Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de M'sila Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et Informatiques

MÉMOIRE PRÉSENTÉ,

en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques,

Option : Mathématiques Appliquées & Discrètes,

Par

M^{elle} **MESSAOUDI Fatiha**

THÈME

Méthode de compacité pour un problème hyperbolique semi linéaire

Soutenu publiquement, le 18/06/2014 devant le jury composé de :

Nom et Prénom	Grade	Qualié	Etabilssement
Merzougui Abdelkarim	Maitre de Conférences "A"	Président	Univ. de M'Sila
Benabderrahmane Benyattou	Professeur	Rapporteur	Univ. de M'Sila
Dilmi Morad	Maitre de Conférences "A"	Examinateur	Univ. de M'Sila

Promotion: 2013/2014

Remerciements

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **Benabderrahmanne Benyattou,** Professeur à l'université de M'sila, pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

*J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur **Merzougui Abdelkarim,** Maître de Conférences "A" à l'université de M'sila, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.*

*Je remercie vivement Monsieur **Dilmi Morad,** Maître de Conférences "A" à l'université de M'sila, pour m'avoir fait l'honneur d'être examinateur dans le jury.*

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mes frères et sœurs pour leurs soutient tout au long de mes études.

Résumé

Dans ce travail, nous avons considéré un problème aux limites mixtes, *Dirichlet-Neuman*, pour les équations hyperboliques semi linéaires avec un terme source. En se basant sur les techniques de Faodo-Galerkin et la méthode de compacité, nous avons montré l'existence locale et l'unicité d'une solution faible.

Table des matières

Introduction

Ce travail est consacré à l'étude d'un problème aux limites mixtes de type Dirichlet-Neuman, pour les équations hyperboliques semi linéaires avec un terme source. En supposant que les données initiales vérifient certaines hypothèses, les techniques de Faedo-Galerkin et quelques résultats de compacité nous permettent de prouver l'existence et l'unicité d'une solution.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par donner quelques notions de base sur l'analyse fonctionnelle. Puis, nous allons présenter un rappel sur les espaces de Banach, de Hilbert et de Lebesgue, ainsi que les principaux résultats que les concernent.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse beaucoup aux espaces de Sobolev que jouent un rôle très important dans l'étude des problèmes liés aux équations aux dérivées partielles. Ce deuxième chapitre commence par donner un rappel sur les distributions, puis nous donnerons quelques définitions différentes des espaces de Sobolev et les théorèmes d'injection de Sobolev que nous allons utiliser dans le dernier chapitre.

Le troisième chapitre est destiné à l'étude d'un problème aux limites mixtes pour un type d'équations hyperboliques semi linéaires avec source terme polynomial. La méthode variationnelle en se basant sur les approximations de *Faedo-Galerkin* et la méthode de compacité nous permettent de prouver l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Ce mémoire se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

Quelques rappels sur les espaces normés

Résumé: Dans ce chapitre, on donne quelques rappels sur les espaces normé, notamment les espaces de Banach, de Hilbert et les espaces de Lebesgue, ainsi que quelques résultats indispensables sur ces espaces.

Continu:

1.1 Quelques rappels préliminaires

Définition 1.1.1 *Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel topologique. On appelle forme linéaire continue sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{k}$, continue pour la topologie de E et celle de $\mathbb{k}$, on note E' l'espace vectoriel définis par :*

$$E' = \{f : X \longrightarrow \mathbb{k} \text{ linéaire et continu}\}.$$

E' est appelé dual topologique de E.

Définition 1.1.2 *Soit E un espace normé, E' son dual topologique, on appelle topologie faible sur E et que l'on note $\delta(E,\, E')$, la Topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $f \in E'$.*

Théorème 1.1.1 *(De Hahn-Banach): Soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E \quad et\ \forall \lambda > 0.$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E.$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous espace vectoriel et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire telle que:

$$g(x) \leq p(x)\ ,\ \forall x \in G.$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, i.e :

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in G \text{ et } \ f(x) \leq p(x),\ \forall x \in E.$$

Définition 1.1.3 *Soit E un $\mathbb{k} - e.v.$ Une suite $(u_n)_n \in E$ converge au sens de la topologie faible vers u dans E si :*

$$\forall f \ \in E',\ \langle u_n - u,\ f\rangle_{E\times E'} \to 0.$$

Une suite $(u_n)_n \in E'$ converge au sens de la topologie faible étoile vers u dans E' si:

$$\forall f \in E,\ \langle u_n - u, f\rangle_{E'\times E} \to 0.$$

1.2 Espace de Banach

1.2.1 Normes sur un espace vectoriel

Définition 1.2.1 *Soit E un $\mathbb{R}-e.v$, une norme est une application définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, notée $\|.\|_E$, et satisfaisant les trois propriétés suivantes:*

i)$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in E$;

ii)$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

iii)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$.

On dit alors que $(E, \| \, . \, \|)$ ou tout simplement E, est un espace vectoriel normé.

Remarque 1.2.1 *Si la fonction $\| \, . \, \|$: $E \longmapsto \mathbb{R}_+$ vérifie les propriétés* (2) *et* (3) *mais n'est pas* (1)*, on dit que $\| \, . \, \|$ est une semi-norme sur E.*

Définition 1.2.2 *Soit $\| \, . \, \|_{E_1}$ et $\| \, . \, \|_{E_2}$ deux normes sur E. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe c_1 et c_2 strictement positives telles que:*

$$\forall \; v \in E, \quad c_1 \|v\|_{E_2} \leq \|v\|_{E_1} \leq c_2 \|v\|_{E_2}.$$

1.2.2 Espaces complets

Soit E un espace vectoriel normé, de norme$\| \, . \, \|_E$.

Définition 1.2.3 *(Suites de Cauchy) Soit (u_n) une suite de E, on dit que (u_n) est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \; N \geq 0, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \forall p \geq 0, \; \|u_{n+p} - u_n\|_E \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.2.1 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Définition 1.2.4 *Un $\mathbb{R}-e.v$ E est dit complet pour la norme $\| \, . \, \|_E$ si tout suite de Cauchy est convergente, pour la norme de E. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Exemple 1.2.1 *L'espace de fonction $C^0([a, \, b])$, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, \, b]} |f(x)|$ est un espace de Banach.*

Définition 1.2.5 *(Espace réflexif). Soit E un espace de Banach et soit j l'injection continue de E dans E", on dit que E est réflexif si:*

$$j(E) = E''.$$

Remarque 1.2.2 *Dans un espace réflexif E, la convergence faible est équivalent à la convergence faible étoile.*

Proposition 1.2.2 *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $M \subset E$ un sous espace vectoriel fermé. Alors M muni de la norme induite par E est réflexif.*

Théorème 1.2.1 *Soit E un espace de Banach alors E est réflexif si seulement si E' est réflexif.*

Définition 1.2.6 *(Espace séparable).On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense .*

Théorème 1.2.2 *Soit E un espace métrique séparable et soit F un sous ensemble de E, alors F est séparable.*

Preuve. Soit (u_n) une suite dénombrable dense dans E, et soit (r_m) une suite de réels positifs avec $r_m \longrightarrow 0$ on choisit (arbitrairment) $a_{m,n} \in B\ (u_n, u_m) \cap F$, lorsque cet ensemble non vide. Il est clair que la suite $(a_{m,n})$ constitue un ensemble dénombrable dense dans F. ■

1.2.3 Espace métrique

Définition 1.2.7 *Soit X un ensemble, une distance est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$, telle que pour tout $x, y, z \in X$ on a :*

1) $d\ (x, y) \geq 0$ et $d\ (x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $d\ (x, y) = d\ (y, x)$ (symétrie);

3) $d\ (x, z) \leq d\ (x, y) + d\ (y, z)$ (inégalité triangulaire).

Remarque 1.2.3 *(Semi-distance) Si l'application d: $X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifie les propriétés (2) et (3), mais pas (1), on dit que d est une semi-distance sur X.*

Définition 1.2.8 *Un espace métrique est un couple $(X,\ d)$ où X un ensemble et d une distance.*

Exemple 1.2.2 *i) L'ensemble des nombres réels muni de la distance $d\ (x,y) =\mid x-y\mid$.*

ii) Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, on peut définir plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes: soient $x=(x_1,x_2,......,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,......,y_n)\in\mathbb{R}$.

On définit trois distances, à savoir

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \text{ et } d_\infty(x,y)=\{|x_i-y_i|\,,i\in\overline{1,n}\};$$

$$d_2(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\,.$$

Définition 1.2.9 *(Distance associée à une norme) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, et soit $\|.\|$ une norme sur E. On associe à cette norme une distance d sur E par la formule:*

$$\forall u,v\in E: d(u,v)=\|u-v\|\,.$$

Cette distance est dite associée à la norme$\|\ .\ \|$.

