Anfal, et à tous mes frères et tous les membres de ma famille,  
petits et grands, et tous mes amis.*

## *Remerciement*

*Je tiens à exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur professeur **BOUDERAH Brahim** pour sa direction durant la préparation de cette thèse. Son expertise dans le domaine de l'analyse numérique combinée avec sa bonne volonté et sa disponibilité à tout moment, créait un stimulant atmosphère, sans lequel ce travail ne pourrait être mené à terme.*

*Nous souhaitons exprimer nos plus sincères remerciements à Monsieur **TAYEBI Tahar** maître de conférencier à l'Université de Bordj Bou Arreridj, pour lequel nous avons beaucoup de respect. Nous apprécions particulièrement son humilité, ses encouragements et sa direction dans la poursuite de nos travaux.*

*J'adresse mes remerciements au professeur **BENHAMIDOUCHÉ Noureddine**, pour m'avoir fait l'honneur et le plaisir de présider mon jury.*

*Je tiens aussi à remercier Monsieur **MEROUANI Abdelbaki**, professeur à l'Université de sétif, Monsieur **Rahmoune Azedine** , maître de conférencier à l'Université de Bordj Bou Arreridj et Monsieur **ARIOUA Yasine**, Maître de Conférences A à l'Université de m'sila, pour leur participation à l'évaluation du présent travail.*

*Je voudrais également remercier toutes les personnes impliquées dans ce travail, en particulier l'équipe de gestion de département mathématique. Et je remercie tous les ingénieurs de laboratoire Génie mécanique à l'Université de Bordj Bou Arreridj et tous mes collègues.*

# TABLE DES MATIERES

**Sommaire**

**Liste Des Figures**

**Liste Des Tableaux**

**Nomenclature**

**INTRODUCTION GENERALE.....1**

## **CHAPITRE I : Généralités et synthèse bibliographique**

1.1 .Historique de la simulation numérique.....	3
I.2. Dynamique des Fluides Numérique .....	7
I.2.1. L'expérience.....	8
I.2.2. Le calcul théorique.....	8
I.2.3. dynamique des fluides computationnelle (CFD).....	9
I.2.3. 1. Grandes étapes de CFD .....	10
I.2.3.2. les composantes d'un logiciel de modélisation et simulation numérique.....	10
I.2.4. Outils de CFD et code de calcul .....	12
I.2.5. Applications de la CFD.....	13
I.3. Systèmes de coordonnées curvilignes arbitraires.....	14
I.3.1. Coordonnées curvilignes générales non orthogonales.....	14
I.3.1.1. Tenseur métrique. Éléments de longueur et de volume d'arc en coordonnées curvilignes.....	14
I.3.1.2. Composants vectoriels dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et curvilignes.....	15
I.3.2. Coordonnées curvilignes orthogonales générales.....	16
I.3.2.1. Coordonnées orthogonales. Éléments de longueur, de surface et de volume..	16

I.3.2.2. Relations différentielles de base en coordonnées curvilignes orthogonales...	16
I.4. Systèmes spéciaux de coordonnées curvilignes.....	17
I.4.1. Coordonnées cylindriques.....	17
I.4.1.1. Transformations de coordonnées et de vecteurs. Les composants du tenseur métrique.....	17
I.4.1.2. Relations différentielles de base.....	18
I.4.2. Coordonnées sphériques.....	19
I.4.2.1. Transformations de coordonnées et de vecteurs. Les composantes du tenseur métrique.....	19
I.4.2.2. Relations différentielles de base.....	20
I.4.3. Coordonnées d'un ellipsoïde prolifique de révolution.....	21
I.4.3.1. Transformations de coordonnées. Les composants du tenseur métrique.....	21
I.4.3.2. Relations différentielles de base.....	23
I.4.4. Coordonnées d'un ellipsoïde oblat de la révolution.....	23
I.4.4.1. Transformations de coordonnées. Les composants du tenseur métrique.....	23
I.4.4.2. Relations différentielles de base.....	24
I.4.5. Coordonnées d'un cylindre elliptique.....	25
I.4.6. Coordonnées coniques.....	26
I.4.7. Coordonnées du cylindre parabolique.....	27
I.4.8. Coordonnées paraboliques.....	28
I.4.9. Coordonnées bipolaires.....	29
I.4.10. Coordonnées bipolaires (dans l'espace).....	31
I.4.11. Coordonnées toroïdales.....	31
I.5. Synthèse bibliographique.....	33

## CHAPITRE II: FORMULATION MATHEMATIQUE

II.1. Introduction.....	38
II.2. Description du problème.....	38
II.3. Hypothèses simplificatrices.....	39
II.4. Formulation vectorielle du problème.....	40
II.5. Formulation indicielle.....	41
II.6. Formulation des équations en coordonnées cartésiennes .....	41
II.7. Équation de vorticité.....	42
II.8. Coordonnées bipolaires.....	43
II.8.1. Introduction.....	43
II.8.2. Démonstration géométrique.....	46
II.8.3. Coefficients métriques.....	48
II.8.4. Calcul des dérivées partielles.....	48
II.8.5. Calcul des coefficients métriques.....	50
II.9. Les opérateurs différentiels.....	50
II.10. Formulation des équations de continuité, de la chaleur et de la quantité de mouvement dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales.....	51
II.10.1. Équation de continuité.....	51
II.10.2. Équation de quantité de mouvement.....	52
II.10.3. Équation d'énergie.....	53
II.11. Adimensionnalisation.....	54
II.12. Formulation des conditions aux limites.....	55
II.13. Coefficients de taux de transfert de chaleur .....	56
II.13.1. Nombre de Nusselt local et moyen.....	56

## CHAPITRE III: SIMULATIONS NUMERIQUES

Introduction.....	57
III.1. Le calcul numérique (modélisation et simulation).....	57
III.2. Les méthodes principales de discrétisation.....	58
III.2.1. Introduction.....	58
III.2.2. Méthode des différences finies (MDF).....	58
III.2.3. Méthode des éléments finis (MEF).....	59
III.2.4. Méthodes spectrales (MS).....	59
III.2.5. Méthode des volumes finis (MVF).....	59
III.3. Méthode de résolution numérique.....	62
III.3.1. Volume élémentaire d'intégration.....	63
III.3.2. Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable dans le volume de contrôle.....	64
III.3.3.1. Intégration de l'équation de transfert.....	65
III.3.3.2. Linéarisation du terme source.....	67
III.3.3.3. Discrétisons de l'équation de continuité(II.42).....	67
III.3.3.4. Schémas de Discrétisation Spatiale.....	69
✓ Schéma aux différences centrées (CDS).....	70
✓ Schéma Upwind (UPS).....	70
✓ Schéma Hybride (HDS).....	71
✓ Schéma exponentiel.....	71
✓ le Schéma" Power Law " (loi Puissance).....	72
III.4. Discrétisation de l'équation de la chaleur (énergie).....	74

III.4.1. Discrétisation des Conditions aux limites.....	78
III.5. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement.....	78
III.5.1. Discrétisation des Conditions aux limites.....	80
III.6. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant.....	81
III.6.1. Discrétisation des Conditions aux limites.....	82
III.7. Discrétisation des composantes de la vitesse.....	82
 <b>CHAPITRE IV: RESULTATS ET DISCUSSIONS</b>	
V.1. Introduction.....	84
IV.2. Présentation du code de calcul.....	84
IV.2.1. Code de calcul Fluent.....	84
IV.2.2. Préprocesseur Gambit.....	85
IV.3. Test du maillage.....	85
IV.4. Validation des résultats.....	85
IV.5. Discussion des résultats.....	86
CONCLUSION GENERALE.....	98
ANNEXES.....	100
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	105

# Liste des figures

<b>Figure. I.1.</b> le principe du calcul théorique.....	8
<b>Figure. I.2</b> Dynamique des Fluides Numérique CFD [3].....	9
<b>Figure. I.3.</b> les composantes d'un logiciel de modélisation et Simulation numérique.....	11
<b>Figure. I.4.</b> Applications de la CFD.....	13
<b>Figure I.5.</b> Représentation schématique des coordonnées cylindriques $(r, \varphi, z)$ .....	18
<b>Figure I.6.</b> Représentation schématique des coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ .....	20
<b>Figure I.7.</b> Représentation schématique des coordonnées ellipsoïdales. $(\theta, \eta, \varphi)$ .....	22
<b>Figure .I.8.</b> Représentation schématique des coordonnées coniques $(r, \theta, \lambda)$ .....	26
<b>Figure .I.9.</b> Représentation schématique des cylindres paraboliques $(\mu, v, z)$ .....	27
<b>Figure. I.10.</b> Représentation schématique des coordonnées paraboliques $(\mu, v, z)$ . ....	28
<b>Figure .I.11.</b> Représentation schématique des coordonnées bipolaires.....	29
<b>Figure .I.12.</b> Représentation schématique des coordonnées toroïdales $(\eta, \theta, \varphi)$ [5].....	32
<b>Figure. II.1.</b> Géométrie et conditions aux limites.....	39
<b>Figure II.2.</b> Représentation schématique des coordonnées bipolaires.....	44
<b>Fig. III.1.</b> Le principe du calcul numérique.....	57
<b>Figure III.2.</b> Domaine physique et domaine de calcul.....	63
<b>Figure III.3.</b> Représentation schématique du volume de contrôle sur cette figure, le volume de contrôle entourant le nœud P est limité par les faces notées w, n, e et s.....	64
<b>Figure. III.4.</b> La fonction $A( P )$ pour les différents schémas [48].....	70
<b>Figure III.5.</b> Représentation schématique des nœuds P, E, W et S dans le maillage.....	75

<b>Figure. IV.1.</b> Comparaison de nos résultats [61] et ceux d'Abu-Nada et al. [52], Tayebi et al. [53] et Kuhen and Goldstein [51].	86
<b>Figure. IV.2.</b> Nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction de $\varphi$ et pour différents nombres de Rayleigh.	87
<b>Figure. IV.3.</b> Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh et pour différentes concentrations.	87
<b>Figure. IV.4.</b> Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne (a) et externe (b) pour différentes concentrations et pour $Ra=10^5$ .	88
<b>Figure. IV.5.</b> Variation de fonction de courant maximale en fonction des concentrations aux différents nombres de Rayleigh.	89
<b>Figure. IV.6.</b> Profil de la température adimensionnelle le long de la section médiane $\theta=90^\circ$ pour différents nombres de Rayleigh et $\varphi=6\%$ .	89
<b>Figure. IV.7.</b> Profil de la température le long de la section médiane $\theta=90^\circ$ pour différents concentrations et $Ra=10^5$ .	90
<b>Figure. IV.8.</b> Représentation des isothermes et des fonctions de courant pour nombre de Rayleigh $Ra=10^3$ et différentes concentrations.	93
<b>Figure. IV.9.</b> Représentation des isothermes et des fonctions de courant pour $Ra=10^4$ et différentes concentrations volumiques $\varphi$ .	94
<b>Figure. IV.10.</b> Représentation des isothermes et des fonctions de courant pour $Ra=10^5$ et différentes concentrations volumiques $\varphi$ .	96
<b>Figure. IV.11.</b> Histogramme de l'efficacité du transfert thermique du nanofluide.	97
<b>Figure A.1.</b> Évolution possible des dans un processus convergent ; $\phi_P^k$ nécessité d'une sur-relaxation.	104
<b>Figure A.2.</b> Évolution possible des $\phi_P^k$ dans un processus divergent ; nécessité d'une sous relaxation.	104

# Liste des tableaux

<b>Tableau II.1.</b> Les propriétés thermophysiques des fluides de base et nanoparticules utilisées [40-44].....	38
<b>Tableau III.1.</b> Les différentes expressions des termes: $\Gamma_\phi$ , $\phi$ , $S_\phi$ .....	65
<b>Tableau III.2.</b> La fonction $A( P )$ pour différents schémas [48].....	69
<b>Tableau IV.1.</b> Étude du maillage.....	85
<b>Tableau IV.2.</b> Efficacité de transfert de chaleur en présence de nanofluide (Eau+Argent)...	96

# Nomenclature

## Lettres latines

$k$	[ $W/m^2K$ ]	: Conductivité thermique.
$H$	[ $m$ ]	: La longueur caractéristique.
$\vec{g}$	[ $m/s^2$ ]	: Accélération de la pesanteur.
$P$	[ $N/m^2$ ]	: Pression.
$S_\Phi$		: Terme source.
$T$	[ $K$ ]	: Température.
$T_0$	[ $K$ ]	: Température de référence.
$T_1$	[ $K$ ]	: Température de la paroi froide.
$T_2$	[ $K$ ]	: Température de la paroi chaude.
$\Delta T$	[ $K$ ]	: Ecart de température dimensionne ( $T_2 - T_1$ )
$u, v$	[ $m/s$ ]	: Composantes de vitesses en coordonnée cartésiennes.
$x, y$	[ $m$ ]	: Coordonnées cartésiennes.

## Lettres grecques

$\alpha$	[ $m^2/s$ ]	: Diffusivité thermique.
$\beta$	[ $1/K$ ]	: Coefficient de dilatation du fluide à pression constante.
$\mu$	[ $kg/m^2s$ ]	: Viscosité dynamique.
$\nu$	[ $m^2/s$ ]	: Viscosité cinématique.
$\rho$	[ $kg/m^3$ ]	: Masse volumique.

$\rho_0$	$[kg/m^3]$	: Masse volumique à $T_0$ .
$\varphi$		: La concentration volumique.
$\Phi$		: Variable dépendante.
$\Gamma_\Phi$	$[m^2/s]$	: Coefficient de diffusion de $\Phi$ .
$\omega$	$[1/s]$	: Vorticité.
$\psi$	$[m^2/s]$	: Fonction de courant.

### Indices

$nf$		: Nanofluide.
$P$		: Nanoparticule.
$f$		: Fluide de base.
1		: Température froide.
2		: Température chaude

### Nombres adimensionnels

$Pr$		: Nombre de Prandtl, $Pr = \frac{\nu}{a}$
$Gr$		: Nombre de Grashof, $Gr = \frac{g \beta \Delta T D_h^3}{\nu^2}$
$Ra$		: Nombre de Rayleigh, $Ra = Pr \cdot Gr$
$Nu$		: Nombre de Nusselt, $Nu = \frac{hH}{k}$

### Exposant

*		: Paramètres adimensionnels.
---	--	------------------------------

La modalisation mathématique et la simulation numérique ont pris une importance considérable ces dernières décennies dans tous les domaines de la science et des applications industrielles (ou la science d'ingénieur). La modélisation mathématique et l'art de représenter une réalité physique en des modèles abstraits accessibles à l'analyse et au calcul. La simulation numérique est, bien sûr, le processus qui permet de calculer sur ordinateur les solutions de ces modèles, et donc de simuler la réalité physique.

La simulation numérique des phénomènes de transferts thermiques occupe une place très importante dans la recherche et l'industrie. La modélisation mathématique du phénomène est fondée sur les équations de la mécanique des fluides, couplées avec l'équation de l'énergie et leur résolution est rendue possible en utilisant une des nombreuses méthodes numériques. Parmi les méthodes les plus utilisées, on citera celle des différences finies, éléments finis et volumes finis. Cette dernière est à l'origine de plusieurs codes de calcul (CFD) comme le logiciel FLUENT, qu'on a utilisé pour la suite de ce travail.

Bien que les échanges thermiques se manifestent sous diverses formes (rayonnement, conduction et convection), cette dernière est la plus visée dans certains domaines bien spécifiés tels que le refroidissement des moteurs, des composants électroniques, les radiateurs et les échangeurs de chaleurs, etc. Le transfert de chaleur par convection est un phénomène très complexe, car la solution dépend de plusieurs paramètres dont la géométrie du problème étudié, la nature du fluide, la nature de l'écoulement ...etc. L'intensité du transfert de chaleur dépend principalement de la conductivité et de la capacité thermique des fluides caloporteurs. Depuis quelques années un nouveau type de fluide est en train d'émerger : le nanofluide.

Le nanofluide est un fluide caloporteur tel que l'eau, l'eau glycol, l'huile à qui l'on rajoute des nanoparticules de métal (Al, Cu, Ag, au, etc.) ou d'oxyde métallique ou non métallique (SiO<sub>2</sub>, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, TiO<sub>2</sub>), et autre (formes allotropiques du carbone). Dans des quantités relativement faibles, ces nanofluides pourraient augmenter le transfert de chaleur par rapport au cas des fluides conventionnels en modifiant de manière significative la conductivité thermique du fluide porteur. Cette amélioration du transfert de chaleur faite par des nanofluides fait donc une nouvelle technologie prometteuse dans le cadre des transferts thermiques, permettant d'améliorer les performances de divers échangeurs de chaleurs [1].

L'étude des transferts de chaleur par convection naturelle en employant les nanofluides est devenue un domaine de recherche de plus en plus actif. En effet, un grand nombre d'études

dans les cylindres remplis par les nanofluides avec différentes conditions aux limites ont été intensivement considérées par des chercheurs.

L'objectif de ce travail consiste à la modélisation mathématique et la simulation numérique de la convection naturelle en régime laminaire dans un espace annulaire délimité par deux cylindres concentriques horizontal et rempli de nanofluide, d'argent dans l'eau (Eau+Ag) aux différentes concentrations volumiques des nanoparticules, pour un nombre de Rayleigh variant de  $10^3$  à  $10^5$ . Notre objectif est de comprendre l'effet du nanofluide sur le mécanisme de la convection naturelle dans les cylindres. L'utilisation des capacités de simulation qu'offre le code "Fluent" représente une partie non négligeable du présent travail. La construction du modèle géométrique, du maillage et des conditions aux limites sont générés avec le préprocesseur "Gambit".

Le manuscrit de cette thèse est composé de quatre chapitres :

Dans le **premier chapitre**, nous allons présenter un rappelle sur la simulation numérique (CFD), et le système des coordonnées curvilignes, et nous allons exposer une synthèse bibliographique sur les travaux effectués dans le domaine de la convection naturelle dans les cylindres soumis aux différentes conditions thermiques et géométriques. **Deuxième chapitre** est consacré au modèle physique et mathématique utilisé pour décrire les phénomènes de convection. Pour cela, nous avons rappelé les différentes équations qui décrivent le phénomène de la convection. Des hypothèses simplificatrices ont été introduites pour faciliter le traitement de nos équations nous utilisons une représentation conforme qui transforme le domaine curviligne en un domaine rectangulaire. **Troisième chapitre**, s'attache à l'analyse numérique. Les techniques de discrétisation des différentes équations. Les équations (équations aux dérivées partielles (EDP)) sont discrétisées à l'aide de la méthode des volumes finis, tandis que l'équation de la fonction de courant est à l'aide d'un développement en série de Taylor, les équations obtenues sont résolues numériquement en utilisant un schéma en loi de puissance (**Power-Law**). **Quatrième chapitre**, nous commençons par la présentation d'une étude du maillage, ensuite nous validons notre code de calcul par un résultat numérique et un autre expérimental issu de la littérature et nous avons exposé les résultats de la simulation sous forme de champs dynamiques et thermiques pour la visualisation de la structure de l'écoulement et la compréhension du comportement thermique du problème.

Nous terminons cette étude par une conclusion générale qui regroupe les principaux résultats.

# *Généralités et synthèse bibliographique*

## **1.1. Historique de la simulation numérique**

**1.1.1. De 1940 à 1980 :** Dans cette partie nous ferons un bref historique de l'approche numérique en essayant de retracer l'origine de l'utilisation des ordinateurs en mathématiques et en physique à des fins de simulation. Avant 1940, on peut dire que la modélisation et la simulation numérique n'existaient pas. Il faut souligner que la modélisation (non numérique) existe depuis des millénaires: Nous avons établi que la modélisation consiste à représenter un système pour l'étudier (exemple ; l'utilisation des lois de la gravité de Newton pour représenter la chute d'une pomme et sa vitesse).Ainsi que les outils de calcul existaient bien avant 1940: Avant l'émergence des ordinateurs tels que nous les connaissons, il existait de nombreux outils de calcul. Prenons par exemple la machine à calculer mécanique de Blaise Pascal. La simulation numérique existe depuis des millénaire, il est devenu numérique et a commencé son escalade dans les années 40 grâce aux ordinateurs, elle a commencé à se développer et atteindre l'industrie au cours des années soixante, ou' a bénéficié des progrès des outils numériques, En effet, Dès 1963 l'informatique a connu un essor spectaculaire avec le développement massif des ordinateurs au cours de cette période.

- la simulation a été enrichie aussi avec l'apparition et l'évolution des Logiciels de simulation et l'ajout de nouvelles fonctionnalités qui ont été rapidement multiplié et renouvelé afin de faciliter encore mieux les tâches de la modélisation. Ainsi la simulation est devenue abordable pour les ingénieurs qui ne connaissaient pas bien la science de l'informatique. Les ingénieurs ont apprécié que La simulation fournit de la compréhension, elle permet de formuler les théories, de les tester et, parfois, elle conduit même à la constitution de domaines inconcevables sans elle, fonctionnant selon une logique centrée sur l'ordinateur

- Conception assistée par ordinateur (CAO) : la CAO est apparue à la fin de l'année 1950 et s'est rapidement propagée, permettant aux ingénieurs de visualiser en 2D, puis en 3D, des pièces qui étaient alors virtuelles. Plusieurs industries aéronautiques et automobiles ont adopté cette méthode révolutionnaire, ou la conversion de dessins dessinés dans les dessins numériques a été un travail difficile, mais il a permis de détecter de nombreuses erreurs humaines, et la technologie numérique a permis d'éviter à partir de là (par exemple la mise à

l'échelle). L'amélioration de la robustesse de la technologie numérique a été un argument pour soutenir son expansion.

- Conférence de simulation d'hiver : en 1967, la première conférence mondiale concentrée sur la simulation a eu lieu. Son but était d'introduire de ces connaissances dans le domaine, rassemblant des chercheurs, des ingénieurs et des entreprises commerciales de tous les secteurs, y compris l'industrie, le gouvernement, l'armée et l'éducation. Ces conférences se tiennent encore aujourd'hui et le contenu des présentations est libre de droits. Parmi les principaux sujets abordés, il convient de noter qu'à la fin des années 1970, les sujets actuels étaient déjà couverts. Le défi de maîtriser les outils de simulation, de déboguer le code ou de convaincre les gestionnaires avec les résultats des calculs a souvent été discuté. Malgré de nombreuses évolutions, de nombreux enjeux liés à la simulation numérique sont toujours les mêmes aujourd'hui. C'est donc au cours de cette période que les industries ont réellement commencé à bénéficier de la simulation numérique, quoique modérément.

**1.1.2. De 1980 à 1995 :** la révolution de la simulation numérique, les années 80 et le début des années 90 ont marqué un tournant dans l'expansion de la simulation numérique dans l'industrie. Cette période est certainement celle où la simulation numérique s'est le plus développée, bien que les périodes précédente et suivante aient connu une forte croissance. À la fin des années 1970 et au début des années 1980, une perturbation majeure s'est produite dans le domaine de l'informatique : l'essor de l'ordinateur personnel. En raison de la concurrence impitoyable et des innovations continues dans le domaine, les fabricants ont pu commercialiser des ordinateurs que la classe moyenne pouvait se permettre. Les ordinateurs sont devenus plus accessibles dans les environnements privés et professionnels. Il n'y avait plus besoin de compétences spécifiques pour les utiliser. Ainsi, à la fin des années 80, la plupart des entreprises étaient équipées d'ordinateurs. Maintenant que les ordinateurs sont plus accessibles, la simulation numérique pourrait alors se développer massivement dans l'industrie.

- Modélisation sur de nouveaux sujets : au cours de cette période, la simulation s'est beaucoup développée, pénétrant de plus en plus d'entreprises dans des domaines divers et traitant de plus en plus de questions diverses.

- Consolidation de logiciels : certains logiciels se sont démarqués et sont devenus lentement les incontournables de leurs propres secteurs. Donc, beaucoup des programmes utilisés aujourd'hui ont été édités à cette époque. Ils étaient plus ergonomiques que les précédentes et

ont aidé le modéleur à se concentrer sur la modélisation, rendant les problèmes numériques presque inexistantes.

- **Création à long terme du CAD :** l'utilisation du CAD est devenue progressivement inévitable. Les modèles numériques contiennent des représentations géométriques du système étudié (y compris des produits dans le processus de conception) et permettent d'analyser, de contrôler et de simuler certains comportements. Les modèles numériques sont devenus le produit unique de la boîte à outils pour les entreprises. Grâce aux améliorations logicielles, les travaux de CAO sont devenus moins nombreux et moins de temps (il était alors possible de définir une mise à l'échelle configurée et de la modifier par la suite).
- **Animations visuelles :** comme les résultats de simulation étaient auparavant représentés sur des tableaux ou sous forme de graphiques, de nombreux programmes ont été développés permettant de visualiser dynamiquement les résultats de la simulation. Cela a permis d'améliorer la compréhension et la communication des résultats.

**1.1.3. De 1995 à 2015 :** la diffusion de la simulation numérique. Plusieurs autres innovations ont marqué les 20 dernières années, aidant la simulation numérique à se propager davantage dans les entreprises industrielles. En ce qui concerne les innovations informatiques, outre le progrès continu des ordinateurs, un changement majeur s'est produit dans les années 1990 : Internet. En 1993, le Conseil européen pour la recherche nucléaire (ECNR) a mis en ligne le premier site Web, permettant à la plupart des contenus connus créés sur Internet à utiliser le protocole World Wide Web. Ce réseau mondial est devenu accessible à tous et a révolutionné les modes de vie personnels et professionnels. Les utilisateurs étaient connectés à l'échelle mondiale et pouvaient facilement partager des documents et informations. Plusieurs évolutions se sont produites dans la simulation numérique, la rendant plus rentable pour l'industrie.

- **Impact Internet :** finalement, son importance sur la simulation numérique est restée modérée, malgré des changements de style de vie majeurs. On peut citer deux impacts sur la simulation numérique. Premièrement, Internet et plus largement, les réseaux numériques qui ont eu un impact direct. Par exemple, il a permis des simulations distribuées, qui consistaient à effectuer plusieurs simulations sur ordinateur (s) distant (s). Une des commodités était le gain de temps de calcul (en effectuant le calcul sur plusieurs ordinateurs puissants). Cette technique devait encore murir, bien qu'il ait déjà été utilisé et profité à divers domaines. Certains problèmes devaient encore être ajustés : le codage pour distribuer les calculs, la mise

en place de réseaux et la gestion des montants des licences avec les éditeurs. Internet et les réseaux aussi ont eu un impact indirect qui était important. Grâce à l'amélioration des échanges induits par cette innovation, la communication, la diffusion des connaissances et le partage des modèles sont devenus plus faciles ; tout cela a eu un impact positif sur l'efficacité du travail de simulation numérique.

- Modélisation sur de nouvelles thématiques : encore une fois, la modélisation a continué sur de nouvelles thématiques. Par exemple, de nombreux travaux d'optimisation ont été mis en place grâce à la modélisation. En effet, de nombreux problèmes d'optimisation sont survenus dans l'industrie. Ils n'étaient pas résolubles analytiquement, et les simulations ont permis d'identifier des solutions. Ainsi, le logiciel a gagné de plus en plus de contenus/packages supplémentaires pour aider aux travaux d'optimisation . De plus, avec sa démocratisation, les services de simulation se sont répandus de plus en plus, et sur des sujets moins techniques.

- Réalité virtuelle : la réalité virtuelle a commencé à entrer dans l'industrie à la fin des années 90. Elle consistait à simuler et à révéler un système d'une manière réaliste (3D), afin que l'utilisateur puisse observer ou même agir avec ça. Les applications étaient nombreuses et deux d'entre elles seront couvertes ici. Tout d'abord, pendant le processus de conception de la voiture ou le premier prototype physique aide à déterminer si le style de la voiture est satisfaisant. Ceci est plus facile à évaluer qu'avec les plans 2D. Aussi, pendant le processus de conception d'une ligne de production, il peut être difficile de savoir si les manipulations que les opérateurs devront faire sont réalisables ou non, et de voir s'ils se posent des problèmes ergonomiques. Au lieu de construire un prototype de ligne de production, il a été possible de le modéliser et de vérifier en réalité virtuelle si un opérateur pourrait réaliser des opérations. De cette façon, la réalité virtuelle s'est développée au cours de ces années dans l'industrie, mais la maturité est loin d'être atteinte.

- Compatibilité des logiciels : au début des années 90, les logiciels de simulation n'étaient pas conçus pour fonctionner ensemble. Cela a limité les opportunités offertes par la simulation, ce qui rend la création de vastes modèles plus complexes, nécessitant des capacités différentes. Au cours des deux dernières décennies, les programmeurs ont créé des voies ouvertes entre les types de logiciels pour lever ces barrières. Par exemple, il est courant d'utiliser un logiciel de CAO spécifique pour concevoir un autre pour effectuer des études de comportement physique lorsque la connexion est maintenant possible.

#### **1.1.4. Conclusion**

L'histoire de la simulation numérique que nous venons de couvrir nous permet de mettre en évidence trois points qui seront utiles plus tard :

**a.** La durée de cette histoire par rapport à échelle humaine : nous venons de mentionner que la simulation numérique est entrée dans l'industrie il y a seulement 60 ans et atteint des proportions plus importantes il y a 40 ans. Il y avait aussi un écart avant qu'il n'atteigne l'éducation. Donc, la simulation numérique est « Récente » à l'échelle humaine. C'est pourquoi de nombreux acteurs de l'industrie ne sont pas bien versés dans la simulation et continuent à le voir comme une nouvelle activité.

**b.** La simulation numérique est toujours renouvelée ; un grand nombre d'innovations sont apparues au cours de son histoire, que ce soit en interne ou en externe, à tel point qu'il a été continuellement renouvelé et n'a jamais atteint sa maturité (outre quelques domaines d'utilisation). Donc, comme cette étape n'a pas encore été franchie, il existe de grandes disparités dans l'industrie aujourd'hui : certains acteurs de l'industrie sont devenus plus avancés que les autres en intégrant les nouveaux tours à tour, plus ou moins rapidement.

**c.** L'histoire de la simulation numérique est toujours en cours d'écriture aujourd'hui : des changements sont toujours en cours. Premièrement, nous avons vu que les innovations ne sont pas encore parfaitement diffusées. De nombreuses innovations nous attendent encore, l'évolution de la simulation numérique n'est pas terminée. Nous venons de mentionner que l'histoire de la simulation numérique est loin d'être finie. Il est maintenant temps de voir dans le monde de l'industrie la rentabilité d'investir dans la simulation numérique [2].

#### **I.2. Dynamique des Fluides Numérique**

La prédiction des phénomènes qui ont lieu à l'écoulement des fluides, peut-être obtenus par trois méthodes : l'expérience, le calcul théorique et le calcul numérique. Les méthodes expérimentales sont très chères, prennent beaucoup de temps et dans certains cas, elles sont hasardeuses et même dangereuses. Elles ne permettent pas souvent une grande flexibilité des paramètres de variation. La plupart des méthodes analytiques ne s'appliquent que dans des cas limités. Pour des problèmes relatifs à des systèmes de forme géométrique complexe ou à des milieux à caractéristiques non uniformes ou non isotropes, qui est le cas de la plupart des problèmes rencontrés en pratique, il est nécessaire de faire appel aux méthodes numériques.

Les problèmes rencontrés dans le domaine des sciences de l'ingénieur sont souvent représentés (ou modélisés) par des équations aux dérivées partielles (EDP) qui modélisent les phénomènes physiques présents (écoulement de fluides, transfert de chaleur, vibration de structures, propagation d'ondes, champ électromagnétique... [3].

### I.2.1. L'expérience

Par l'expérience, on tente d'isoler ou de reproduire tout ou une part d'un phénomène physique à partir de modèles à l'échelle normale ou réduite.

#### ✓ **Avantage**

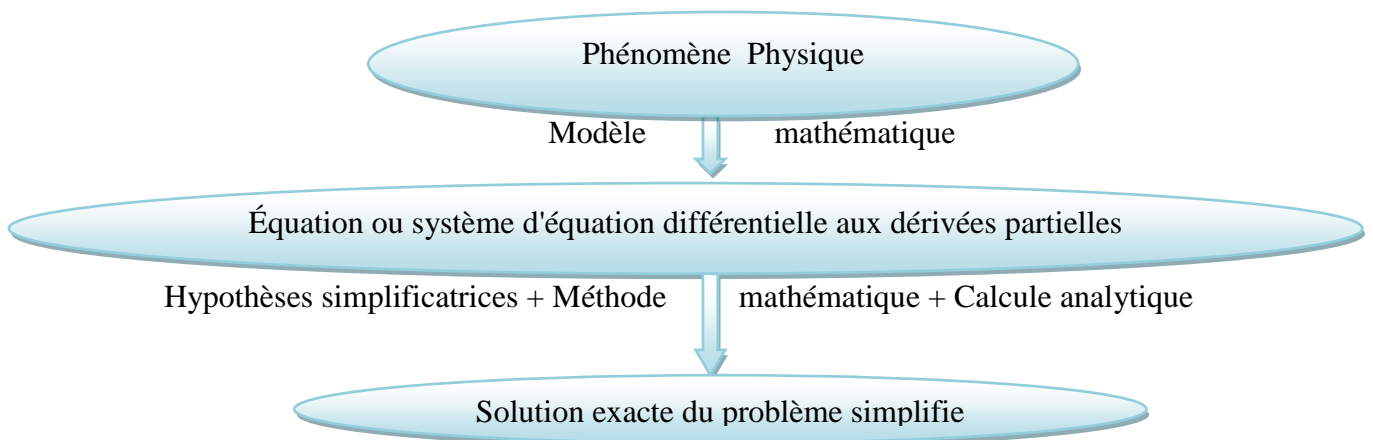
L'expérience fournit l'information la plus sûre sur un phénomène physique [comparée aux modélisations théoriques].

