



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



# *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique  
**Filière** : Mathématiques  
**Option** : Analyse Mathématique et Numérique

## Thème

---

*Etude des équations isotropes non linéaires de Navier-Stokes*

---

Présenté par :

*ABI Mabrouka*

Soutenu publiquement le : 04/07/2021.

Devant le jury composé de :

HERAIZ Toufik	M.C.B,	Université de M'sila	<b>Président.</b>
DECHOUCHA Nouredine	M.A.A,	Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
CHADI Khelifa	M.A.A,	Université de M'sila	<b>Co-Encadreur.</b>
TOUAHRIA Messaoud	M.A.A,	Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2020/2021

## DÉDICACE

*Je dédie ce modeste travail à*

*A ma chère mère en particulier qui m'a Beaucoup encouragé*

*A mon cher père qui m'a souten*

*A tous les membres de ma famille pour leur soutien et sa patience durant  
ces années de formation*

*A tous mes professeurs en particulier mon encadreur Dehoucha. N*

*A tous mes Amis*

*A mes amis en particulier : Rourou, Hadjer, Hamdaoui,  
Romaissa, Zakaria, Mohamed, Housseem*

*Pour leur gentillesse et leur soutien*

*A tous ceux qui sont proches de mon cœur et dont je n'ai pas cité le nom*

*Je demande à Dieu de préserver leur vie ♡♡*

*Abi.*

# REMERCIEMENTS

*Je commence par remercier **DIEU** d'avoir eu la bienveillance de m'entourer de personnes formidables qui ont, chacune à leur façon, et ce, à différentes étapes de mon cheminement,*

*Contribué, d'une manière ou d'une autre, à la réalisation de ce travail*

*Je tiens à adresser mes sincères remerciements à Monsieur **Dechoucha Nour eddine** qui a accepté de m'encadrer, Je le remercie également pour son soutien moral, sa grande disponibilité, il a été présent dans mes débuts incertains, dans les moments de découragements ou le doute s'installe. Qu'il soit .assuré de ma profonde gratitude*

*Je remercie également toute les membres de Faculté de **MO** de l'université de **MOHAMMED BOULOFA** - **MOSLA** Surtout le docteur **Saad Abdelkebir** et **Chadi Khelifa** et tous mes collègues qui m'ont aidé professionnellement et .moralement je les remercie de tout mon cœur*

*Je voudrais exprimer à toute ma famille, et plus particulièrement à mes parents, mes sœurs aussi et mon frère, ma profonde reconnaissance pour leur patience et leur réconfort dans les moments de doutes et de découragements, Je ne saurai passer sous silence l'apport inestimable des autres membres de ma .famille*

*.Enfin, merci à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail*

Merci ☺

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappel et notations des Espaces fonctionels</b>	<b>7</b>
1.1	Historique de l'équation Navier-Stokes . . . . .	7
1.2	Espace de Banach . . . . .	8
1.3	Espace de Lebesgue . . . . .	10
1.4	Injection et Inégalité . . . . .	10
1.5	Formule de Green . . . . .	11
1.6	Les convergences forte, faible et faible* dans $L^P(\Omega)$ . . . . .	11
1.7	Opérateur Monotone . . . . .	12
1.8	la méthode de Faedo-Galerkin . . . . .	12
1.8.1	Principe de la méthode . . . . .	12
1.8.1.1	Approximation de Galerkin (Recherche de solutions approchées) : . . . . .	13
1.8.1.2	Estimation à priori : . . . . .	13
1.8.1.3	Passage à la limite( Existence d'une solution faible ) : . . . . .	13
1.8.1.4	Unicité : . . . . .	13
1.9	Compléments divers . . . . .	13
1.9.1	Lemmes de Gronwall . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Etude des équations non linéaire de Navier-Stokes</b>	<b>15</b>
2.1	Position du problème : . . . . .	15
2.2	Propriétés du terme non-linéaire d'équation de Navier-Stokes . . . . .	16
2.3	Formulation variationnelle : . . . . .	17
2.4	L'existence et L'unicité : . . . . .	18
2.4.1	L'existence . . . . .	18
2.4.2	Unicité de la solution(le cas la dimenion d'espace 2) . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Une application à l'équations de Navier-Stokes pour les fluide incompressible</b>	<b>23</b>
3.1	Position de problème . . . . .	23
3.1.1	Conservation de la quantité de mouvement (Euler 1752) . . . . .	24
3.1.2	Conservation du moment. . . . .	24
3.1.3	Le tenseur des contraintes (Cauchy 1822) . . . . .	24
3.1.4	Tenseurs isotropes : . . . . .	25
3.2	Le fluide newtonien . . . . .	26
3.2.1	Les équations de mouvement pour un fluide newtonien . . . . .	27
	<b>Bibliographie</b>	<b>30</b>