Définition 1.2.10 *Un espace topologique (E,T) est dit séparé si et seulement si:*

$$\forall x\neq y,\ x,\ y\in E \ \ \textit{il existe } v_x,\ v_y \textit{ tels que}: U_x\cap V_y=\phi.$$

Théorème 1.2.3 *Tout espace métrique est un espace séparé.*

Preuve. En effet, soit E un espace métrique et soient x et y deux points distincts de E. Alors si on pose

$$\delta=d(x,y)>0,U_x=B(x,\frac{\delta}{2}) \text{ et } V_y=B(y,\frac{\delta}{2}).$$

Alors U_x et V_y sont disjoints, car si $z\in U_x\cap V_y$, on aurait

$$\delta=d(x,y)\leq d\ (x,z)+d\ (y,z)<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.$$

Ce qu'est impossible ■

Définition 1.2.11 *(Recouvrement).Soit X un ensemble (quelconque) et soit A une partie de X. Un recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de X vérifiant*

$$A \subset \cup_{i\in I} B_i.$$

Si I est fini (dénombrable) on parlera de recouvrement fini (dénombrable).

Définition 1.2.12 ***(****Espace métriques précompacts):Soit $(X,\ d)$ un espace métrique. On dit que $(X,\ d)$ est précompact [ou bien:totalement borné] si: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini par des parties de X dont le diamètre est inférieur à ε. Une partie A de X sera dite précompact dans (X, d) si le sous-espace métrique $(A, d_{A\times A})$ est précompact.*

Proposition 1.2.3 *Un espace métrique précompact est nécessairement borné.*

Définition 1.2.13 ***(*** *Espaces métriques compactes****)****:Un espace métrique(X, d) sera dit compact s'il est précompact et complet . Une partie A d'un espace métrique (X, d) sera dite compacte si le sous-espace métrique$(A, d_{A\times A})$ est compact.*

Remarque 1.2.4 *(Crochet dualité):Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé ; de norme $\|.\|_V$ .Un élément $A \in V'$ est une forme*

$$\langle A, v\rangle_{V'\times V} = Av \in \mathbb{R}.$$

V' est équipé de la norme

$$\|A\|_{V'} = \sup_{\substack{v\in V \\ v\neq 0}} \frac{\langle A, v\rangle_{V'\times V}}{\|\cdot\|_V}.$$

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.3.1 *Un produit scalaire sur le $\mathbb{k}$-espace vectoriel E ($\mathbb{k} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$) est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{k}$, qu'on note $\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle$ vérifiant:*

a) Cas d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

Bilinéarité :

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \qquad \forall x_1, x_2, y \in E$$
$$\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle, \qquad \forall x, y_1, y_2 \in E$$
$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle \text{ et } \langle x, \mu y\rangle = \mu \langle x, y\rangle, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \in E$$

Symétrie:

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \forall\, x, y \in E$$

Définie-positivité:

$$\langle x, x\rangle \geq 0 \text{ et } (\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E), \forall\, x \in E$$

b) Cas d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel :

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel les propriétés de bilinéarité et de symétrie sont remplacées par la sesquilinéarité et l'hermicité

Sesquilinéarité:

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle, \forall x, y \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}$$
$$\langle x, \mu y\rangle = \overline{\mu} \langle x, y\rangle, \ \forall x, y \in E \text{ et } \mu \in \mathbb{C}$$

Hermiticité:

$$\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle, \forall x, y \in E$$

Définition 1.3.2 *On appelle espace préhilbertien E tout espace vectoriel muni d'une norme associée à un produit scalaire $\langle ., .\rangle$. entoura $(E, \langle ., .\rangle)$ l'espace préhilbertien sa norme $\| \,.\, \|$ (dite norme préhilbertienne) est définie par:*

$$\forall x \in E : \| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Définition 1.3.3 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.*

Théorème 1.3.1 *(Théorème de représentation de Riesz-Frêché).Soit H un espace de Hilbert. Etant donné $\varphi \in H'$ il existe un élément unique $f \in H$ tel que :*

$$\langle \varphi, v\rangle \ = (f, v), \ \forall v \in H.$$

De plus on a :

$$\|f\|_H = \| \varphi \|_{H'}\,.$$

1.4 Les espaces de Lebesgue

Définition 1.4.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec l'espace $L^p : 1 < p < \infty$ sont définies comme suit:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \ \textit{mesurable et} \mid f \mid^p \in L^1\},$$

que l'on muni de la norme

$$\|f\|_{L^P} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \ \textit{mesurable et} \mid f \mid < c \ \textit{p.p sur} \ \Omega\},$$

dant la norme est définie par:

$$\| f \|_\infty = \inf\{c : \mid f(x) \mid \leq c \ \textit{p.p sur} \ \Omega\}.$$

Théorème 1.4.1 *(Inégalité de Hölder):Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{P'}(\Omega)$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors $f.g \in L^1$*

$$\int_\Omega \mid f.g \mid \leq \| f \|_{L^p} . \| g \|_{L^{p'}} .$$

Pour $p = 2$ on trouve l'inégalité de *Cauchy-Schwartz*

Preuve. La conclusion est évidente si $p = 1$ ou $p = \infty$ supposons donc $1 < p < \infty$, rappelons l'inégalité de *Young*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \forall \ a,\ b \geq 0.$$

La fonction ln étant concave sur $]0, \infty[$; on a pour a et b strictement positive

$$\ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p\prime}}{p'}) \geq \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{p'} \ln b^{p'} \leq \ln(ab).$$

Donc

$$|f(x)| \, |g(x)| \leq \frac{1}{p} \, |f(x)|^p + \frac{1}{p'} \, |g(x)|^{p'} \quad p.p \qquad x \in \Omega.$$

Il en résulte que $f.g \in L^1$ et que

$$\int |f.g| \leq \frac{1}{p} \, \|f\|_{L^P}^p + \frac{1}{p'} \, \|g\|_{L^{p'}}^{p'} .$$

Pour $a = b = 0$ on a donc (en supposant f et g non nulles, ce qui est le cas où l'inégalité de *Hölder* n'est pas triviale):

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{p'}\frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}}}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

On en déduit que $f.g \in L^1$ et on obtient en intégrant l'inégalité précédente:

$$\int \frac{|fg|}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}} \leq 1.$$

■

Théorème 1.4.2 *L'espace L^P est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Théorème 1.4.3 *(Théorème de convergence monotone de Beppolevi): Soit (f_n) une suite croissante de fonctions de L^1tell que: $\sup \int f_n < \infty$; alors $f_n(x)$ converge p.p sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$ de plus;*

$$f \in L^1 \ et \parallel f_n - f \parallel_{L^1} \rightarrow 0$$

Théorème 1.4.4 *(De la convergence dominée de Lebesgue)***.** *On suppose que $p \neq \infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurable telle que*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \ p.p \ sur \ \Omega;$$

et il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$| f_n(x) | \leq g(x) \ p.p \ sur \ \Omega.$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\parallel f_n - f \parallel_{L^1} \rightarrow 0$.

Lemme 1.4.1 *(Inégalité de Jensen)***.***Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ alors $f \in L^r(\Omega)$ quelque soit $r \in [p, q]$ et*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^P}^{\alpha} \|g\|_{L^q}^{1-\alpha},$$

avec

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{p} + \frac{1-\alpha}{q},$$

pour un certain $0 \leq \alpha \leq 1$.

1.4.1 La réflexivité dans les espaces de Lebesgue

Théorème 1.4.5 *(De représentation de Reisz). Soit $p : 1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p)'$, alors il existe un unique $u \in L^{P'}$ tel que:*

$$< \varphi, f > \ = \int_\Omega u\ f,\ \forall f \in L^P(\Omega)$$

de plus on a

$$\|\varphi\|_{(L^P)'} = \|u\|_{L^{P'}}.$$

Preuve. $T : L^{P'} \longmapsto (L^P)'$ par

$$\langle Tu, f\rangle := \int_\Omega uf,\ \forall u \in L^{P'}, \forall f \in L^P.$$

Il résulte de l'inégalité de *Hölder* que T est continue.

De plus on a :

$$\|Tu\|_{(L^p)'} \leq \|u\|_{L^{P'}}, \forall u \in L^{P'}.$$

Il nous faut prouver que T est surjectif.

On pose

$$E = T(L^{P'}).$$

Comme E est un sous-espace fermé, il nous reste que de montrer que E est dense dans $(L^P)'$.