#### ✓ **Inconvénients**

1. Les modèles à l'échelle normale sont souvent très coûteux ;
2. Les modèles à l'échelle réduite sont moins coûteux, mais l'extrapolation des résultats à l'échelle normale est parfois difficile ;
3. Les sondes de mesure intrusives génèrent des perturbations et donc représentent des sources d'erreurs.

### I.2.2. Le calcul théorique

Le principe du calcul théorique est illustré à la **figure I.1**.



**Figure. I.1.** Le principe du calcul théorique.

✓ **Avantages**

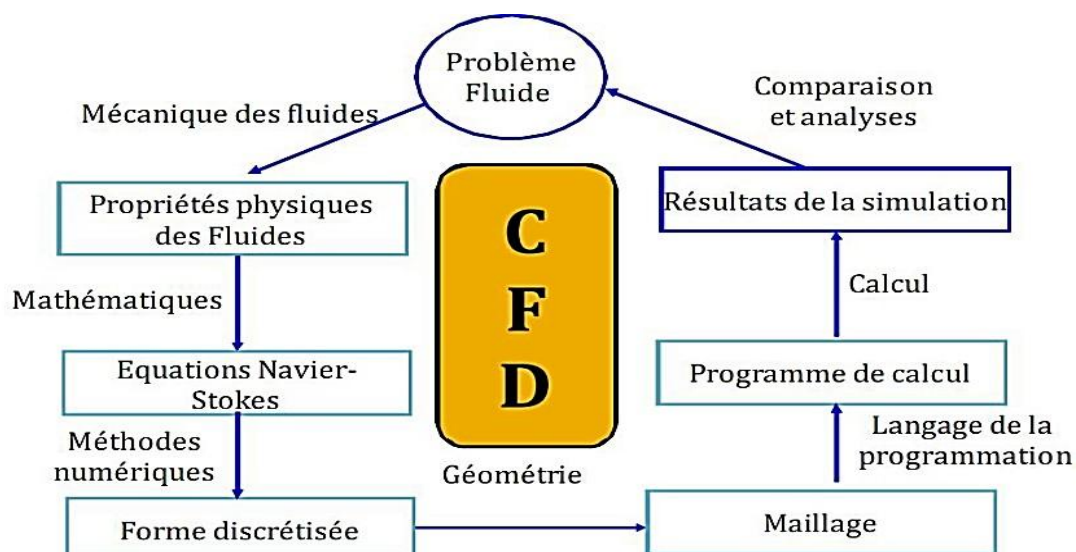
1. Ne nécessite pas, en général, de gros moyens de calcul ;
2. N'est pas couteux ;
3. Fournit des solutions exactes ;
4. Fournit des résultats à très grande vitesse.

✓ **Inconvénients**

1. Le domaine d'application est extrêmement limité par rapport à la réalité physique (domaine simplifié) ;
2. Conditions idéalisées ;
3. Géométries simples ;
4. Phénomènes linéaires ou faiblement non linéaires ;
5. Rarement, peut-être appliqué pour les problèmes 3D.

**I.2.3. Dynamique des fluides computationnelle (CFD)**

Moyens de calcul et Méthodes numériques pour les problèmes liés aux écoulements fluides

**Figure I.2.****Figure. I .2.** Dynamique des Fluides Numérique CFD [3].✓ **Avantages**

1. Permet le calcul d'une solution numérique pour presque tous les problèmes pratiques ayant un modèle mathématique ;
2. Un cout très faible, ayant une tendance à la baisse ;
3. Présenté de la rapidité (permet de modifier la géométrie, les conditions aux limites,... etc.) ;

4. Présente une information complète sur tous les champs, tous les points et à tout instant ;
5. À la possibilité de simuler des conditions réelles exceptionnelles ;
6. À la possibilité de simuler des conditions idéales.

✓ **Inconvénients**

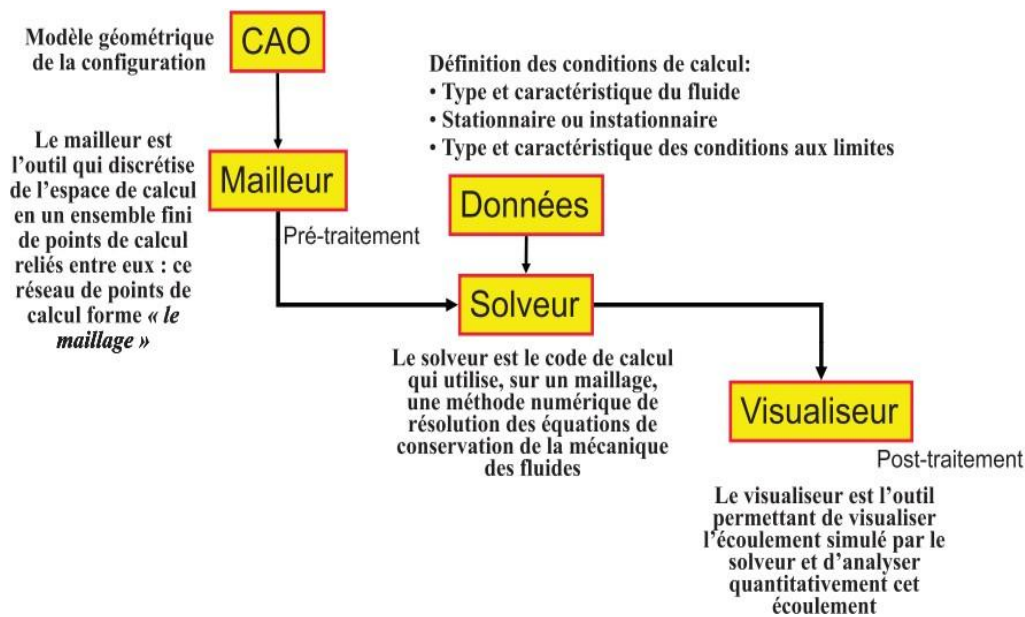
1. Tout dépend de modèle mathématique initiale ;
2. Difficulté pour sélectionner la « bonne » solution en cas de solutions multiples au problème mathématique ;
3. Parfois, plus coûteuse que l'expérience.

### **I.2.3. 1. Grandes étapes de CFD**

1. Problème physique continu est décrit par un modèle mathématique continu (mis en équations) ;
2. Modèle mathématique continu est discrétisé en s'appuyant sur une (des) méthode(s) numériques (s) ;
3. Équations discrétisées sont approximées à l'aide des schémas numériques appropriés, l'algorithme de résolution est établi ;
4. Algorithme est codé (C, Fortran, Matlab, Java,...) ;
5. Code est exécuté sur un ordinateur.

### **I.2.3.2. Les composantes d'un logiciel de modélisation et simulation numérique**

La mise en œuvre d'une méthode numérique de calcul débouche inévitablement sur un logiciel qui lui est associé. Si, lors des premières tentatives de calcul par des méthodes numériques, on écrivait, pour chaque nouveau problème, un programme différent tenant compte de sa géométrie particulière, de ses particularités physiques et de ses conditions aux limites, on s'oriente aujourd'hui vers la réalisation de logiciels généraux dont la structure informatique est adaptée au traitement d'un grand nombre de problèmes du même type. Ces logiciels ont, pratiquement tous, trois composantes principales : (1) un **pré-processeur**, (2) un **processeur** (Solveur) de calcul (**solver** = résoudre) et (3) un **post-processeur** (**figure I.3**).



**Figure. I.3.** Les composants d'un logiciel de modélisation et simulation numérique.

### ✓ Le pré-processeur (Pré-traitement)

Dans cette étape du calcul numérique, les activités impliquées sont les suivantes :

1. Description de la géométrie dans la région d'intérêt : définition du domaine de calcul ;
2. Génération du maillage, discrétisation du domaine de calcul en éléments finis ou volumes de contrôle ;
3. Choix du phénomène physique à modéliser ;
4. Définition des propriétés physiques ;
5. Spécification des conditions aux limites adéquates.

### ✓ Le processeur de calcul

Celui-ci peut-être réalisé, en général, en utilisant quatre méthodes numériques distinctes: la méthode des différences finies, la méthode des Éléments finis, les méthodes spectrales et la méthode des volumes finis. La méthode numérique comporte trois pas distincts :

1. L'approximation de la variable inconnue par différents types de fonctions simples ;
2. Discrétisation par la substitution de l'approximation dans les équations différentielles et l'obtention d'un système d'équations algébriques ;

3. Résolution du système d'équations algébriques.

✓ **Le post-processeur (Post-traitement):** À l'intérieur de ce module, on présente les résultats à l'utilisateur sous une forme adaptée à sa perception de la physique du problème. Le post-processeur offre différentes facilités pour visualiser et interpréter les résultats comprenant aussi :

1. visualisation de la géométrie et du maillage ;
2. visualisation des vecteurs de grandeurs calculées ;
3. visualisation des iso-lignes de différentes grandeurs ;
4. visualisation des surfaces 2D et 3D ;
5. possibilités d'exporter les différentes grandeurs sous forme de fichiers ; facilités d'animation.

#### **I.2.4. Outils de CFD et code de calcul**

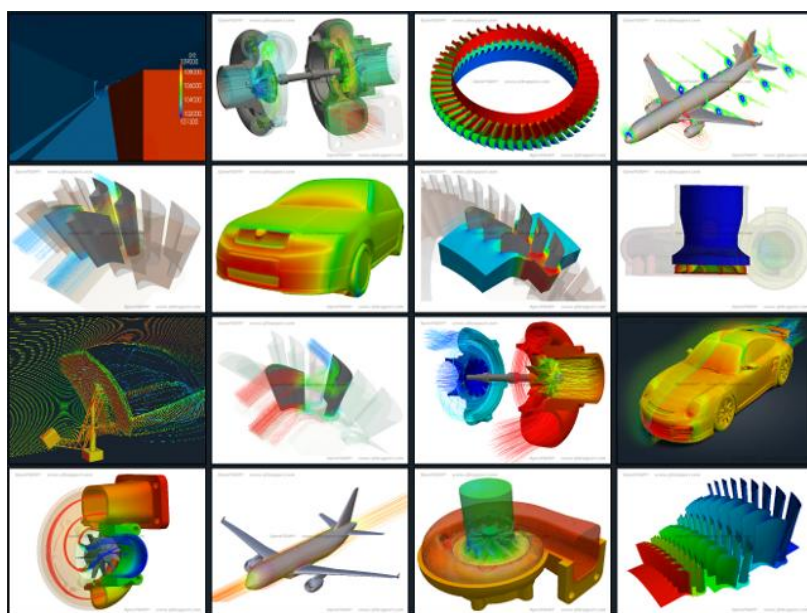
- État permanent et transitoire ;
- Pièces mobiles et rotatives ;
- Rayonnement ;
- Réactions chimiques ;
- Interactions fluide/structure ;
- Surface libre ;
- Cavitation ;
- Fonctions pour turbomachines ;
- Fluides compressibles ;
- Analyse du bruit aérodynamique ;
- Modélisation d'ébullition ;
- Solidification/fusion ;
- Humidité et condensation ;
- Modèle de film liquide ;
- Suivi de particules ;
- Modélisation de pertes de charge ;
- Simulation par la méthode (Large Eddy Simulation) ;
- Mappage ;
- Modèle de ventilateur ;
- Effet Joule ;

- Écoulement multiphasique.
1. **CFX, Fluent et Icepak** , développés et distribués par la société ANSYS ;
  2. **OpenFOAM**, logiciel open source distribué par la société OpenCFD Ltd ;
  3. **PowerFLOW**, développé et distribué par la société Exa Corporation ;
  4. **OMSOL Multiphysics**, développé et distribué par la société COMSOL ;
  5. **FLOW-3D**, développé et distribué par la société XC Engineering Srl...ect.

### I.2.5. Applications de la CFD

Elles sont très nombreuses. On peut citer celles de:

1. L'aérodynamique ;
2. L'hydrodynamique ;
3. Des turbomachines ;
4. Du génie électrique pour le refroidissement des machines et autres micro (circuits électroniques).
5. Du bâtiment : chauffage/ventilation ou action du vent sur les structures ;
6. De la médecine : circulation du sang, Etc.



**Figure. I.4.** Applications de la CFD.

### I.3. Systèmes de coordonnées curvilignes arbitraires

#### I.3.1. Coordonnées curvilignes générales non orthogonales

##### I.3.1.1. Tenseur métrique. Éléments de longueur et de volume d'arc en coordonnées curvilignes

Les coordonnées curvilignes  $x^1, x^2, x^3$  sont définies comme des fonctions du cartésien rectangulaire coordonnées  $x, y, z$ :

$$x^1 = x^1(x, y, z), x^2 = x^2(x, y, z), x^3 = x^3(x, y, z).$$

En utilisant ces formules, on peut exprimer  $x, y, z$  en termes de coordonnées curvilignes  $x^1, x^2, x^3$  comme suit:  $x = x(x^1, x^2, x^3), y = y(x^1, x^2, x^3), z = z(x^1, x^2, x^3)$ .

Les composantes métriques du tenseur  $g_{ij}$  sont déterminées par les formules

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x}{\partial x^j} + \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\partial y}{\partial x^j} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^j};$$

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = g_{ji}(x^1, x^2, x^3); i, j = 1, 2, 3.$$

La longueur d'arc  $dl$  entre les points proches  $(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$  et  $(x + dx, y + dy, z + dz) \equiv (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$  est exprimée comme :

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j.$$

Le volume du parallélépipède élémentaire avec des sommets aux huit points  $(x^1, x^2, x^3), (x^1 + dx^1, x^2, x^3), (x^1, x^2 + dx^2, x^3), (x^1, x^2, x^3 + dx^3), (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3), (x^1 + dx^1, x^2, x^3 + dx^3), (x^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3), (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$  est donné par :

$$dV = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3 = \mp \sqrt{\det|g_{ij}|} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Ici, le signe plus correspond à la situation standard où les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées  $x^1, x^2, x^3$  pointant vers la direction de croissance des coordonnées respectives, forment un triple droitier, tout comme les vecteurs unitaires  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires droitier.

### I.3.1.2 Composants vectoriels dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et curvilignes

Les vecteurs unitaires  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires  $x, y, z$  et les vecteurs unitaires  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  d'un système de coordonnées curvilignes  $x^1, x^2, x^3$  sont reliés par le linéaire rapport :

$$\vec{l}_n = \frac{1}{\sqrt{g_{nn}}} \left( \frac{\partial x}{\partial x^n} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x^n} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial x^n} \vec{k} \right), n = 1, 2, 3;$$

$$\vec{i} = \sqrt{g_{11}} \frac{\partial x^1}{\partial x} \vec{l}_1 + \sqrt{g_{22}} \frac{\partial x^2}{\partial x} \vec{l}_2 + \sqrt{g_{33}} \frac{\partial x^3}{\partial x} \vec{l}_3;$$

$$\vec{j} = \sqrt{g_{11}} \frac{\partial x^1}{\partial y} \vec{l}_1 + \sqrt{g_{22}} \frac{\partial x^2}{\partial y} \vec{l}_2 + \sqrt{g_{33}} \frac{\partial x^3}{\partial y} \vec{l}_3;$$

$$\vec{k} = \sqrt{g_{11}} \frac{\partial x^1}{\partial z} \vec{l}_1 + \sqrt{g_{22}} \frac{\partial x^2}{\partial z} \vec{l}_2 + \sqrt{g_{33}} \frac{\partial x^3}{\partial z} \vec{l}_3.$$

Dans le cas général, les vecteurs  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  ne sont pas orthogonaux et changent de direction de point à point. Les composantes  $v_x, v_y, v_z$  d'un vecteur  $v$  dans un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires  $x, y, z$  et les composantes  $v_1, v_2, v_3$  du même vecteur dans un système de coordonnées curviligne  $x^1, x^2, x^3$  sont liés par :

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = v_1 \vec{l}_1 + v_2 \vec{l}_2 + v_3 \vec{l}_3,$$

$$\vec{v} = \sqrt{g_{nn}} \left( \frac{\partial x^n}{\partial x} v_x + \frac{\partial x^n}{\partial y} v_y + \frac{\partial x^n}{\partial z} v_z \right), n = 1, 2, 3;$$

$$v_x = \left( \frac{\partial x}{\partial x^1} \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial x}{\partial x^2} \frac{v_2}{\sqrt{g_{22}}} + \frac{\partial x}{\partial x^3} \frac{v_3}{\sqrt{g_{33}}} \right);$$

$$v_y = \left( \frac{\partial y}{\partial x^1} \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial y}{\partial x^2} \frac{v_2}{\sqrt{g_{22}}} + \frac{\partial y}{\partial x^3} \frac{v_3}{\sqrt{g_{33}}} \right);$$

$$v_z = \left( \frac{\partial z}{\partial x^1} \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial z}{\partial x^2} \frac{v_2}{\sqrt{g_{22}}} + \frac{\partial z}{\partial x^3} \frac{v_3}{\sqrt{g_{33}}} \right).$$

### I.3.2. Coordonnées curvilignes orthogonales générales

#### I.3.2.1. Coordonnées orthogonales. Éléments de longueur, de surface et de volume

Un système de coordonnées est orthogonal si :  $g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = 0$ , et  $i \neq j$ . Dans ce cas, le troisième invariant du tenseur métrique est donné par :  $g = \det |g_{ij}| = g_{11}g_{22}g_{33}$ . Les coefficients de Lamé  $L_k$  des coordonnées curvilignes orthogonales sont exprimés en termes de composantes du tenseur métrique comme :

$$L_i = \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x^i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Élément de longueur d'arc:

$$dl = \sqrt{(L_1 dx^1)^2 + (L_2 dx^2)^2 + (L_3 dx^3)^2} = \sqrt{g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2}.$$

Les éléments de surface  $ds_i$  des surfaces de coordonnées respectives  $x^i = \text{const}$  sont donnés par :

$$ds_1 = dL_2 dL_3 = dL_2 dL_3 dx^2 dx^3 = \sqrt{g_{22}g_{33}} dx^2 dx^3,$$

$$ds_2 = dL_1 dL_3 = dL_1 dL_3 dx^1 dx^3 = \sqrt{g_{11}g_{33}} dx^1 dx^3,$$

$$ds_3 = dL_1 dL_2 = dL_1 dL_2 dx^1 dx^2 = \sqrt{g_{11}g_{22}} dx^1 dx^2.$$

Élément de volume:

$$dV = L_1 L_2 L_3 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} dx^1 dx^2 dx^3.$$

### I.3.2.2. Relations différentielles de base en coordonnées curvilignes orthogonales

Dans ce qui suit, nous présentons les opérateurs différentiels de base dans les coordonnées curvilignes orthogonales  $(x^1, x^2, x^3)$ , Les vecteurs unitaires correspondants sont désignés par  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ . Le gradient d'un scalaire  $f$  est exprimé comme [4] :

$$\text{gradient de } f: \vec{\text{grad}} f = \nabla f = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial f}{\partial x^1} \vec{l}_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial f}{\partial x^2} \vec{l}_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial f}{\partial x^3} \vec{l}_3 \quad \text{I. 1}$$

Divergence d'un vecteur :  $\vec{v} = v_1 \vec{l}_1 + v_2 \vec{l}_2 + v_3 \vec{l}_3$ ,

$$\text{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( v_1 \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( v_2 \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( v_3 \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right) \right] \quad \text{I. 2}$$

Gradient d'un scalaire  $f$  le long d'un vecteur  $\vec{v}$ :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)f = \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial f}{\partial x^1} + \frac{v_2}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{v_3}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial f}{\partial x^3} \quad \text{I.3}$$

Gradient d'un vecteur  $\vec{w}$  le long d'un vecteur  $\vec{v}$ :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} = w_1(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{i}_1 + w_2(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{i}_2 + w_3(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{i}_3.$$

Rotationnel d'un vecteur  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} \text{cul} \vec{v} \equiv \nabla \cdot \vec{v} &= \vec{i}_1 \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^2} (v_3 \sqrt{g_{33}}) - \frac{\partial}{\partial x^3} (v_2 \sqrt{g_{22}}) \right] \\ &+ \vec{i}_2 \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^3} (v_1 \sqrt{g_{11}}) - \frac{\partial}{\partial x^1} (v_3 \sqrt{g_{33}}) \right] \\ &+ \vec{i}_3 \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} (v_2 \sqrt{g_{22}}) - \frac{\partial}{\partial x^2} (v_1 \sqrt{g_{11}}) \right] \end{aligned} \quad \text{I.4}$$

Remarque. Parfois,  $\text{cul} \vec{v}$  est désigné par  $\text{rot} \vec{v}$ .

Opérateur de Laplace d'un scalaire  $f$ :

$$\Delta f \equiv \nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial f}{\partial x^3} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}} \right) \right] \quad \text{I.5}$$

## I.4. Systèmes spéciaux de coordonnées curvilignes

### I.4.1. Coordonnées cylindriques

#### I.4.1.1. Transformations de coordonnées et de vecteurs. Les composants du tenseur métrique

Les coordonnées cartésiennes sont exprimées en termes de coordonnées cylindriques comme

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z, \text{ si } 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty.$$

Les coordonnées cylindriques sont exprimées en termes de coordonnées cylindriques comme

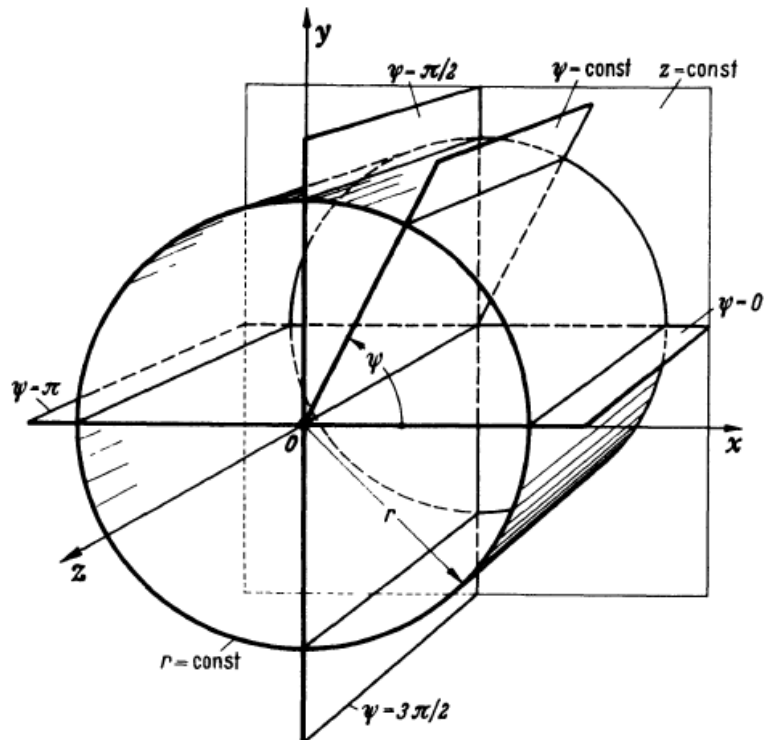
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \varphi = \frac{y}{x}, z = z, (\sin \varphi = \frac{y}{r}).$$

Surfaces coordonnées:

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ (cylindres circulaires droits dont l'axe coïncide avec l'axe } z),$$

$y = x \tan \varphi$ , (demi-plans passant par l'axe z),

$z = \text{const}$ , (plans perpendiculaires à l'axe z).



**Figure I.5.** Représentation schématique des coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$ .

Transformations directes et inverses des composantes d'un vecteur

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = v_x \vec{i}_r + v_y \vec{i}_\varphi + v_z \vec{i}_z:$$

$$v_r = v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi,$$

$$v_x = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi,$$

$$v_\varphi = -v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi,$$

$$v_y = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi,$$

$$v_z = v_z;$$

$$v_z = v_z.$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{rr} = 1, g_{\varphi\varphi} = r^2, g_{zz} = 1, \sqrt{g} = r.$$

#### I.4.1.2. Relations différentielles de base

$$\text{gradient de } f : \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{i}_z.$$

Divergence d'un vecteur  $\vec{v}$ :  $div\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ .

Gradient d'un vecteur  $f$  le long d'un vecteur  $\vec{v}$ :  $(\vec{v} \cdot \nabla) f = v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}$ .

Gradient d'un vecteur  $\vec{w}$  le long d'un vecteur  $\vec{v}$ :  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} = w_r (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_r + w_\varphi (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_\varphi + w_z (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_z$ .

Curl d'un vecteur  $\vec{v}$ :

$$cul\vec{v} \equiv \nabla \cdot \vec{v} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial(v_r)}{\partial z} \right] \vec{i}_r + \left[ \frac{\partial(v_r)}{\partial z} - \frac{\partial(v_z)}{\partial r} \right] \vec{i}_\varphi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} - \frac{\partial(v_r)}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_z.$$

Laplacien d'un scalaire  $f$ :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

## I.4.2. Coordonnées sphériques

### I.4.2.1. Transformations de coordonnées et de vecteurs et les composantes du tenseur métrique

Coordonnées cartésiennes via sphériques:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, y = r \sin\theta \sin\varphi, z = r \cos\theta, \text{ si } 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tan\varphi = \frac{y}{x}, \theta = \arccos \frac{z}{r}, (\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}).$$

Surfaces coordonnées:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \text{ (Sphères),}$$

$$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \theta = 0, \text{ (Cônes circulaires),}$$

$$y = x \tan\varphi, \text{ (Demi-plans passant par l'axe } z \text{).}$$

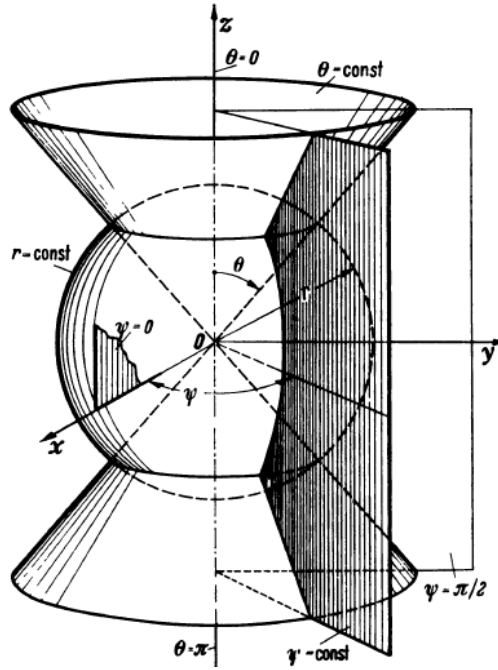


Figure I.6. Représentation schématique des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ .

Transformations directes et inverses des composantes d'un vecteur

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = v_r \vec{i}_r + v_\theta \vec{i}_\theta + v_\varphi \vec{i}_\varphi.$$

$$v_r = v_x \sin\theta \cos\varphi + v_y \sin\theta \sin\varphi + v_z \cos\theta, \quad v_x = v_r \sin\theta \cos\varphi + v_\theta \cos\theta \cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi,$$

$$v_\theta = v_x \cos\theta \cos\varphi + v_y \cos\theta \sin\varphi - v_z \sin\theta, \quad v_y = v_r \sin\theta \sin\varphi + v_\theta \cos\theta \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi,$$

$$v_\varphi = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi,$$

$$v_z = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta.$$

Les composants du tenseur métrique sont :

$$g_{rr} = 1, g_{\theta\theta} = r^2, g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta, \sqrt{g} = r^2 \sin\theta.$$

#### I.4.2.2. Relations différentielles de base

Gradient d'un scalaire  $f$ :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi.$$

Divergence d'un vecteur  $\vec{v}$ :

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial (\sin\theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Gradient d'un vecteur  $f$  le long d'un vecteur  $\vec{v}$  :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)f = v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Gradient d'un vecteur  $\vec{w}$  le long d'un vecteur  $\vec{v}$ :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} = w_r (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{i}_r + w_\theta (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{i}_\theta + w_\varphi (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{i}_\varphi.$$

Curl d'un vecteur  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} \text{cul } \vec{v} \equiv \nabla \cdot \vec{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta v_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(v_r)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{i}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(v_r)}{\partial \theta} \right] \vec{i}_\varphi. \end{aligned}$$

Laplacien d'un scalaire  $f$ :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

### I.4.3. Coordonnées d'un ellipsoïde prolifique de révolution

#### I.4.3.1. Transformations de coordonnées et les composants du tenseur métrique

Transformations de coordonnées:

$$x^2 = a^2(\theta^2 - 1)(1 - \eta^2) \cos^2 \varphi, y^2 = a^2(\theta^2 - 1)(1 - \eta^2) \sin^2 \varphi, z = a\theta\eta$$

$$\theta > 1 > \eta \geq -1, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

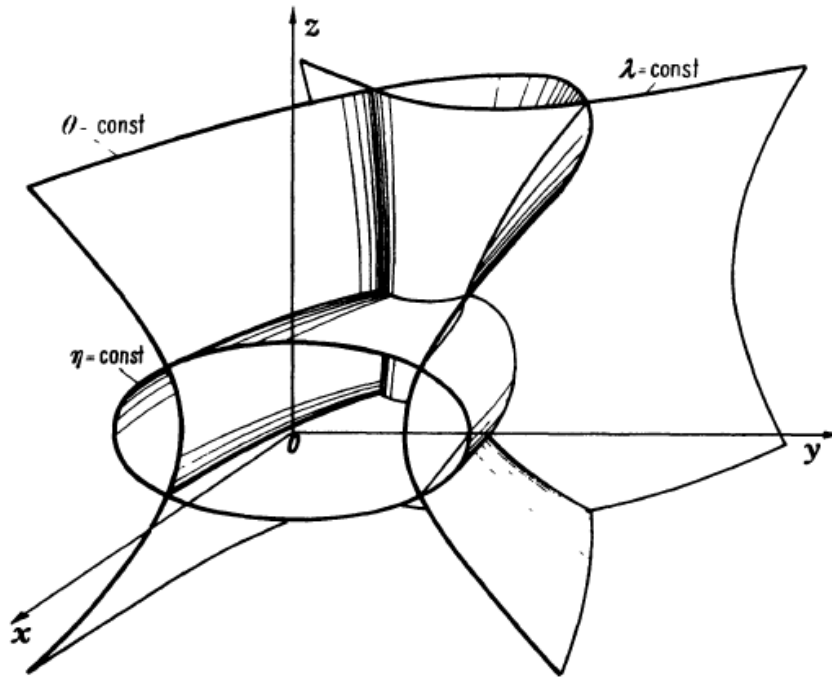


Figure I.7. Représentation schématique des coordonnées ellipsoïdales.  $(\theta, \eta, \varphi)$ .