# Notation

$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension $N$ , $N$ un nombre naturel non nul.
$\Omega$	Partie ouverte de $\mathbb{R}^N$ .
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de $\Omega$ .
$\partial\Omega$	La frontière de $\Omega$ régulière sur .
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$\longrightarrow$	La convergence forte.
$\cdot$	Produit scalaire.
$\lim sup$	Limite supérieure.
$\lim inf$	Limite inférieure.
$C^k(\Omega)$	Espace des fonctions $:\Omega \rightarrow \mathbb{R}, k$ fois continûment différentiables.
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact dans $\Omega$ .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace des distribution sur $\Omega$ .
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue
$\ \cdot\ _{L^p(\Omega)}$	Norme dans $L^p(\Omega)$
$ \cdot $	Norme dans $L^2(\Omega)$
$\ \cdot\ $	Norme dans $H_0^1(\Omega)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Crochet de dualité entre $X$ et son dual
$x$	Vecteur de $\mathbb{R}^N$ , $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , $x_i \in \mathbb{R}$ , $1 \leq i \leq N$
$\mu$	La normale unitaire sortante à $\partial\Omega$
$\partial_i f$	La dérivée partielle de $f$ parrapport à la $i$ ème composante $x_i$ .
$W^{m,p}(\Omega), H^m(\Omega)$	Espace de Sobolev
$W_0^{m,p}(\Omega), H_0^m(\Omega)$	L'adhérence de $\varphi(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ respectivement dans $H^m(\Omega)$
$\Delta v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$	Laplacienne de $v$
$div v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$	Divergence de $v$
$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$	Gradient de $v$

# Introduction

Le problème d'équations de Navier-Stokes. Ce sont des équations aux dérivées partielles décrivant l'écoulement des fluides (liquide, gaz ou plasma). Le but de cet équation est de montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible d'une méthode G-l.

Une première référence portout sur l'étude l'existence et l'unicité des équations de Navier-Stokes suivant :  
Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de frontière assez régulière qu'on note  $\partial\Omega$ . On note

$$Q = \Omega \times (0, T)$$

et  $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ .

On a le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu\Delta u + \sum_{i=1}^n u_i D_i u = f - \text{grad}P \quad (\mu > 0) \\ \text{div}u = 0 \quad \text{dans } Q \\ u = 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

où  $u$  la vitesse du fluide et la pression  $P$  et  $\mu$  est une constante positive qui représente la viscosité du fluide, et  $f$  représente l'ensemble de forces extérieures exerçant sur le fluide.

•Le premier chapitre est consacré aux rappels mathématiques de différents outils qui seront utilisés dans la résolution de nos systèmes d'équations. Nous allons principalement rappeler les différentes notions de convergences, les injections de Sobolev, le lemme de compacité et les opérateurs monotones.

• Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'équation de Navier-Stokes. Nous montrons l'existence d'une solution faible à l'aide de la méthode de Faedo-Galerkin et le lemme de compacité d'Aubin.