Soit $h \in (L^P)''$ (car L^P est réflexif), tel que

$$\langle Tu, h\rangle = 0,\ \text{pour tout } u \in L^{P'}$$

Vérifions que $h = 0$?

On a

$$\int uh = \langle Tu, h\rangle = 0, \quad \text{pour tout} \quad u \in L^{P'}.$$

On conclut que $h = 0$ en choisissant

$$u = |h|^{p-2}\, h.$$

■

Théorème 1.4.6 *Soit* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. *Alors il existe un unique* $u \in L^\infty$ *tel que:*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf, \ \forall f \in L^1(\Omega).$$

De plus on a

$$\|\varphi\|_{(L^1)'} = \|u\|_{L^\infty}.$$

Remarque 1.4.1 *Pour* $p = \infty$ *le dual de* L^∞ *contient* L^1*et il est strictement plus grand que* L^1, *autrement dit il existe des formes linéaires continues sur* L^∞ *qui ne sont pas de type*

$$\langle \varphi, f \rangle \ = \int uf \quad , \forall f \in L^\infty \text{ avec } u \in L^1$$

1.4.2 Séparabilité dans les espaces de Lebesgue

Lemme 1.4.2 *L'espace* $\mathbb{C}_c(\Omega)$ *des fonctions continues à support compact est dense dans* $L^p(\Omega)$ *pour* $1 \leq p < \infty$.

Théorème 1.4.7 L^P *est séparable pour* $1 \leq p < \infty$.

Preuve. On désigne par $(Ri)_{i \in I}$ la famille (dénombrable) des pavés R de la forme

$$R = \prod_{K=1}^{N} (a_k, b_k), \qquad \text{avec } a_k, b_k \in Q \text{ et } R \subset \Omega.$$

On désigne par E l'éspace vectoriel sur Q engendré par les fonctions 1_{R_i} : de sorte que E est dénombrable montrons que E est dense dans $L^P(\Omega)$, soit $f \in L^P(\Omega)$ et soit $\varepsilon > 0$ fixé, soit $f_1 \in C_c(\Omega)$, tel que :

$$\|f - f_1\|_{L^P} < \varepsilon;$$

et soit Ω'un ouvert borné tel que :

$$supp f_1 \subset \Omega' \subset \Omega;$$

comme

$$f_1 \in C_c(\Omega');$$

on construit aisément une fonction $f_2 \in E$ telle que:

$$supp f_2 \subset \Omega';$$

et que

$$|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}} \text{ p.p sur } \Omega'.$$

On commence par recouvrir $suppf_1$ par un nombre fini de pavés R_i sur lesquels l'ossciation de f_1 est inférieure à $\frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}}$.

Il en résulte que

$$\|f_2 - f_1\|_{L^P} \leq \varepsilon,$$

et donc

$$\|f - f_2\|_{L^P} \leq 2\varepsilon.$$

■

Remarque 1.4.2 *On peut résumer les propriétés de L^Pcomme suit:*

- L'espace L^Pest séparable et réflexif pour $1 < p < \infty$ et on a $(L^P)' = L^{P'}$;
- L'espace L^1est réflexif et non séparable et on a $(L^1)' = L^\infty$;
- L^∞ n'est pas réflexif et séparable et on a $(L^\infty)' \subset L^1$.

Lemme 1.4.3 *(Gronwall). Soit $g \in C([0,T],\mathbb{R})$ telle que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C([0,T],\mathbb{R})$ est une fonction telle que:*

$$\psi(t) \leq a + \int_0^T g(s)\psi(s)ds, \ \forall t \in [0,T];$$

alors:

$$\psi(t) \leq a \exp\left(\int_0^T g(s)ds\right), \quad \forall t \in [0,T].$$

Lemme 1.4.4 *Soient $f, g \in C([0,T],\mathbb{R})$ deux fonctions positives pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$ si $\psi \in C([0,T],\mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\psi^2(t) \leq \frac{1}{2}\alpha^2 + \int_0^T f(s)\psi(s)ds + \int_0^T g(s)\psi^2(s)ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

alors:

$$|\psi(t)| \leq \left(\alpha + \int_0^t f(s)ds\right) \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right), \quad \forall t \in [0,T].$$

Chapitre 2

Espaces de Sobolev et leurs propriétés

Résumé. Dans ce chapitre, nous allons commencer par présenter un rappel sur les espaces de Sobolev et leurs propriétés, surtout les théorèmes d'injection et le théorème de trace qui jouent un rôle très important dans le chapitre suivant. On termine par donner quelques notions sur les espaces des fonctions à valeurs vectorielles.

Continu :

2.1 Rappels sur les distributions

Définition 2.1.1 *(L'espace des fonctions tests): l'espace $D(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions C^∞ sur Ω à support compact inclus dans Ω. On munit $D(\Omega)$ de la (pseudo-topologie) suivante :*

soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $D(\Omega)$, on dit que φ_n converge vers 0 dans $D(\Omega)$ si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites:

- *Il existe un compact k de Ω tel que supp $\varphi_n \subset k$ pour tout $n \in N$.*
- *Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $D^\alpha\varphi$. Converge vers 0 uniformément vers 0 sur k, autrement dit*

$$\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha\varphi_n(x)| \longmapsto 0, \text{ lorsque } n \longmapsto \infty.$$

$$D(\Omega) = \{f : \Omega \longmapsto \Bbbk/f \in C^\infty(\Omega),\ supp\ f = \Bbbk \subset \Omega,\ \Bbbk \text{ est compact}\}.$$

Remarque 2.1.1 *1) Si $\varphi \in D(\Omega)$, comme supp$D^\alpha\varphi \subset$ suppφ, on aura aussi $D^\alpha\varphi \subset D(\Omega)$, $\forall\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour la même raison, si $\varphi_n \longmapsto 0$ dans $D(\Omega)$, alors $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $D(\Omega)$, $\forall\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

2) On dira que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, si et seulement si $\varphi_n - \varphi \longrightarrow 0$ dans $D(\Omega)$.

3) Si $\Bbbk$ est un compact de Ω, on pose

$$D_{\Bbbk}(\Omega) = \{\varphi\ /\varphi \in D(\Omega), \varphi \text{ à support dans } \Bbbk\}.$$

Définition 2.1.2 *On appelle distribution tout élément $T \in D'(\Omega)$, où $D'(\Omega)$ le signe le dual topologique de $D(\Omega)$, i.e:*

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \Bbbk \text{ linéaires continues}\}.$$

$$\forall\varphi \in D(\Omega), \quad T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle.$$

Remarque 2.1.2 *T est continue dans le sens, où pour toute suite de fonctions (φ_n) telle que*

$$\varphi_n \in D(\Omega) \text{ et } \varphi_n \to 0 \quad \text{dans } D(\Omega),$$

alors

$$\langle T, \varphi_n \rangle \to 0.$$

Définition 2.1.3 *(Dérivée des distributions). Soit $T \in D'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la dérivée $D^\alpha T$ est définie par*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Lemme 2.1.1 *Si $T \in D'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $D^\alpha T \in D'(\Omega)$*

Preuve. La linéarité découle de la linéarité de la dérivation et de T établissons la continuité, soit $\varphi_n \longmapsto 0$ dans $D(\Omega)$.Comme on a

$$\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi_n \rangle \quad , \forall \varphi \in D(\Omega).$$

il suffit de vérifier que

$$D^\alpha \varphi_n \longmapsto 0 \text{ dans } D(\Omega).$$

il faut vérifier que la suite $D^\alpha \varphi_n$ satisfait les conditions:

a) *supp* $D^\alpha \varphi_n \subset$ *supp* $\varphi_n \subset \Bbbk$

b) Pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\sup_{x \in \Omega} \left| D^\beta D^\alpha \varphi_n \right| = \sup_{x \in \Omega} \left| D^{\alpha+\beta} \varphi_n \right| \longrightarrow 0.$$

■

Définition 2.1.4 *(Convergence des distributions).Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $D'(\Omega)$, on dit que T_n converge vers 0 dans $D'(\Omega)$ si et seulement si :*

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longmapsto 0, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Une propriété ; dont la vérification est immédiate, et que si $T_n \longmapsto 0$ dans $D'(\Omega)$ alors $D^\alpha T_n \longmapsto 0$ dans $D'(\Omega)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Remarque 2.1.3 *On dit qu'une suite d'éléments $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $D'(\Omega)$ converge vers $T \in D'(\Omega)$, noté $T_n \longmapsto T$ dans $D'(\Omega)$, si et seulement si $T_n - T \to 0$ dans $D'(\Omega)$, la limite si elle existe est alors unique.*

2.2 Les espaces de Sobolev

Définition 2.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $m \in N$ et $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de sobolev noté $W^{m,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m, au sens des distributions, s'identifient à des fonctions de $L^p(\Omega)$.*

$$W^{m,p}(\Omega) : \{u \in L^p(\Omega) \ / \ \forall \alpha \ \in \mathbb{N}^n, \ avec \ |\alpha| \leq m \quad : \ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Lemme 2.2.1 *La fonction $\| \, . \, \|_{W^{m,p}(\Omega)}$:*

$$W^{m,p}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}_+,$$

définie par

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u\,(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} , \text{ si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \text{ si } \ p = \infty,$$

est une norme sur l'espace vectoriel $W^{m,p}(\Omega)$.