Surfaces de coordonnées (l'axe z est la révolution de l'axe):

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(\theta^2 - 1)} + \frac{z^2}{a^2\theta^2} = 1, \text{ (ellipsoïdes prolifiques de révolution),}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(\eta^2 - 1)} + \frac{z^2}{a^2\eta^2} = 1, \text{ (hyperboloïde de révolution de deux feuilles),}$$

$$y = x \tan \varphi, \text{ (demi - plans sur l'axe z).}$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{\theta\theta} = a^2 \frac{\theta^2 - \eta^2}{\theta^2 - 1}, g_{\eta\eta} = a^2 \frac{\theta^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}, g_{\varphi\varphi} = a^2(\theta^2 - 1)(1 - \eta^2), \sqrt{g} = a^3(\theta^2 - \eta^2).$$

Système de coordonnées spécial u, v,  $\varphi$ :

$$\theta = \cosh u, \eta = \cos v, \varphi = \varphi, 0 \leq u < \infty, 0 \leq v \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$x = a \sinh u \sin v \cos \varphi, y = a \sinh u \sin v \sin \varphi, z = a \cosh u \cos v.$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v), g_{\varphi\varphi} = a^2(\sinh^2 u \cdot \sin^2 v).$$

### I.4.3.2. Relations différentielles de base

Gradient d'un scalaire  $f$ :

$$\nabla f = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 - \eta^2}} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\theta^2 - \eta^2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \vec{i}_\eta + \frac{1}{a\sqrt{(1 - \eta^2)(\theta^2 - 1)}} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi.$$

Divergence d'un vecteur  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{a(\theta^2 - \eta^2)} & \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sqrt{(\theta^2 - \eta^2)(\theta^2 - 1)} v_\theta \right) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sqrt{(\theta^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)} v_\eta \right) \right] \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( v_\varphi \frac{\theta^2 - \eta^2}{\sqrt{(\theta^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

Gradient d'un vecteur  $f$  le long d'un vecteur  $\vec{v}$  :

$$(\vec{v} \cdot \nabla) f = \frac{v_\theta}{a} \sqrt{\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 - \eta^2}} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\eta}{a} \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\theta^2 - \eta^2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{v_\varphi}{a\sqrt{(\theta^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Gradient d'un vecteur  $\vec{w}$  le long d'un vecteur  $\vec{v}$ :

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} = w_\theta (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_\theta + w_\eta (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_\eta + w_\varphi (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_\varphi.$$

Laplacien d'un scalaire  $f$ :

$$\Delta f = \frac{1}{a(\theta^2 - \eta^2)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\theta^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( (1 - \eta^2) \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \frac{\theta^2 - \eta^2}{(\theta^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right].$$

## I.4.4. Coordonnées d'un ellipsoïde oblat de la révolution

### I.4.4.1. Transformations de coordonnées. Les composants du tenseur métrique

Transformations de coordonnées:

$$x^2 = a^2(\sigma^2 + 1)(1 - \tau^2) \cos^2 \varphi, y^2 = a^2(\sigma^2 + 1)(1 - \tau^2) \sin^2 \varphi, z = a\sigma\tau$$

$$\sigma \geq 0, 1 \geq \tau \geq -1, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Surfaces de coordonnées (l'axe  $z$  est la révolution de l'axe):

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(1 - \sigma^2)} + \frac{z^2}{a^2\sigma^2} = 1, (\text{ellipsoïdes oblates de révolution}),$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(1 - \tau^2)} - \frac{z^2}{a^2\tau^2} = 1, \text{ (hyperboloïde de révolution d'une feuille),}$$

$$y = x \tan \varphi z, \text{ (demi - plans sur l'axe } z \text{).}$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{\sigma\sigma} = a^2 \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\sigma^2 + 1}, g_{\tau\tau} = a^2 \frac{\sigma^2 + \tau^2}{1 - \tau^2}, g_{\varphi\varphi} = a^2(\sigma^2 + 1)(1 - \tau^2), \sqrt{g} = a^3(\sigma^2 + \tau^2).$$

Système de coordonnées spécial  $u, v, \varphi$ :

$$\sigma = \sinh u, \tau = \cos v, \varphi = \varphi, 0 \leq u < \infty, 0 \leq v \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$x = a \cosh u \sin v \cos \varphi, y = a \cosh u \sin v \sin \varphi, z = a \sinh u \cos v.$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\sinh^2 u + \cos^2 v), g_{\varphi\varphi} = a^2(\cosh^2 u \cdot \sin^2 v).$$

#### I.4.4.2. Relations différentielles de base

Gradient d'un scalaire  $f$ :

$$\nabla f = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \vec{i}_\sigma + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial f}{\partial \tau} \vec{i}_\tau + \frac{1}{a\sqrt{(1 - \tau^2)(\sigma^2 + 1)}} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi.$$

Divergence d'un vecteur  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} = & \frac{1}{a(\sigma^2 + \tau^2)} \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sqrt{(\sigma^2 + \tau^2)(\sigma^2 + 1)} v_\sigma \right) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \sqrt{(\sigma^2 + \tau^2)(1 - \tau^2)} v_\tau \right) \right] \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( v_\varphi \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\sqrt{(\sigma^2 + \tau^2)(1 - \tau^2)}} \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

Gradient d'un vecteur  $f$  le long d'un vecteur  $\vec{v}$  :

$$(\vec{v} \cdot \nabla) f = \frac{v_\sigma}{a} \sqrt{\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{v_\tau}{a} \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{v_\varphi}{a\sqrt{(\sigma^2 + 1)(1 - \tau^2)}} \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Gradient d'un vecteur  $\vec{w}$  le long d'un vecteur  $\vec{v}$ :

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} = w_\sigma (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_\sigma + w_\tau (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_\tau + w_\varphi (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{i}_\varphi.$$

Laplacien d'un scalaire  $f$ :

$$\Delta f = \frac{1}{a(\sigma^2 + \tau^2)} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( (\sigma^2 + 1) \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( (1 - \tau^2) \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) + \frac{\sigma^2 + \tau^2}{(\sigma^2 + 1)(1 - \tau^2)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right].$$

#### I.4.5. Coordonnées d'un cylindre elliptique

Transformations de coordonnées:

$$X = a\sigma\tau, y^2 = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)\sin^2\varphi, z = z$$

$$\sigma \geq 1, 1 \geq \tau \geq -1, -\infty \leq z < \infty.$$

Surfaces de coordonnées (l'axe  $z$  est la révolution de l'axe):

$$\frac{x^2}{a^2\sigma^2} + \frac{y^2}{a^2(\sigma^2 - 1)} = 1, (\text{cylindres elliptiques}),$$

$$\frac{x^2}{a^2\tau^2} - \frac{y^2}{a^2(\tau^2 - 1)} = 1, (\text{cylindres hyperboliques}),$$

$$z = z, (\text{plans parallèles au plan } xy).$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{\sigma\sigma} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 - 1}, g_{\tau\tau} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - \tau^2}, g_{zz} = 1.$$

Système de coordonnées spécial  $u, v, \varphi$ :

$$\sigma = \cosh u, \tau = \cos v, z = z;$$

$$x = a \cosh u \cos v, y = a \sinh u \sin v, z = z, 0 \leq u < \infty, 0 \leq v \leq \pi, -\infty \leq z < \infty.$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v), g_{zz} = 1.$$

Laplacien d'un scalaire  $f$ :

$$\Delta f = \frac{1}{a(\sigma^2 + \tau^2)} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

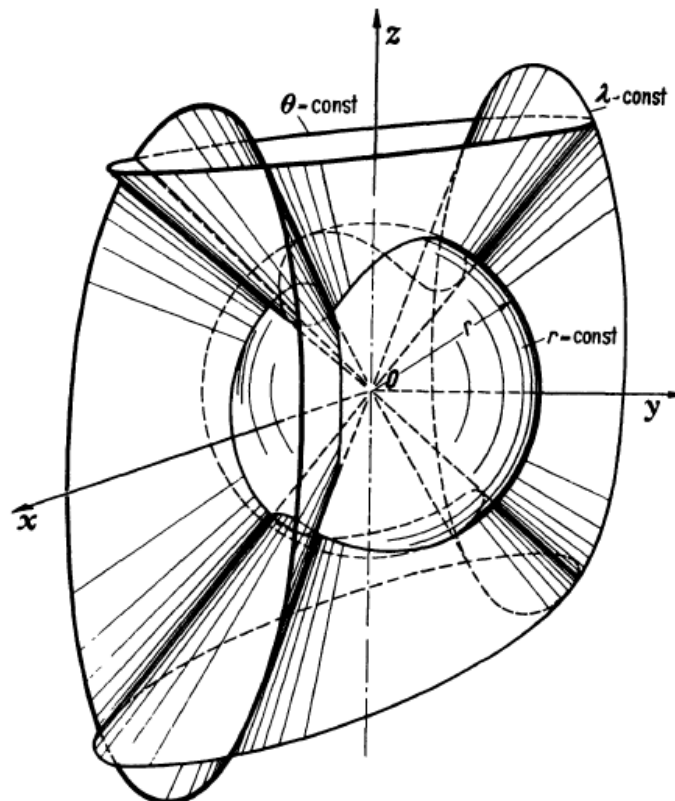
$$= \frac{\sqrt{(\sigma^2 - 1)}}{a^2(\sigma^2 + \tau^2)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sqrt{(\sigma^2 - 1)} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) + \frac{\sqrt{(1 - \tau^2)}}{a^2(\sigma^2 - \tau^2)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \sqrt{(1 - \tau^2)} \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

**I.4.6. Coordonnées coniques**

Transformations de coordonnées:

$$x = \mp \frac{r\theta\lambda}{ab}, y^2 = \frac{r^2(\theta^2 - a^2)(\lambda^2 - a^2)}{a^2(a^2 - b^2)}, z^2 = \frac{r^2(\theta^2 - b^2)(\lambda^2 - b^2)}{b^2(b^2 - a^2)}$$

$$b^2 > \theta^2 > a^2 > \lambda^2.$$



**Figure I.8.** Représentation schématique des coordonnées coniques (r, θ, λ).

Surfaces coordonnées:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \text{ (Sphères),}$$

$$\frac{x^2}{\theta^2} + \frac{y^2}{\theta^2 - a^2} - \frac{z^2}{b^2 - \theta^2} = 0, \text{ (cônes dont les axes coïncident avec l'axe z),}$$

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{a^2 - \lambda^2} - \frac{z^2}{b^2 - \lambda^2} = 0, \text{ (cônes dont les axes coïncident avec l'axe des } x \text{).}$$

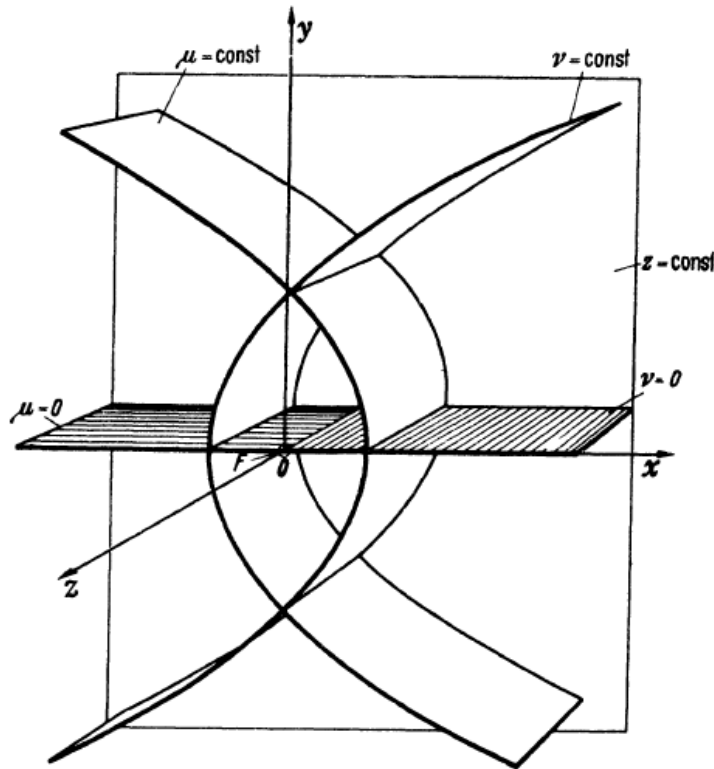
Composants tenseurs métriques:

$$g_{\theta\theta} = r^2 \frac{\theta^2 - \lambda^2}{(\theta^2 - a^2)(b^2 - \theta^2)}, g_{\lambda\lambda} = r^2 \frac{\theta^2 - \lambda^2}{(a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)}, g_{rr} = 1.$$

**I.4.7. Coordonnées du cylindre parabolique**

Transformations de coordonnées:

$$x = \mu\nu, y = \frac{1}{2}(v^2 - \mu^2), z = z.$$



**Figure I.9.** Représentation schématique des cylindres paraboliques ( $\mu, \nu, z$ ).

Surfaces coordonnées:

$$\frac{x^2}{\mu^2} = 2y + \mu^2, \text{ (Cylindres paraboliques droits avec élément parallèle à l'axe } z \text{),}$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} = -2y + \nu^2, \text{ (cylindres paraboliques droits avec élément parallèle à l'axe } z \text{),}$$

$z = z$ , (Plans parallèles au plan  $xy$ ).

Composants tenseurs métriques:

$$g_{\mu\mu} = g_{vv} = a^2 + v^2, g_{zz} = 1.$$

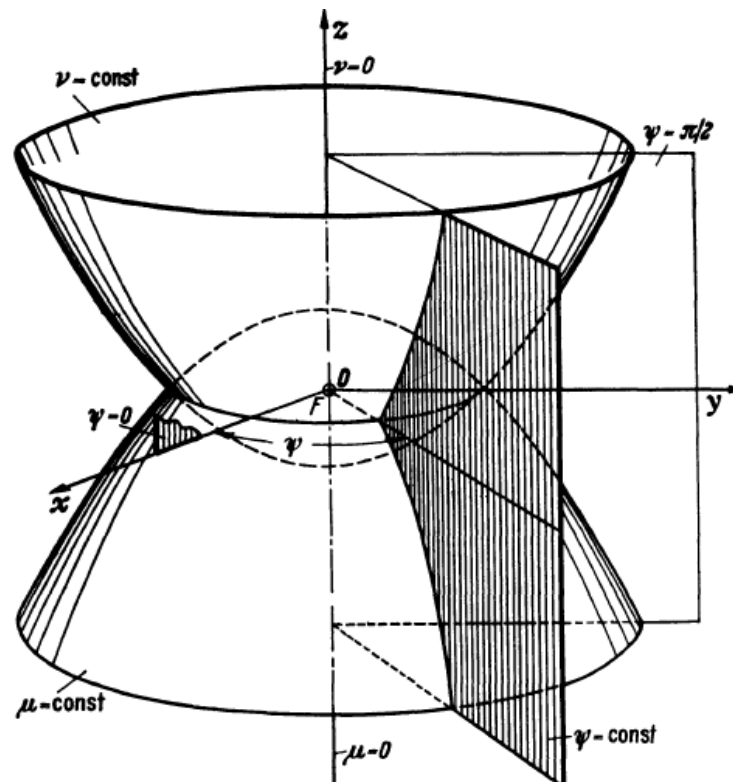
Laplacien d'un scalaire  $f$ :

$$\Delta f = \frac{1}{(\mu^2 + v^2)} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

### I.4.8. Coordonnées paraboliques

Transformations de coordonnées:

$$x = v\mu \cos\varphi, z = \frac{1}{2}(\mu^2 - v^2), y = v\mu \sin\varphi.$$



**Figure. I.10.** Représentation schématique des coordonnées paraboliques  $(\mu, v, z)$ .

Surfaces de coordonnées (l'axe  $z$  est l'axe de révolution):

$$\frac{x^2 + y^2}{v^2} = 2z + v^2, (\text{paraboloides de révolution}),$$

$$\frac{x^2+y^2}{\mu^2} = -2z + \mu^2, \text{ (paraboloïdes de révolution),}$$

$$y = x \tan \varphi, \text{ (demi - plans sur l'axe } z \text{).}$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{vv} = g_{\mu\mu} = a^2 + \mu^2, g_{\varphi\varphi} = a^2 \cdot \mu^2.$$

Laplacien d'un scalaire  $f$ :

$$\Delta f = \frac{1}{(v^2 + \mu^2)} \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \left( v \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) + \left( \frac{1}{(v^2)} + \frac{1}{(\mu^2)} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right].$$

**I.4.9. Coordonnées bipolaires**

Transformations de coordonnées:

$$x = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \theta}, y = \frac{a \sin \theta}{\cosh \eta - \cos \theta}, z = z.$$

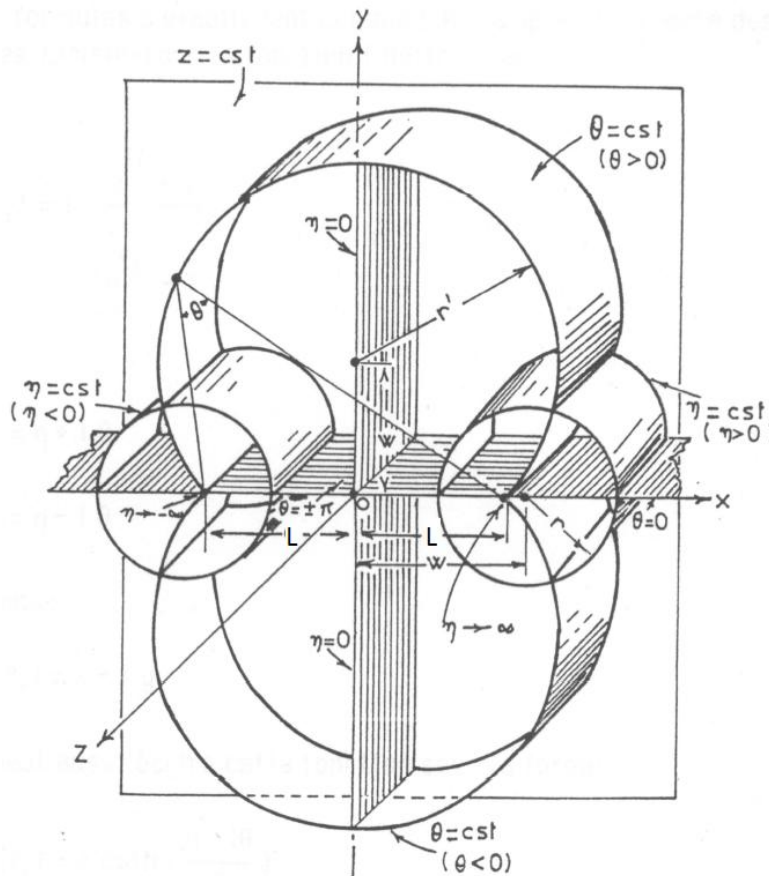


Figure I.11. Représentation schématique des coordonnées bipolaires.

Surfaces de coordonnées (l'axe z est l'axe de révolution):

$$x^2 + (y - a \cot\theta)^2 = a^2(\cot^2\theta + 1),$$

(cylindres circulaires droits avec élément parallèle à l'axe z),

$$y^2 + (x - a \coth\eta)^2$$

$$= a^2(\coth^2\eta$$

- 1), (cylindres circulaires droits avec élément parallèle à l'axe z),

$y = z$ , (plans parallèles au plan xy).

Composants tenseurs métriques:

$$g_{\theta\theta} = g_{\eta\eta} = \frac{a^2}{(\cosh\eta - \cos\theta)^2}, g_{zz} = 1.$$

$$(ds)^2 = \frac{a^2}{(\cosh\eta - \cos\theta)^2} [(d\theta)^2 + (d\eta)^2] + (dz)^2.$$

Gradient d'un scalaire  $f$ , d'après l'équation (I.1) :

$$\text{grad}f = \frac{1}{a}(\cosh\eta - \cos\theta) \left[ \frac{\partial f}{\partial\tau} \vec{i}_\eta + \frac{\partial f}{\partial\sigma} \vec{i}_\theta \right] + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{i}_z. \quad \text{I.6}$$

Divergence d'un vecteur  $\vec{v}$  d'après l'équation (I.2):

$$\text{div}\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{(\cosh\eta - \cos\theta)^2}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{v_\eta}{(\cosh\eta - \cos\theta)} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{v_\theta}{(\cosh\eta - \cos\theta)} \right) \right] + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad \text{I.7}$$

Curl d'un vecteur  $\vec{v}$  d'après l'équation (I.4):

$$\text{cul}\vec{v} \equiv \nabla \times \vec{v} = \left[ \frac{1}{a}(\cosh\eta - \cos\theta) \frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \vec{i}_\eta + \left[ \frac{\partial v_\eta}{\partial z} - \frac{1}{a}(\cosh\eta - \cos\theta) \frac{\partial v_z}{\partial\eta} \right] \vec{i}_\theta + \frac{1}{a}(\cosh\eta - \cos\theta)^2 \left[ \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{v_\theta}{(\cosh\eta - \cos\theta)} \right) - \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{v_\eta}{(\cosh\eta - \cos\theta)} \right) \right] \vec{i}_z. \quad \text{I.8}$$

Laplacien d'un scalaire  $f$  d'après l'équation (I.5) :

$$\Delta f = \frac{1}{a^2}(\cosh\eta - \cos\theta)^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad \text{I.9}$$

**I.4.10. Coordonnées bipolaires (dans l'espace)**

Transformations de coordonnées:

$$x = \frac{a \sin\sigma \cos\varphi}{\cosh\tau - \cos\sigma}, y = \frac{a \sin\sigma \sin\varphi}{\cosh\tau - \cos\sigma}, z = \frac{a \sinh\tau}{\cosh\tau - \cos\sigma}.$$

$$-\infty < \tau < \infty, 0 \leq \sigma < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Surfaces de coordonnées (l'axe z est l'axe de révolution):

$$x^2 + y^2 + (z - a \coth\tau)^2 = \frac{a^2}{\sinh^2\tau}, \text{ (sphères avec centres sur l'axe z),}$$

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{x^2 + y^2} - a \cot\sigma \right)^2 + (z)^2 \\ &= \frac{a^2}{\sin^2\sigma}, \text{ (surfaces obtenues par révolution d'arcs de cercle autour de l'axe z),} \end{aligned}$$

$$y = x \tan\varphi, \text{ (demi-plans sur l'axe z).}$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \frac{a^2}{(\cosh\tau - \cos\sigma)^2}, g_{\varphi\varphi} = \frac{a^2 \sin^2\sigma}{(\cosh\tau - \cos\sigma)^2}.$$

Laplacien d'un scalaire  $f$ :

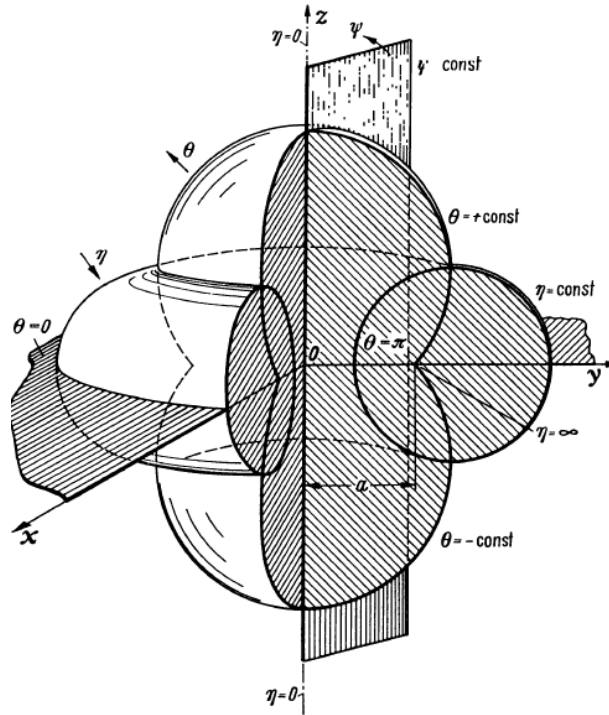
$$\begin{aligned} \Delta f = & \frac{(\cosh\tau - \cos\sigma)^2}{a^2 \sin\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \frac{\sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma} \frac{\partial f}{\partial\tau} \right) + \frac{\partial}{\partial\sigma} \left( \frac{\sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma} \frac{\partial f}{\partial\sigma} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sin\sigma (\cosh\tau - \cos\sigma)} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \right). \end{aligned}$$

**I.4.11. Coordonnées toroïdales**

Transformations de coordonnées:

$$x = \frac{a \sinh\eta \cos\theta}{\cosh\eta - \cos\theta}, y = \frac{a \sinh\eta \sin\theta}{\cosh\eta - \cos\theta}, z = \frac{a \sin\theta}{\cosh\eta - \cos\theta}.$$

$$0 \leq \eta < \infty, -\pi \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$



**Figure .I.12.** Représentation schématique des coordonnées toroïdales  $(\eta, \theta, \varphi)$ [5].

Surfaces de coordonnées (l'axe z est l'axe de révolution):

$$x^2 + y^2 + (z - a \cot\theta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2\theta}, \text{ (sphères avec centres sur l'axe z),}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \coth\eta\right)^2 + (z)^2 = \frac{a^2}{\sinh^2\eta}, \text{ (tores avec centres sur l'axe z),}$$

$$y = x \tan\varphi, \text{ (demi - plans sur l'axe z).}$$

Composants tenseurs métriques:

$$g_{\theta\theta} = g_{\eta\eta} = \frac{a^2}{(\cosh\eta - \cos\theta)^2}, g_{\varphi\varphi} = \frac{a^2 \sinh^2\eta}{(\cosh\eta - \cos\theta)^2}.$$

Laplacien d'un scalaire  $f$ :

$$\Delta f = \frac{(\cosh\eta - \cos\theta)^2}{a^2 \sinh\eta} \left( \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{\sinh\eta}{\cosh\eta - \cos\theta} \frac{\partial f}{\partial\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{\sinh\eta}{\cosh\eta - \cos\theta} \frac{\partial f}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sinh\eta (\cosh\eta - \cos\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \right).$$

### I.5. Synthèse bibliographique

Le travail suivant, ci-dessous, résume les investigations numériques et expérimentales publiées examinant les comportements de transfert de chaleur par convection naturelle dans les cylindres avec différentes géométries.

**Bishop et al [6]** a étudié expérimentalement la convection naturelle entre deux sphères concentriques, chacune étant maintenue à une température constante. Les distributions de température, les données du transfert thermique ainsi que deux corrélations entre le nombre de Grashof et le nombre de Nusselt ont été données par **Bishop et al [7]**. Les espaces annulaires formés par des cylindres elliptiques d'axes horizontaux centrés ou excentrés ont aussi donné matière à des travaux [8-16] citons comme exemple **Schreiber et Shingh [9]** qui ont fait une étude dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques maintenus à des températures constantes, ils ont utilisé la méthode du développement spectral en série, pour réduire les équations aux dérivées partielles à trois systèmes d'équations différentielles du second ordre. **Djezzar et al [14-17]** quant à eux, ont étudié numériquement la convection naturelle dans un espace annulaire formé de deux cylindres elliptiques d'axes horizontaux et confocaux en utilisant la formulation en variables primitives, ils ont pu déceler des écoulements multicellulaires, pour certaines géométries quand le nombre de Grashof augmente, ceci pour les trois conditions thermiques pariétales utilisées. **Roschina et al [18]** ont étudié la convection naturelle entre deux cylindres concentriques horizontaux avec génération d'énergie à l'intérieur, ils ont considéré un second nombre de Rayleigh thermique concernant le transfert à travers les parois, indépendant du Rayleigh convectif et ils ont pris comme paramètre d'optimisation le champ des températures et non le nombre de Nusselt. **Shi et al [19]** ont simulé le transfert de chaleur par convection naturelle dans un espace annulaire horizontal concentrique par la méthode des différences finies basée sur le modèle de Lattice Boltzmann pour la résolution des équations de Navire stockes, les deux parois du système étudié sont portées à deux températures différentes, les champs des vitesses et des températures ont été obtenus pour des nombres de Rayleighs variant de  $2.38 \times 10^3$  à  $1.02 \times 10^5$  et un nombre de Prandtl de 0.718. **Dukaa et al [20]** ont étudié la convection naturelle dans un espace annulaire horizontal en utilisant l'approximation non linéaire de stockes pour voir le domaine de validité de cette dernière en comparaison avec un problème linéaire, dans cette les équations de transfert ont été simplifiées en utilisant l'approximation de Oberbeck–Boussinesq. **Shu et Wu [21]** ont simulé la convection naturelle dans un espace annulaire excentrique par une méthode de discrétisation n'utilisant pas de transformation de coordonnées

rendre le domaine rectangulaire, les nœuds étant pris directement sur l'espace annulaire [22]. **Tayebi et al.** [23,24] a étudié numériquement la convection naturelle laminaire et permanente de l'air dans une cheminée solaire. Ils ont analysé, l'effet de la géométrie sur la convection naturelle bidimensionnelle dans le système. Un programme informatique validé a été adapté à la configuration de la cheminée solaire pour résoudre les équations gouvernantes utilisant la méthode de volumes finis. L'effet de la géométrie du système sur le processus de transfert de chaleur et l'écoulement du fluide a été étudié. Les simulations ont été exécutées pour deux configurations géométriques et en fonction de trois valeurs du nombre de Rayleigh :  $Ra = 10^3$ ,  $Ra = 10^4$  et  $Ra = 10^5$ . Les résultats ont montré que les vitesses maximales se situent l'entrée de la cheminée et ses valeurs augmentent en augmentant la différence entre le sol et le toit du collecteur. **Tingzhen et al.** [25] ont effectué des simulations numériques sur la cheminée solaire couplée avec turbine. Le modèle a été validé avec les mesures du prototype espagnol, obtenant une puissance maximale supérieure à 50 kW. Par la suite, les auteurs ont présenté la conception et la simulation d'un système de centrale à cheminer solaire avec une turbine à 5 pales. Les résultats des simulations numériques montrent que la puissance et le rendement de la turbine sont de 10 MW et 50%, respectivement, ce qui présente une référence pour la conception d'une CCS à grande échelle. **Tayebi et al** [26] dans la présente étude nous avons simulé numériquement les transferts de chaleur par convection naturelle laminaire bidimensionnelle (2D) et tridimensionnelle (3D) dans une cheminée solaire. Dans ce contexte, **dos Santos Bernardes et al** [27] ont conduit la première simulation numérique de la convection naturelle laminaire dans une tour solaire. Pour la prédiction du comportement thermo-hydrodynamique du système, le modèle mathématique (équations de bilan de la quantité de mouvement et de l'énergie) a été exploité en utilisant la méthode des volumes finis en coordonnées généralisées. La solution est obtenue pour un domaine de calcul fixe, indépendant de la forme géométrique du système physique. Cette méthodologie permet une visualisation détaillée des effets géométriques sur les champs de vitesse et de température qui sont très importants pour la définition de la géométrie et des caractéristiques opérationnelles optimales de tels systèmes. Ils ont proposé un système d'équations différentielles elliptiques pour la génération de maillage pour un système bidimensionnel, et une méthode pour la transformation du système de coordonnées. **N. Ferdous et al** [28] quant à eux, ont utilisé la méthode des volumes finis pour étudier numériquement la convection naturelle et le rayonnement dans une cavité circulaire et arc carré remplie d'air, les parois gauches et droites de la cavité sont respectivement chauffées et refroidies à une température constante, tandis que les parois horizontales sont adiabatiques. Ils ont étudié les effets du nombre de Rayleigh,

de l'émissivité et de l'angle d'inclinaison sur le transfert de chaleur. Ils ont pu conclure que le pourcentage du transfert de chaleur par rayonnement diminue progressivement à bas nombre de Rayleighs, augmente à haut nombre de Rayleigh et diminue de nouveau pour les nombres élevés de Rayleigh. Le flux de chaleur du rayonnement est une fonction croissante de l'émissivité de la surface, par contre le flux de chaleur convectif est une fonction fortement décroissante de celui-ci, et que le pourcentage du transfert de chaleur par rayonnement augmente avec l'angle d'inclinaison au-delà d'une valeur précise. **Nobari et al [29]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur dans un anneau excentrique courbé. Ils ont étudié les effets des différents paramètres physiques tels que l'excentricité, le nombre de Dean, la courbure, le nombre de Prandtl sur-le-champ d'écoulement et les caractéristiques thermiques pour différentes conditions aux limites. Ils ont démontré que, contrairement aux anneaux excentriques droits, l'augmentation du taux de transfert de chaleur est possible dans les anneaux excentriques courbés à cause de la présence d'écoulements secondaires générés par la courbure, et que le nombre de Prandtl a un effet significatif sur le transfert de chaleur dans les anneaux excentriques courbés. **Y. Liu et al [30]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection forcée qui se produit dans des micros canaux. Les résultats montrent que la rainure en forme de bouclier. Micro canal possède la plus haute performance d'échange de chaleur. Comparé à la faible efficacité du transfert de chaleur de la structure à surface plane, le nombre de Nusselt peut être augmenté en moyenne d'environ 1,3 fois. **M. Zakir et al [31]** ont étudié l'écoulement des fluides et le transfert de chaleur dans des canaux ondulés (sinusoïdaux et triangulaires) dans des conditions d'écoulement transitoires et des conditions aux limites périodiques en utilisant la méthode des volumes finis. Ils ont observé que l'écoulement devient instable avec une oscillation auto entretenue au-delà d'un certain nombre de Reynolds critique ce qui augmente le taux de transfert de chaleur. **C. R. Hedlund et al [32]** ont étudié le transfert de chaleur dans un canal avec une portion droite suivie d'une partie courbée pour un nombre de Dean allant de 300 à 750. Ils ont remarqué que les nombres de Nusselt mesurés sur la surface concave sont significativement supérieurs à ceux mesurés sur la surface convexe dans la partie courbée du canal. **Jorge Facao et Armando C. Oliveira [33]** ont étudié le transfert de chaleur par convection dans un canal rectangulaire courbé en utilisant le code fluent. La conduite est chauffée par sa surface convexe en maintenant les autres parois isolées. Dans des conditions d'écoulement laminaire, les résultats montrent que le nombre de Nusselt pour la conduite courbée est jusqu'à 10 fois plus élevé que pour la conduite droite à cause de la formation des tourbillons contrarotatifs secondaires. Aussi ils ont conclu que le coefficient de transfert de chaleur sur la paroi convexe est plus élevé que celui

sur la paroi concave. **Wang et al [34]** ont fait une simulation directe à trois dimensions de l'écoulement visqueux dans un tuyau onduleux. Ils ont constaté que le tuyau onduleux pourrait fournir une conception simple pour renforcer le mixage et le transfert de chaleur dans les tuyaux. **Mondal et al [35]** ont étudié les effets de l'écoulement secondaire sur le transfert de chaleur par convection à travers une conduite rectangulaire courbée avec parois verticales différentiellement chauffées. Ils ont constaté que le transfert de chaleur par convection est significativement amélioré par le flux secondaire. Si l'écoulement devient périodique et puis chaotique, et que le nombre de Dean  $dN$  augmente, le taux du transfert de chaleur augmente remarquablement comparant à un canal rectiligne. **O ztop [36]** une étude numérique a été réalisée pour étudier le transfert de chaleur et l'écoulement des fluides dans les géométries de conduits de forme curviligne. L'algorithme SIMPLEM a été utilisé avec un arrangement non quadrillé pour résoudre les équations de Navier-Stokes et d'énergie en coordonnées curvilignes. Pour obtenir la génération de grille pour les surfaces curvilignes, une méthode de génération de grille elliptique a été utilisée. Deux exemples ont été démontrés pour le régime d'écoulement laminaire dans l'étude: d'abord, un conduit à paroi ondulée sinusoïdale asymétrique et un deuxième conduit à géométrie partiellement inclinée ont été choisis. Les résultats montrent que l'algorithme SIMPLEM avec une disposition de grille non échelonnée est une technique utile pour résoudre le champ de température et d'écoulement en curvilignes conduits en utilisant la méthode de génération de grille elliptique. **Chamkha et al [37]** ce travail est axé sur l'étude du transfert de chaleur et de masse instationnaire par écoulement de convection mixte sur un cône perméable vertical tournant dans un fluide ambiant avec une vitesse angulaire dépendante du temps en présence d'un champ magnétique et d'effets de génération ou d'absorption de chaleur. La surface du cône est maintenue à une température et une concentration variables. On suppose que l'aspiration ou l'injection de fluide se produit à la surface du cône. Les équations différentielles partielles non linéaires couplées régissant le flux convectif mixte thermosolutal ont été résolues numériquement à l'aide d'un schéma implicite et itératif de différences finies. Des comparaisons avec des travaux publiés antérieurement ont été effectuées et les résultats se sont révélés être en excellent accord. Une étude paramétrique montrant les effets du paramètre de flottabilité, de la vitesse d'aspiration ou d'injection et du coefficient de génération ou d'absorption de chaleur sur les coefficients locaux de frottement cutané tangentiel et azimutal, et les nombres locaux de Nusselt et Sherwood est réalisée. Celles-ci sont illustrées graphiquement pour illustrer les caractéristiques spéciales des solutions. On constate que les coefficients de frottement cutané tangentiel et azimutal local et les nombres locaux de Nusselt et Sherwood augmentent avec le temps lorsque la vitesse

angulaire du cône augmente, mais la tendance inverse est observée pour la diminution de la vitesse angulaire. Cependant, ce ne sont pas des reflets l'un de l'autre. L'augmentation du taux de flottabilité devrait augmenter les coefficients de frottement de la peau et les nombres de Nusselt et Sherwood. De plus, l'augmentation de la production de chaleur ou le coefficient d'absorption augmente le coefficient de frottement cutané tangentiel local et le nombre de Sherwood et diminue le nombre de Nusselt local. En revanche, le coefficient azimutal de frottement cutané et les nombres de Nusselt et Sherwood augmentent (diminuent) avec l'augmentation du paramètre d'aspiration (injection). **Yuana et al [38]** Une étude est présentée de la convection libre dans des anneaux concentriques horizontaux variant avec la forme intérieure où les surfaces intérieure et extérieure sont maintenues à une température constante. La simulation est classée en quatre groupes en fonction de la forme de l'entité interne, qui est cylindrique, elliptique, carrée ou triangulaire. L'écoulement et les champs thermiques sont présentés au moyen de lignes de courant et d'isothermes. Les corrélations globales de transfert de chaleur incorporant le rayonnement thermique sont établies et présentées en termes de nombre de Nusselt. On observe que le rayonnement de surface et la présence de coins et d'un espace supérieur plus grand améliorent le taux de transfert de chaleur. À mesure que la température de référence augmente, le rayonnement de surface joue un rôle plus important dans les performances globales de transfert de chaleur. **Akbar [39]** on étudie l'impact de la génération d'entropie pour le flux péristaltique dans un tube. Le nombre de générations d'entropie dû au transfert de chaleur et au frottement des fluides est formulé. Les distributions de vitesse et de température à travers le tube sont présentées avec des attributs de pression. Une solution analytique exacte pour le profil de vitesse et de température est obtenue. Vitesse, température, gradient de pression, augmentation de pression, nombre de Bejan et les lignes de courant sont présentées pour le rayon du tube  $a$ , le nombre de Hartmann  $M$ , le rapport d'amplitude  $\varepsilon$ , le nombre de Brinkman  $Br$  et le flux  $Q$  présentés graphiquement. On constate que le nombre de générations d'entropie atteint des valeurs élevées dans la région proche des parois du tube, alors qu'il gagne des valeurs faibles près du centre du tube.