•Dans le dernier chapitre, Une étude d'application sur les équations de Navier-Stokes.

# Rappel et notations des Espaces fonctionnels

## 1.1 Historique de l'équation Navier-Stokes

**Newton**[5] : Une livre de Isaac newton intitulé principia mathematica (1687) contient les principes de la mecanique classique fondamentale qui restait valide jusqu'à l'apparition de la théorie relativité la dynamique en (1905) de la loi :  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .



FIGURE 1.1 – Isaac Newton 1642-1727

**Bernoulli**[5] : En 1738, daniel Bernoulli étudie les fluides non visqueux, et fonde son analyse sur la conservation de l'énergie.



FIGURE 1.2 – daniel Bernoulli 1700-1782

jean d'Alembert[5] : Mathématicien et philosophe français, soumit le 25 novembre 1749 un manuscrit de 137 pages qui suggérait une nouvelle vision de l'hydrodynamique.



FIGURE 1.3 – jean d'Alembert 1717-1783

Euler : il a établi ces équations en 1755, pour un fluide parfait.



FIGURE 1.4 – Leonhard Euler 1707-1783

équation de d'alembert : ils ont établi ces équations pour un fluide visqueux en 1820-1845.

## 1.2 Espace de Banach

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  :

**Définition 1.1 (Normes)** [7] : On appelle une norme sur l'espace  $E$  toute fonction notée  $\| \cdot \|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  telle que

- \*  $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in E.$
- \*  $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}.$
- \*  $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \forall x, y \in E.$

**Définition 1.2 (Espace normé)** : On dit que  $E$  est un espace vectoriel normés s'il est muni d'une norme  $\| \cdot \|$ .

**Définition 1.3 (Normes équivalentes)** : Soit  $E$  un espace vectoriel muni de deux normes  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$ , on dit que les deux normes sont équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$\alpha \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq \beta \| x \|_1, \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de  $E$  dans  $E$  soit un isomorphisme entre les espaces normés  $(E, \|\cdot\|_1)$  et  $(E, \|\cdot\|_2)$ .

**Définition 1.4 (Suites de Cauchy)** : Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments d'un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  on dit que la suite  $(x_n)$  est de Cauchy si et seulement si, on a la relation suivant

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \implies \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

**Proposition 1.1** : Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  contient une sous suite  $(x_{n_k})$  convergente vers  $x$  alors la suite  $(x_n)$  est aussi convergente vers le même élément  $x$ .

**Définition 1.5 (Espaces complets)** : Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dit complet, si toute suite de Cauchy  $(x_n)$  d'éléments de  $E$  est une suite convergente dans  $E$  Autrement dit,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon \implies \|x_p - x_q\| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \exists x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x. \end{aligned}$$

**Définition 1.6 (Espaces de Banach)** : On appelle espace de Banach  $(E, \|\cdot\|)$  tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.

**Lemme 1.1** : Tout espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  de dimension finie est complet.

: Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy de  $E$  alors la suite est bornée dans un espace de dimension finie. D'où on peut extraire une sous suite  $(x_{n_k})$  convergente vers un élément  $x$  de  $E$  ce qui implique que la suite  $(x_n)$  converge aussi vers le même élément  $x$  de  $E$ . D'où la complétude de l'espace  $E$ .

**Définition 1.7 (Opérateurs continus) [7]** : Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés sur  $\mathbb{K}$ , un opérateur  $A$  défini sur un sous ensemble  $G \subset E$  dans  $F$  est dit continu au point  $x_0$  de  $G$  si on a, la propriété suivante :

Pour toute suite  $(x_n)$  de  $G$  converge vers  $x_0$  la suite  $A(x_n)$  converge vers  $A(x_0)$  c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = A(x_0).$$

**Définition 1.8 (Opérateurs bornés)** : Un opérateur  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C > 0$  telle que

$$\|A(x)\| \leq C \|x\|_E, \forall x \in E.$$

**Définition 1.9 (Espaces isomorphes)** : Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés, on dit que  $E$  et  $F$  sont isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  c'est à dire

\*  $A$  est bijectif sur  $E$  dans  $F$ .