La preuve de ce lemme est relativement simple.

Remarque 2.2.1 *La fonction*

$$\| \, . \, \|_{m,p}\colon W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

définie par

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \, , \, si \; 1 \leq p < \infty.$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \, , \, si \; p = \infty.$$

est une norme équivalente à la précédente, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ a donc les mêmes propriétés quelle que soit la norme utilisée.

Définition 2.2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné ou nom. On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ au sens de la norme $\| \, . \, \|_{W^{m,p}}$.*

Théorème 2.2.1 *L'espace de Sobolev $W^{m,p}$ muni de la norme $\| \, . \, \|_{W^{m,p}}$est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de *Cauchy* dans $W^{m,p}(\Omega)$, alors pour tout multi-indice α d'ordre inférieure ou égale à m, la suite $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de *Cauchy* dans $L^P(\Omega)$.

Rappelons alors que l'espace $L^P(\Omega)$ est complet, alors ils existent $u, u_\alpha \in L^P(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} \forall\alpha &\in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m, D^\alpha u_n \longrightarrow u_\alpha \text{ et} \\ u_n &\longrightarrow u_0 = u \end{aligned}$$

De plus

$$L^P(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega).$$

Chacune des fonctions u_n déterminent une distribution $Tu_n \in D'(\Omega)$.

Ainsi, pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$, on a

$$|T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)| \, |\phi(x)| \, dx \leq \|\phi\|_{L^{p'}} \|u_n - u\|_{L^P(\Omega)} .$$

Grace à l'inégalité de Hölder. Ainsi

$$T_{u_n}(\phi) \to T_u(\phi), \forall\phi \in D(\Omega).$$

Par un même raisonnement

$$T_{\ D^\alpha u_n}(\phi) \to T_{u_\alpha}(\phi)$$

Pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$ et tout multi-indice α d'ordre compris entre 0 et m, il en découle

$$T_{u_n}(\phi) = \lim_{n \longmapsto \infty} T_{\ D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_{n \longmapsto \infty} (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \phi) = D^\alpha(T_u)(\phi).$$

pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$ ainsi $u_\alpha = D^\alpha u$ au sens des distributions pour tout multi-indice $\alpha : 0 \leq |\alpha| \leq m$. Finalement, vu que

$$\lim_{n \longmapsto \infty} \|u_n - u\|_{w^{m,p}(\Omega)} = 0.$$

l'espace fonctionnel $w^{m,p}(\Omega)$ est complet. ■

Proposition 2.2.1 *Nous avons les propriétés suivantes :*

i) *L'espace de Sobolev* $W^{m,p}$ *est séparable pour* $1 \leq p < \infty$;

ii) *L'espace de Sobolev* $W^{m,p}$ *est réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Remarque 2.2.2 *Pour* $p = 2$ *, il est d'usage de remplacer la notation* $W^{m,2}(\Omega)$ *par* $H^m(\Omega)$.

2.2.1 Espace de Sobolev $\mathbf{H}^m(\Omega)$

Définition 2.2.3 *Soit maintenant* m *un entier* ≥ 1, *en bref, l'espace de sobolev* $H^m(\Omega)$ *d'ordre* m *sur* Ω *est défini par*

$$H^m(\Omega) = \{u/D^\alpha(u) \in L^2(\Omega) \quad \forall \alpha, \mid \alpha \mid \leq m\}. \tag{2.1}$$

On le munit du produit scalaire:

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2} ,$$

et de la norme:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Théorème 2.2.2 $H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Preuve. Est un cas particulier, pour $p = 2$, de la démonstration du théorème précédent.

■

Définition 2.2.4 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, *borné au non. On note* $H_0^m(\Omega)$ *l'adhérence de l'espace* $D(\Omega)$ *dans* $H^m(\Omega)$ *au sens de la norme* (2.2).

2.2.2 Le cas de l'espace entier

Dans le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou peut donner et cela est important pour la suite une définition de $H^m(\mathbb{R}^n)$ équivalente à (2.1) utilisant la transformation de *Fourier*. Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la transformation de *Fourier* $\hat{u}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ixy)\, u(x)dx, \quad xy = x_1y_1 + ... + x_ny_n;$$

l'intégrale étant converge au sens de L^2, et $u \to \hat{u}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On pose encore

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \mathcal{F}u \\ u &= \overline{\mathcal{F}}\hat{u} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(ixy)\, \hat{u}(y)dy. \end{aligned}$$

La transformation de *Fourier* se prolonge par continuité à l'espace S' des distributions tempérées dont nous allons rappeler la définition. Tout d'abord on définit:

$$S = \left\{ u : \ x^\alpha D^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}, \text{ où } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}.$$

Muni de la suite de semi normes

$$u \longmapsto \left\| x^\alpha D^\beta u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

S est un espace de *Fréchet.*

Naturellement tout $u \in S$ est ($p.p$ égal à une fonction) indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^n$ et tout $u \in S$ est

$$\forall p \geq 0, \forall \beta \in \mathbb{N}^n : \ |x|^p D^\beta u(x) \longmapsto 0, \text{ lorsque } |x| \to \infty.$$

On vérifie sans peine que

$$\begin{cases} \mathcal{F}(D^\alpha u) = (y)^\alpha \mathcal{F}u \quad \forall u \in S, \forall \alpha \\ D^\beta \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}\left((-ix)^\beta u \right) \end{cases} \forall u \in S; \ \forall \alpha, \beta \tag{2.3}$$

donc que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(S, S)$ de même, $\overline{\mathcal{F}} \in \mathcal{L}(S; S)$ et $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}u = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}u = u \ \ \forall u \in S.$

Donc que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de S sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

Grâce à la propriété de symétrie du noyant

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp(-ixy).$$

De $\mathcal{F}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}u)\, v dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathcal{F}v) dx \ \forall u, v \in S.$$

S' est espace dual de S, muni de la topologie forte de dual et on définit

$$\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}} \in \mathcal{L}\left(S', S'\right) \text{ par transposition}$$

Ainsi, $\forall u \in S'$, on a

$$\langle \mathcal{F}u, \varphi\rangle = \langle u, \mathcal{F}\varphi\rangle \quad ,\forall \varphi \in S.$$

les formules (2.3) sont encore valables $\forall u \in S'$.

Théorème 2.2.3 *Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on peut définir $H^m(\mathbb{R}^n)$ par (2.1) ou par*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n) \ : \left(1 + |y|^2\right)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

où $|y|^2 = y_1^2 + ... + y_n^2$, muni de la norme :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left\| \left(1 + |y|^2\right)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

qui est équivalente à la norme (2.2).

Remarque 2.2.3 *L'espace $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ mais cela n'est pas du tout général au contraire $D(\Omega)$ n'est pas en général dense dans $H^m(\Omega)$, lorsque Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.*

2.2.3 Théorèmes d'injection de Sobolev

Dans cette sous-section, nous collectons une liste de propriétés de base des espaces de *Sobolev* sans en donner les preuves qui se trouvent dans [2, 5, 8]. Nous commençons par un résultat de densité.

Théorème 2.2.4 *Si Ω est à bord lipchitzien, alors $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

Définition 2.2.5 *Soient deux espaces de Banach X et Y tels que $Y \subset X$. On dit que Y s'injecte de maniéré continue dans X (en notation $Y \hookrightarrow X$) si et seulement si l'opérateur identité*

$$\begin{aligned} id \quad &: \quad Y \to X \\ Y \quad &\to \quad Y \end{aligned}$$

est continu.

De même, on dit que Y s'injecte de maniéré compacte dans X (en notation $Y \hookrightarrow_c X$) si et seulement si l'opérateur id est compact de Y dans X.