# Formulation mathématique

## II.1. Introduction

Dans ce chapitre, la géométrie de la configuration considérée est présentée, ainsi que les équations modélisant le problème traité dans cette thèse. Ces équations mettent en évidence le comportement de nanofluide en convection naturelle. Elles sont fondées selon les lois de la physique : équation de conservation de masse, de quantité de mouvement (Navier-Stokes), et d'énergie, ainsi les conditions initiales et aux limites.

## II.2. Description du problème

La géométrie retenue dans cette étude est un annulaire formé par deux cylindres concentriques horizontaux avec un rapport de rayons  $C = R_2 / R_1 = 2$  remplis de nanofluide à base d'Argent dans l'eau. Nous représentons sur la **figure II.1**. Les parois cylindriques interne et externe sont maintenues isothermes aux températures  $T_c$  et  $T_F$ , respectivement avec  $T_c > T_F$ . Le fluide de base (eau) et les nanoparticules sphériques solides (Argent) sont en équilibre thermique.

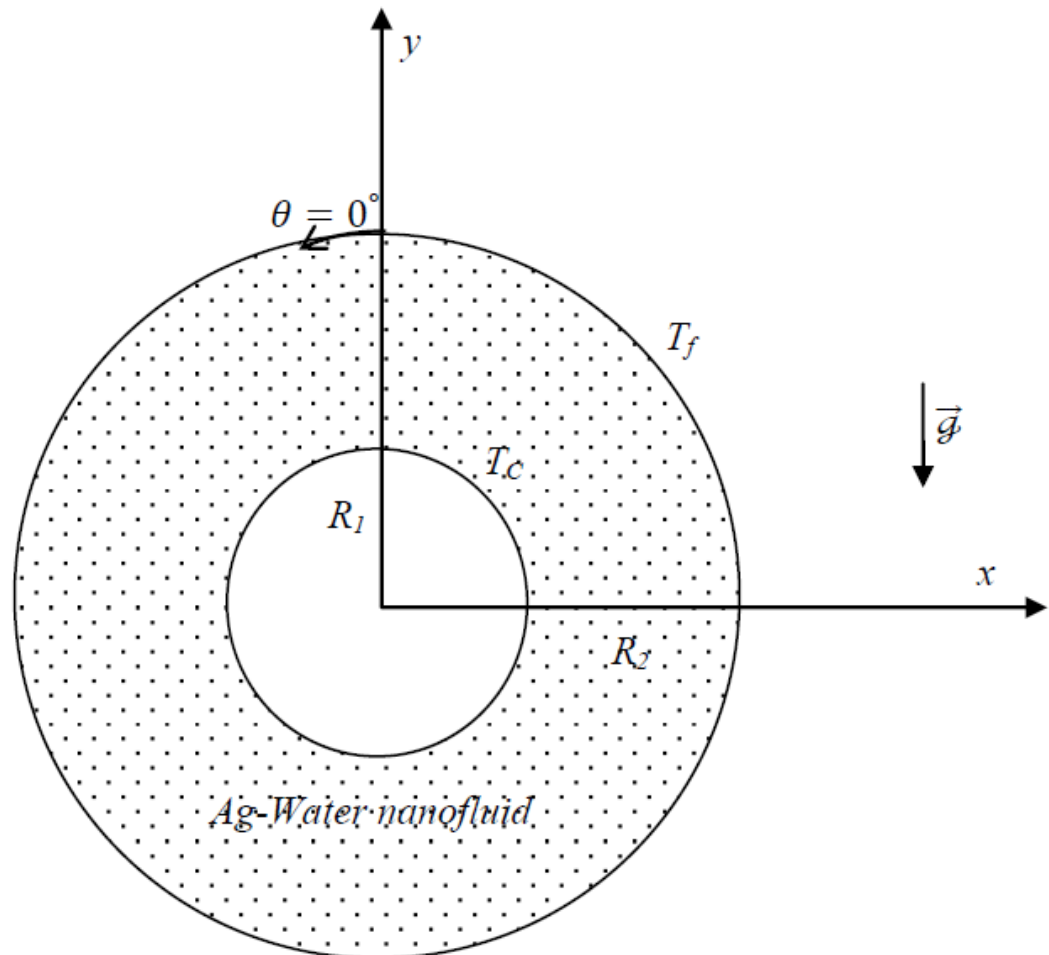
L'objectif de ce travail consiste en la modélisation mathématique et la simulation numérique de la convection naturelle dans les nanofluides. On propose dans ce travail d'étudier l'influence de la concentration en nanoparticules d'Argent dispersé dans un fluide de base eau pure sur l'écoulement convectif et le transfert de chaleur pour une gamme du nombre de Rayleigh allant de  $10^3$  à  $10^5$ .

Les propriétés thermophysiques des fluides de base et nanoparticules utilisées sont données dans le **Tableau. II.1**.

propriétés thermophysiques	fluides de base (L'eau)	Argent (Ag)
$C_p [J/Kg K]$	4179	235
$\rho [Kg. m^{-3}]$	997.1	10500
$k [W. m^{-1} K^{-1}]$	0.613	429
$\beta [K^{-1}]$	$21 \times 10^{-5}$	$1.89 \times 10^{-5}$
$\mu [k. \frac{g}{s}. m^2]$	$10^{-3}$	

**Tableau. II.1.** Les propriétés thermophysiques des fluides de base et nanoparticules utilisées [40-44].

La géométrie ainsi que les conditions aux limites sont montrées sur la **Figure. II.1.**



**Figure. II.1.** Géométrie et conditions aux limites.

### II.3. Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices retenues afin de réduire les équations générales du problème étudié dans ce travail sont :

- ✓ L'écoulement est permanent et laminaire et bidimensionnel.
- ✓ L'absence des sources et puits de chaleur.
- ✓ L'approximation de Boussinesq et adoptée pour la densité de nanofluide c'est-à-dire que la masse volumique est considérée comme constante (égale à sa valeur de référence)

dans tous les termes des équations de transfert sauf dans le terme gravitationnel, ou elle est traité comme variable en fonction de la température et s'exprime comme suit :

$$(\rho_{nf} - \rho_0) = -\rho_0 g \beta_{nf} (T - T_0) \quad \text{II. 1}$$

- ✓ Les propriétés physiques des nanofluides sont constantes.
- ✓ Les nanoparticules et le fluide de base sont en équilibre thermique
- ✓ Le flux de dissipation visqueuse de la chaleur est négligeable
- ✓ Pas d'échange par rayonnement au sein du fluide.
- ✓ Modèle monophasé : Bien que les nanofluides sont des mélanges solides liquides, l'approche classique utilisée dans la plupart des études de la convection naturelle gère le nanofluide comme une seule phase fluide (homogène).

#### II.4. Formulation vectorielle du problème

Après la considération des hypothèses de simplification suscitées, les équations générales régissant l'écoulement de convection naturelle laminaire dans le cylindre représenté dans la **Figure. II.1** peuvent être écrites sous la forme vectorielle :

- ✓ **équation de continuité**

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad \text{II. 2}$$

- ✓ **équation du mouvement**

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} p + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \vec{V}$$

$$\text{ce qui donne: } \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = [1 - \beta(T - T_c)] \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \Delta \vec{V} \quad \text{II. 3}$$

- ✓ **équation de la chaleur**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) T = \frac{\lambda}{\rho C_p} \Delta T \quad \text{II. 4}$$

Avec :

$\vec{V}$ : vitesse du fluide.

$\vec{g}$ : accélération de la pesanteur.

$P$ : tenseur des contraintes.

$\lambda$ : conductivité thermique du fluide ;  $\mu$  : viscosité dynamique du fluide.

$T$ : température du fluide ;  $C_p$  : capacité calorifique massique à pression constante du fluide .

$t$ : temps ;  $\nu$ : viscosité cinématique du fluide.

## II.5. Formulation indicielle

### ✓ Équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(V_j) = 0 \quad \text{II. 5}$$

### ✓ Équation du mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 V_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 V_i V_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_{nf}[1 - \beta(T - T_c)]g_i \quad \text{II. 6}$$

### ✓ Équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}((\rho C_p)_{nf} T) + \frac{\partial}{\partial x_j}((\rho C_p)_{nf} T V_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( K_{nf} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad \text{II. 7}$$

Avec :  $P$ : pression du fluide.  $\tau_{ij}$ : tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesse.

## II.6. Formulation des équations en coordonnées cartésiennes

Introduisons les coordonnées cartésiennes telles qu'elles sont définies sur la **figure.II.1**. Le problème étant bidimensionnel et permanent donc les équations (II.5), (II.6) et (II.7) s'écrivent respectivement :

### ✓ Équation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{II. 8}$$

### ✓ Équation de quantité de mouvement suivant x

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial x} + g \cdot \sin(\alpha) \cdot \beta \cdot T_d + \nu_{nf} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad \text{II. 9. a}$$

### ✓ Équation de quantité de mouvement suivant y

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial y} + g \cdot \cos(\alpha) \cdot \beta \cdot T_d + \nu_{nf} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad \text{II. 9. b}$$

## ✓ Équation de la chaleur

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = (\alpha)_{nf} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad \text{II.10}$$

## II.7. Équation de vorticité

L'introduction des variables vorticité  $\omega$  et fonction de courant  $\psi$  a pour objectif de simplifier l'équation du mouvement en éliminant le gradient de pression. En dérivant les équations du mouvement (II.9.a) et (II.9.b) respectivement par rapport à y et à x, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( V \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (g \cdot \sin(\alpha) \cdot \beta \cdot T_d) + \nu_{nf} \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \right) \end{aligned} \quad \text{II.11.a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( V \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (g \cdot \cos(\alpha) \cdot \beta \cdot T_d) + \nu_{nf} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad \text{II.11.b}$$

En soustrayant l'équation (II.11.a) de (II.11.b) et en utilisant l'équation de continuité ainsi que la définition de la fonction de vorticité  $\omega$ , nous obtenons :

$$U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = g\beta \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right] + \nu_{nf} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{II.12}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right); \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right); \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ &= \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right); \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

En introduisant la fonction de courant  $\psi$ , de façon à vérifier identiquement l'équation de continuité, il vient :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Nous en déduisons :

$$\omega = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right). \quad \text{II.13}$$

➤ Pour le nanofluide :

✓ La masse volumique du nanofluide est donnée par l'expression :

$$\rho_{nf} = (1 - \varphi)\rho_f + \varphi\rho_p \quad \text{II.14}$$

✓ La capacité calorifique du nanofluide est donnée par l'expression :

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho C_p)_f + \varphi(\rho C_p)_p \quad \text{II.15}$$

✓ Le coefficient de dilatation thermique de la nanofluide déterminé par :

$$(\rho\beta)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho\beta)_f + \varphi(\rho\beta)_p \quad \text{II.16}$$

✓ La conductivité thermique du nanofluide à base des nanoparticules sphériques est approximée par le modèle de **Maxwell [45]** :

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{k_p + 2k_f + 2(k_p - k_f)\varphi}{k_p + 2k_f + (k_p - k_f)\varphi} \quad \text{II.17}$$

✓ La conductivité thermique du nanofluide à base de Ag est approximée par le modèle de **Xue [46]** :

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{1 - \varphi + 2\varphi \left( \frac{k_p}{k_p - k_f} \right) \ln(k_p + k_f / 2k_f)}{1 - \varphi + 2\varphi \left( \frac{k_f}{k_p - k_f} \right) \ln(k_p + k_f / 2k_f)} \quad \text{II.18}$$

Où :

$k_{nf}$ ,  $k_f$  et  $k_p$  : désignent respectivement les conductivités thermiques du nanofluide, du fluide porteur et des nanoparticules solides.

$\varphi$  : La concentration volumique des nanoparticules dans le fluide.

✓ La viscosité du nanofluide est donnée par **Brinkman [47]** :

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi)^{2.5}} \quad \text{II.19}$$

✓ La diffusivité thermique s'écrit :

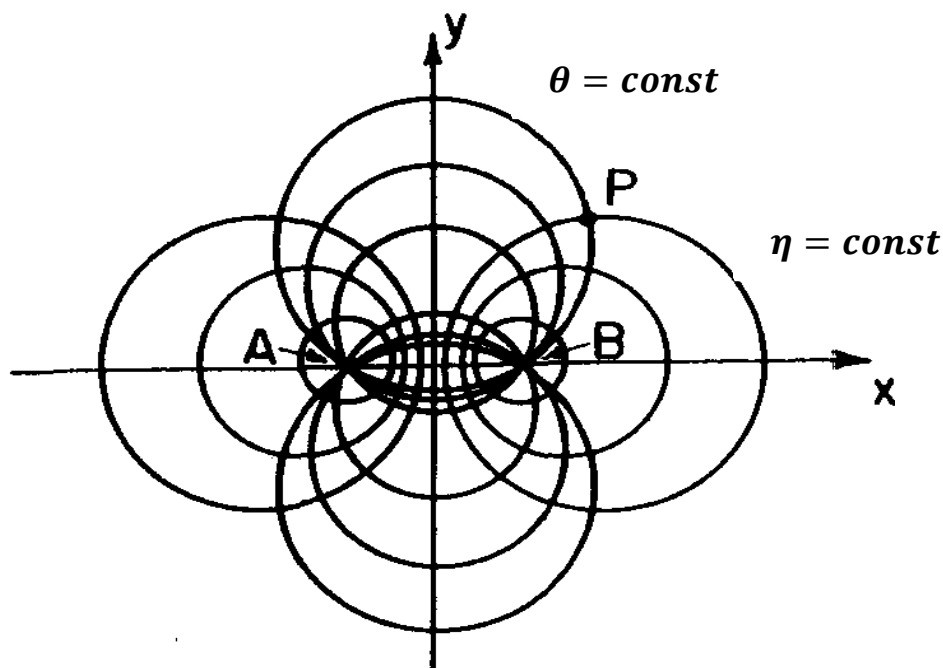
$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \quad \text{II.20}$$

## II.8. Coordonnées bipolaires

### II.8.1. Introduction

Dans le référentiel bipolaire représenté sur la **figure (II.2)**, nous observons dans le plan ( $xy$ ) deux groupes de cercles:

- ✓ Les cylindres définis par  $u = \text{constant}$ , tracés autour des deux pôles  $x = -a$  et  $x = +a$ , centrés sur l'axe ( $x$ ).
- ✓ Les cylindres définis par  $v = \text{constant}$ , centrés sur l'axe ( $y$ ). La translation de ces cercles parallèlement à l'axe ( $z$ ) engendre une famille de cylindres. Les coordonnées  $(\eta, \theta, z)$  sont dites "coordonnées bipolaires", [44,48]. Les surfaces  $\eta = \text{constantes}$  sont des cylindres dont les axes sont dans le plan ( $xz$ ); Les surfaces  $\theta = \text{constantes}$  sont des cylindres avec des axes dans le plan ( $yz$ ) et les surfaces  $z = \text{constantes}$  sont des plans parallèles.



**Figure II.2.** Représentation schématique des coordonnées bipolaires.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées bipolaires s'effectue à l'aide des relations suivantes :

$$x = \frac{a \cdot \sinh(\eta)}{\cosh(\eta) - \cos(\theta)}, y = \frac{a \cdot \sin(\theta)}{\cosh(\eta) - \cos(\theta)}, z = z, \eta \neq 0, \theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{N}. \quad \text{II. 21}$$

On considère la fonction  $g$  définie par:

$$g(Z_1) = a \coth(Z_1) \text{ avec } Z_1 = \frac{\eta - i\theta}{2} \text{ et } g(Z_1) = x + iy, f(\omega) = a \coth(\omega), \omega = 2 Z_1.$$

On peut écrire:

$$f(\omega) = \frac{\text{ch}(\omega)}{\text{sh}(\omega)} = \frac{e^\omega + e^{-\omega}}{e^\omega - e^{-\omega}} = \frac{e^\eta \cdot e^{-i\theta} + e^{-\eta} \cdot e^{i\theta}}{e^\eta \cdot e^{-i\theta} - e^{-\eta} \cdot e^{i\theta}}$$

D'où:

$$f(\omega) = \frac{[ch(\eta) + sh(\eta)][\cos(\theta) - isin(\theta)] + [ch(\eta) - sh(\eta)][\cos(\theta) + isin(\theta)]}{[ch(\eta) + sh(\eta)][\cos(\theta) - isin(\theta)] - [ch(\eta) - sh(\eta)][\cos(\theta) + isin(\theta)]},$$

$$\text{alors: } f(\omega) = \frac{ch(\eta)\cos(\theta) - ish(\eta)\sin(\theta)}{sh(\eta)\cos(\theta) - ich(\eta)\sin(\theta)}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur on trouve:

$f(\omega)$

$$= \frac{ch(\eta)sh(\eta)\cos^2(\theta) + ich^2(\eta)\cos(\theta)\sin(\theta) - ish^2(\eta)\cos(\theta)\sin(\theta) + ch(\eta)sh(\eta)\sin^2(\theta)}{sh^2(\eta)\cos^2(\theta) + ch^2(\eta)\sin^2(\theta)}$$

$$\text{donc : } f(\omega) = \frac{ch(\eta)sh(\eta)[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] + icos(\theta)\sin(\theta)[ch^2(\eta) - sh^2(\eta)]}{sh^2(\eta)\cos^2(\theta) + ch^2(\eta)\sin^2(\theta)}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} sh^2(\eta)\cos^2(\theta) + ch^2(\eta)\sin^2(\theta) \\ = sh^2(\eta)\cos^2(\theta) + ch^2(\eta)\cos^2(\theta) - ch^2(\eta)\cos^2(\theta) + ch^2(\eta)\sin^2(\theta) \end{aligned}$$

Donc :

$$sh^2(\eta)\cos^2(\theta) + ch^2(\eta)\sin^2(\theta) = ch^2(\eta) - \cos^2(\theta) = sh^2(\theta) + \sin^2(\theta)$$

$$\text{on aura: } f(\omega) = \frac{ch(\eta)sh(\eta) + icos(\theta)\sin(\theta)}{sh^2(\eta) + \sin^2(\theta)}$$

Puisque:  $sh(2\eta) = ch(\eta)sh(\eta)$  ;  $\sin(2\theta) = \sin(\theta)\cos(\theta)$  .Aussi :

$$2sh^2(\eta) + 2\sin^2(\theta) = (2sh^2(\eta) + 1) - (1 - 2\sin^2(\theta)) = ch(2\eta) - \cos(2\theta)$$

On aura :

$$f(\omega) = \frac{sh(2\eta)}{ch(2\eta) - \cos(2\theta)} + i \frac{\sin(2\theta)}{ch(2\eta) - \sin(2\theta)}$$

$$\text{Donc: } g(Z_1) = \frac{asinh(\eta)}{cosh(\eta) - \cos(\theta)} + i \frac{asin(\theta)}{cosh(\eta) - \sin(\theta)} = x + iy.$$

Par identification on trouve :

$$x = \frac{asinh(\eta)}{cosh(\eta) - \cos(\theta)}$$

II. 22

$$y = \frac{a \sin(\theta)}{\cosh(\eta) - \sin(\theta)} \quad \text{II. 23}$$

### II.8.2. Démonstration géométrique

A partir de la relation (II.22) on trouve :  $\cos(\theta) = ch(\eta) - \frac{a}{x} sh(\eta)$

La relation (II.23) donne :  $a \sin(\theta) = y(ch(\eta) - \cos(\theta))$

$$\text{Donc: } \sin(\theta) = \frac{y}{x} sh(\eta) \quad \text{II. 24}$$

Puisque :  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$  on trouve:

$$\left( ch(\eta) - \frac{a}{x} sh(\eta) \right)^2 + \left( \frac{y}{x} sh(\eta) \right)^2 = 1$$

Multipliant les deux membres par:

$$\frac{x^2}{sh^2(\eta)}, \quad \text{avec } \eta \neq 0$$

$$\text{On trouve : } (x \coth(\eta) - a)^2 + (y)^2 = \frac{x^2}{sh^2(\eta)}$$

$$(x)^2 \left( \coth(\eta)^2 - \frac{1}{sh^2(\eta)} \right) - 2a \cdot \coth(\eta) + (y)^2 = -a^2 \quad \text{II. 25}$$

De cette relation :  $ch^2(\eta) - sh^2(\eta) = 1$

$$\text{On tire : } \frac{ch^2(\eta)}{sh^2(\eta)} - 1 = \frac{1}{sh^2(\eta)}$$

$$\text{D'où : } \coth(\eta)^2 - 1 = \frac{1}{sh^2(\eta)} \quad \text{ou} \quad \coth(\eta)^2 - \frac{1}{sh^2(\eta)} = 1$$

Alors (II.25) donne :

$$(x)^2 - 2a \cdot \coth(\eta) + a^2 \coth(\eta)^2 - a^2 \coth(\eta)^2 + (y)^2 = -a^2 \quad \text{II. 26}$$

$$\text{donc: } (x - a \cdot \coth(\eta))^2 + (y)^2 = a^2 (\coth(\eta)^2 - 1)$$

$$\text{Alors : } (x - a \cdot \coth(\eta))^2 + (y)^2 = \frac{a^2}{sh^2(\eta)}, \eta \neq 0.$$

C'est l'équation d'une famille de cercles dont les centres sont :  $(\coth(\eta), 0)$  et les rayons :

$$R = \frac{a}{|\operatorname{sh}(\eta)|}, \eta \neq 0.$$

On remarque que :

1. La valeur du rayon  $R$  tend vers l'infini quand  $\eta$  devient très petit (tend vers zéro). Cela signifie que la surface  $\eta$  se réduit au plan  $yz$ .
2. Lorsque  $\eta$  varie de :  $] -\infty, 0 [ \cup ] 0, +\infty [$  le centre du cercle se déplace sur l'axe  $(x \ x')$  entre :  $-a$  et  $-\infty$  et entre :  $+\infty$  et  $a$  respectivement. D'autre part : la relation (II.23) donne :

$$a \sin(\theta) = y(\operatorname{ch}(\eta) - \sin(\theta)); \operatorname{ch}(\eta) = \frac{a}{y} \sin(\theta) + \cos(\theta).$$

(II.24) donne :  $\operatorname{ch}(\eta) = \frac{x}{y} \sin(\theta)$  et  $\operatorname{ch}^2(\eta) - \operatorname{sh}^2(\eta) = 1$ , on trouve :

$$\left(\frac{a}{y} \sin(\theta) + \cos(\theta)\right)^2 - \left(\frac{x}{y} \sin(\theta)\right)^2 = 1.$$

Multipliant les deux membres par :  $\left(\frac{y}{\sin(\theta)}\right)^2$ , avec :  $\theta \neq k\pi, k$ : onmbre entier.

$$(a - y \cotg(\theta))^2 - (x)^2 = \frac{y^2}{\sin^2(\theta)}$$

$$(y)^2 \left( \cotg(\theta)^2 - \frac{1}{\sin^2(\eta)} \right) - 2a \cdot y \cotg(\theta) - (x)^2 = -a^2$$

Puisque :  $1 + \cotg(\theta)^2 = \frac{1}{\sin^2(\eta)} \Leftrightarrow \cotg(\theta)^2 - \frac{1}{\sin^2(\eta)} = -1$

On trouve:

$$y^2 - 2ay \cdot \cotg(\theta) + (x)^2 = a^2 \Rightarrow (x)^2 + (y - a \cdot \cotg(\theta))^2 = a^2(1 + \cotg^2(\theta))$$

$$(x)^2 + (y - a \cdot \cotg(\theta))^2 = \frac{a^2}{\sin^2(\theta)}, \theta \neq k\pi, k: \text{onmbre entier}$$

C'est l'équation d'une famille de cercles de rayon :  $R = \frac{a}{|\operatorname{sh}(\theta)|}$ , qui passent par deux points fixes (pôles) de coordonnées  $(x = +a, y = 0)$ ,  $(x = -a, y = 0)$ . Pour :

$$y = 0: (x)^2 + a^2 \cot^2(\theta) = \frac{a^2}{\sin^2(\theta)} \Rightarrow (x)^2 = a^2 \left( \frac{1}{\sin^2(\theta)} - \cot^2(\theta) \right) \Rightarrow (x)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow x = \pm a.$$

On remarque que :

1. La valeur du rayon  $R$  tend vers l'infini quand  $\theta$  devient très petit (tend vers zéro). Cela signifie que la surface  $\theta$  se réduit au plan  $xz$ .
2. Lorsque  $\theta$  varie de  $]0, \pi[$  [le centre du cercle se déplace sur l'axe  $(y, y')$  entre  $+\infty$  et  $-\infty$  respectivement.

### II.8.3. Coefficients métriques

En coordonnées cartésiennes, un élément de longueur s'écrit :  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,  $(ds)^2$  est égal à :  $(ds)^2 = (dr)^2 + (r)^2(d\theta)^2$

Cet exemple nous conduit à écrire, dans le cas général :  $(ds)^2 = g_1(du_1)^2 + g_2(du_2)^2$

$u_1, u_2$  : des coordonnées curvilignes .  $g_1, g_2$  : coefficients métriques qui sont fonction, en général, des coordonnées. En coordonnées cartésiennes, on a  $g_x = g_y = 1$ , et en coordonnées bipolaires :

$$g_\eta = g_\theta = \frac{a}{\cosh(\eta) - \cos(\theta)} \text{ et } g_z = 1.$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les transformations :

$$x = \frac{a \cdot \sinh(\eta)}{\cosh(\eta) - \cos(\theta)}, y = \frac{a \cdot \sin(\theta)}{\cosh(\eta) - \cos(\theta)}, z = z, \eta \neq 0, \theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{E} \quad \text{II. 27}$$

Et les définitions suivantes :

$$\begin{cases} g_\eta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 \\ g_\theta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \\ g_z^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 \end{cases}$$

### II.8.4. Calcul des dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{a}{(\cosh(\eta) - \cos(\theta))^2} [\sinh(\eta)(\cosh(\eta) - \cos(\theta)) - \cosh^2(\eta)]$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{a}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^2} [ch^2(\eta) - (ch(\eta) \cos(\theta)) - sh^2(\eta)]$$

Puisque :  $ch^2(\eta) - sh^2(\eta) = 1$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{a}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^2} [1 - (ch(\eta) \cos(\theta))]$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{a^2}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^4} [1 - ch(\eta) \cos(\theta)]^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{a}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^2} [-(sh(\eta) \sin(\theta))]$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{a^2}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^4} [sh(\eta) \sin(\theta)]^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{a}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^2} [-sh(\eta) \sin(\theta)]$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{a^2}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^4} [sh(\eta) \sin(\theta)]^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{a}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^2} [\cos(\theta) [ch(\eta) - \cos(\theta)] - \sin^2(\theta)]$$

On trouve :  $\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{a}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^2} [\cos(\theta) ch(\eta) - 1]$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{a^2}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^4} [ch(\eta) \cos(\theta) - 1]^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0, \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

On remarque que :  $\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2$ ,  $\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$ ,  $g_{\theta\theta}^2 = g_{\eta\eta}^2$ .

**II.8.5. Calcul des coefficients métriques**

$$g_{\eta}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$g_{\eta}^2 = \frac{a^2}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^4} [[1 - ch(\eta) \cos(\theta)]^2 + [sh(\eta) \sin(\theta)]^2];$$

$$g_{\eta}^2 = \frac{a^2}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^4} [1 - ch^2(\eta) \cos^2(\theta) - 2ch(\eta) \cos(\theta) + sh^2(\eta) \sin^2(\theta)];$$

Donc :  $g_{\eta}^2 = \frac{a^2}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^4} (ch(\eta) - \cos(\theta))^2.$

Alors que :

$$g_{\eta} = g_{\theta} = \frac{a}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \text{ et } \eta \neq 0, \theta \neq 2k\pi, k: \text{nombre entier}, g_z^2 = 1 \quad \text{II.28}$$

**II.9. Les opérateurs différentiels**

**II.9.1. En coordonnées cartésiennes**

**II.9.1.1. Champ scalaire**

gradient:  $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k},$

laplacien:  $\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$

**II.9.1.2. Champ de vecteur**

Soit le vecteur de divergence  $\vec{F} : \text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},$

Rotationnel :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \vec{k}.$

**Propriété**

le laplacien scalaire d'un champ scalaire est noté:

$$\text{lap}(f) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(f) = \nabla^2(f) = \Delta f.$$

**II.9.1.3. En coordonnées curvilignes**

Le principal avantage de l'utilisation des coordonnées curvilignes est de transformer un domaine physique de géométrie complexe en un domaine de calcul de géométrie simple, elles permettent de transformer des courbes en droites et facilitent, de ce fait, le calcul des aires.

Soit :  $\eta, \theta, z$  Coordonnées curvilignes (bipolaires).

Soit :  $\vec{i}_\eta, \vec{i}_\theta, \vec{i}_z$  vecteurs unitaires suivant  $\eta, \theta, z$ .  $g_\eta = g_1, g_2 = g_\theta, g_3 = g_z$ .

I.6  $\Leftrightarrow$  gradient :  $\overrightarrow{\text{grad}}\phi$

$$= \frac{1}{a} (\cosh\eta - \cos\theta) \left[ \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \vec{i}_\eta + \frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \vec{i}_\theta \right] + \frac{\partial\phi}{\partial z} \vec{i}_z. \quad \text{II. 29}$$

$$\text{I.9} \Leftrightarrow \text{Laplacien : } \Delta\phi = \frac{1}{a^2} (\cosh\eta - \cos\theta)^2 \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} \right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}. \quad \text{II. 30}$$

I.7  $\Leftrightarrow$  Divergence :  $\text{div}\vec{v}$

$$= \frac{(\cosh\eta - \cos\theta)^2}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{v_\eta}{(\cosh\eta - \cos\theta)} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{v_\theta}{(\cosh\eta - \cos\theta)} \right) \right] + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad \text{II. 31}$$

I.8  $\Leftrightarrow$  Rotationnel :  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v}$

$$= \left[ \frac{1}{a} (\cosh\eta - \cos\theta) \frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \vec{i}_\eta + \left[ \frac{\partial v_\eta}{\partial z} - \frac{1}{a} (\cosh\eta - \cos\theta) \frac{\partial v_z}{\partial\eta} \right] \vec{i}_\theta + \frac{1}{a} (\cosh\eta - \cos\theta)^2 \left[ \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{v_\theta}{(\cosh\eta - \cos\theta)} \right) - \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{v_\eta}{(\cosh\eta - \cos\theta)} \right) \right] \vec{i}_z. \quad \text{II. 32}$$

## II.10. Formulation des équations de continuité, de la chaleur et de la quantité de mouvement dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales

### II.10.1. Équation de continuité

Soit :  $g_\eta = g_1, g_2 = g_\theta, g_3 = g_z$ . et  $g_\eta = g_\theta, 1 = g_z$ .