\*  $A$  et  $A^{-1}$  sont des opérateurs continus.

**Définition 1.10 (Espaces isométriques) [7]** : Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés, on dit que  $E$  et  $F$  sont isométriques, s'il existe une isométrie  $A$  appliquant  $E$  dans  $F$  c'est à dire

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E.$$

**Remarque 1.1** : La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

**Lemme 1.2** : Tout espace Banach  $(E, \|\cdot\|)$  est fermé.

: Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $E$  convergente vers  $x$  alors  $(x_n)$  est une suite de Cauchy dans un espace complet  $E$ . D'où  $(x_n)$  est convergente dans  $E$ .

**Théorème 1.1** : Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés. L'ensemble  $L(E, F)$  de tous les opérateurs linéaires continus dans  $E$  de  $F$  muni de la norme  $\|\cdot\|$  est un espace normé.

$$i.e \forall x \in E : \|A(x)\|_F \leq c \|x\|_E.$$

**Théorème 1.2** : Soit  $E$  un espace normé et  $F$  un espace de Banach, alors  $L(E, F)$  est un espace de Banach.

**Définition 1.11 (Dual topologique)** : On appelle dual topologique de l'espace  $E$  et que l'on note  $E^*$  l'espace de Banach des fonctionnelles linéaires continues  $L(E, K)$ .

### 1.3 Espace de Lebesgue

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $p$  un nombre réel supérieur ou égale à 1. On définit l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme suivante

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1.$$

Pour  $p = +\infty$  l'espace de Lebesgue  $L^\infty(\Omega)$  définie par

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } (\sup \text{ess } |f|) < \infty\}.$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

$L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ , et de Hilbert pour  $p = 2$  muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

### 1.4 Injection et Inégalité

**Définition 1.12** [2] :  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach, l'écriture  $E \hookrightarrow F$  signifie l'injection continue de  $E$  dans  $F$ , c-à-d qu'il existe une constante  $k > 0$  telle que

$$\|f\|_F \leq k \|f\|_E, \forall f \in E.$$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  à frontière Lipschitzienne ou  $\Omega = \mathbb{R}^N, N \geq 1$ .

**Théorème 1.3 (Injection de Sobolev-Rellich-Kondrachon)** : Soit  $\Omega$  un ouvert borné et Lipschitzien de  $\mathbb{R}^N, N \geq 1$  et  $p^* = \frac{Np}{N-p}$

Alors on a :

- si  $1 \leq p < N$  alors  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  est compact pour  $q \in [1, +\infty[$  et continue pour  $q = p^*$ .
- l'injection  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  est compact  $\forall p \in [1, +\infty[$ .
- si  $p = N$  alors l'injection  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  est compact et continue  $\forall q \in [1, +\infty[$ .
- si  $p = N$  alors l'injection  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$  est compact et continue.

**Remarque 1.2** [2] : Soit  $\Omega$  une partie bornée et Lipschitzienne de  $\mathbb{R}^N$

1.  $N = 1, H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$  est compact et continue.
2.  $N = 2, H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  est compact et continue.
3.  $N = 2, H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ .

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  deux réels et  $p'$  l'exposant conjugué de  $p$

$$\text{i.e, } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

**Lemme 1.3 (Inégalité de Hölder ) [2] :** Si  $f \in L^p(\Omega), g \in L^{p'}(\Omega)$ , alors

$$f \cdot g \in L^1(\Omega),$$

et

$$\| f \cdot g \|_{L^1(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} \| g \|_{L^{p'}(\Omega)} .$$

Si de plus  $|\Omega| < \infty$  et  $f \in L^1(\Omega)$  alors

$$f \in L^p(\Omega),$$

et

$$\| f \|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \| f \|_{L^q(\Omega)} .$$