Théorème 2.2.5 *(Rellich):Si Ω est un ouvert borné à bord continu, alors*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c H^{m-1}(\Omega), \qquad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Théorème 2.2.6 *(d'injection de Sobolev): Si Ω est un ouvert borné à bord lipchitzien alors on a les deux injections suivantes:*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*; \ \textit{tel que } m - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{p} \tag{2.5}$$

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), \qquad \forall m \in \mathbb{N}^*; \textit{tel que } m - \frac{n}{p} > 0 \tag{2.6}$$

Remarque 2.2.4 *Les conditions $m - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{p}$ et $m - \frac{n}{p} > 0$ sont optimales, en effet on montre que si $m - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{p}$, alors l'injection (2.5) n'a pas lieu en général, de même si $m - \frac{n}{p} \leq 0$, alors l'injection (2.6) n'a pas lieu en général.*

Théorème 2.2.7 *(Kondrašov) : Si Ω est un ouvert borné à bord Lipchitzien, alors on a l'injection*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}^*; \ \textit{tel que } m - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{p}.$$

2.2.4 Théorème de la trace" Traces"

Le but essentiel de cette section est de montrer que la "restriction" à Γ (appelée trace) d'une fonction de $H^1(\Omega)$ a un sens même si cette fonction n'est pas continue. Pour établir ce résultat, on utilise un argument de la localisation et changements de variables *Lipchitziens.*

Régularité du bord

Dans ce paragraphe, nous allons supposer que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Nous désignerons par Γ la frontière de Ω .

Définition 2.2.6 *On dit que Γ est continu si pour tout $x \in \Gamma$, il existe un voisinage V (si, dans la suite, nous avons besoin de marquer la dépendance de V à x, nous le noterons V_x) de x dans $\mathbb{R}^n$ et un nouveau système de coordonnées cartésiennes $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ tel que:*

a) il existe $\alpha_i > 0$, $i = 1, ..., n$, tel que V est un hypercube dans ces nouvelles coordonnées de côtés de longueur $2\alpha_i$

$$V = \{(y_1, y_2, ..., y_n) : |y_i| < \alpha_j,\ \forall j = 1, ..., n\}\,;$$

b) il existe une fonction continue définie sur

$$V' = \{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) : |y_i| < \alpha_j,\ \forall j = 1, ..., n-1\}\,;$$

à valeurs réelles et satisfaisant

$$\begin{aligned} |\varphi(y')| &\leq \frac{\alpha_n}{2},\ \forall y' \in V'; \\ \Omega \cap V &= \{y = (y', y_n) \in V : y_n < \varphi(y')\}\,; \\ \Gamma \cap V &= \{y = (y', y_n) \in V : y_n = \varphi(y')\}\,. \end{aligned}$$

De la même maniéré, nous dirons que Γ est *Lipchitzien* (resp. de classe $C^{k,1}$, $k, m \in \mathbb{N}$, m fois continûment différentiable.), lorsque la fonction φ ci- dessus est*Lipschitzien* (resp. de classe $C^{k,1}$, m fois continûment différentiable).

Remarque 2.2.5 *Dans le cas Lipschitzien, on suppose toujours que la constante de Lipschitz de φ est uniforme, c'est-à dire indépendante de x. Une uniformité analogue est supposée pour la condition $C^{k,1}$.*

Théorème 2.2.8 *Si Ω est un ouvert à bord Lipschitzien, alors l'application*

$$\begin{aligned} C^\infty(\overline{\Omega}) &\rightarrow C(\Gamma) \\ u &\rightarrow u/\Gamma \end{aligned}$$

S'etend en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, appelé opérateur de trace et notée γ_0.

Corollaire 2.2.1 *Si Ω est un ouvert borné à bord Lipschitzien, alors*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0 u = 0 \ \text{sur}\ \Gamma .$$

2.2.5 Formule de Green

Dans la suite, nous aurons très souvent besoin "d'intégrer par parties", ces intégrations par parties seront justifiées par les résultats qui suivent.

Théorème 2.2.9 *(Formule de Green). Si Ω est un ouvert borné à bord Lipschitzien, alors pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} dx = \int_\Gamma \gamma_0 u \gamma_0 v_i d\sigma, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Corollaire 2.2.2 *Si Ω est un ouvert borné à bord Lipschitzien, et si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, alors*

$$\int_\Omega \Delta u \ v dx = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial v} \gamma_0 u d\sigma.$$

Théorème 2.2.10 *Si de plus, $u, v \in H^2(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \{\Delta u v - u \Delta v\} dx = \int_\Gamma \left\{ \gamma \frac{\partial u}{\partial v} \gamma v - \gamma u \gamma \frac{\partial v}{\partial v} \right\} d\sigma,$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace défini par

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

2.2.6 Inégalité de Poincaré

Nous verrons plus tard qu'il est parfois nécessaire de montrer qu'une semi-norme sur un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$ est en fait une norme équivalente à la norme usuelle.

Corollaire 2.2.3 *(Inégalité de Poincaré). On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante c (dépendant de Ω et p) telle que :*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq c \|\nabla u\|_{L^P} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ \ 1 \leq p < \infty.$$

En particulier, l'expression $\|\nabla u\|_{L^P}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$; sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la semi norme $\|\nabla u\|_{L^2}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1}$.

Remarque 2.2.6 *L'inégalité de Poincaré reste valable si Ω est de mesure finie, ou bien si Ω est borné dans une seule direction.*

2.3 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Définition 2.3.1 *Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \| \, . \, \|_X)$ un espace de Banach réel. On désigne par $L^P(0,T;X)$ l'espace des fonctions $t \longmapsto f(t)$ de $]0,T[\longmapsto X$ qui sont mesurables à valeurs dans X et telles que :*

$$\|f\|_{L^P(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \right)^{\frac{1}{P}}, \ si\ 1 \leq p < \infty. \tag{1.1}$$

Si $p = \infty$, on remplace la norme (1.1) par

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup ess \, \|f(t)\|_X = 0 = \inf \left\{ c > 0 / \parallel f(t) \parallel_X \leq C \quad p.p, \ t \in [0,T] \right\}.$$

Ainsi, l'éspace $L^P(0,T;X)$ muni des normes correspondantes est complet.

Naturellement, on a :

$$L^P\left(0,T;L^P(\Omega)\right) = L^P(Q).$$

Remarque 2.3.1 *1) On désigne par $D'(0,T;X)$ l'espace des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans X, défini par*

$$D'(0,T;X) = \mathcal{L}(]0,T[;X),$$

où $\mathcal{L}(E;F)$ est l'espace des fonctions linéaires et continues de E dans F.

2) Si $f \in D'(0,T;X)$, sa dérivée, au sens des distributions, est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\varphi) = -f(\frac{\partial \varphi}{\partial t}), \quad \forall \varphi \in D(]0,T[).$$

3) Si $f \in L^P(0,T;X)$, alors on lui associe une distribution, notée encore f définie par

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \ \varphi \in D(]0,T[).$$

Définition 2.3.2 *Une fonction $f : [0,T] \longmapsto X$ et dite frottement dérivable dans $t_0 \in [0,T]$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de f dans t_0, tel que*

$$\lim_{h \longmapsto 0} \left\| \frac{1}{h}(f(t_0+h) - f(t_0) \right\|_X = 0.$$

Définition 2.3.3 *Une fonction $f : [0,T] \longmapsto X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(f_n), n \in N$ de fonctions appartenant à $D(0,T;X)$ telles que:*

$$\lim_{n \longmapsto \infty} \int_0^T \|f_n(s) - f(s)\|_X \, ds = 0.$$

Théorème 2.3.1 ***(Bochner).*** *Une fonction $f : [0,T] \longmapsto X$ mesurable est intégrable si et seulement si*

$$\begin{cases} [0,T] \longmapsto \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \|f(x)\|_X \end{cases},$$

est intégrable, dans ce cas

$$\left\| \int_0^T f(s) ds \right\|_X \leq \int_0^T \|f(s)\|_X \, ds.$$

Remarque 2.3.2 *On dénote par $H^m(0,T;X)$ l'espace défini par*

$$H^m(0,T;X) = \{f / \ f, \quad f^{(1)} = \frac{df}{dt}, ..., f^{(m)} = \frac{d^m f}{dt^m} \in L^2(0,T;X)\}.$$

Proposition 2.3.1 *Les espaces $L^P(0,T;X), 1 \leq p \leq \infty$ sont des espaces de Banach. Et si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle .,. \rangle_X$, alors $L^2(0,T;X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X \ dt.$$

Proposition 2.3.2 $L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;X)$ *avec injection continue* $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