Et comme le problème est bidimensionnel alors :

$$\text{div}\vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial(hV_\eta)}{\partial\eta} + \frac{\partial(hV_\theta)}{\partial\theta} \right] = 0, \\ \text{si } \text{div}\vec{V} = 0.$$

Alors l'équation (II.8), peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial(hV_\eta)}{\partial\eta} + \frac{\partial(hV_\theta)}{\partial\theta} = 0 \quad \text{II.33}$$

$V_\eta, V_\theta$ : composantes du vecteur vitesse en coordonnées curvilignes orthogonales.

### II.10.2. Équation de quantité de mouvement

L'équation (II.12) peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{V}(\overrightarrow{\text{grad}})\omega = g\beta \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right] + v_{nf} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\omega) \quad \text{II.34}$$

Réécrivons cette équation en coordonnées orthogonales curvilignes.

$$\vec{V}(\overrightarrow{\text{grad}})\omega = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial(\omega)}{\partial\eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial(\omega)}{\partial\theta}, \quad v_{nf} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\omega) = \frac{v_{nf}}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial\theta^2} \right].$$

Et d'après II.21 :

$$dx = \frac{a}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^2} [1 - ch(\eta) \cos(\theta)] d\eta - \frac{a}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^2} [\sin(\theta)sh(\eta)] d\theta \quad \text{II.35}$$

$$dy = -\frac{a}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^2} [\sin(\theta)sh(\eta)] d\eta - \frac{a}{(ch(\eta) - \cos(\theta))^2} [1 - ch(\eta) \cos(\theta)] d\theta \quad \text{II.36}$$

Déterminant les expressions de :  $d\eta$  et  $d\theta$  en fonction de :  $dx$  et  $dy$

Le déterminant du système d'équation (II.35), (II.36), est:  $\det = -g_\eta^2 = -g_\theta^2$ .

$$\text{et par suite : } d\eta = \frac{1 - ch(\eta) \cos(\theta)}{a} dx - \frac{\sin(\theta)sh(\eta)}{a} dy;$$

$$d\theta = -\frac{1 - ch(\eta) \cos(\theta)}{a} dy - \frac{\sin(\theta)sh(\eta)}{a} dx.$$

$$\text{on obtient: } \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1 - ch(\eta) \cos(\theta)}{a}; \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin(\theta)sh(\eta)}{a}.$$

Comme les dérivées partielles de  $T$  par rapport à  $x$  et  $y$  nous obtenons :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{a} [1 - ch(\eta) \cos(\theta)] \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{1}{a} [sin(\theta)sh(\eta)] \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{a} [1 - ch(\eta) \cos(\theta)] \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{1}{a} [sin(\theta)sh(\eta)] \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

Donc:  $\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha)$

$$= \frac{ch(\eta) - \cos(\theta)}{a} \left[ \left[ \frac{1 - ch(\eta) \cdot \cos(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \cos(\alpha) \right. \right.$$

$$\left. + \frac{sh(\eta) \cdot \sin(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \sin(\alpha) \right] \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)$$

$$+ \left[ \frac{1 - ch(\eta) \cdot \cos(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \sin(\alpha) - \frac{sh(\eta) \cdot \sin(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)} \cos(\alpha) \right] \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \Bigg]$$

$$= \frac{ch(\eta) - \cos(\theta)}{a} \left[ [f_n(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G_n(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right.$$

$$\left. + [f_n(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G_n(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right].$$

avec:  $h = \frac{a}{ch(\eta) - \cos(\theta)}$ ;  $f_n(\eta, \theta) = \frac{1 - ch(\eta) \cdot \cos(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)}$ ;  $G_n(\eta, \theta) = \frac{sh(\eta) \cdot \sin(\theta)}{ch(\eta) - \cos(\theta)}$ .

L'équation de quantité de mouvement (II.34) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$$

$$= g \frac{\beta_{nf}}{h} \left[ (f_n(\eta, \theta) \cdot \cos(\alpha) + G_n(\eta, \theta) \sin(\alpha)) \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right.$$

$$\left. + (f_n(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G_n(\eta, \theta) \cos(\alpha)) \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$+ \frac{v_{nf}}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right] \quad \text{II. 37}$$

### II.10.3. Équation d'énergie

Si :  $div(\overrightarrow{\text{grad}}f) = \Delta T$ , L'équation (II. 10) peut se mettre sous la forme :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T) = (\alpha)_{nf} \cdot \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} T) \quad \text{II. 38}$$

$$\text{D'après l'équation (II. 29) : } \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\text{D'après l'équation (II. 30) : } \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} T) = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]$$

**D'après l'équation (II. 38) : écrire Équation d'énergie**

$$V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = (\alpha)_{nf} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{II. 39}$$

En introduisant la fonction de courant, de façon à vérifier l'équation de continuité il vient :

$$V_\eta = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, V_\theta = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad \text{II. 40}$$

Nous en déduisons :

$$\omega = -\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{II.41}$$

## II.11. Adimensionnalisation

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier à priori la viabilité d'une équation ou du résultat d'un calcul. Elle est utile également pour formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses. L'adimensionnalisation a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser les résultats. En posant les quantités adimensionnelles suivantes :

$$D_h = (R_2 - R_1); V_\eta^* = \frac{V_\eta(R_2 - R_1)}{\alpha_f}; V_\theta^* = \frac{V_\theta(R_2 - R_1)}{\alpha_f}; H = \frac{h}{R_2 - R_1};$$

$$T^* = \frac{(T - T_f)}{(T_c - T_f)}; \psi^* = \frac{\psi}{\alpha_f}; \omega^* = \omega \frac{(R_2 - R_1)^2}{\alpha_f}$$

En portant les quantités adimensionnelles définies précédemment dans les équations (II.33), (II.37), (II.39) on obtient :

$$\frac{\partial(HV_\eta^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(HV_\theta^*)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{II. 42}$$

$$\begin{aligned}
HV_{\eta}^* \frac{\partial \omega^*}{\partial \eta} + HV_{\theta}^* \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta} &= Pr. Ra. H. C_1 \left[ (f_n(\eta, \theta). \cos(\alpha) + G_n(\eta, \theta) \sin(\alpha)). \left( \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right. \\
&\quad \left. + (f_n(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G_n(\eta, \theta) \cos(\alpha)). \left( \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \right] \\
&\quad + Pr. C_2 \left[ \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \theta^2} \right] \quad \text{II. 43}
\end{aligned}$$

$$HV_{\eta}^* \frac{\partial T^*}{\partial \eta} + HV_{\theta}^* \frac{\partial T^*}{\partial \theta} = C_3 \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{II. 44}$$

Avec Les paramètres du contrôle de ce problème sont :

$$Gr = \frac{g\beta_f(T_H - T_C)(R_2 - R_1)^3}{v_f^2} \text{ et } Ra = Gr. Pr, Pr = \frac{v_f}{\alpha_f};$$

$$C_1 = \frac{1}{\frac{(1-\varphi)\rho_f}{\varphi\rho_p} + 1} \cdot \frac{\beta_p}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\varphi\rho_p}{(1-\varphi)\rho_f} + 1}; C_2 = \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5} \left[ (1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right]};$$

$$C_3 = \frac{\frac{k_{nf}}{k_f}}{\left[ (1-\varphi) + \varphi \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f} \right]}. \quad \text{II. 45}$$

Les composantes de la vitesse adimensionnelle  $V_{\eta}^*$ ,  $V_{\theta}^*$  sont définies par :

$$V_{\eta}^* = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}; V_{\theta}^* = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \quad \text{II. 46}$$

La vorticité  $\omega^*$  adimensionnelle est définie par :

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{II. 47}$$

## II.12. Formulation des conditions aux limites

✓ Conditions sur la paroi du cylindre intérieur ( $\eta = \eta_i = \text{const}$ )

$$V_{\eta}^* = V_{\theta}^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = 0 \quad \text{II. 48}$$

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{II. 49}$$

$$T^* = 1 \quad \text{II. 50}$$

✓ Conditions sur la paroi du cercle extérieur ( $\eta = \eta_e = \text{const}$ )

$$V_\eta^* = V_\theta^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} = 0 \quad \text{II. 51}$$

$$\omega^* = -\frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{II. 52}$$

$$T^* = 0 \quad \text{III. 53}$$

## II.13. Coefficients de taux de transfert de chaleur

### II.13.1. Nombre de Nusselt local et moyen

L'étude du transfert de chaleur dans la cavité nécessite la détermination des taux de transfert de chaleur, donnés par le biais du nombre de Nusselt. La définition générale du nombre de Nusselt est :

$$Nu = \frac{q D_h}{\lambda \Delta T} \quad \text{II. 54}$$

q : densité du flux de la chaleur à travers la paroi de l'enceinte.

$\Delta T$ : Écart de température  $T_c - T_f$ .

Soit :

$$q = -K \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta = \text{cst}} \quad \text{II. 55}$$

Le nombre de Nusselt local pour la paroi intérieure du cylindre est réalisée par

$$Nu_{loc} = -\frac{k_{nf}}{k_f} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \quad \text{II. 56}$$

Le nombre de Nusselt moyen s'exprime à partir de la relation suivante

$$Nu_{moy} = \frac{\sum_{n\text{œud}} Nu_{loc}}{\text{nombre des nœuds}} \quad \text{II. 57}$$

# Simulations numériques

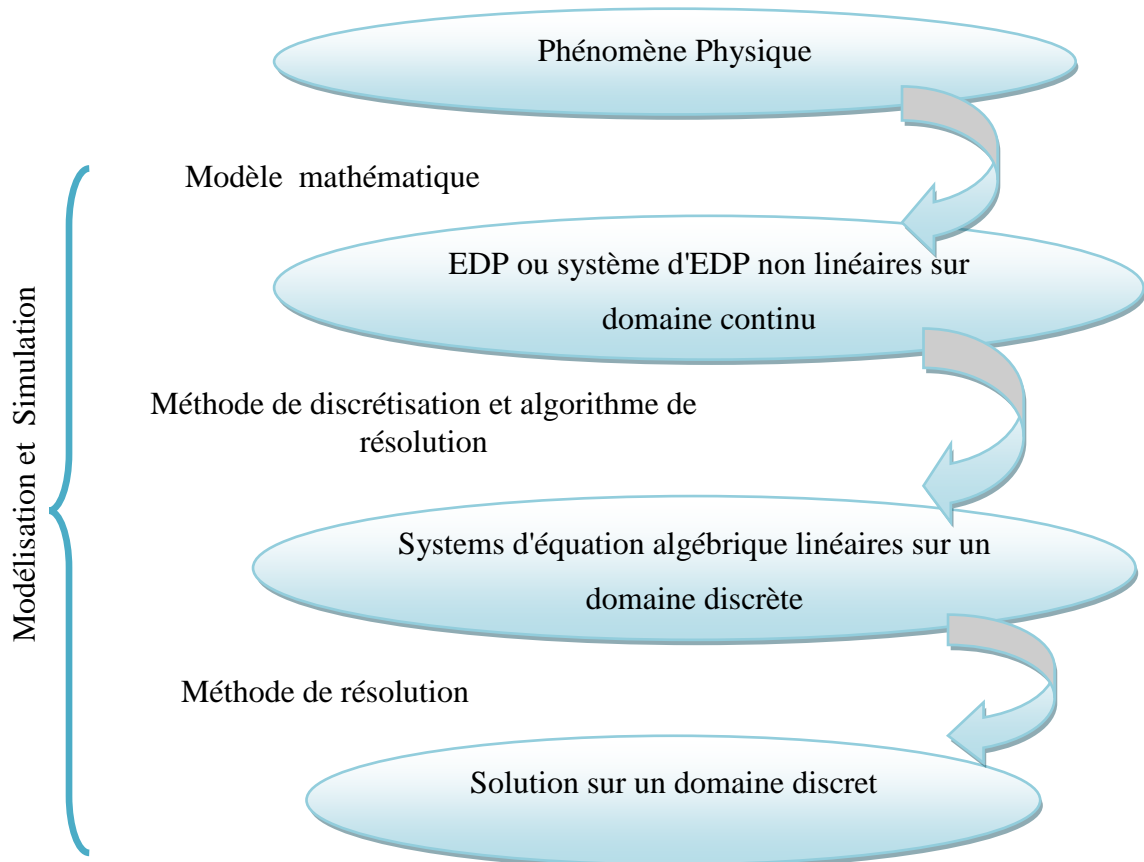
## Introduction

La forme finale du modèle mathématique est un système d'équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre non linéaires fortement couplées qui ne peuvent être résolues analytiquement, mais plutôt par des méthodes de type numérique.

Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution. On peut citer entre autres: les différences finies, les éléments finis la méthode spectrale et la méthode des volumes finis...

### III.1. Le calcul numérique (modélisation et simulation)

Le modèle mathématique constitué par des équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) ou par un système d'EDP est transformé, à l'aide d'une méthode de discrétisation à un système d'équations algébriques. Le principe du calcul numérique est illustré à la **figure III.1**.



**Figure. III.1.** Le principe du calcul numérique.

## III.2. Les méthodes principales de discrétisation

### III.2.1 Introduction

Il ya deux grandes familles de méthodes de discrétisation :

1. Les méthodes d'approximations des équations. Selon ces méthodes, on cherche une solution exacte des équations approchées, car les opérateurs différentiels sont discrétisés sur un maillage (la méthode de la différence finie et la méthode des volumes finis).
2. Les méthodes d'approximations des solutions. Selon ces méthodes on cherche une solution approchée à partir des équations exactes .Les solutions sont écrites comme des séries de fonctions tronquées aux ordres de précisions désirées (les méthodes spectrales et la méthode des éléments finis).

### III.2.2. Méthode des différences finies (MDF)

La variable inconnue  $\phi$  est décrite par plusieurs valeurs dans les points d'un maillage. Le développement de l'inconnue en séries Taylor tronquées est utilisé pour approximer les dérivées de l'inconnue, dans chaque point du maillage, par différences finies en utilisant les inconnues voisines. En remplaçant les dérivées dans les équations algébriques pour les valeurs de l'inconnu dans chaque point du maillage.

#### ✓ Principe

Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points sur lesquels on approche les opérateurs de dérivation des équations par des développements en séries de Taylor tronquées à l'ordre de précision choisie.

#### ✓ Avantages de la méthode

1. Simplicité de mise en œuvre ;
2. encombrement mémoire raisonnable (matrice de type bande) et temps de calcul raisonnable.

#### ✓ Inconvénients de la méthode

1. Le principe de conservation n'est pas assuré après la discrétisation ;
2. l'apparition d'instabilités numériques ;

3. Difficulté pour traiter les géométries plus complexes.

### III.2.3. Méthode des éléments finis (MEF)

Dans la méthode des éléments finis, on utilise des fonctions linéaires ou quadratiques, sur chaque élément, pour décrire la variation locale de la connue. Les équations différentielles sont exactement vérifiées par la solution exacte. En remplaçant l'approximation dans les équations différentielles, on constate que celles-ci ne vérifient pas exactement, et un résidu est défini dans ce cas pour mesurer l'erreur. Le résidu est minimisé en le multipliant par une fonction de pondération et en l'intégrant.

#### ✓ Principe mathématique

Le principe mathématique est basé sur les méthodes suivantes :

1. Méthodes variationnelles (minimisation d'une fonctionnelle) ;
2. Méthodes des résidus pondérés.

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis réside dans le découpage du domaine d'étude en domaine élémentaire de dimension finie.

Sur chacun de ces domaines, appelés éléments finis, la fonction inconnue est approchée par un polynôme dont le degré peut varier d'une application à l'autre, mais reste en général faible. Ces éléments, triangles ou quadrilatères, rectilignes ou curvilignes, doivent réaliser une partition du domaine d'étude (ils sont disjoints et leur union recouvre le domaine tout entier). Cette partition qui est généralement appelée découpage ou discrétisation du domaine doit respecter un certain nombre de règles qui permettent d'assurer un bon déroulement du calcul.

Étapes de la mise en œuvre

1. Discrétisation du domaine en un nombre fini d'éléments ;
2. Choix d'un modèle d'interpolation (variation de la variable  $\Phi$  sur l'élément) ;
3. Écriture des équations modèle sous forme algébrique au niveau local (dans un élément): détermination des vecteurs et matrices caractéristiques ;
4. Assemblage des vecteurs et matrices locales en un vecteur global  $B$  et une matrice globaux  $a$  ;
5. Résolution du système  $AX=B$ .

✓ **Avantage**

1. Adapté aux géométries complexes.

✓ **Inconvénients**

1. Formalisme mathématique plus compliqué et plus difficile à mettre en œuvre;
2. couteux en stockage mémoire (matrices pleines) et en temps de calcul;
3. Caractère conservatif des équations non forcément assuré.

### III.2.4. Méthodes spectrales (MS)

L'inconnue est approchée par des séries Fourier tronquées, ou par des séries de polynômes chébishev. Par rapport aux méthodes des différences finies et des éléments finis, l'approximation n'est pas locale, mais elle est valide sur tout le domaine de calcul. On utilise également le concept du résidu pondéré comme dans la méthode des éléments finis ou en imposant que l'approximation doive correspondre à la solution exacte pour les points du maillage.

#### Principe

On remplace, dans l'équation modèle l'inconnue par des développements tronqués sur des bases de fonctions orthogonales et en utilisant leur propriété d'orthogonalité on se ramène à des systèmes d'équations différentielles ordinaires plus simples à résoudre.

✓ **Avantages**

1. Permet d'obtenir des solutions d'une très grande précision.

✓ **Inconvénients**

1. Formalisme mathématique plus complexe et mise en œuvre délicate ;
2. Difficultés pour traiter les géométries complexes et des conditions aux limites non académiques.

### III.2.5. Méthode des volumes finis (MVF)

La méthode a été décrite la première fois en **1971 par Patankar et al et publiée en 1980 par Patankar [48]**.

Au début, la méthode a été développée comme une formulation spéciale de la méthode des différences finies. L'algorithme numérique a les pas suivants:

1. Le domaine d'analyse (de calcul) est divisé en volumes finis (génération du maillage);
2. L'intégration formelle des équations sur tout le volume de contrôle ;
3. La discrétisation, qui implique la substitution des différentes approximations de type différences finies pour les termes intégrés en représentant différents processus d'écoulement comme la convection, la diffusion et le terme source ;
4. Le résultat est la conversion des intégrales dans un système d'équation algébriques ;
5. La résolution du système d'équations algébriques par l'utilisation d'une méthode itérative.

Le premier pas qui est l'intégration sur le volume de contrôle fait la distinction entre la méthode des volumes finis et tous les autres techniques numériques. Le résultat de l'intégration exprime la conservation exacte de la grandeur physique sur chaque volume de contrôle. Cette relation claire entre l'algorithme numérique et le principe de conservation physique détermine la principale attraction de la méthode des volumes finis et son concept devient plus facile à comprendre que le concept de la méthode des éléments finis ou de la méthode spectrale. La conservation de la variable générale d'écoulement, par exemple une composante de la vitesse ou de la température, sur le volume de contrôle peut être exprimée comme un bilan entre les différents processus qui tendent de l'augmenter ou bien de la baisser.

#### ✓ **Principe**

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équation algébrique qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC).

Le principe de discrétisation peut être illustré en considérant l'équation de transport pour une grandeur scalaire, valable pour toutes les équations d'écoulement, en régime stationnaire.

Les différentes étapes de la mise en œuvre sont :

1. Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points (les nœuds du maillage), autour desquels on définit des volumes élémentaires (appelés volume de contrôle) contigus, non juxtaposés et sans discontinuités aux interfaces ;

2. Les équations modèles, sous forme conservative, sont intégrées sur chaque volume de contrôle (VC) ;
3. Les intégrales sur un volume de contrôle en un nœud donné sont évaluées en approchant la variation de  $\phi$  par des profils ou des lois d'interpolation entre les nœuds voisins du point considéré ;
4. Écriture des équations algébriques en fonction des valeurs de  $\phi$  aux nœuds du maillage;
5. Résolution du système algébrique linéaire obtenu.

#### ✓ **Avantages**

1. Préservation du caractère conservatif des équations sur chaque volume de contrôle (continuité des flux aux interfaces), valable pour n'importe quelle finesse du maillage;
2. Mise en œuvre relativement facile et applicable aux géométries complexes ;
3. Temps de calcul et stockage mémoire raisonnable (matrice de type bande) ;
4. Notre choix est porté sur la méthode des volumes finis grâce aux avantages qu'elle nous offre pour notre étude tels que la stabilité, la convergence, et principalement elle assure la conservation de masse et de quantité de mouvement sur chaque volume de contrôle.

#### ✓ **Inconvénients**

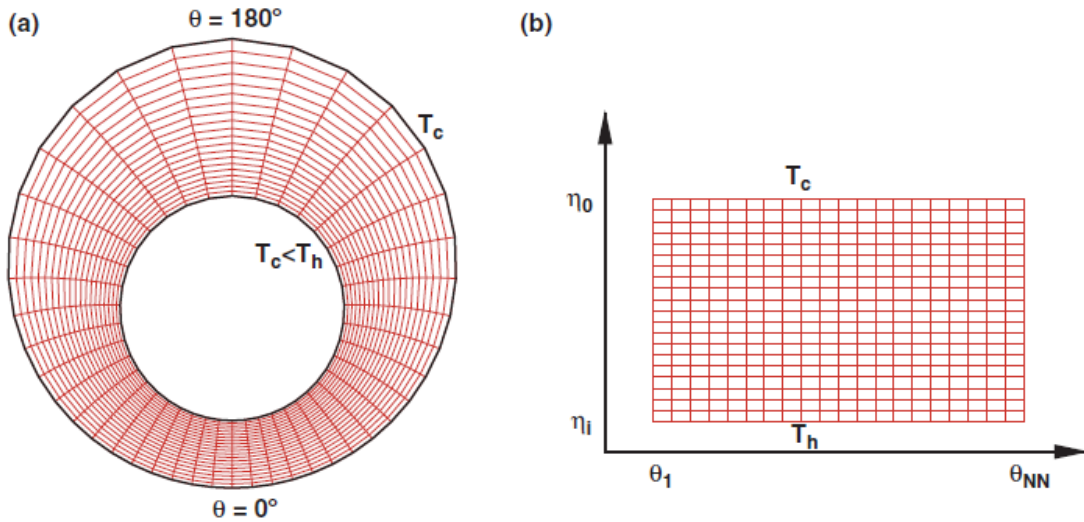
1. Moins précis que les méthodes spectrales.

### **III.3. Méthode de résolution numérique**

Pour résoudre le système d'équations (II.43) (II.44) avec les conditions aux limites associées, nous considérons une solution numérique par la méthode des volumes finis. Alors que pour l'équation (II.47) nous utilisons un développement en série de Taylor.

Les deux méthodes très utilisées dans la solution numérique d'un phénomène physique, elles sont bien exposées par **Patankar [48]**, **Nogotov [49]**.

La **figure (III.2)** représente le domaine physique et le domaine de calcul.



**Figure III.2.** Domaine physique(a) et domaine de calcul(b).

### III.3.1. Volume élémentaire d'intégration

On découpe l'espace annulaire selon les directions  $\eta$  et  $\theta$  en un ensemble de volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" égaux à «  $H^2 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1$  ». (Le problème étant bidimensionnel, on prend l'unité comme épaisseur dans la direction  $z$ ).

Le centre d'un volume fini typique est un point P et ses faces latérales « est », « ouest », « nord » et « sud », sont désignées respectivement, par les lettres e, w, n et s. chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points E., W, N et S. Les variables scalaires (vorticité, température) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis. Donc les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées dans le volume fini typique.

Les nœuds E et ne sont pris dans les directions des coordonnées positives de  $\theta$  et  $\eta$  respectivement et les nœuds W et se dans les sens contraires.

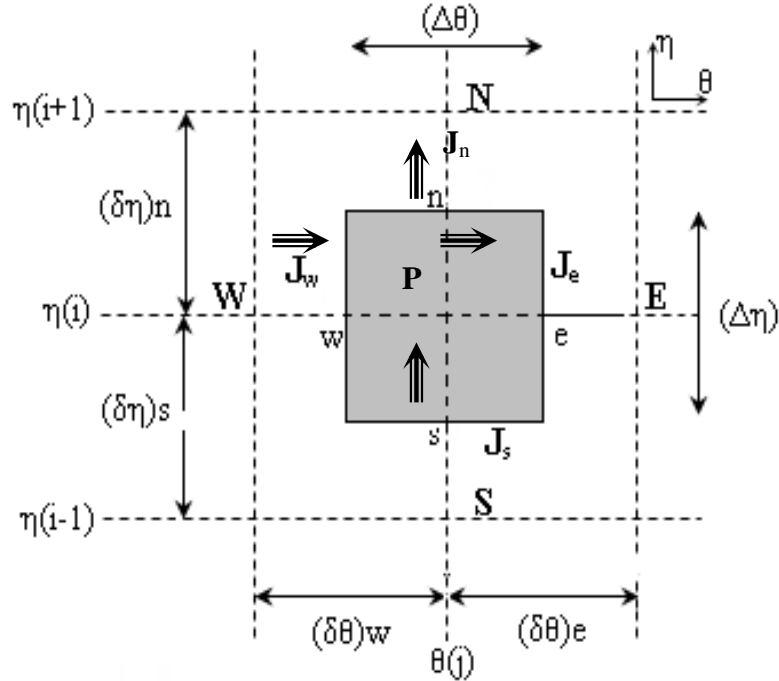
La **figure (III.3)** représente un volume-fini typique et son voisinage dans un domaine de calcul.

Nous avons utilisés des pas  $\Delta\eta$  et  $\Delta\theta$  constants. Plus précisément, nous posons:

$$\Delta\eta = \frac{\eta_1 - \eta_{NI}}{NI - 1}, \Delta\theta = \frac{\theta_{NN} - \theta_1}{NN - 1}$$

Avec: NI : le nombre de points suivant  $\eta$ . NN : le nombre de points suivant  $\theta$ .

i : indice des noeuds suivant  $\eta$ . j : indice des noeuds suivant  $\theta$ .



**Figure III.3.** Représentation schématique du volume de contrôle sur cette figure, le volume de contrôle entourant le nœud P est limité par les faces notées w, n, e et s.

### III.3.2. Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\phi$ dans le volume de contrôle

Pour illustrer la discrétisation des équations de transfert par la méthode des volumes finis, nous considérons l'équation de transfert sous sa forme générale.

Pour bien comprendre cette méthode nous considérons d'abord l'équation de la chaleur (II.44) et l'équation du mouvement (II.43).

Additionnons l'équation de la chaleur (III.44) à l'équation de continuité (III.42) multipliée par  $T^*$ :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ HV_{\eta}^* T^* - C_3 \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ HV_{\theta}^* T^* - C_3 \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right] = 0 \quad \text{III. 1}$$

En Additionnant l'équation du mouvement (II.43) à l'équation de continuité (II.42) multipliée par  $\omega^*$  on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ HV_{\eta}^* \omega^* - Pr. C_2 \frac{\partial \omega^*}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ HV_{\theta}^* \omega^* - Pr. C_2 \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta} \right] \\ & = Pr. Ra. H. C_1 \left[ (f_n(\eta, \theta). \cos(\alpha) + G_n(\eta, \theta) \sin(\alpha)). \left( \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. + (f_n(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G_n(\eta, \theta) \cos(\alpha)). \left( \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{III. 2}$$

Ces deux équations (III.1) et (III.2) sont de la forme générale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ HV_{\eta}^* \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ HV_{\theta}^* \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] = S_{\phi} \quad \text{III. 3}$$

Le tableau suivant illustre les différentes expressions des termes :  $\Gamma_{\phi}$  ,  $S_{\phi}$  ,  $\phi$ .

Équation	$\phi$	$\Gamma_{\phi}$	$S_{\phi}$
III.1	$T^*$	$C_3$	0
III.2	$\omega^*$	$Pr. C_2$	$Pr. Ra. H. C_1 \left[ (f_n(\eta, \theta). \cos(\alpha) + G_n(\eta, \theta) \sin(\alpha)). \left( \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right. \\ \left. + (f_n(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G_n(\eta, \theta) \cos(\alpha)). \left( \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \right]$

**Tableau III.1.** Les différentes expressions des termes :  $\Gamma_{\phi}$  ,  $\phi$  ,  $S_{\phi}$ .

$\phi$ : Fonction générale (soit  $T^*$  ou soit  $\omega^*$ ).

$\Gamma_{\phi}$  : Coefficient adimensionnel.

$S_{\phi}$  : Terme de source.

### III.3.3.1. Intégration de l'équation de transfert

L'équation de discrétisation d'une variable  $\phi$  est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume de contrôle fini typique. Ci-après, nous présentons un cas de discrétisation d'une équation de transfert de  $\phi$ .

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ HV_\eta^* \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ HV_\theta^* \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] d\eta d\theta \right] dz \\
& = \int_0^1 \left[ \int_s^n \int_w^e S_\phi d\eta d\theta \right] dz
\end{aligned} \tag{III.4}$$

Ou bien :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_0^1 \left[ \int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial(HV_\eta^* \phi)}{\partial \eta} + \frac{\partial(HV_\theta^* \phi)}{\partial \theta} \right] d\eta d\theta \right] dz}_1 = \underbrace{\int_0^1 \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) d\eta d\theta \right] dz}_2 + \\
& \underbrace{\int_0^1 \left[ \int_s^n \int_w^e S_\phi d\eta d\theta \right] dz}_3 .
\end{aligned}$$

Les termes 1, 2 et 3 représentent les intégrales doubles dans le volume fini (entre les faces w-e et s-n), des termes de la convection, de la diffusion et de la source de  $\phi$ . Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons le schéma de la loi de puissance (Power Law) pour approcher les variations de  $\phi$  entre les points du maillage. Ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable.

L'équation (III.4) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} [J_\eta] d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \theta} [J_\theta] d\eta d\theta \right] dz \\
& = \int_0^1 \left[ \int_s^n \int_w^e S_\phi d\eta d\theta \right] dz
\end{aligned} \tag{III.5}$$

Avec :

$$J_\eta = HV_\eta^* \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$

$$J_\theta = HV_\theta^* \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$J_\eta$ ,  $J_\theta$  sont les flux totaux (convection plus diffusion). De l'équation (III.5) on trouve :

$$(J_n - J_s) + (J_e - J_w) = \overline{S_\phi} \cdot \Delta v \quad \text{III.6}$$

$\overline{S_\phi}$ : Est la valeur moyenne du terme source  $S_\phi$  dans le volume de contrôle élémentaire.

$J_e, J_w, J_\eta, J_s$  sont les valeurs des flux totaux aux interfaces du volume de contrôle.

$$J_e = \int_s^n \left[ (HV_\theta^* \phi)_e - \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_e \right] d\eta \cdot 1 = (J_\theta)_e \Delta \eta \cdot 1$$

$$J_w = \int_s^n \left[ (HV_\theta^* \phi)_w - \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_w \right] d\eta \cdot 1 = (J_\theta)_w \Delta \eta \cdot 1$$

$$J_n = \int_w^e \left[ (HV_\eta^* \phi)_n - \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_n \right] d\theta \cdot 1 = (J_\eta)_n \Delta \theta \cdot 1$$

$$J_s = \int_w^e \left[ (HV_\eta^* \phi)_s - \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_s \right] d\theta \cdot 1 = (J_\eta)_s \Delta \theta \cdot 1$$

### III.3.3.2. Linéarisation du terme source

$\overline{S_\phi}$  est la valeur moyenne de  $S_\phi$  dans ce volume élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de  $\phi_p$  (au nœud P) et se mettre sous la forme:

$\overline{S_\phi} = S_0 + S_p \cdot \phi_p$ . Avec:  $S_p < 0$ . et  $S_0$ : la partie constante de  $\overline{S_\phi}$  qui ne dépend pas de  $\phi_p$ .