En particulier

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega), \forall 1 \leq p \leq q < \infty.$$

**Lemme 1.4 :** Soient  $p_i \in [1, +\infty]$  des exposants avec  $1 \leq i \leq k$  tels que

$$1/p = 1/p_1 + \dots + 1/p_k \leq 1.$$

Alors, pour toutes fonctions ,  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  nous avons  $f = f_1 \times f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$  et l'inégalité de Hölder généralisée

$$\| f \|_p \leq \| f \|_{p_1} \| f \|_{p_2} \dots \| f \|_{p_k} .$$

**Lemme 1.5 (Inégalité de Young) [2] :** Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs. Soit  $p > 1$ , alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \text{avec } p' = \frac{p}{p-1}.$$

## 1.5 Formule de Green

**Théorème 1.4 (intégration par parties en dimension  $n$ ) [4] :** Soit  $\Omega$  ouvert borné de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$ . Alors si  $f$  et  $g \in H^1(\Omega)$  on a :

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} g dx + \int_{\partial\Omega} f g \eta ds.$$

Où  $\eta$  est la  $i^{eme}$  composante de la normale sortante au domaine  $\Omega$ .

## 1.6 Les convergences forte, faible et faible\* dans $L^p(\Omega)$

**Définition 1.13 (convergence forte) [1] :** Soit  $p \geq 1$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $L^p(\Omega)$ ,  $(f_n)$  converge fortement vers  $f$  dans  $L^p(\Omega)$ , et on note

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{dans } L^p(\Omega).$$

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| f_n - f \|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

**Définition 1.14 (convergence faible) :** Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$  et  $f \in L^p(\Omega)$ . On dit que  $f_n \rightarrow f$  faiblement dans  $L^p(\Omega)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n - f) \cdot \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

**Définition 1.15 (convergence faible\*)** [1] : Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$  et  $f \in L^p(\Omega)$ . On dit que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p(\Omega)$  faible\*, on note

$$f_n \rightharpoonup^* f \text{ dans } L^\infty(\Omega).$$

C'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n - f) \cdot \varphi = 0, \forall \varphi \in L^1(\Omega).$$

**Lemme 1.6 (lemma de DeRham)** :

1 Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  connexe. On considère  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , une condition nécessaire et suffisante pour que

$$f = \nabla P \in \mathcal{D}(\Omega),$$

et que

$$\langle f, v \rangle = 0, \forall v \in \mathcal{D}_s(\Omega).$$

Où  $\mathcal{D}_s(\Omega)$  est l'espace des fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$  à divergence nulle.

On déduit d'après ce lemme, une extension du théorème de DeRham aux distributions qui dépendent du temps.

on a

2 Soit  $h \in \mathcal{D}'(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ , telle que

$$\langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0, \forall v \in \mathcal{D}_s(\Omega).$$

Alors, il existe  $P \in \mathcal{D}(]0, T[, L^2(\Omega))$ , tel que  $h = \nabla P$ .

Si de plus  $h \in W^{k,r}(0, T, H^{-1}(\Omega))$  on peut choisir  $P \in W^{k,r}(0, T, L^2(\Omega))$ .

## 1.7 Opérateur Monotone

**Définition 1.16** [12] : Tout opérateur  $A$  de  $V \rightarrow V'$  ayant la propriété de la continuité suivante

$$\text{pour } u, v, w \in V, \text{ la fonction } \lambda \rightarrow (A(u + \lambda v), w) \text{ est continue,}$$

est dit héli continu.

l'opérateur  $A$  vérifie

$$\begin{cases} \forall u, v \in V, \text{ on a :} \\ (A(u) - A(v), u - v) \geq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

On pose la

**Définition 1.17** [12] Tout opérateur  $A$  de  $V \rightarrow V'$  ayant la propriété (1.1) est dit monotone.

**Proposition 1.2** : Si  $v \rightarrow J(v)$  est une fonctionnelle différentiable au sens de Gâteaux sur  $V$  et convexe, l'application  $u \rightarrow J'(u)$  de  $V \rightarrow V'$  est monotone et héli continu.