Remarque 2.3.3 *Nous avons*

$$L^P(0,T;X)' = L^q(0,T;X), \ \textit{pour } 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ \textit{et}$$

$$L^1(0,T;X)' \subset L^\infty(0,T;X),$$

où $L^p(0,T;X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Aussi, d'après le théorème de (Danford-pettis) l'espace

$$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^P(\Omega)) \ \ (\textit{resp } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

est le dual de

$$L^1(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)) \ \ (\textit{resp de } L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Proposition 2.3.3 *Et* $H^{-1}(\Omega)+L^{q}(\Omega)$ *muni de la structure de dual fort de* $H_0^1(\Omega)\cap L^P(\Omega)$, *où* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Définition 2.3.4 *Soit* $u, w \in \ L^1(0,T;X)$ *la fonction* w *s'appelle la dérivée généralisée d'ordre* n *de* u *sur* $[0,T]$

$$\begin{aligned}\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt &= (-1)^n\int_0^T \varphi(t)w(t)dt, \quad \forall\ \varphi\in D(\Omega),\\ \text{avec } w &= u' \text{ pour } n=1.\end{aligned}$$

Définition 2.3.5 *Soit* $1<p<\infty$. *L'espace de Sobolev* $W^{1,p}(0,T;X)$ *est l'espace des fonctions*

$$u:[0,T]\longmapsto X$$

telles que $u\in L^P(0,T;X)$ *et* $u'\in L^P(0,T;X)$.

Remarque 2.3.4 *L'espace* $W^{1,p}(0,T;X)$, $1<p<\infty$, *muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}=\Big(\|u\|_{L^P(0,T;X)}+\|u'\|_{L^P(0,T;X)}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach .

Lemme 2.3.1 *Soit* X *un espace de Banach. Si*

$$f\in L^p(0,T;X) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial t}\in L^p(0,T;X), 1\leq p\leq\infty,$$

alors $f:[0,T]\longmapsto X$ *est continue, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de* $(0,T)$.

Lemme 2.3.2 *Soit* O *un ouvert borné de* $\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_t$, g_μ *et* g *des fonctions de*

$$L^q(O), 1<q<\infty \text{ telles que } \|g_\mu\|_{L^q(O)}\leq c, g_\mu\longrightarrow g \ \ p.p$$

dans O. $g_\mu\longrightarrow g$ *dans* L^q *faible.*

Chapitre 3

Problème aux limites semi linéaire pour les équations d'ondes avec terme source

Résumé: Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème aux limites semi linéaire, pour des équations d'ondes avec source terme polynomial. En se basant sur les approximations de *Faedo-Galerkin* et la méthode de compacité, de la formulation variationnelle on tire quelques résultats d'existence locale et d'unicité d'une solution faible.

Continu :

3.1 Notations et position de problème

3.1.1 Notations

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ (régulière); on désigne par u un vecteur $(u_1, u_2, ..., u_n)$ où $\forall\ i\ u_i$

$$Q = \Omega \times]0, T[\longmapsto \mathbb{R}$$

soit $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ une partition de Γ, i.e: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$,on suppose que $mes\Gamma_1 > 0$ et on pose

$$\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$$

et

$$\Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[$$

où T est un réel fini.

Pour simplifier les notation, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonction u par rapport $x \in \Omega$ et $t \in [0, T]$.

3.1.2 Formulation forte de problème

Le problème considéré dans ce travail consiste à chercher $u : Q \longmapsto \mathbb{R}^n$ satisfait:

$$u'' - \Delta u + |u|^{\rho} u' = f,\ x \in \Omega,\ t \in]0, T[\tag{3.1}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \\ u'(x, 0) = u_1(x), \end{cases},\quad x \in \Omega \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} a)\ u = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\ b)\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ \text{ sur } \Sigma_2. \end{cases} \tag{3.3}$$

Où $u_0(x), u_1(x)$ sont des fonctions données et ρ est un entier ≥ 0.

L'équation (3.1), sans le terme non linéaire $|u|^{\rho} u'$, représente l'équations d'ondes, où f est la densité des forces volumiques. (3.2) et (3.3) sont les conditions initiales et les conditions aux limites (Dirichlet -Neumann), respectivement. Pour l'étude du problème $(3.1)-(3.3)$ nous allons considérer les hypothèses suivantes :

$$f \in L^2(Q); \tag{3.4}$$

$$u_0 \in V \cap L^p(\Omega),\ p = \rho + 2; \tag{3.5}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega). \tag{3.6}$$

3.1.3 Formulation variationnelle

Lemme 3.1.1 *Sous les hypothèses* $(3.4)-(3.6)$, *alors le problème* $(3.1)-(3.3)$ *est équivalent au problème variationnel suivant:*

$$(PV): \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \cap L^p(\Omega) \text{ tel que} \\ (u'', v) + a(u, v) + (|u|^\rho u', v) = (f, v), \forall v \in V \cap L^p(\Omega), \\ u(x, 0) = u_0(x),\ u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

où

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Sigma_1\}.$$

Preuve. Soit u une solution du problème $(3.1)-(3.3)$, en multipliant l'équation (3.1) par $v \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ il vient

$$(u'', v) - (\Delta u, v) + (|u|^\rho u', v) = (f, v).$$

En utilisant la formule de *Green*, on obtient pour tout $v \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x) dx = \int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)} v(x) d\Gamma - \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx.$$

Ou encore en uitlisant le fait que $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de Γ :

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)} v(x) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)} v(x) d\Gamma_2 - \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx.$$

En posant $v = 0$ sur Γ_1 et de $(3.3, b)$ il vient

$$(u'', v) + \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx + (|u|^\rho u', v) = (f, v),$$

Ou sous forme variationnelle:

$$(u'', v) + a(u, v) + (|u|^\rho u', v) = (f, v), \ \forall v \in V \cap L^p(\Omega).$$

Finalement, en tenant compte les conditions $(3.3.a)$ on conclut que u est une solution du problème $(P.V)$.

Inversement, soit u solution de $(P.V)$ on a

$$(u'', v) + a(u, v) + (|u|^\rho u', v) = (f, v), \ \forall v \in V \cap L^p(\Omega).$$

De la formule de *Green* suivante :

$$-\int_\Omega \Delta u(x) v(x) dx + \int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)} v(x) d\Gamma = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx = a(u, v),$$

il découle

$$(u'', v) - \int_\Omega \Delta u(x) v(x) dx + \int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)} v(x) d\Gamma + (|u|^\rho u', v) = (f, v), \qquad \forall v \in V \cap L^p(\Omega). \quad (3.7)$$

En utilisant la densité de $D(\Omega)$ dans $V \cap L^p(\Omega)$, de (3.7) il vient:

$$(u'' - \Delta u + |u|^\rho u', \psi) = (f, \psi), \ \forall \psi \in D(\Omega)$$

D'où l'équation

$$u'' - \Delta u + |u|^\rho u' = f, \ p.p. \text{ dans } \Omega.$$

Reste à vérifier les conditions $(3.3.b)$.

Pour tout $v \in V \cap L^p(\Omega)$, on a

$$v = 0 \text{ sur } \Sigma_1.$$

De plus, en remplaçant l'équation (3.1) dans (3.7), on trouve

$$\int_{\Sigma_2} (\nabla u.\eta) \, v d\Sigma_2 = 0, \forall v \in V \cap L^p(\Omega).$$

L'espace des traces sur Σ_2 est dense dans $L^2(\Sigma_2)$ on trouve

$$\int_{\Sigma_2} \nabla u(x) \eta(x) \psi d\Sigma_2 = 0, \forall \psi \in L^2(\Sigma_2).$$

D'où

$$\nabla u(x)\eta(x) = 0 \text{ sur } \Sigma_2.$$

■

Lemme 3.1.2 *$a(u,u) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} dx$ est une semi norme équivalente à la norme $\|u\|$ de $H_0^1(\Omega)$.*

3.2 Existence et unicité

Dans cette section on va démontrer que le problème $(3.1) - (3.3)$, sous certaines hypothèses qu'on précisera, posséde au mois une solution.

3.2.1 Existence

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses* $(3.4) - (3.6)$, *le problème* $(3.1) - (3.3)$ *admet au moins une solution pour T fini quelconque vérifiant*:

$$u \in L^\infty(0,T; V \cap L^p(\Omega)), p = \rho + 2, \tag{3.8}$$

$$u' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{3.9}$$

Lemme 3.2.1 *Le problème $(P.V)$ a bien un sens.*

Preuve. Notons que si $u : t \longmapsto u(t)$ est une fonction de $L^2(0,T;V)$ et si v est un élément de V, la fonction $t \longmapsto (u(t),v)_V$ appartient à $L^2(0,T)$.