Par suite l'équation (III.6) devienne :

$$(J_n - J_s) + (J_e - J_w) = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta v \quad \text{III.7}$$

### III.3.3.3. Discrétisons de l'équation de continuité (II.42)

Si on intègre l'équation de continuité (II.42) dans le volume de contrôle, on obtient:

$$\int_0^1 \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} [HV_\eta^*] d\eta d\theta \right] dz + \int_0^1 \left[ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial \theta} [HV_\theta^*] d\eta d\theta \right] dz = 0$$

On trouve :

$$(F_n - F_s) + (F_e - F_w) = 0 \quad \text{III.8}$$

$F_n, F_s, F_e$ , et  $F_w$  sont les débits massiques à travers les surfaces de ce volume:

$$\begin{cases} F_n = (HV_{\eta}^*)_n \cdot \Delta\theta \cdot 1 \\ F_s = (HV_{\eta}^*)_s \cdot \Delta\theta \cdot 1 \\ F_e = (HV_{\theta}^*)_e \cdot \Delta\eta \cdot 1 \\ F_w = (HV_{\theta}^*)_w \cdot \Delta\eta \cdot 1 \end{cases} \quad \text{III.9}$$

En multipliant l'équation (III.8) par la fonction  $\phi_p$  et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (III.7), il vient :

$$(J_e - F_e\phi_p) - (J_w - F_w\phi_p) + (J_n - F_n\phi_p) - (J_s - F_s\phi_p) = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta v \quad \text{III.10}$$

Les termes  $(J_i - F_i\phi_p)$ ,  $i = e, w, n, s$  peuvent se mettre, d'après **Patankar [48]**, sous la forme suivante :

$$(J_e - F_e\phi_p) = a_E(\phi_P - \phi_E)$$

$$(J_w - F_w\phi_p) = a_W(\phi_W - \phi_p)$$

$$(J_n - F_n\phi_p) = a_N(\phi_P - \phi_N)$$

$$(J_s - F_s\phi_p) = a_S(\phi_S - \phi_p)$$

En introduisant ces expressions dans l'équation (III.10) on obtient :

$$a_E(\phi_P - \phi_E) - a_W(\phi_W - \phi_p) + a_N(\phi_P - \phi_N) - a_S(\phi_S - \phi_p) = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta v \quad \text{III.11}$$

D'où l'équation discrétisée :

$$a_p\phi_P = a_E(\phi_E) + a_W(\phi_W) + a_N(\phi_N) + a_S(\phi_S) + b \quad \text{III.12}$$

Avec :

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S - S_p \cdot \Delta v \quad \text{III.13}$$

$$b = S_0 \cdot \Delta v \quad \text{III.14}$$

D'après **PATANKAR [48]**, la fonction  $A(|P|)$ , est donnée par:

$$A(|P|) = \max(0, (1 - 0.1|P|)^5) \text{ , par le schéma « power law » .}$$

Le symbole  $\|A, B\|$  signifie que le maximum entre A et B est choisi.

$$\begin{cases} a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\ a_W = D_w A(|P_w|) + \|-F_w, 0\| \\ a_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \\ a_S = D_s A(|P_s|) + \|-F_s, 0\| \end{cases} \quad \text{III.15}$$

**III.3.3.4. Schémas de Discrétisation Spatiale**

L'évaluation des flux de diffusion et de convection aux interfaces des volumes de contrôle après intégration se fera à l'aide des schémas de discrétisation. Pour choisir le schéma de discrétisation approprié, il faut prendre en considération un certain nombre de critères tels que : stabilité, précision, cout de calcul numérique... souvent les modèles les moins précis sont très robustes, tandis que les modèles les plus précis sont moins robustes et plus lents et coutent cher. Les différents schémas proposés par **PATANKAR [48]** permettant d'exprimer la fonction  $A(|P|)$ .

La fonction  $A(|P|)$ , qui peut être choisie dans le **tableau (III.2)** définit un schéma de discrétisation pour le terme convectif.

Schéma	Formule pour A ( P )
Centre	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybride	$\ 0, (1 - 0.5 P )\ $
Power Law	$\ 0, (1 - 0.1 P )^5\ $
Exponentiel (exacte)	$\frac{ P }{exp( P ) - 1}$

**Tableau III.2 .** La fonction  $A (|P|)$  pour différents schémas [48].

Où e P est le nombre de Peclet qui représente le rapport local de la convection à la diffusion  $P = \frac{\rho U(\delta x)}{\Gamma}$ .les graphes suivants présentent la variation de fonction  $A (|P|)$  en fonction de  $|P|$  « Peclet » pour les schémas numériques :

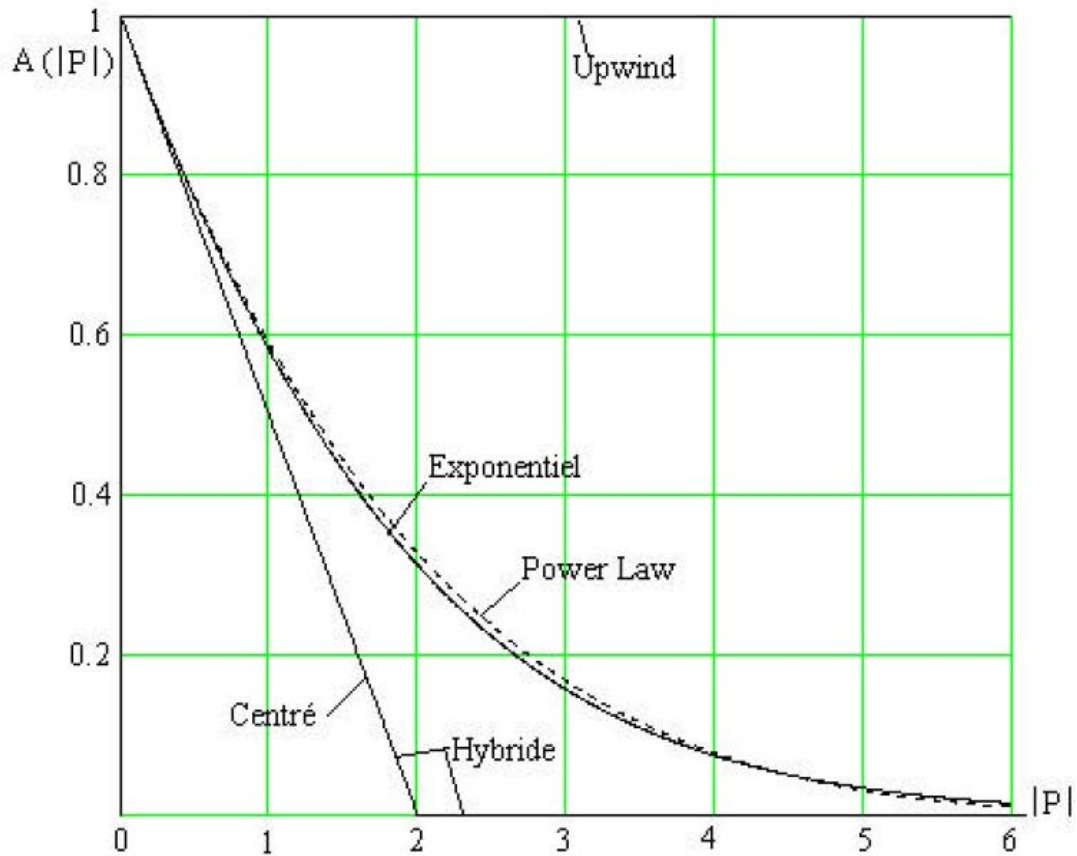


Figure. III.4. La fonction  $A(|P|)$  pour les différents schémas [48].

✓ **Schéma aux différences centrées (CDS)**

La fonction  $A(|P|)$  donnée par :

$$A(|P|) = 1 - 0.5|P|.$$

Les coefficients de l'équation( III. 15) de transport discrétisée seront :

$$\begin{cases} a_E = D_e(1 - 0.5|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\ a_W = D_w(1 - 0.5|P_w|) + \|\ F_w, 0\| \\ a_N = D_n(1 - 0.5|P_n|) + \|-F_n, 0\| \\ a_S = D_s(1 - 0.5|P_s|) + \|\ F_s, 0\| \end{cases}$$

Pour que ces coefficients soient positifs, le P doit être dans l'intervalle  $[-2,2]$  est réalisé pour des maillages fins.

✓ **Schéma Upwind (UPS)**

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'équation :  $A(|P|) = 1$

D'où les expressions suivantes des coefficients (III. 15) :

$$\begin{cases} a_E = D_e + \|-F_e, 0\| \\ a_W = D_w + \|F_w, 0\| \\ a_N = D_n + \|-F_n, 0\| \\ a_S = D_s + \|F_s, 0\| \end{cases}$$

Ce schéma est appliqué pour les écoulements à dominance convective. Tous les Coefficients de discrétisation de ce schéma sont positifs, ce qui fait que ce schéma est inconditionnellement stable, il introduit une erreur nommée fausse diffusion, et de ce fait il donne une mauvaise représentation du phénomène physique réel.

✓ **Schéma Hybride (HDS)**

La fonction  $A(|P|)$  est exprimée comme suit :  $A(|P|) = \|0, (1 - 0.5|P|)\|$ .

Les coefficients de l'équation (III. 15) de transport discrétisée seront :

$$\begin{cases} a_E = \|-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\| \\ a_W = \|F_n, D_n + \frac{F_n}{2}, 0\| \\ a_N = \|-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0\| \\ a_S = \|F_n, D_n + \frac{F_n}{2}, 0\| \end{cases}$$

Le schéma (HDS) est la combinaison des deux Schémas (centré et Upwind).

✓ **Schéma exponentiel (exacte)**

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'équation :

$$A(|P|) = \frac{|P|}{\exp(|P|) - 1}$$

Les coefficients s'écrivent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} \\ a_W = \frac{F_w}{\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right) - 1} \\ a_N = \frac{F_n}{\exp\left(\frac{F_n}{D_n}\right) - 1} \\ a_S = \frac{F_s}{\exp\left(\frac{F_s}{D_s}\right) - 1} \end{array} \right.$$

Ce schéma est assez peu utilisé car :

- Les exponentielles coûtent cher à calculer numériquement.
- Il n'est pas exact pour les problèmes 2D, 3D, instationnaires et avec le terme source.

✓ **le Schéma " Power Law " (loi Puissance)**

La fonction  $A(|P|)$  est donnée par l'équation :

$$A(|P|) = \|0, (1 - 0.1|P|)^5\|.$$

Une bonne approximation de la solution exacte est donnée par le schéma Power Law (Power law Differencing Scheme) développé par **Patankar (1980) [48]**, c'est pour quoi notre choix s'est posé sur ce schéma, qui s'écrit pour les coefficients (III.15) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = D_e \|0, (1 - 0.1|P_e|)^5\| + \|-F_e, 0\| \\ a_W = D_w \|0, (1 - 0.1|P_w|)^5\| + \|F_w, 0\| \\ a_N = D_n \|0, (1 - 0.1|P_n|)^5\| + \|-F_n, 0\| \\ a_S = D_s \|0, (1 - 0.1|P_s|)^5\| + \|F_s, 0\| \end{array} \right.$$

On peut distinguer que le nombre de Peclet est l'élément essentiel pour caractériser le Comportement d'un schéma numérique. La limitation des schémas précédents se situe comme suit :

- ✓ Schéma centré : par les valeurs  $|P_e| \leq 2$  ;
- ✓ Schéma Upwind : surestime la diffusion pour les grands nombres de Peclet ;
- ✓ Schéma Hybride : son inconvénient est l'erreur maximale lorsque  $P_e = 2$  ;
- ✓ Schéma Power Law : stable et donne une bonne approximation de la solution exacte.

Nous avons adopté le schéma en loi de puissance Power Law qui donne une bonne approximation polynomiale de la solution exacte, ainsi une bonne caractéristique de stabilité et de précision des autres schémas, en plus il a été largement utilisé.

Donc d'après le **Schéma Power law** Les coefficients de l'équation (III.15) est donnée par l'expression :

$$\begin{cases} a_E = D_e \|0, (1 - 0.1|P_e|)^5\| + \|-F_e, 0\| \\ a_W = D_w \|0, (1 - 0.1|P_w|)^5\| + \|-F_w, 0\| \\ a_N = D_n \|0, (1 - 0.1|P_n|)^5\| + \|-F_n, 0\| \\ a_S = D_s \|0, (1 - 0.1|P_s|)^5\| + \|-F_s, 0\| \end{cases} \quad \text{III. 16}$$

Les grandeurs  $D_e, D_w, D_n$  et  $D_s$ , (coefficients de diffusion) sont définies par:

$$\begin{cases} D_e = (\Gamma_\phi)_e \frac{\Delta\eta}{(\delta\theta)_e} \\ D_w = (\Gamma_\phi)_w \frac{\Delta\eta}{(\delta\theta)_w} \\ D_n = (\Gamma_\phi)_n \frac{\Delta\theta}{(\delta\eta)_n} \\ D_s = (\Gamma_\phi)_s \frac{\Delta\theta}{(\delta\eta)_s} \end{cases} \quad \text{III. 17}$$

$P_e, P_w, P_n$  et  $P_s$  sont les nombres de Peclet définis par:

$$\begin{cases} P_e = \frac{F_e}{D_e} \\ P_w = \frac{F_w}{D_w} \\ P_n = \frac{F_n}{D_n} \\ P_s = \frac{F_s}{D_s} \end{cases} \quad \text{III. 18}$$

Les pas d'intégration  $(\delta\theta)_n, (\delta\theta)_s, (\delta\eta)_e, (\delta\eta)_w$  peuvent être égaux ou non aux pas de calcul  $\Delta\theta$  et  $\Delta\eta$  respectivement. Ils sont choisis constants et égaux aux  $\Delta\theta$  et  $\Delta\eta$ . Considérons que les interfaces e, w, s'est ne sont les milieux des nœuds (P, E) (P, W) (P, N) et (P, S).

Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent:

$$\begin{cases} D_n = (\Gamma_\phi)_n \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_s = (\Gamma_\phi)_s \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = (\Gamma_\phi)_e \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_w = (\Gamma_\phi)_w \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{cases} \quad \text{III. 19}$$

### III.4. Discrétisation de l'équation de la chaleur (énergie)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ HV_{\eta}^* T^* - C_3 \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ HV_{\theta}^* T^* - C_3 \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right] = 0$$

En remplaçant dans l'équation (III.3) la fonction  $\phi$  par la température adimensionnelle  $T^*$  et le terme source  $S_{\phi} = 0$ , l'équation de la chaleur discrétisée sera :

$$a_P T_P^* = a_E T_E^* + a_W T_W^* + a_N T_N^* + a_S T_S^* + b \quad \text{III.20}$$

Avec :

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \text{III.21}$$

Ou  $a_E, a_W, a_N$  et  $a_S$  Sont respectivement les mêmes expressions que dans le système (III.16).

Le calcul des coefficients  $a_E, a_W, a_N$  et  $a_S$  nécessite la détermination des coefficients  $F_i$ ,  $D_i$ ,  $P_i$  ( $i = n, s, e, w$ ). Remplaçant les vitesses adimensionnelles :

$$\begin{cases} V_{\eta}^* = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \\ V_{\theta}^* = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \end{cases} \quad \text{III.22}$$

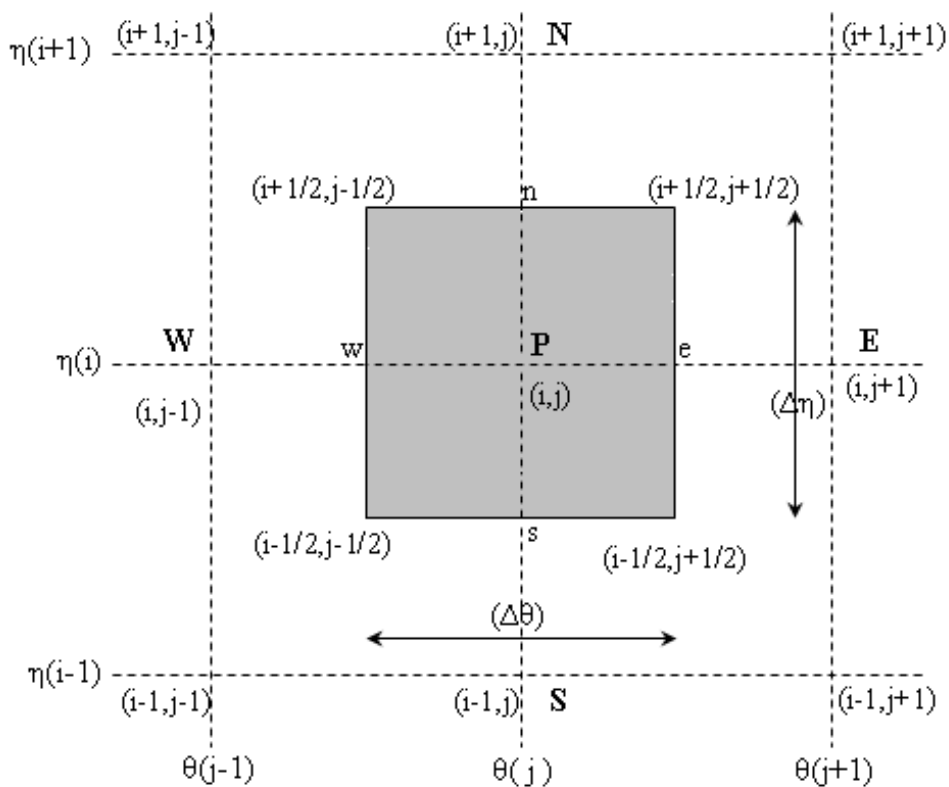
Dans le système (III.9) on obtient :

$$\begin{cases} F_n = \Delta \theta \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right)_n \\ F_s = \Delta \theta \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right)_s \\ F_e = \Delta \eta \left( -\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right)_e \\ F_w = \Delta \eta \left( -\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right)_w \end{cases} \quad \text{III.23}$$

En appliquant une interpolation linéaire (différence centrée), et en tenant compte que les interfaces sont à mi-distance des nœuds on trouve :

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_n^* &= \frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i, j)}{2} \\ \psi_s^* &= \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i-1, j)}{2} \\ \psi_e^* &= \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i, j)}{2} \\ \psi_w^* &= \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j-1)}{2} \end{aligned} \right. \quad \text{III. 24}$$

Le développement du gradient de la fonction de courant est établi d'après la démarche de **Nogotov [49]**, comme suit (voir **Figure III.5**) :



**Figure III.5.** Représentation schématique des nœuds P, E, W et S dans le maillage.

➤ **A l'interface " e ":**

$$\left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right)_e = \frac{\psi^*(i+1/2, j+1/2) - \psi^*(i-1/2, j+1/2)}{\Delta \eta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_e = \frac{1}{2\Delta\eta} \left[ \frac{\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i+1, j)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j+1)}{2} \right] - \frac{1}{2\Delta\eta} \left[ \frac{\psi^*(i-1, j+1) + \psi^*(i-1, j)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i, j+1)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i+1, j) - \psi^*(i-1, j+1) - \psi^*(i-1, j)}{4\Delta\eta}$$

Par suite la fonction  $F_e$  s'écrit :

$$F_e = \frac{1}{4} [\psi^*(i-1, j+1) + \psi^*(i-1, j) - \psi^*(i+1, j+1) - \psi^*(i+1, j)] \quad \text{III.25}$$

➤ **A l'interface " w ":**

De la même façon, on écrit le gradient à l'interface « w ».

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\right)_w &= \frac{\psi^*\left(i + \frac{1}{2}, j - 1/2\right) - \psi^*\left(i - \frac{1}{2}, j - 1/2\right)}{\Delta\eta} \\ &= \frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i-1, j) - \psi^*(i-1, j-1)}{4\Delta\eta} \end{aligned}$$

Et la fonction  $F_w$  est donnée par :

$$F_w = \frac{1}{4} [\psi^*(i-1, j-1) + \psi^*(i-1, j) - \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i+1, j)] \quad \text{III.26}$$

➤ **A l'interface " n ":**

De la même façon, le gradient à l'interface « n » est défini par :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}\right)_n &= \frac{\psi^*(i+1/2, j+1/2) - \psi^*(i+1/2, j-1/2)}{\Delta\theta} \\ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}\right)_n &= \frac{1}{2\Delta\theta} \left[ \frac{\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i, j+1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i+1, j)}{2} \right] - \frac{1}{2\Delta\theta} \left[ \frac{\psi^*(i+1, j-1) + \psi^*(i, j-1)}{2} + \frac{\psi^*(i, j) + \psi^*(i+1, j)}{2} \right] \\ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}\right)_n &= \frac{\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i, j+1) - \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i, j-1)}{4\Delta\theta} \end{aligned}$$

On en déduit:

$$F_n = \frac{1}{4} [\psi^*(i+1, j+1) + \psi^*(i, j+1) - \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i, j-1)] \quad \text{III.27}$$

➤ **A l'interface " s ":**

Le gradient à l'interface « s » s'exprime par la relation :

$$\left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right)_s = \frac{\psi^*(i-1, j+1) + \psi^*(i, j+1) - \psi^*(i+1, j-1) - \psi^*(i, j-1)}{4\Delta\theta}$$

Et l'expression  $F_s$  devient :

$$F_s = \frac{1}{4} [\psi^*(i-1, j+1) + \psi^*(i, j+1) - \psi^*(i-1, j-1) - \psi^*(i, j-1)] \quad \text{III.28}$$

Pour l'équation de la chaleur, le coefficient  $\Gamma_\phi = C_3$ , (voir **tableau III.1**).

En portant cette valeur dans le système (III.19), les coefficients  $D_e$ ,  $D_w$ ,  $D_n$  et  $D_s$  s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s = C_3 \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w = C_3 \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad \text{III.29}$$

Par suite, les nombres de Péclet dans le système (III.18) deviennent

$$\left\{ \begin{aligned} P_n &= F_n \cdot \frac{1}{C_3} \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= F_s \cdot \frac{1}{C_3} \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= F_e \cdot \frac{1}{C_3} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= F_w \cdot \frac{1}{C_3} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right. \quad \text{III.30}$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (III.20), on écrit W, P, E, N et S respectivement  $(i, j-1)$ ;  $(i, j)$ ;  $(i, j+1)$ ;  $(i+1, j)$ ;  $(i-1, j)$ . Les coefficients  $a_E, a_W, a_N$  et  $a_S$  sont pris au nœud  $(i, j)$ . Ainsi l'équation (III.20) peut s'écrire sous la forme:

$$a_P T^*(i, j) = a_E T^*(i, j+1) + a_W T^*(i, j-1) + a_N T^*(i+1, j) + a_S T^*(i-1, j) + b \quad \text{III.31}$$

### III.4.1. Discrétisation des Conditions aux limites

Pour satisfaire les conditions imposées à la température des parois, on doit avoir:

- ✓ Sur la paroi du cylindre circulaire extérieur (I=NI)

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_S = 0 \text{ et } S_T = 0$$

- ✓ Sur la paroi du cylindre circulaire intérieur (I=1)

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 1$$

### III.5. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ HV_{\eta}^* \omega^* - Pr. C_2 \frac{\partial \omega^*}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ HV_{\theta}^* \omega^* - Pr. C_2 \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta} \right] \\ = Pr. Ra. H. C_1 \left[ (f(\eta, \theta) \cdot \cos(\alpha) + g(\eta, \theta) \sin(\alpha)) \cdot \left( \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right. \\ \left. + (f(\eta, \theta) \sin(\alpha) - g(\eta, \theta) \cos(\alpha)) \cdot \left( \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation discrétisée (III.12), la fonction  $\phi = \omega^*$  ( $\omega^*$  la vorticité adimensionnelle) et le terme  $S_p = 0$ . Nous obtenons l'équation discrétisée de quantité de mouvement:

$$a_P \omega_P^* = a_E \omega_E^* + a_W \omega_W^* + a_N \omega_N^* + a_S \omega_S^* + b \quad \text{III. 32}$$

Avec:

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \text{III. 33}$$

$$b = S_0 \cdot \Delta V$$

$$\Delta V = H^2 \cdot \Delta \eta \cdot \Delta \theta \cdot 1$$

Les coefficients  $a_E, a_W, a_N$  et  $a_S$  ont pour expressions celles données par le système (III.16). Lorsque le coefficient  $\Gamma_{\phi} = Pr. C_2$  est égal à l'unité, comme nous l'avons montré

Dans le **tableau III.1**, aux interfaces e, w, n et s; les coefficients  $D_e, D_w, D_n$  et  $D_s$  se déduisent des expressions suivantes:

$$\left. \begin{aligned} D_n &= D_s = Pr \cdot C_2 \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e &= D_w = Pr \cdot C_2 \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad \text{III. 34}$$

Les nombres de Péclet dans le système (III.18) deviennent:

$$\left\{ \begin{aligned} P_n &= \frac{1}{Pr \cdot C_2} \cdot F_n \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= \frac{1}{Pr \cdot C_2} \cdot F_s \cdot \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= \frac{1}{Pr \cdot C_2} \cdot F_e \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= \frac{1}{Pr \cdot C_2} \cdot F_w \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right. \quad \text{III. 35}$$

Les coefficients  $F_e, F_w, F_n$  et  $F_s$  ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (III.25), (III.26), (III.27) et (III.28).

Dans le **tableau III.1**, nous pouvons constater que le terme constant  $S_0$  du terme de source est donnée par:

$$\begin{aligned} S_0 &= Pr \cdot Ra \cdot H \cdot C_1 \cdot \left[ (f(\eta, \theta) \cdot \cos(\alpha) + g(\eta, \theta) \sin(\alpha)) \cdot \left( \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right. \\ &\quad \left. + (f(\eta, \theta) \sin(\alpha) - g(\eta, \theta) \cos(\alpha)) \cdot \left( \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{III. 36}$$

Par conséquent, le coefficient b devient:

$$b = S_0 \cdot \Delta v \quad \text{Avec} \quad : \quad \Delta v = H^2 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1, \text{ b s'écrit donc:}$$

$$\begin{aligned} b &= Pr \cdot Ra \cdot C_1 \cdot \left[ (f(\eta, \theta) \cdot \cos(\alpha) + g(\eta, \theta) \sin(\alpha)) \cdot \left( \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right. \\ &\quad \left. + (f(\eta, \theta) \sin(\alpha) - g(\eta, \theta) \cos(\alpha)) \cdot \left( \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \right] \cdot H^3 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1 \end{aligned} \quad \text{III. 37}$$

Avec :

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^*(i+1,j) - T^*(i-1,j)}{2\Delta\eta} \quad \text{III. 38}$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^*(i,j+1) - T^*(i,j-1)}{2\Delta\theta} \quad \text{III. 39}$$

Pour homogénéiser on utilise les notations citées au paragraphe précédent, les nœuds

W, P, E, N et S deviennent respectivement  $(i, j - 1)$ ;  $(i, j)$ ;  $(i, j + 1)$ ;  $(i + 1, j)$ ;  $(i - 1, j)$ .

L'équation du mouvement discrétisée (III.32) s'écrit finalement:

$$a_P \omega_P^*(i, j) = a_E \omega_E^*(i, j + 1) + a_W \omega_W^*(i, j - 1) + \omega_N^* a_N(i + 1, j) + a_S \omega_S^*(i - 1, j) + b \quad \text{III. 40}$$

Les coefficients  $a_E, a_W, a_N$  et  $a_S$  et b sont pris au nœud  $(i, j)$ .

### III.5.1. Discrétisation des Conditions aux limites

En déterminant la vorticité  $\omega^*$  sur les parois, nous utilisons la méthode élaborée par ROACHE [50], qui a exprimé  $\omega^*$  en fonction de  $\psi^*$  et utilisée un développement de Taylor:

✓ condition sur la paroi du cylindre circulaire intérieur (I=1)

$$\omega_1^* = -\frac{1}{H^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \right] \Big|_{\eta=\eta_1} \quad \text{II.41}$$

Développons en série de Taylor la fonction de courant au voisinage de la paroi interne ( $i = 1, j$ ):

$$\psi^*(2, j) = \psi^*(1, j) + \frac{\eta \Delta}{1!} \frac{\partial \psi^*(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^*(1, j)}{\eta^2} + \dots \quad \text{III. 42}$$

La vorticité sur cette paroi s'écrit :

$$\omega^*(1, j) = -\frac{1}{H^2(1)} \left[ \frac{\psi^*(i, j + 1) - 2\psi^*(1, j) + \psi^*(1, j - 1)}{(\Delta \theta)^2} + \frac{2}{(\Delta \eta)^2} (\psi^*(2, j) - \psi^*(1, j)) \right] \quad \text{III. 43}$$

✓ Sur la paroi du cylindre extérieur (I=NI)

$$\omega_1^* = -\frac{1}{H^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right) \right] \Big|_{\eta=\eta_2} \quad \text{III.44}$$

La vorticité sur cette paroi s'écrit :

$$\begin{aligned} \omega^*(NI, j) = & -\frac{1}{H^2(NI)} \left[ \frac{\psi^*(NI, j+1) - 2\psi^*(NI, j) + \psi^*(NI, j-1)}{(\Delta\theta)^2} \right. \\ & \left. + \frac{2}{(\Delta\eta)^2} (\psi^*(NI-1, j) - \psi^*(NI, j)) \right] \end{aligned} \quad \text{III.45}$$

### III.6. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant

Récrivons l'équation adimensionnelle (II.47) sous la forme suivante:

$$-H^2 \omega^* = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \right)$$

L' quation (II.47) donne:

$$-H^2(i, j) \omega^*(i, j) = \left. \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} \right|_{i, j} + \left. \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} \right|_{i, j} \quad \text{III.46}$$

Pour discrétiser cette équation nous utiliserons le développement en série de Taylor, ce qui donne:

$$\begin{aligned} & -H^2(i, j) \omega^*(i, j) \\ = & \left[ \frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i-1, j) - 2\psi^*(i, j)}{(\Delta\eta)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i, j-1) - 2\psi^*(i, j)}{(\Delta\theta)^2} \right] \end{aligned} \quad \text{III.47}$$

Et qui conduit à écrire :

$$\begin{aligned} & -H^2(i, j) \omega^*(i, j) \\ = & \left[ \frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i-1, j) - 2\psi^*(i, j)}{(\Delta\eta)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i, j-1) - 2\psi^*(i, j)}{(\Delta\theta)^2} \right] \\ & - 2\psi^*(i, j) \left[ \frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \end{aligned} \quad \text{III.48}$$

La fonction de courant au nœud P sera donc exprimée en fonction de celle aux nœuds W, N, E et S et s'écrit:

$$\psi^*(i, j) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right]^{-1} \left[ \frac{\psi^*(i+1, j) + \psi^*(i-1, j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^*(i, j+1) + \psi^*(i, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + H^2(i, j)\omega^*(i, j) \right] \quad \text{III. 49}$$

### III.6.1. Discrétisation des Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées aux parois, que nous avons déterminées dans les équations (II.48) et (II.51), deviennent:

- ✓ Condition sur la paroi du cylindre circulaire intérieur (I=1)

$$\left. \frac{\partial\psi^*}{\partial\eta} \right|_{1,j} = \frac{-3\psi^*(1, j) + 4\psi^*(2, j) - \psi^*(3, j)}{2\Delta\eta} = 0$$

$$\psi^*(1, j) = \frac{4\psi^*(2, j) - \psi^*(3, j)}{3}$$

- ✓ Condition sur la paroi du cylindre circulaire extérieur (I=NI)

$$\psi^*(NI, j) = \frac{4\psi^*(NI-1, j) - \psi^*(NI-2, j)}{3} \quad \text{III. 50}$$

Nous obtenons donc un système d'équations linéaires que nous résolvons par la méthode itérative de "relaxations successives".

### III.7. Discrétisation des composantes de la vitesse

Les équations (II.46), nous donnent respectivement les composantes adimensionnelles  $v_\eta^*$  et  $v_\theta^*$  de la vitesse; **ROACHE [50]**, utilise les différences centrées pour obtenir une expression discrétisée de ces composantes, ce qui nous donne:

$$\begin{aligned} v_\eta^*(i, j) &= \frac{1}{H(i, j)} \left. \frac{\partial\psi^*}{\partial\theta} \right|_{i, j} \\ &= \frac{1}{H(i, j)} \left[ \frac{\psi^*(i, j+1) - \psi^*(i, j-1)}{2\Delta\theta} \right] \quad \text{III. 51. a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{\theta}^*(i, j) &= \frac{-1}{H(i, j)} \left. \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \right|_{i, j} \\ &= \frac{-1}{H(i, j)} \left[ \frac{\psi^*(i + 1, j) - \psi^*(i - 1, j)}{2\Delta\eta} \right]\end{aligned}\quad \text{III. 51. b}$$

$\forall (i, j)$  si  $i \neq 1; i \neq NI; j \neq 1; j \neq NN$

# Résultats et discussions

## IV.1. Introduction

Une simulation numérique de l'écoulement laminaire stationnaire par convection naturelle dans un espace annulaire délimité par deux cylindres concentriques horizontaux par un rapport des rayons  $RR=2$  et  $\alpha = 0$ , et remplis de nanofluides (Argent – eau) a été réalisée. La paroi cylindrique externe est maintenue isotherme à la température froide  $T_F$  et  $T_c$  la paroi cylindrique interne est maintenue isotherme à la température  $T_c > T_F$ . La simulation numérique est effectuée pour une marge de nombre de Rayleigh variant de  $10^3$  à  $10^5$  et une concentration volumique des nanoparticules (Argent) :  $\varphi= 0 - 12\%$ . Les équations qui régissent (équations aux dérivées partielles (EDP)) ont été résolues numériquement via la méthode des volumes finis en utilisant un schéma en loi de puissance (Power-Low) pour approcher les variations de  $\phi$  entre les points du maillage ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable [48]. Et leur résolution est effectuée à l'aide du code de calcul « **FLUENT** ». La construction de géométrie et leur maillage sont faits à l'aide du logiciel « **GAMBIT** ». Nous nous allons étudier l'effet de fraction en volume des nanoparticules sur les caractéristiques thermiques et dynamiques a l'intérieure de cavité.

## IV.2. Présentation du code de calcul

### IV.2.1. Code de calcul Fluent

Ansys-Fluent est un code de calcul CFD (Computational Fluid Dynamics) qui modélise tous les écoulements fluides, compressibles ou incompressibles, impliquant des phénomènes physiques complexes tels que la turbulence, le transfert thermique, les réactions chimiques et les écoulements multiphasiques, dans des configurations plus ou moins complexes.