## 1.8 la méthode de Faedo-Galerkin

La méthode de Faedo-Galerkin est une méthode approximative parmi d'autres, utilisée pour résoudre (déterminer l'existence et l'unicité des solutions) des Equations aux Dérivées partielles d'évolution.

### 1.8.1 Principe de la méthode

Décrivons ici la strategie (les étapes) de la méthode. L'existence par la méthode de Faedo-Galerkin se fait en trois étapes :

**1.8.1.1 Approximation de Galerkin (Recherche de solutions approchées) :**

Dans cette partie, on choisit une famille de fonctions  $(\varsigma_k)_{k \geq 1}$  constituant une base orthogonale dans  $V = H_0^1(\Omega)$  et une base orthonormale dans  $H = L^2(\Omega)$ .

En particulier, on pourra écrire :

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varsigma_k,$$

et

$$g_k = (g, \varsigma_k)_0.$$

et les séries sont convergentes dans  $H$ .

**1.8.1.2 Estimation à priori :**

Puis, on construit une suite de sous-espaces de dimension finie

$$V_m = \text{vect} \{ \varsigma_1, \dots, \varsigma_m \},$$

avec évidemment

$$V_m \subset V_{m+1},$$

et

$$\overline{UV_m} = V.$$

Pour  $m$  fixé, on pose

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) \varsigma_k, G_m = \sum_{k=1}^m g_k \varsigma_k,$$

et on résout le problème approximatif suivant : Déterminer  $u_m \in H_0^1(0, T, V)$  tel que pour  $s = 1, \dots, m$  on a

$$\begin{cases} (u'_m(t), \varsigma_k)_0 + a(u_m(t), \varsigma_k) = (f(t), \varsigma_k)_0, \text{ pour tout } t \in [0, T], \\ u_m(0) = G_m. \end{cases}$$

Pour tout  $v \in V_m$  puisque  $u'_m \in L^2(0, T, V)$ , on a

$$(u'_m(t), v)_0 = \langle u'_m(t), v \rangle,$$

$u_m$  est appelé approximation de Galerkin de la solution  $u$ .

**1.8.1.3 Passage à la limite( Existence d'une solution faible ) :**

Dans cette partie nous montrerons que  $\{u_m\}$  et  $\{u'_m\}$  sont bornés dans  $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$  et  $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$  respectivement (Estimation de l'énergie).

Alors en appliquant le théorème de compacité, ou pourra montrer que les sous-suites  $\{u_{m_k}\}$  convergent faiblement dans  $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$  pendant que  $\{u'_{m_k}\}$  converge faiblement dans  $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ .

**1.8.1.4 Unicité :**

Ici, on convient de montrer l'unicité de la solution  $u$  précédente de manière classique.

**1.9 Compléments divers**

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

### 1.9.1 Lemmes de Gronwall

**Lemme.** Soient  $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$\varphi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier  $m = 0$ , ce lemme devient :

**Corollaire.** Soit  $n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telle que  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$\varphi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

**Lemme.** Soient  $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\varphi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\varphi(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi^2(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$|\varphi(t)| \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

# Etude des équations non linéaire de Navier-Stokes

Dans ce chapitre on va étudier l'existence et l'unicité du problème de Navier-Stokes. Equation aux dérivée partielles dévolution. Pour ce fait, on aura besoin de la méthode de Faedo-Galerkin, et de la méthode de monotonie[12][9].

## 2.1 Position du problème :

Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^N$  un domaine borné, de frontière régulière  $\partial\Omega$ . On note

$$Q = \Omega \times ]0, T[, T \text{ fini,}$$

$$\Sigma = \partial\Omega \times ]0, T[.$$

On désigne par  $u$  un vecteur de vitesse :

$$u = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}, \tag{2.1}$$

défini dans  $Q$ .