Tout d'abord puisque u est une fonction de $L^2(0,T;V)$, les fonctions $t \longmapsto (u(t),v)$ et $t \longmapsto a(u(t),v)$ appartiennent à $L^2(0,T)$,aussi la fonction $t \longmapsto (|u|^\rho u', v)$ appartiennent à $L^2(0,T)$ pour tout $v \in V$,car en utilisant l'inégalité de *Cauchy Schwartz* on trouve.

$$\int_\Omega \left||u|^\rho u' \; v\right|^2 dx \leq \||u|^\rho\|_{L^p(\Omega)} \|u'\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \| \; |u|^\rho \; \|_{L^p(\Omega)} \| \; u' \; \|_{L^2(\Omega)} \| \; v \; \|_{L^2(\Omega)} \leq c$$

De même, puisque f est une fonction de $L^2(0,T;V)$, la fonction $t \longmapsto (f(t),v)$ est dans $L^2(0,T)$ pour tout $v \in V$

Il en résulte que le problème variationnel $(P.V)$ a un sens dans $D'(]0,T[)$. ■

On a aussi

Lemme 3.2.2 *Les conditions* (3.2) *ont un sens.*

Preuve. Tenant compte (3.8) et (3.9) on a

$$u \in L^\infty(0,T; V \cap L^p(\Omega)) \text{ et } u' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).$$

En particulier, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, u est continue de $[0,T] \longmapsto L^2(\Omega)$, donc (3.2) a un sens.

Reste donc à vérifier que (3.2) a un sens pour cela on revient à l'équation (3.1) qui donne

$$u'' = f + \Delta u - |u|^\rho u'$$

$$\Delta u \in L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega)), \quad f \in L^2(0,T; L^2(\Omega)).$$

D'autre part en utilisant (3.8) il vient $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\left\| |u|^\rho u' \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \left\| |u|^\rho \right\|_{L^p(\Omega)} \|u'\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|u\|^\rho_{L^p(\Omega)} \|u'\|_{L^2(\Omega)} \leq c$$

Donc

$$|u|^\rho u' \in L^{p'}(\Omega)$$

il en résulte que:

$$u'' \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) + L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$$

D'où, en particulier

$$u'' \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$$

de (3.9) en utilisant le lemme, en particulier, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ est continue de $[0,T] \longmapsto H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$ de sorte que (3.2) a un sens. ■

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 3.2.1

Preuve. du théorème 3.2.1: La démonstration du théorème se décompose en quatre étapes:

a) Solution approchée : on construit des solutions approchées par la méthode de Foedo Galerkin.

b) Estimation à priori: on établit sur ces solution approchées des estimations (majorations) à priori;

c) Passage à la limite: en utilisant la propriété de compacité dans les conditions initiales.

d) Vérifications des conditions initiales.

a) Etape 1: Solution approchée :

On introduit une suite (w_n) des fonctions ayant les propriétés suivantes:

* $\forall\ j, w_j \in V \cap L^p(\Omega)$;

* La famille $\{w_1, ..., w_m\}$ est linéairement indépendante;

* L'espace $V_m = [w_1, ..., w_m]$ engendré par la famille $\{w_1, ..., w_m\}$ est dense dans $V \cap L^p(\Omega)$.On cherche $u_m = u_m(t)$ dans V_m, sous la forme

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i \ . \tag{3.10}$$

Vérifiant:

$$(u''_m(t), w_j) + a(u_m(t), w_j) + (|u_m(t)|^\rho\, u'_m(t), w_j) = (f, w_j) \quad 1 < j < m\ , \tag{3.11}$$

$$u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(t)w_i \to u_0 \text{ dans } V \cap L^p(\Omega), \tag{3.12}$$

$$u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im}(t)w_i \to u_1 \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{3.13}$$

Comme la famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est linéairement indépendante, d'après les arguments standards des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires on conclut que le système $(3.10) - (3.13)$ possède au moins une solution ayant la régularité

$$u_m \in L^2(0, t_m; V_m), \qquad u'_m \in L^2(0, t_m; V_m).$$

Les estimation à priori qui suivent montreront que t_m est indépendant de m (i.e., $t_m = T$).

b) Etape 2: Estimations à priori :

On multiplie l'équation (3.11) d'indice j par $g'_{im}(t)$ et l'on somme en j il vient

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + a(u_m(t), u'_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho\, u'_m(t), u'_m(t)) = (f, u'_m(t)) \tag{3.14}$$

On a :

$$\frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) = a(u'_m(t), u_m(t)) + a(u_m(t), u'_m(t)) = 2a(u_m(t), u'_m(t))$$

$$a(u_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) \geq \frac{1}{2}c_2\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_1^2 \tag{3.15}$$

$$(u''_m, u'_m) + \frac{1}{2}c_2\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + (|u_m|^\rho u'_m, u'_m) \leq (f, u'_m) \tag{3.16}$$

On a

$$(u''_m, u'_m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m|^2 \tag{3.17}$$

$$(|u_m|^\rho u'_m, u'_m) = \int_\Omega |u_m|^\rho |u'_m|^2 dx \geq 0, \ \ p = \rho + 2 \tag{3.18}$$

De (3.16) on tire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|u'_m(t)|^2 + c_2\|u_m(t)\|^2] = (f, u'_m). \tag{3.19}$$

Ceci en valeur absolue donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|u'_m(t)|^2 + c_2\|u_m(t)\|^2] \leq |(f(t), u'_m(t))|. \tag{3.20}$$

En intégrant (3.20) sur $(0, t)$ il résulte

$$\frac{1}{2}(|u'_m(t)|^2 + c_2\|u_m(t)\|^2) \leq \frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}c_2\|u_{0m}\|^2 + \int_0^t |f(s), u'_m(s)| \, ds. \tag{3.21}$$

Gràce aux inégalités de *Cauchy-Schwartz* et *Young* on conclut:

$$|(f(s), u'_m(s))| \leq |f(s)| \, |u'_m| \leq \frac{1}{2}(|f(s)|^2 + |u'_m(s)|^2)$$

Moyennant (3.21) il results

$$\frac{1}{2}(|u'_m(t)|^2 + c_2\|u_m(t)\|^2) \leq \frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}c_2\|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t |f(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |u'_m(s)|^2 ds. \tag{3.22}$$

D'après (3.12) (3.13)

$$\frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}c_2\|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t |f(s)|^2 ds \leq c_3 \ \ \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

On déduit donc en particulier de (3.22)

$$|u'_m(t)|^2 + c_2\|u_m(t)\|^2 \leq 2c_3 + \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds. \tag{3.23}$$

Par conséquent,

$$|u'_m(t)|^2 \leq 2c_3 + \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds \ \ \forall t \in [0, T].$$

Utilisons l'inégalité de *Gronwall*, pour conclure

$$|u'_m(t)| \leq c \text{ (indépendant de m).} \tag{3.24}$$

Reprenons (3.23), pour déduire que

$$\|u_m(t)\| \leq c \text{ (indépendant de m),} \tag{3.25}$$

d'où l'indépendance de t_m par rapport à m.

De $(3.23), (3.24)$ il résulte

$$\begin{cases} u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T; V \cap L^p(\Omega)), \\ u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{3.26}$$

c) Etape 3: ***:*** *Passage à limite:*

De (3.26) on déduit qu'on peut extraire un sous suite (u_μ) de (u_m) telle que:

$$u_\mu \to u \text{ dans } \ L^\infty(0,T; V \cap L^p(\Omega)) \text{ fiable étoile;} \tag{3.27}$$

$$u'_\mu \to u \text{ dans } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \text{ fiable étoile;} \tag{3.28}$$

Comme $V \cap L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, de (3.26) on concluons que les suites (u_m) et (u'_m) sont bornées dans $L^2(0,T; L^2(\Omega))$; en particulier (u_m) demeure dans un borné de $H^1(Q)$.

Comme l'injection de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$ est compact, alors on peut supposer que la sous suite (u_μ) extraite, vérifie, outre que (3.27) et (3.28)

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort.} \tag{3.29}$$

Comme $|u_m|^\rho\, u'_m$ demeure dans un borné de $L^\infty(0,T; L^{p'}(\Omega))$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors on peut supposer que

$$|u_\mu|^\rho\, u'_\mu \longrightarrow \omega \text{ dans } L^\infty(0,T; L^{p'}(\Omega)), \text{ faible étoile.} \tag{3.30}$$

Démontrons que:

$$\omega = |u|^\rho\, u',$$

Posons

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho\, u'_\mu, q = \frac{\rho+1}{\rho+2},$$

D'après (3.29) on a $g_\mu = |u_\mu|^\rho u'_\mu \longrightarrow |u|^\rho u' = g$ dans $L^2(Q)$ fort et d'après (3.30) on a $g_\mu \longrightarrow \omega$ dans $L^\infty(0,T;L^q(\Omega))$ faible, d'où en utilisant le lemme (2.3.2), il vient que $\omega = g = |u|^\rho u'$.