Ansys-Fluent emploie la méthode des volumes finis comme procédé de discrétisation des équations qui gouvernent l'écoulement, tel que l'équation de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie.

### IV.2.2. Préprocesseur Gambit

Le logiciel Gambit permet à l'utilisateur de construire la géométrie du domaine de calcul (2D/3D) et de subdiviser ce dernier en petits volumes de contrôle ou cellules de calcul. L'ensemble de ces volumes élémentaires constitue le maillage. Le paramétrage se fait par une interface graphique puissante ce qui lui offre la flexibilité à réaliser et à mailler tout type de géométries complexes. La définition des conditions aux limites appropriées, au niveau des cellules qui coïncident ou touchent la frontière du domaine de calcul.

### IV.3. Test de maillage

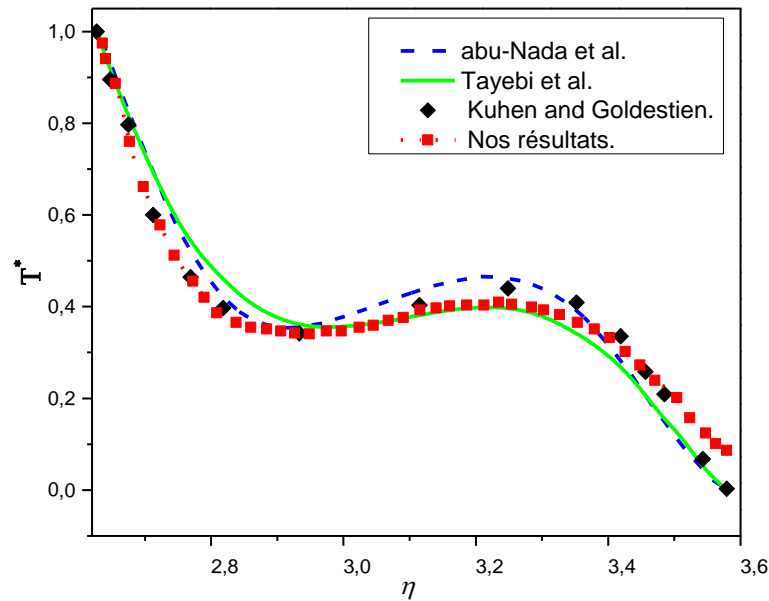
Pour vérifier l'effet du maillage sur les résultats numériques, plusieurs maillages uniformes ont été utilisés arbitrairement. Dans le **Tableau.IV.1** nous, présentons les valeurs de nombre de Nusselt moyen  $Nu_{moy}$  et les valeurs de fonction de courant  $\psi^*_{max}$  en fonction du nombre de nœuds pour deux cas de nombre de Rayleigh  $10^4$  et  $10^5$  utilisant l'eau pure, et nous a permis de choisir le maillage avec 13200 nœuds.

Nombre des nœuds		900	3400	13200	32000
$Ra = 10^3$	$Nu_{moy}$	2.869	2.836	2.803	2.798
	$\psi^*_{max}$	0.537	0.495	0.484	0.481
$Ra = 10^4$	$Nu_{moy}$	5.56	5.20	5.09	5.08
	$\psi^*_{max}$	3.086	2.89	2.48	2.477

**Tableau. IV.1.** Étude du maillage.

### IV.4. Validation des résultats

De manière à vérifier l'exactitude des résultats numériques obtenus dans le présent travail, une validation de notre simulation numérique a été faite en comparant nos résultats [61] avec d'autres travaux numériques d'Abu-Nad et al. [52], Tayebi et al. [53] et ceux expérimentaux de Kuhen et al. [51]. Ces travaux ont effectué pour un nombre de  $Ra=47000$  et un rapport des rayons  $RR=2.6$ .



**Figure. IV.1.** Comparaison de nos résultats [61] et ceux d'Abu-Nada et al. [52], Tayebi et al. [53] et Kuhlen et al [51].

#### IV.5. Discussion des résultats

La variation de Nusselt moyen le long du cylindre interne en fonction de la fraction volumique des nanoparticules d'Argent et pour différent Rayleigh est présenté dans la **Figure.IV.2**. Il est clair que pour tous les nombres de Rayleigh, Nusselt moyen augmente d'une manière quasi linéaire avec l'augmentation de la fraction volumique. Pour une fraction volumique donnée, les valeurs de Nusselt moyen pour  $Ra=10^5$  sont toujours supérieures comparées à celles de  $10^3$  et  $10^4$ .

**Figure.IV.3** montre la variation de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes concentrations volumiques de nanoparticules d'Ag. Le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation de Rayleigh, cette augmentation est plus considérable pour les nombres de  $Ra$  les plus élevés où la convection est le mode de transfert de chaleur dominant.

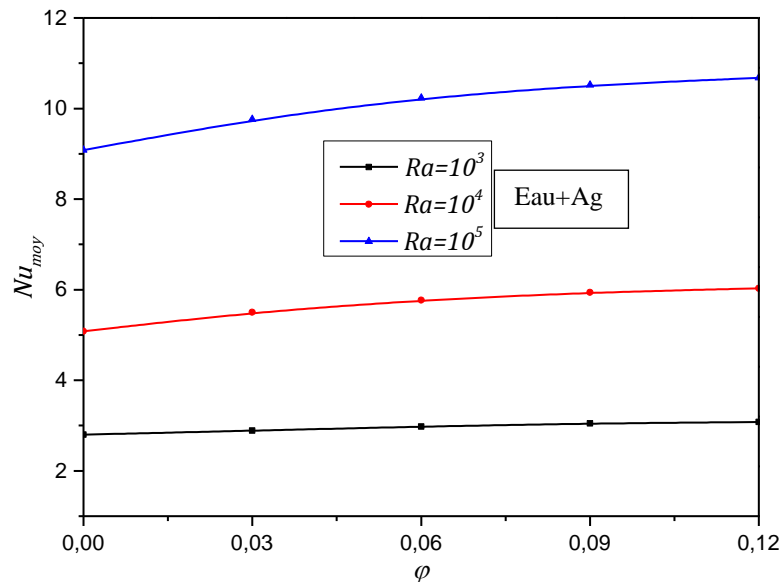


Figure. IV.2. Nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction de  $\phi$  et pour différents nombres de Rayleigh.

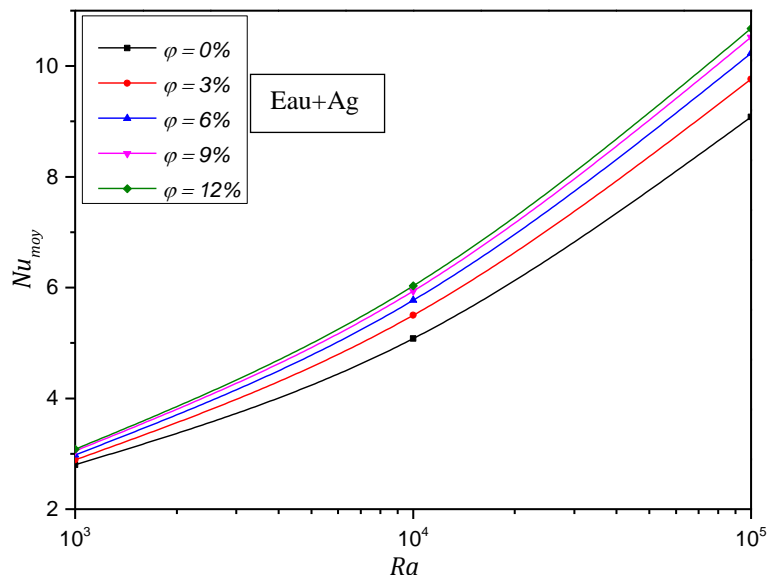
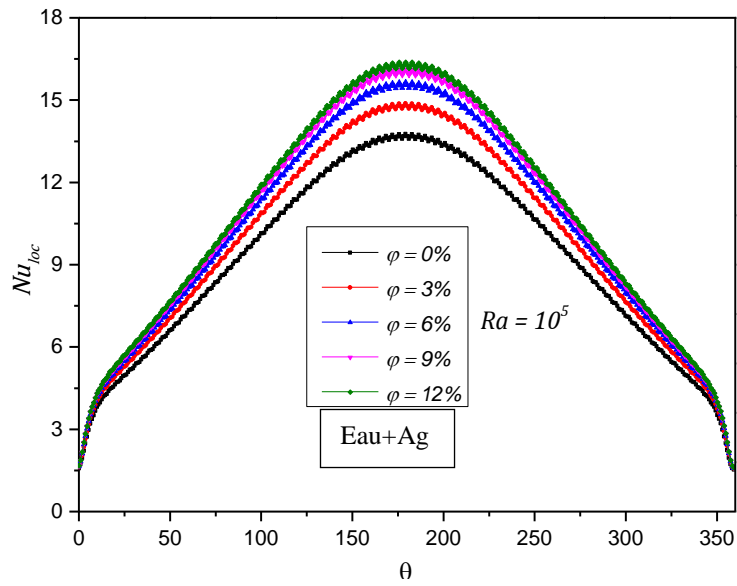
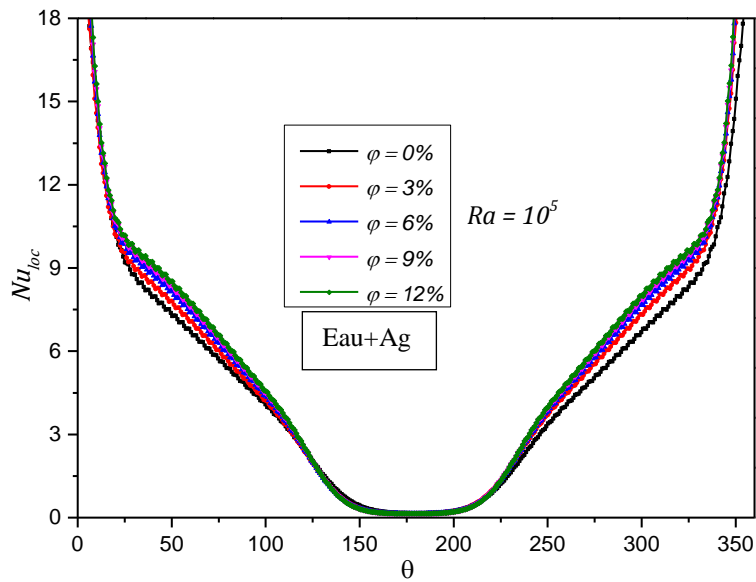


Figure. IV.3. Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh et pour différentes concentrations.



(a)



(b)

**Figure. IV.4.** Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne (a) et externe (b) pour différentes concentrations et pour  $Ra=10^5$ .

La **Figure. IV.4** D'après cette figure on observe une distribution symétrique du nombre de Nusselt le long de la paroi et les valeurs maximales sont observées sur la surface de cylindre externe. Les valeurs minimales du Nusselt sont observées au milieu de la paroi intrene . En plus, les valeurs maximales de Nusselt affectés beaucoup par la présence des nanoparticules tandis que les valeurs minimales non sont pas affectés.

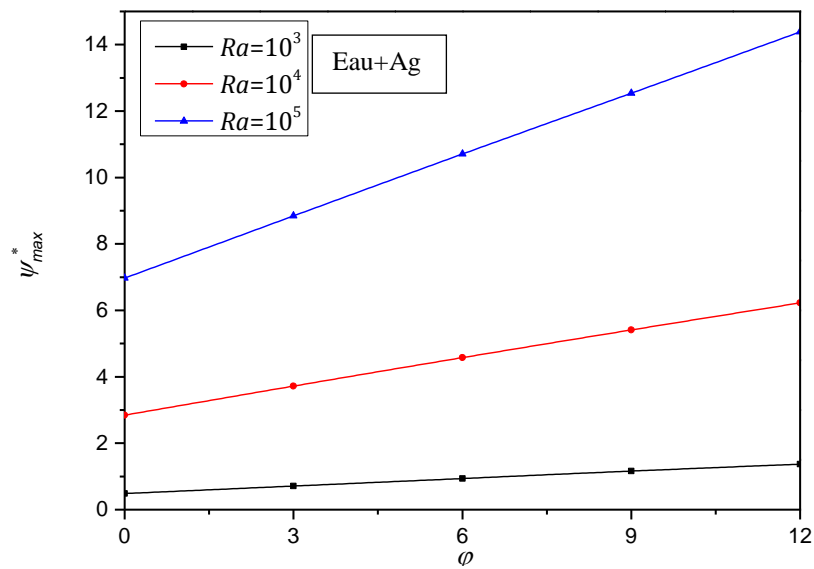


Figure. IV.5. Variation de fonction de courant maximale en fonction des concentrations aux différents nombres de Rayleigh.

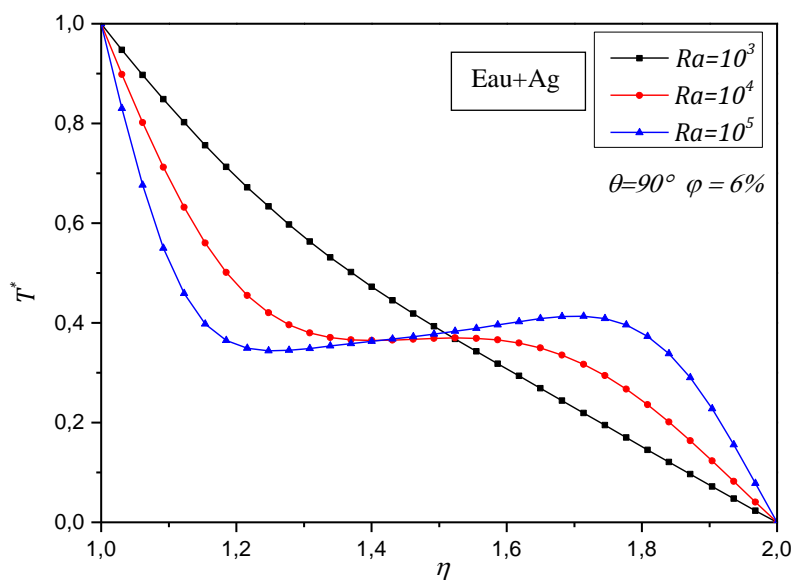
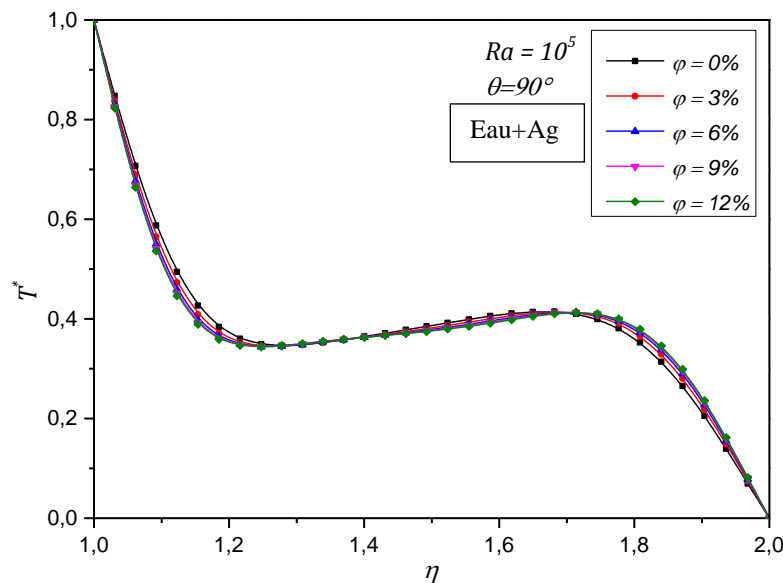


Figure. IV.6. Profil de la température adimensionnelle le long de la section médiane  $\theta=90^\circ$  pour différents nombres de Rayleigh et  $\phi=6\%$ .



**Figure. IV.7.** Profil de la température le long de la section médiane  $\theta=90^\circ$  pour différents concentrations et  $Ra=10^5$ .

La valeur maximale absolue de fonction de courant en fonction de la fraction volumique de nanoparticule du Ag aux différents nombres de Rayleigh est affichée dans la **Figure.IV.5**. Pour des valeurs faibles et modérés de nombre de Rayleigh ( $10^3$  et  $10^4$ ), le transfert de chaleur à l'intérieur de la cylindre se fait principalement par conduction quand les valeurs maximales absolues de fonction de courant  $\psi_{max}^*$  sont petites et augmentes légèrement par l'augmentation de la concentration volumique  $\varphi$ . Le mécanisme de transfert de chaleur devient dominant pour  $10^5$  et devient plus considérable en augmentant de la concentration, cette augmentation permanente de la fonction de courant explique par la valeur élevée de la conductivité thermique et par conséquent la diffusivité thermique.

Les **Figure. IV.6 et IV.7** montrent les profils de température adimensionnelle dans le cylindre en présence des nanoparticules d'Argent. Où nous constatons des valeurs comprises entre une valeur maximale correspondante à la température au voisinage de la paroi chaude et des faibles valeurs de température au voisinage de la paroi froide. Pour le cas de  $Ra=10^3$ , on constate que la distribution de la température étant une droite de pente négative correspondante à un régime purement conductif où le fluide se comporte comme un solide qui transmet de la chaleur par conduction thermique de la paroi interne vers la paroi exetrne.

Les **figures IV.8-IV.10** illustrent le contour de la fonction de courant et isothermique pour une cavité remplie d'eau avec des fractions volumiques entre 0 et 12% de nanoparticules et

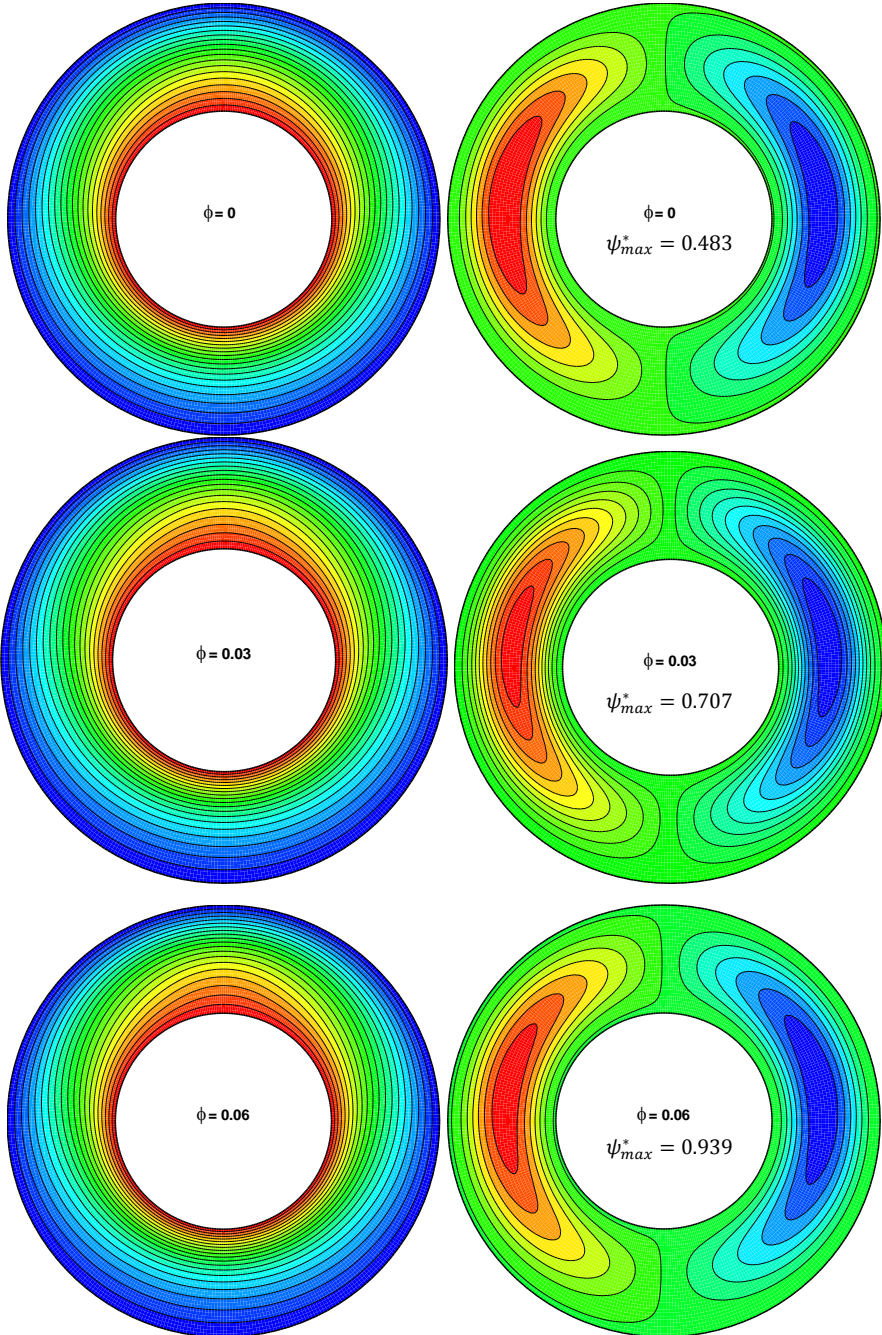
pour une gamme de nombre de Rayleigh de  $10^3$  -  $10^5$ . L'écoulement symétrique montre la formation de deux vortex contrarotatifs pour toutes les valeurs du nombre de Rayleigh.

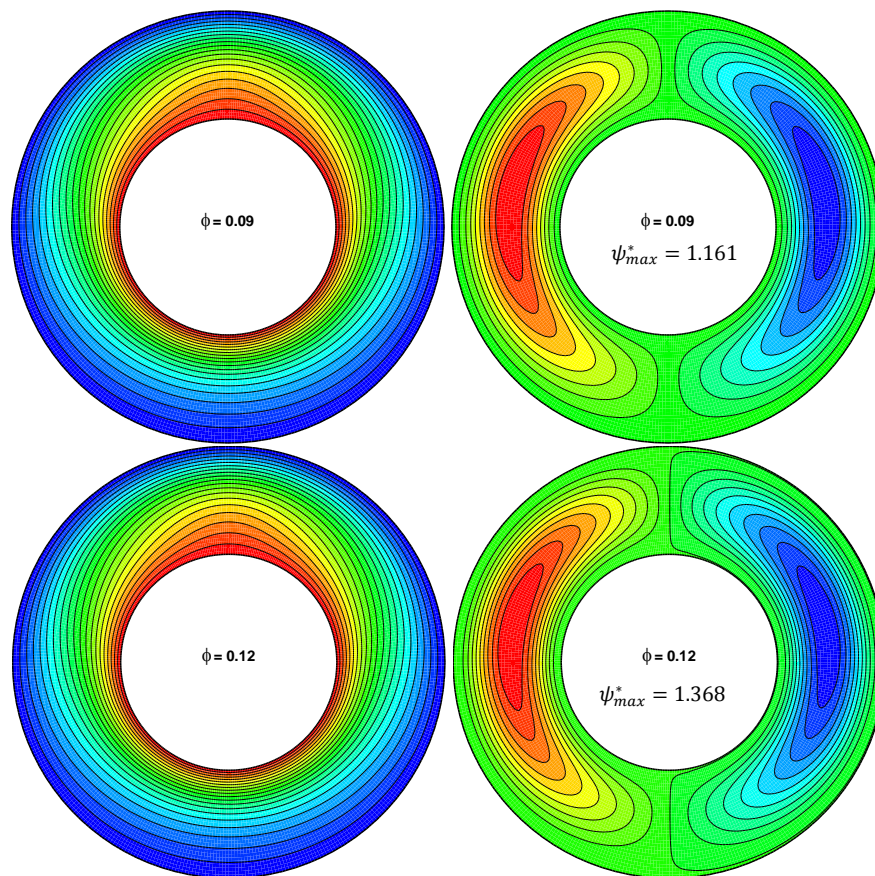
En fait, les forces dynamiques générées en raison des différences de température du fluide forcent le liquide à se lever au milieu et à descendre sur les parois froides de cylindre.

Ce mouvement du fluide constitue deux cellules contrarotatives circulant dans l'enceinte. Il est observé que, même si la forme des cellules ne change pas avec le nombre de  $Ra$ , leur intensité augmente par l'addition des nanoparticules de argent.

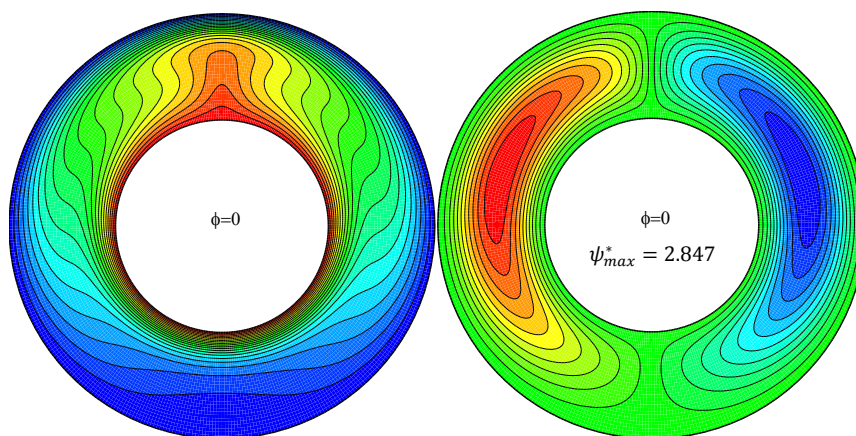
Les isothermes ont également une forme symétrique par rapport à l'axe horizontal quel que soit la valeur du nombre de Rayleigh, cependant, elles affichent des comportements différents lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Pour les cas  $Ra= 10^3$  et  $10^4$ , où la conduction domine le régime d'écoulement, les isothermes sont distribuées à proximité de la paroi interne. En outre, dans ces figures, les isothermes sont affectées par la présence de nanoparticules (Ag). En fait, l'existence de nanoparticules de argent provoque une accumulation des isothermes près de la paroi interne ce qui signifie une amélioration du taux de transfert de chaleur ce qui est indiqué par l'augmentation du nombre de Nusselt. Cet effet est plus prononcé pour des nombres de Rayleigh élevés .

De plus, il est observable qu'en augmentant le nombre de Rayleigh, le vortex central se déforme d'une forme ovale à une forme étirée, le centre du vortex intérieur se déplace vers le haut en raison de l'effet de flottabilité et la moitié inférieure de notre espace annulaire devient une zone quasi statique .





**Figure. IV.8.** Représentation des isothermes et des fonctions de courant pour nombre de Rayleigh  $Ra=10^3$  et différentes concentrations.



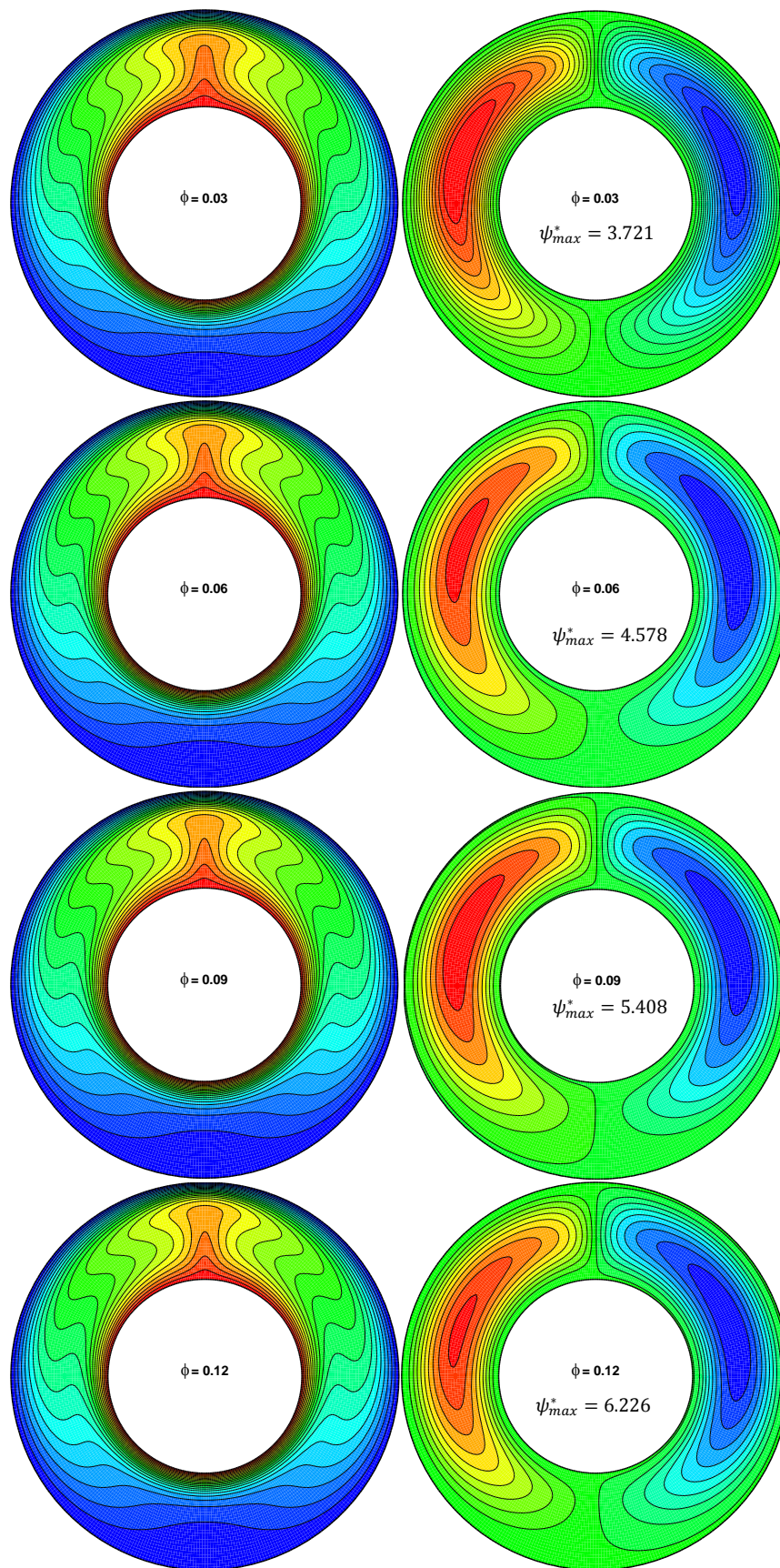
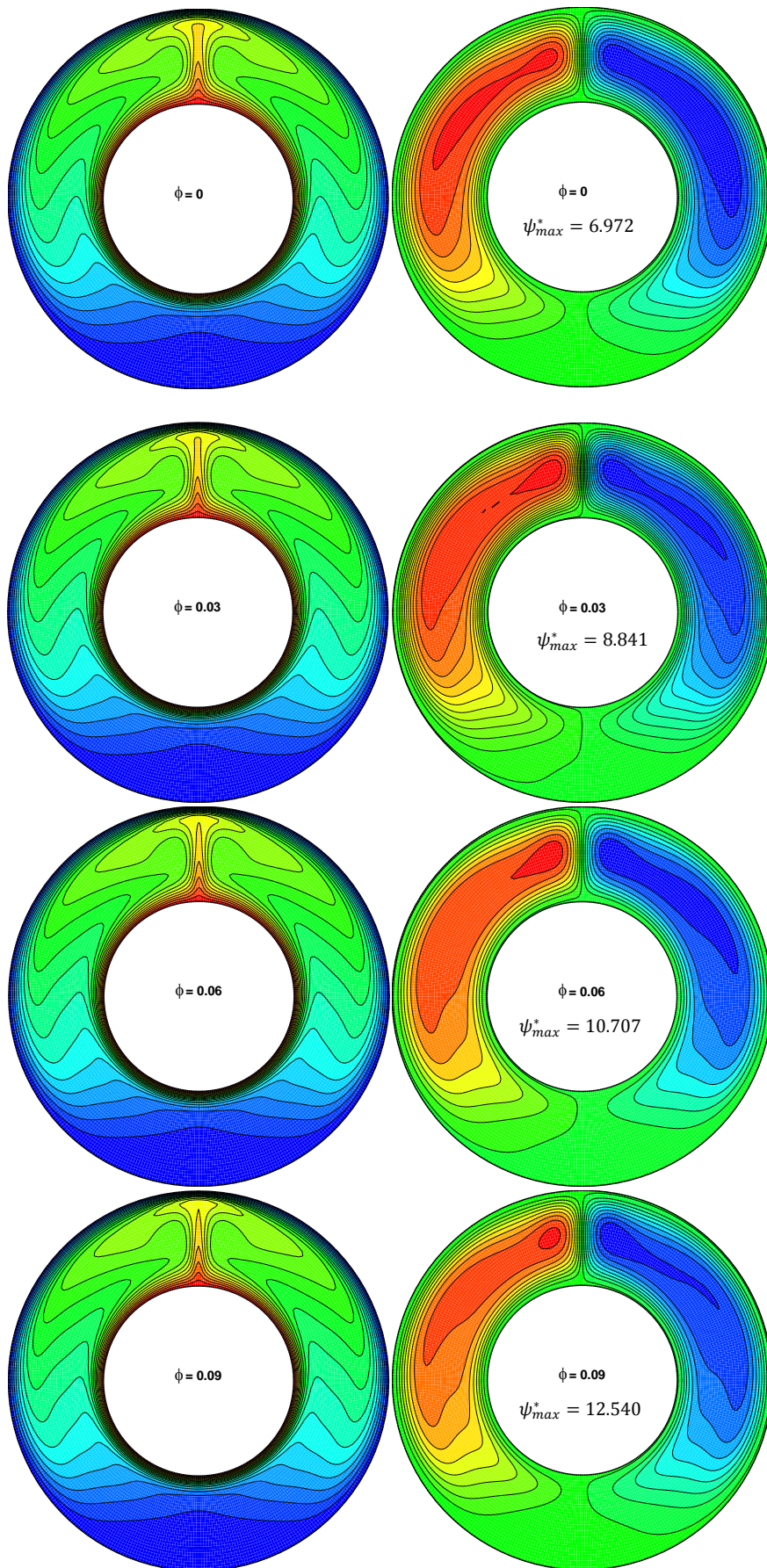
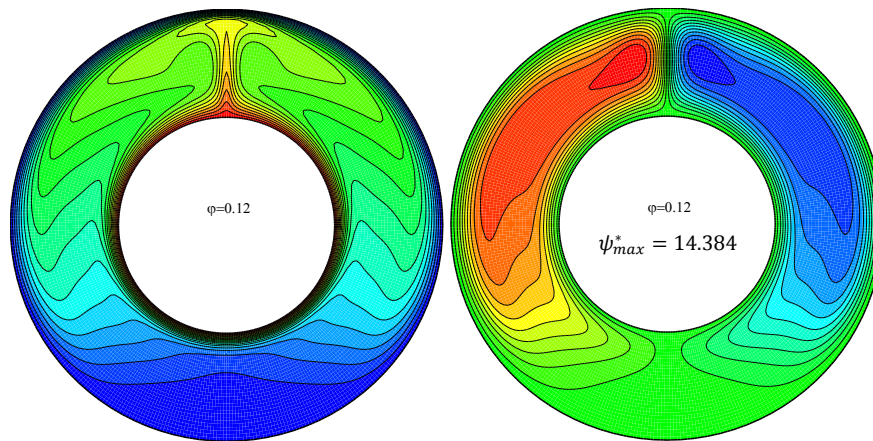


Figure. IV.9. Représentation des isothermes et des fonctions de courant pour  $Ra=10^4$  et différentes concentrations volumiques  $\phi$ .