On considère le problème suivante.

**problème  $p_1$**  : Trouver un vecteur des vitesse  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , un vecteur de pression  $P : Q \rightarrow \mathbb{R}^N$ , tels que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \sum_{i=1}^N u_i D_i u = f - \text{grad} P, \Omega \times (0, T); (\mu > 0), \tag{2.2}$$

$$\text{div} u = 0. \left( \text{i.e} \sum_{i=1}^n D_i u_i = 0 \right), \tag{2.3}$$

avec les conditions aux limites et la condition initiale

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma \text{ (i.e } u_i = 0 \text{ sur } \Sigma, i = 1 \dots N), \tag{2.4}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega \text{ (i.e } u_i(x, 0) = u_{0i}(x), x \in \Omega), \tag{2.5}$$

où  $\mu$  une constante positive qui désigne la viscosité du fluide.

et  $P : Q \rightarrow \mathbb{R}^N$  est fonction scalaire qui représente le tenseur des contraintes (ou de pression).

La relation (2.2) représent l'équation de Navier Stokes, dans le cas dévolution.

La relation (2.3) représente la variation de volume d'un élément de fluide, Ce terme est nul si le fluide est incompressible.

La relation (2.4) (2.5) sont les condition aux limites et les condition initiales, respectivement.

Dans l'étude du problème  $P_1$ , nous avons besoin d'une notation supplémentaire. Soit  $V$  le sous-espace fermé de  $\mathcal{D}(\Omega)^N$  défini par

$$V = \left\{ u \in \mathcal{D}(\Omega)^N, \operatorname{div} u = 0 \right\}, \quad (2.6)$$

et

$$H = \text{adhérence de } V \text{ dans } L^2(\Omega)^N.$$

On définit le produit scalaire sur  $H$  par : pour  $f, g \in H$  :

$$\sum (f, g) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i g_i dx,$$

muni de la norme

$$|f| = (f, f)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère par ailleurs les espaces  $H^s(\Omega)$ ,  $s \geq 0$ ,  $s$  entier ou non et muni du produit scalaire hilbertien :

$$\sum ((f, g))_s = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (f_i, g_i)_{H^s(\Omega)} dx.$$

On définit ensuite

$$V_s = \text{adhérence de } V \text{ dans } (H^s(\Omega))^N, \quad \|f\| = ((f, g))_s^{\frac{1}{2}},$$

et

$$H = \left\{ u \in (L^2(\Omega))^N, \operatorname{div} u = 0 \right\}. \quad (2.7)$$

On a donc

$$V_s \subset V \subset H.$$

l'espace  $V$  est contenu dans  $H$  dense en  $H$  et l'injection est continue. Soit  $H'$  et  $V'$  les espaces duales de  $H$  et  $V$ .

D'après le théorème de Reisz, on identifie  $H$  à son dual :  $H' = H$ , identifier  $V, V'_s$  à des sur espaces de  $H$ , alors on a l'injection suivante :

$$V_s \subset V \subset H \equiv H' \subset V' \subset V'_s. \quad (2.8)$$

## 2.2 Propriétés du terme non-linéaire d'équation de Navier-Stokes

Soient  $u, v$  et  $w$  trois vecteurs dans  $V$  on pose :

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \times \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx, \quad (2.9)$$

et

$$b(u, v, w) = \sum_{i,k=1}^N \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i dx. \quad (2.10)$$

**Lemme 2.1** : Pour tous  $u, v, w$  dans  $V$  nous avons :

○ on dit que

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v), \quad (2.11)$$

et

$$b(u, v, v) = 0. \quad (2.12)$$

○ on dit que la forme  $v \rightarrow b(u, u, v)$  est continue sur  $V$  on a

D'après la formule de Green ,  $\forall u \in V$  en suite

**Lemme 2.2** : Pour  $u \in V$ , la forme linéaire  $v \rightarrow b(u, u, v)$  est continue sur  $V$  on a

$$| \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i | \leq \| u_k \|_{L^6(\Omega)} \| D_k v_i \|_{L^2(\Omega)} \| u_k \|_{L^3(\Omega)}, \quad (2.13)$$

tel que :