Soit j fixé, et $\mu > j$, alors d'après (3.11) on a:

$$(u''_\mu(t), w_j) + a(u_\mu(t), w_j) + (|u_\mu(t)|^\rho u'_\mu(t), w_j) = (f, w_j) \quad 1 < j < m, \tag{3.31}$$

donc de (3.27) et (3.28), il en résulte

$$a(u_\mu(t), w_j) \longrightarrow a(u, w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile;}$$

$$(u'_\mu, w_j) \longrightarrow (u', w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile.}$$

Par conséquent, on a

$$(u''_\mu(t), w_j) \longrightarrow (u''(t), w_j) \text{ dans } D'(0,T). \tag{3.32}$$

En utilisant (3.30) on déduit que

$$(|u_\mu(t)|^\rho u'_\mu(t), w_j) \longmapsto (|u(t)|^\rho u'(t), w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile.}$$

Alors (3.31) prend la forme

$$(u'', w_j) + a(u, w_j) + (|u|^\rho u, w_j) = (f, w_j).$$

Finalement, en utilisant la densité de V_m dans $V \cap L^p(\Omega)$ on trouve que

$$(u'', v) + a(u, v) + (|u|^\rho u, v) = (f, v), \forall v \in V \cap L^p(\Omega),$$

d'où il résulte que u satisfait (3.1).

d) Etape 4 : Vérification des conditions aux limites

En utilisant (3.27), on a

$$u_{\mu 0} \longrightarrow u(0) \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ faiblement}$$

Par (3.13) on conclut en particulier

$$u_\mu(0) = u_{\mu 0} \longrightarrow u_0 \text{ dans } V \cap L^p(\Omega).$$

D'où, il résulte la première condition dans (3.2).

De l'autre côté, en utilisant (3.31) on a

$$(u''_\mu, w_j) \longrightarrow (u'', w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile.}$$

Par conséquent

$$(u'_\mu(t), w_j) \longrightarrow (u'(0), w_j).$$

Puisque $(u'(0), w_j) \to (u_1, w_j)$, il résulte que $(u'(0), w_j) = (u_1, w_j), \forall j$.

Alors la deuxième condition dans (3.2) est satisfaite. ■

3.2.2 Unicité

Comme on a déjà indiqué, on ignore s'il ya unicité de la solution dans le cadre du théorème on a dans ce sens le résultat partiel suivant:

Théorème 3.2.2 *On se place dans les hypothèses du théorème* (3.2.1) *avec*

$$\rho \leq \frac{2}{n-2} \tag{3.33}$$

(ρ fini quelconque si $n = 2$); Alors la solution u obtenue au théorème (3.2.1) *est unique.*

Preuve. On fait la démonstration dans le cas $n \geq 3$ (le cas $n = 2$) est plus simple, selon les mêmes principes).

Soient u et v deux solutions, au sens du théorème (3.2.1), alors $w = u - v$ vérifie

$$w''(t) - \Delta w + (|u|^\rho u' - |v|^\rho v') = 0, \text{ dans } Q \tag{3.34}$$

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad \text{sur } \Omega \tag{3.35}$$

$$w = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \ \nabla(w)\eta = 0 \tag{3.36}$$

$$w(t) \in L^\infty(0,T; V \cap L^p(\Omega)), \quad p = \rho + 2 \tag{3.37}$$

$$w'(t) \in L^\infty(0,T; V \cap L^p(\Omega)), \quad p = \rho + 2 \tag{3.38}$$

Formellement, multiplions les deux membres (3.34) par w', alors-ce qui est correct lorsque les intégrales ci-après ont un sens-on aura après utilisation de la formule de *Green* et les conditions (3.35) et (3.36).

$$(w''(t), w'(t)) + a(w, w') + (|u|^\rho u' - |v|^\rho v', w') = 0.$$

En utilisant le fait que
$$(w''(t), w'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel w'(t) \parallel^2,$$
il en résulte
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w'(t)\right\|^2 + a(w, w') = \int_\Omega (|v|^\rho v' - |u|^\rho u')w'dx. \tag{3.39}$$
Aussi, en utilisant l'égalité $a(w, w') \geq c_1 \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel w(t) \parallel^2$, de (3.37), (3.39) il découle
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|w'(t)\right\|^2 + c_1\left\|w\right\|^2\right) \leq \int_\Omega (|v|^\rho v' - |u|^\rho u')w'dx. \tag{3.40}$$
Mais le deuxième membre de (3.40) est majoré comme suit :
$$\int_\Omega |(|v|^\rho v' - |u|^\rho u')w'| \quad dx \leq (\rho + 1)\int_\Omega (\sup(|u|^\rho, |v|^\rho))\left|w'\right|^2 dx.$$
D'après l'inégalité du *Hölder* et l'injection *Sobolev*, il résulte
$$\int_\Omega |(|v|^\rho v' - |u|^\rho u')w'| \quad dx \leq c\left(\left\||u|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)} + \left\||v|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)}\right)\left\||w'|^2\right\|_{L^n(\Omega)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1 \tag{3.41}$$
Comme $\rho n \leq q$, alors de (3.39), (3.40) et (3.41) il vient :
$$\left\||v|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)} = \left\|v\right\|^\rho_{L^{\rho n}(\Omega)} \leq \left\|v\right\|^\rho_{L^q(\Omega)} \leq c\left\|v\right\|^\rho.$$
Ce qui implique que
$$\left|\int_\Omega (|v|^\rho v' - |u|^\rho u')\, w'dx\right| \leq c\left(\left\|u\right\|^\rho + \left\|v\right\|^\rho\right)|\Omega|^{\frac{1}{q}}\left|w'\right|^2 \leq c(\left\|u\right\|^\rho + \left\|v\right\|^\rho)\left|w'\right|^2.$$
Comme u, $v \in L^\infty(0, T; V \cap L^p(\Omega))$, alors
$$\left\|u\right\|^\rho + \left\|v\right\|^\rho \leq c,$$
et par conséquent
$$\left|\int_\Omega (|v|^\rho v' - |u|^\rho u')w'dx\right| \leq c'\left|w'\right|^2.$$
Utilisons l'inégalité de *Hölder* et *Young*, alors (3.40) devient :
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|w'(t)\right\|^2 + c\left\|w(t)\right\|^2) \leq c'\left|w'\right|^2.$$
Intégrant l'équation au-dessus et tenant en compte les conditions initiales (3.35) nous obtenons
$$\left|w'(t)\right|^2 \leq \left\|w'(t)\right\|^2 + c_1\left\|w(t)\right\|^2 \leq 2c'\int_0^t \left|w'(s)\right|^2 ds + 0.$$
Finalement, l'inégalité de *Gronwall* assure que $w' = 0$, ce qui implique en utilisant (3.35), (3.36) que $w = 0$, d'où l'unicité. ■

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons considéré un problème aux limites semi linéaire pour les équations d'ondes avec un terme source polynomial. Sous certaines hypothèses de régularité sur les données initiales, nous avons montré que le problème considéré est équivalent au problème variationnel qu'on a précisé. Le problème variatonnel obtenu, en utilisant les approximations de Faedo-Galerkin, devient un système d'équations différentielles ordinaires non linéaire et qui possède au moins une solution approché ayant certaine régularité. La méthode de compacité, en passant à la limite nous permet de montrer que la solution approchée est une solution du problème considéré. A la fin, nous avons prouvé que la solution obtenue est unique.

Bibliographie

[1] R. Abita, *Probléme aux limites non linéaire*, Mémoire de Magister soutenu en Juillet 2009 à l'Université de Laghouat.

[2] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic press New York, 1975.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1987.

[4] T, Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, 1966.

[5] J.L Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites nom homogènes et applications*, Volume.1, Dunod. 1968.

[6] J.L Lions et E. Magenes, Problèmes aux limites nom homogènes et applications,Volume.2, Dunod. 1968

[7] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Paris, Dunod, 1969.

[8] J. Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, paris, 1967.

[9] S. Nicaise, *Analyse numérique et équations dérivées partielles*, Dund, paris, 2000.

[10] P.A. Raviart et J.M. Thomas, *Introduction à l'Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson 1982.

[11] L.Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.