**Figure. IV.10.** Représentation des isothermes et des fonctions de courant pour  $Ra=10^5$  et différentes concentrations volumiques  $\varphi$ .

Le **tableau IV.2** et L’histogramme (**Figure. IV.11**) ci-dessous illustre, en pourcentage, le taux d’amélioration (Efficacité) du transfert thermique par rapport le fluide pur pour notre configuration. Il est clair que l’inclusion de nanoparticules d’Argent au sein de l’eau pure a considérablement amélioré le transfert thermique. Ces augmentations dépendent de nombre de Rayleigh où les valeurs maximales de l’efficacité sont enregistrées pour  $Ra=10^4$ .

L’expression d'amélioration est définie par :

$$E(\%) = \frac{Nu_{moy}(\varphi) - Nu_{moy}(\varphi = 0)}{Nu_{moy}(\varphi = 0)} \times 100$$

	E (%)			
	$\varphi = 3\%$	$\varphi = 6\%$	$\varphi = 9\%$	$\varphi = 12\%$
$Ra = 10^3$	3.385	6.569	8.905	10.269
$Ra = 10^4$	8.156	13.582	16.847	18.566
$Ra = 10^5$	7.439	12.624	15.859	17.574

**Tableau. IV.2.** Efficacité de transfert de chaleur en présence de nanofluide (Eau+Argent).

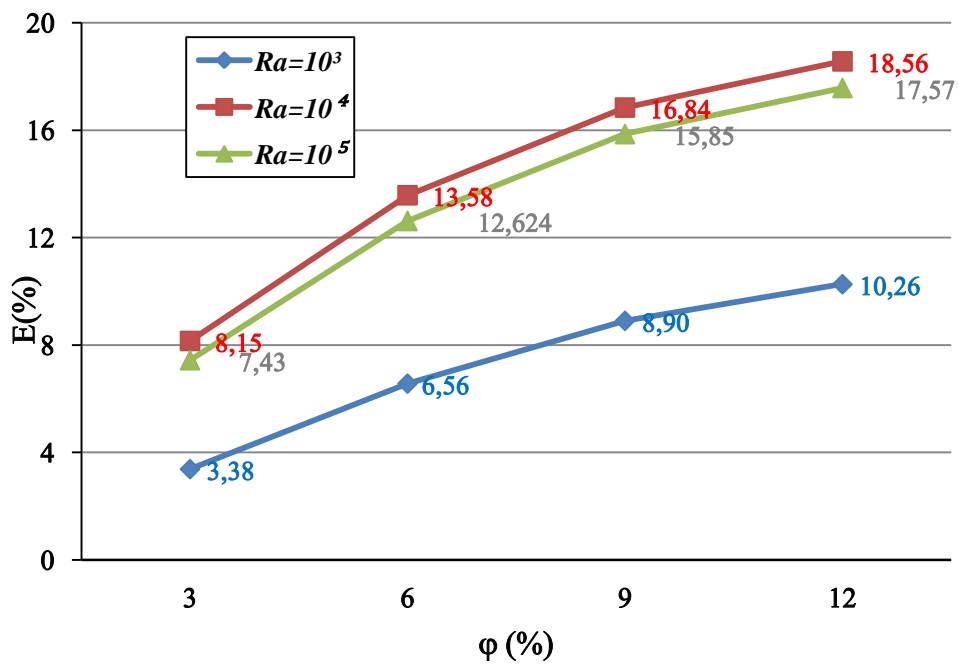


Figure. IV.11. Histogramme de l'efficacité du transfert thermique du nanofluide (Eau+Argent).

## **CONCLUSION GENERALE**

L'objectif de ce travail consiste en la modélisation mathématique et la simulation numérique de la convection naturelle dans un échangeur thermique à tube cylindrique concentrique horizontal et rempli de nanofluide. La configuration géométrique du modèle physique est un espace annulaire bidimensionnel entre deux cylindres concentriques. Les deux parois de l'espace annulaire sont maintenues isothermes,  $T_c$  pour la paroi interne et  $T_F$  pour la paroi externe, avec  $T_c > T_F$ . L'écoulement est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles : les équations de continuité et des quantités de mouvement et les équations de la chaleur sont exprimées dans le système de coordonnées dites "bipolaires". Les nanofluides sont assimilés à des fluides monophasiques, newtoniens et incompressibles dont les équations de Navire Stocks et de l'énergie est établie avec la prise en compte de l'approximation de Boussinesq. Et leur résolution est effectuée à l'aide du code de calcul « **FLUENT** ». Basé sur la méthode des volumes finis pour la résolution numérique des équations gouvernantes. La construction de géométrie et leur maillage sont faits à l'aide du logiciel « **GAMBIT** ». Nous avons validé notre procédure de simulation numérique en comparant nos résultats avec ceux d'autres chercheurs.

On propose dans ce travail d'étudier l'influence de la concentration en nanoparticules Argent, égale à  $\varphi = 0 - 12\%$ , dispersées dans un fluide de basse eau pure sur l'écoulement convectif et le transfert de chaleur pour une gamme du nombre de Rayleigh ( $Ra=10^3, 10^4, 10^5$ ).

Les résultats obtenus sont présentés sous forme de lignes de courant et d'isothermes, et pour mieux comprendre l'évolution de l'écoulement les profils de vitesse et de température sont aussi présentés. En outre, l'évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction des différents paramètres de contrôle est présentée, et ceci pour quantifier les échanges thermiques dans la configuration étudiée.

Les résultats ont révélé ce qui suit :

- ❖ Le flux est maintenu symétrique à l'intérieur de l'anneau par rapport à l'axe vertical, quels que soient le nombre de Rayleigh et la fraction volumique de nanoparticules.
- ❖ À mesure que Rayleigh augmente, la convection s'amplifie et l'effet de la concentration en volume de nanoparticules sur l'intensité du flux est plus important lorsque le nombre de Rayleigh est élevé.

- ❖ L'utilisation de nanofluides contenant des nanoparticules d'argent augmente le taux de transfert de chaleur avec l'augmentation de  $\phi$ .
- ❖ L'intensité du flux augmente avec l'augmentation de la fraction volumique de nanoparticules pour toute la gamme de Rayleigh.
- ❖ L'efficacité thermique dépend du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules.
- ❖ Les valeurs du taux d'amélioration maximal sont obtenues avec des nombres de Rayleigh modérés ( $Ra = 10^4$ ), tandis que les valeurs minimales sont enregistrées pour des valeurs de Rayleigh faibles.

D'autres recherches théoriques et expérimentales sont nécessaires afin d'être en mesure d'utiliser les nanofluides pour l'amélioration du transfert de chaleur par convection naturelle telle que la taille des nanoparticules, la forme des nanoparticules, la température d'opération du nanofluide et les propriétés thermophysiques...

# Annexe

## **A .1. Notions sur la convection**

### **A.1.1. Définition**

La convection est une mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes, L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement

### **A.1.2. Type de convection**

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement Aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée. Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite mixte.

### **A.1.3. La convection naturelle**

En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densité due à la non uniformité du champ de température. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut, suivant un mécanisme analogue a celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions a température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants descendants se produits pour les parties du fluide dont la température est inférieure a celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors dus a des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre. L'intervention du poids a pour effet de donner a la verticale un rôle privilégié. La

définition de la géométrie d'un système convectif doit donc faire intervenir la forme et les dimensions ainsi que la disposition par rapport à la verticale.

Les effets de convection naturelle sont familiers. On peut les observer quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique, les vents, les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle. Pour formaliser la convection naturelle, il faut décrire le couplage des champs de température, de pression et de vitesse à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie..

## **A.2. Domaines d'applications des nanofluides**

Les nanofluides peuvent être employés pour améliorer le transfert de chaleur et l'efficacité énergétique dans plusieurs systèmes thermiques, quelques exemples d'applications seront présentés.

### **✓ Les systèmes thermiques**

Le mélange d'éthylène-glycol et l'eau, sont utilisés comme liquide de refroidissement dans les moteurs des véhicules. L'addition des nanoparticules dans ces liquides ce dernier améliore le taux de refroidissement. Ce point est étudié par plusieurs groupes de chercheurs, **Tzeng et al. [54]** ont dispersé les nanoparticules de CuO et Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> dans l'huile de refroidissement du moteur de transmission. Dans une autre application, **Zhang et al [55]** ont rapporté une étude pour réduire l'usure (lubrification) à l'aide des nanoparticules, et améliorer les propriétés tribologiques, et la résistance à l'usure avec la réduction du frottement entre les éléments mécaniques mobiles.

### **✓ Les systèmes électroniques**

Dans les circuits intégrés, les nanofluides ont été considérés comme fluides de refroidissement. Pour cela plusieurs études ont été effectuées. **Tsai et al. [56]** ont employé un nanofluide à base d'eau pour refroidir une unité centrale de traitement dans un microordinateur. De leur côté, **Ma et al. [57]** ont étudié l'effet du nanofluide sur les possibilités de transport de la chaleur d'un caloduc d'oscillation, ils ont prouvé qu'à la puissance d'entrée de 80 W, et seulement pour une concentration volumique de  $\varphi = 1\%$ , la différence de température entre le vaporisateur et le condensateur est de 16.6°C.

### **✓ Les systèmes militaires**

Les exemples des applications militaires incluent le refroidissement de l'électronique de puissance et les armes d'énergie dirigée. Ces derniers impliquent des flux thermiques très élevés ( $q > 500$  à  $1000 \text{ W/cm}^2$ ), où les nanofluides ont montrés leur efficacité pour refroidir ces systèmes, et aussi les autres systèmes militaires, y compris les véhicules militaires, les sous-marins, et les diodes lasers à haute puissance.

#### ✓ **Les systèmes spatiaux**

Pour les applications dans l'espace, **You et al. [58]** et **Vassallo et al. [59]** ont effectué des études pour montrer que la présence des nanoparticules dans le fluide de refroidissement en électronique générale joue un rôle très important dans les applications de l'espace où la densité de puissance est très élevée.

#### ✓ **Les systèmes nucléaires**

L'institut de technologie de Massachusetts a réservé un centre interdisciplinaire uniquement pour la nouvelle nanotechnologie (nanofluide) dans l'industrie de l'énergie nucléaire. Actuellement, ils évaluent l'impact potentiel de l'utilisation des nanofluides sur la sûreté neutronique, et de la performance économique des systèmes nucléaires.

#### ✓ **La biomédecine**

Les nanofluides et les nanoparticules ont beaucoup d'applications en biomédicale. Par exemple, pour éviter quelques effets secondaires des méthodes traditionnelles de traitement du cancer, les nanoparticules à base de fer ont été employées comme transporteur des drogues. Aussi pour une chirurgie plus sûre en produisant le refroidissement efficace autour de la région chirurgicale, **Jordan et al. [60]** ont effectué une étude où les nanofluides pourraient être employés pour produire une température plus élevée autour des tumeurs pour tuer les cellules cancéreuses sans affecter les cellules saines voisines.

#### ✓ **D'autres applications**

Il y a des situations nombreuses où l'augmentation de l'efficacité du transfert thermique peut être liée à la qualité, la quantité, et au coût d'un produit d'un processus. Par exemple, dans l'industrie de l'énergie renouvelable, les nanofluides sont utilisés pour augmenter le transfert de chaleur à partir des capteurs solaires aux réservoirs de stockage et pour augmenter la densité d'énergie. Les liquides réfrigérants de nanofluide ont une application potentielle

dans la majorité des industries de transformation, telles que les matériaux, la production chimique, la nourriture, la boisson, le pétrole et le gaz.

### A.3. Technique de sous-relaxation

Parmi les méthodes de résolution des systèmes d'équations, on distingue les méthodes itératives. Ces dernières sont généralement plus utilisées pour :

- ✓ Des systèmes de grande taille.
- ✓ Des systèmes dont les équations algébriques sont à caractère non linéaire et couplé.

Dans cette catégorie de méthodes, on utilise la technique de relaxation pour contrôler la convergence du processus itératif (ralentir ou accélérer la convergence). Elle se présente comme suit :

Soit l'équation discrétisée de la variable  $\phi$

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad \text{A. 1}$$

Ou encore :

$$\phi_P = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_P} \quad \text{A. 2}$$

A l'itération  $(k+1)$ , on peut écrire :

$$\phi_P^{k+1} = \phi_P^k + \left[ \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^k \right] \quad \text{A. 3}$$

La quantité, entre crochets, dans l'équation (A.3) représente la variation de  $\phi$  produite par une itération courante ou tout simplement le résidu.

La technique de relaxation a pour but de diminuer les résidus d'une première approximation puisque ces résidus sont nuls pour la solution exacte, ce qui revient à introduire un facteur de relaxation  $\alpha_\phi$  :

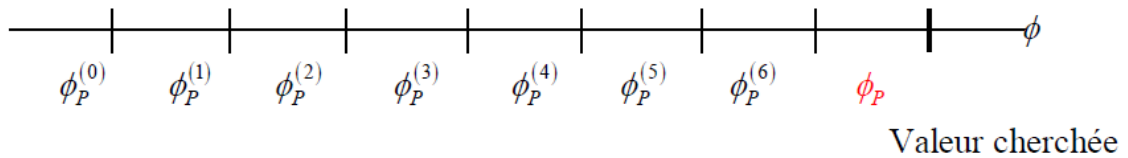
$$\phi_P^{k+1} = \phi_P^k + \alpha_\phi \left[ \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^k \right]$$

En pratique,  $\alpha_\phi$  est défini tel que :  $0 < \alpha_\phi < 2$

Si :  $2 > \alpha_\phi$ , le processus diverge souvent.

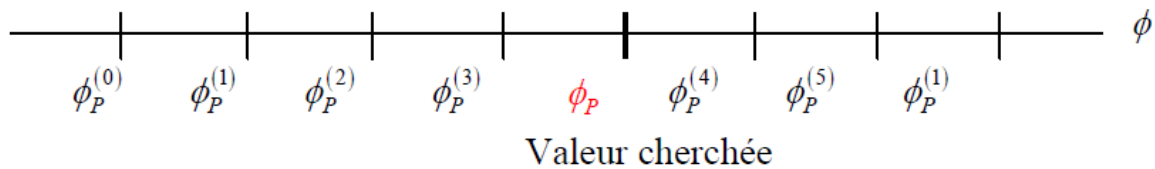
Deux cas sont généralement rencontrés :

1.  $1 < \alpha_\phi < 2$ : on est en présence d'une sur-relaxation. Cette valeur de  $\alpha_\phi$  est utilisée pour accélérer la convergence d'un processus itératif déjà convergent (figure suivante).



**Figure A.1.** Évolution possible des  $\phi_P^k$  dans un processus convergent ; nécessité d'une sur-relaxation

2.  $0 < \alpha_\phi < 1$ : il s'agit d'une sous-relaxation. Dans ce cas, la valeur de  $\alpha_\phi$  permet souvent de faire converger un processus divergent ou encore de diminuer les variations des variables dépendantes d'une itération à l'autre (figure suivante).



**Figure A.2.** Évolution possible des  $\phi_P^k$  dans un processus divergent ; nécessité d'une sous-relaxation

La technique de sous-relaxation est très conseillée pour les problèmes non linéaires afin d'éviter la divergence. Dans notre cas, les variables,  $U$ ,  $V$  et  $T$ , sont sous-relaxées tels que donné par l'équation (A.3). Par contre, la pression est sous-relaxée comme suit :

$$P = P^* + \alpha_\phi P^{**}$$

# Références bibliographiques

- [1]. Halelfadl, S. (2014). Caractérisation des propriétés thermo-physiques et d'échanges de chaleur des nanofluides à base de nanotubes de carbone (Doctoral dissertation).
- [2]. Dubois, G. (2018). Modeling and Simulation: Challenges and Best Practices for Industry. CRC Press.
- [3]. T. Taybi, (2017): introduction à la CFD (Dynamique des Fluides Numérique).
- [4]. Polyanin, A. D., & Manzhirov, A. V. (2006). Handbook of mathematics for engineers and scientists. CRC Press.
- [5]. Moon, P., & Spencer, D. E. (2012). Field theory handbook: including coordinate systems, differential equations and their solutions. Springer.
- [6]. Bishop, E. H., Kolflat, R. S., Mack, L. R., & Scanlan, J. A. (1964). Photographic studies of convection patterns between concentric spheres. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers Journal, 3(2), 47.
- [7]. Bishop, E. H., Mack, L. R., & Scanlan, J. A. (1966). Heat transfer by natural convection between concentric spheres. International Journal of Heat and Mass Transfer, 9(7), 649-662.
- [8]. Lee, J. H., & Lee, T. S. (1981). Natural convection in the annuli between horizontal confocal elliptic cylinders. International Journal of Heat and Mass Transfer, 24(10), 1739-1742.
- [9]. Schreiber, W. C., & Singh, S. N. (1985). Natural convection between confocal horizontal elliptical cylinders. International journal of heat and mass transfer, 28(4), 807-822.
- [10]. Chmaïsem, W., Suh, S. J., & Daguënet, M. (2002). Numerical study of the Boussinesq model of natural convection in an annular space: having a horizontal axis bounded by circular and elliptical isothermal cylinders. Applied thermal engineering, 22(9), 1013-1025.
- [11]. Cheng, C. H., & Chao, C. C. (1996). Numerical prediction of the buoyancy-driven flow in the annulus between horizontal eccentric elliptical cylinders. Numerical Heat Transfer, Part A Applications, 30(3), 283-303.
- [12]. Zhu, Y. D., Shu, C., Qiu, J., & Tani, J. (2004). Numerical simulation of natural convection between two elliptical cylinders using DQ method. International Journal of Heat and Mass Transfer, 47(4), 797-808.

- [13]. Elshamy, M. M., Ozisik, M. N., & Coulter, J. P. (1990). Correlation for laminar natural convection between confocal horizontal elliptical cylinders. *Numerical heat transfer*, 18(1), 95-112.
- [14]. Djezzar, M., & Daguinet, M. (2005). Contribution à l'étude de la convection dans différents espaces annulaires, soumis à différentes conditions de chauffage (Doctoral dissertation, Thèse de Doctorat d'état, Université Mentouri Constantine).
- [15]. Djezzar, M., Chaker, A., & Daguinet, M. (2005). Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts influence of the internal eccentricity. *Revue des énergies renouvelables*, 8(1).
- [16]. Djezzar, M., Chaker, A., & Daguinet, M. (2005). Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts influence of the internal eccentricity. *Revue des énergies renouvelables*, 8(1).
- [17]. Djezzar, M., & Daguinet, M. (2006). Natural steady convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts: Influence of the slope angle.
- [18]. Roschina, N. A., Uvarov, A. V., & Osipov, A. I. (2005). Natural convection in an annulus between coaxial horizontal cylinders with internal heat generation. *International journal of heat and mass transfer*, 48(21-22), 4518-4525.
- [19]. Shi, Y., Zhao, T. S., & Guo, Z. L. (2006). Finite difference-based lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer in a horizontal concentric annulus. *Computers & Fluids*, 35(1), 1-15.
- [20]. B. Dukaa, C. Ferrariob, A. Passerinic, S. Pivac, (2007): Non-linear approximations for natural convection in a horizontal annulus, *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, vol. 42 pp. 1055 – 1061 .
- [21]. Shu, C., & Wu, Y. L. (2002). Domain-free discretization method for doubly connected domain and its application to simulate natural convection in eccentric annuli. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(17-18), 1827-1841.
- [22]. Ghernouz, C. Etude numérique du modèle de Boussinesq de la convection naturelle, laminaire et permanente, entre deux cylindres excentrés horizontaux.
- [23]. T. Tayebi and D. Mahfoud, (2012): Numerical Simulation of Natural Convection in a Solar Chimney, *International Journal of Renewable Energy Research (IJRER)*, vol. 2, pp. 712-717.

- [24]. Tayebi, T., & Djeddar, M. (2013). Numerical analysis of flows in a solar chimney power plant with a curved junction. *International Journal of Energy Science (IJES)* Volume, 3.
- [25]. Tingzhen, M., Wei, L., Guoling, X., Yanbin, X., Xuhu, G., & Yuan, P. (2008). Numerical simulation of the solar chimney power plant systems coupled with turbine. *Renewable energy*, 33(5), 897-905.
- [26]. Tayebi, T. (2014). Contribution a l'étude numerique de la convection naturelle laminaire d'un systeme radial de chauffage solaire.
- [27]. dos Santos Bernardes, M. A., Valle, R. M., & Cortez, M. F. B. (1999). Numerical analysis of natural laminar convection in a radial solar heater. *International journal of thermal sciences*, 38(1), 42-50.
- [28]. Ferdous, N., Islam, M. T., & Mamun, M. A. H. (2009). Natural convection and radiation in circular and arc cavity. In *Proceeding of International Conference on Mechanical Engineering*, Dhaka, Bangladesh.
- [29]. Nobari, M. R. H., & Mehrabani, M. T. (2010). A numerical study of fluid flow and heat transfer in eccentric curved annuli. *International Journal of Thermal Sciences*, 49(2), 380-396.
- [30]. Liu, Y., Cui, J., Jiang, Y. X., & Li, W. Z. (2011). A numerical study on heat transfer performance of microchannels with different surface microstructures. *Applied Thermal Engineering*, 31(5), 921-931.
- [31]. M. Zakir Hossain and A.K. M. Sadrul Islam, (2004): Numerical Investigation of Unsteady Flow and Heat Transfer in Wavy Channels, 15th Australasian Fluid Mechanics Conference the University of Sydney, Sydney, Australia 13 – 17.
- [32]. Hedlund, C. R., & Ligrani, P. M. (1998). Heat transfer in curved and straight channels with transitional flow. *International journal of heat and mass transfer*, 41(3), 563-573.
- [33]. Facao, J., & Oliveira, A. C. (2005). Modeling laminar heat transfer in a curved rectangular duct with a computational fluid dynamics code. *Numerical Heat Transfer, Part A, Applications*, 48(2), 165-177.
- [34]. Wang, L. P., & Du, M. H. (2008). Direct simulation of viscous flow in a wavy pipe using the lattice Boltzmann approach. *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*, 1(1), 20-29.
- [35]. Mondal, R. N., Huda, M. A., Ahmmed, S. F., & Tarafder, D. (2007). Effects of secondary flow on convective heat transfer through a curved rectangular duct. *Journal of Applied Sciences Research*, 3(12), 1842-1850.

- [36]. Öztop, H. F. (2005). Numerical study of flow and heat transfer in curvilinear ducts: applications of elliptic grid generation. *Applied mathematics and computation*, 168(2), 1449-1460.
- [37]. Chamkha, A. J., & Al-Mudhaf, A. (2005). Unsteady heat and mass transfer from a rotating vertical cone with a magnetic field and heat generation or absorption effects. *International journal of thermal sciences*, 44(3), 267-276.
- [38]. Yuan, X., Tavakkoli, F., & Vafai, K. (2015). Analysis of natural convection in horizontal concentric annuli of varying inner shape. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 68(11), 1155-1174.
- [39]. Akbar, N. S. (2015). Entropy generation and energy conversion rate for the peristaltic flow in a tube with magnetic field. *Energy*, 82, 23-30.
- [40]. Pop, E., Mann, D., Wang, Q., Goodson, K., & Dai, H. (2006). Thermal conductance of an individual single-wall carbon nanotube above room temperature. *Nano letters*, 6(1), 96-100.
- [41]. Zhang, S., Xia, M., Zhao, S., Xu, T., & Zhang, E. (2003). Specific heat of single-walled carbon nanotubes. *Physical Review B*, 68(7), 075415
- [42]. Abu-Nada, E., Masoud, Z., & Hijazi, A. (2008). Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35(5), 657-665.
- [43]. Bejan, A. (2013). *Convection heat transfer*. John Wiley & sons.
- [44]. Faghri, A., Zhang, Y., & Howell, J. R. (2010). *Advanced heat and mass transfer*. Global Digital Press.
- [45]. Maxwell, J. C. (1954). *Electricity and magnetism (Vol. 2)*. New York: Dover
- [46]. Xue, Q. Z. (2005). Model for thermal conductivity of carbon nanotube-based composites. *Physica B: Condensed Matter*, 368(1-4), 302-307.
- [47]. Brinkman, H, (1952): The viscosity of concentrated suspensions and solutions. *The Journal of Chemical Physics*, 20(4): p. 571-571.
- [48]. Patankar, S. (2018). *Numerical heat transfer and fluid flow*. Taylor & Francis.
- [49]. Nogotov, E. F. (1978). Applications of numerical heat transfer. *STIA*, 79, 14672.79.
- [50]. Roache, P. J. *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa (1982). Sites Web.
- [51]. Kuehn, T. H., & Goldstein, R. J. (1978). An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli *J. Heat Transfer*. Nov 1978, 100(4): 635-640 (6 pages) <https://doi.org/10.1115/1.3450869>.

- [52]. Abu-Nada, E., Masoud, Z., & Hijazi, A. (2008). Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35(5), 657-665.
- [53]. Tayebi, T., Djeddar, M., Bouzerzour, A., Azzouz, K., & Khan, Z.H. (2016). Numerical simulation of natural convection of water based nanofluids in horizontal eccentric cylindrical annuli. *Journal of Nanofluids*, 5(2), 253-263.
- [54]. Tzeng, S. C., Lin, C.W., & Huang, K.D. (2005). Heat transfer enhancement of nanofluids in rotary blade coupling of four-wheel-drive vehicles. *Acta Mechanica*, 179(1-2), 11-23.
- [55]. Zhang, Z., Xue, Q., & Zhang, J. (1997). Synthesis, structure and lubricating properties of dialkyldithiophosphate-modified MoS<sub>2</sub> compound nanoclusters. *Wear*, 209(1-2), 8-12.
- [56]. Tsai, C. Y., Chien, H. T., Ding, P. P., Chan, B., Luh, T. Y., & Chen, P. H. (2004). Effect of structural character of gold nanoparticles in nanofluid on heat pipe thermal performance. *Materials Letters*, 58(9), 1461-1465.
- [57]. Ma, H. B., Wilson, C., Borgmeyer, B., Park, K., Yu, Q., Choi, S. U. S., & Tirumala, M. (2006). Effect of nanofluid on the heat transport capability in an oscillating heat pipe. *Applied Physics Letters*, 88(14), 143116.
- [58]. You, S. M., Kim, J. H., & Kim, K. H. (2003). Effect of nanoparticles on critical heat flux of water in pool boiling heat transfer. *Applied physics letters*, 83(16), 3374-3376.
- [59]. Vassallo, P., Kumar, R., & D'Amico, S. (2004). Pool boiling heat transfer experiments in silica-water nano-fluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(2), 407-411.
- [60]. Jordan, A., Scholz, R., Wust, P., Föhling, H., & Felix, R. (1999). Magnetic fluid hyperthermia (MFH): Cancer treatment with AC magnetic field induced excitation of biocompatible superparamagnetic nanoparticles. *Journal of Magnetism and Magnetic materials*, 201(1-3), 413-419.
- [61]. Mihoubi, H., Bouderah, B., & Tayebi, T. Improvement of Free Convection Heat Transfer in a Concentric Cylindrical Annulus Heat Exchanger Using Nanofluid. *Governing*, 429(1.89), 10-5.

## ملخص

تركز الدراسة على التحليل العددي للتبادلات الحرارية عن طريق الحمل الحراري الطبيعي وتدفق الموائع في مبادل حراري أسطواناني متحد المركز يحتوي على سائل نانوي (الماء مضاف له الفضة). ينحصر السائل النانوي بين أسطوانتين متراكبتين أفقياً يتم الحفاظ عليها عند درجات حرارة منتظمة و مختلفة. المعادلات التفاضلية الجزئية التي تتحكم في التدفق (معادلة الاستمرارية، الحركة، الطاقة) يتم دراستها في الإحداثيات القطبية وحلها عددياً من خلال طريقة الحجم المحدود. تتركز الدراسة على أرقام مختلفة لرايلي:  $10^3$ ،  $10^4$ ،  $10^5$ ، والتركيز الحجمي للجسيمات النانوية في نطاق 0، 0.03، 0.06، 0.09، 0.12. تم حساب الموصلية الحرارية الفعالة، لزوجة موائع النانو باستخدام نموذج ماكسويل وبرينكمان على التوالي. عرضت النتائج الرقمية المتحصل عليها على نحو خطوط من التيارات وعدد نيسالت بدلالة توزيع رقم رايلي وتركيز حجم جسيمات الفضة النانوية. وتم مناقشة النتائج أيضاً بالتفصيل. وجدنا أن هناك اتفاق جيد جداً بين النتائج الحالية وتلك الواردة من المؤلفات.

كلمات مفتاحية: الإحداثيات القطبية، طريقة الحجم المحدود، السوائل النانوية، الحمل الحراري الطبيعي، فلوينت وجامبيت.

## Abstract

A numerical study based on the analysis of laminar natural convection in a concentric cylindrical annulus heat exchanger is investigated. The operating fluid is confined between two horizontal concentric cylinders which are maintained at different uniform temperatures. The governing equations the flow (of continuity, momentum and energy) It is studied in bipolar coordinates are numerically solved via finite volume method. The investigation is performed for Rayleigh number and volume fraction of nanoparticles in the range of  $10^3$ ،  $10^4$ ،  $10^5$  and 0، 0.03، 0.06، 0.09، 0.12، respectively. The effective thermal conductivity and viscosity of the nanofluids mixture are calculated via Maxwell-Garnett model and Brinkman model, respectively. The results are presented in terms of isotherms, fluid flow patterns and Nusselt number distribution function of Rayleigh number and the volume fraction of silver nanoparticles. The results are also discussed in detail. Results are discussed in detail. It is found that a very good agreement exists between the present results and those from the literature. It is found that fluid flow intensity and heat transfer rate increase with the increase of the nanoparticles volume fraction and Rayleigh number, Also, the thermal effectiveness depends on the Rayleigh number and the volume fraction of the nanoparticles.

**Keywords:** Bipolar coordinates, Finite volume method, Nanofluids, Natural convection, FLUENT and GAMBIT.

## Résumé

Cette étude porte sur une analyse numérique du transfert de chaleur par convection naturelle et d'écoulement du fluide dans un échangeur thermique à tube cylindrique et rempli de nanofluides. Le fluide de travail est confiné entre deux cylindres concentriques horizontaux maintenus à des différentes températures uniformes. Les équations régissant l'écoulement (de continuité, de mouvement et de l'énergie) Il est étudié en coordonnées bipolaires et résolues numériquement en utilisant la méthode des volumes finis. L'étude porte sur le nombre de Rayleigh et de la fraction en volume de nanoparticules dans les gammes de  $10^3$ ،  $10^4$  et  $10^5$  et de 0، 0.03، 0.06، 0.09، 0.12، respectivement. La conductivité thermique effective et la viscosité des nanofluides sont calculées en utilisant le modèle de Maxwell-Garnett et de Brinkman, respectivement. Les résultats sont donnés sous forme des isothermes, lignes de courant et distribution de nombre de Nusselt en fonction de nombre de Rayleigh et de la fraction volumique des nanoparticules d'argent. Les résultats sont également discutés en détail. Il est constaté qu'un très bon accord existe entre les résultats actuels et ceux de la littérature.

**Mots-clés :** Coordonnées bipolaires, Méthode des volumes finis, Nanofluides, Convection naturelle, FLUENT et GAMBIT.