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = 1. \quad (2.14)$$

Pour

$$b(u, u, v) = (g(u), v), g(u) \in V'. \quad (2.15)$$

Alors

$$\| g(u) \|_{V'} \leq c_3 \| g(u) \|_{(L^p(\Omega))^n}^2. \quad (2.16)$$

### 2.3 Formulation variationnelle :

Dans cette section, on va donner la formulation variationnelle du problème  $P_1$

Soit  $v \in V$  une fonction test. Nous multiplions l'équation (2.2) par  $v$  et intégrons sur  $\Omega$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u' \cdot v dx - \mu \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx + \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n u_i D_i u \right) \cdot v dx \\ &= \int_{\Omega} f \cdot v dx - \int_{\Omega} \nabla p \cdot v dx \quad \forall v \in V \quad \text{p.p.t} \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.17)$$

On a d'après lemme (1,6,1) de Rham

$\forall P \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(\nabla P, v) = - (P, \text{div} v) = 0, \forall v \in V. \quad (2.18)$$

Alors

$$(\nabla P, v) = 0 \quad (\text{Dans } \mathcal{D}'(0, T)^N), \forall v \in V. \quad (2.19)$$

En utilisant la formule de Green suivante

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ & + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot v d\gamma, \forall v \in V \quad \text{p.p.t} \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot v d\gamma, \forall v \in V \quad \text{p.p.t} \in (0, T) &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \eta v d\gamma \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx. \end{aligned} \quad (2.21)$$

D'après (2.17) et (2.19) (2.21) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u' \cdot v dx + \mu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} u_i (D_i u_j) v_j dx \\ &= \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (2.22)$$

On obtient la formulation variationnelle du problème  $p_1$ .

problème  $PV_1$  : On donne

$$f \in L^2(0, T, V'), \quad (2.23)$$

$$u_0 \in H. \quad (2.24)$$

Trouver  $u$  tel que

$$u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H), \quad (2.25)$$

$$(u', v) + \nu a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V \cap (L^N(\Omega))^N, \quad (2.26)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.27)$$

**Remarque 2.1** : L'existence de la pression  $P$  est une conséquence du lemme de DeRham

Pour la preuve de ce théorème on utilise la méthode de Faedo-Galerkin.

## 2.4 L'existence et L'unicité :

Dans ce paragraphe et sous les hypothèses que nous avons cité précédemment, l'existence d'une solution faible seront obtenues en se basant sur les approximation de Faedo-Galerkin, méthode de compacité et les propriétés d'un opérateur semicontinu inférieurement.

L'unicité de la solution a été prouvée dans le cas de la dimension  $n = 2$ . On commence par prouver qu'il existe une solution faible au problème.

### 2.4.1 L'existence

Le principal résultat dans cette section est le suivant :

**Théorème 2.1** : Le problème  $PV_1$  possède au moins une solution pour tout  $T > 0$  fini quelconque, En plus, si la dimension  $N$  est égale à 2 le problème  $PV_1$  admet une solution unique.

**Remarque 2.2** : Le problème  $P_1$  possède une solution unique faible ayant la régularité (2.25).

On Utilisation des propriétés suivantes : [12]

**Lemme 2.3** : Pour  $u \in V, v \in V_s$  on a

$$b(u, u, v) = -b(u, v, u). \quad (2.28)$$

**Lemme 2.4** : Pour  $u \in V$ , la forme linéaire  $v \rightarrow b(u, u, v)$  est continue sur  $V_s$  on a

$$b(u, u, v) = (g(u), v), \quad g(u) \in V'_s. \quad (2.29)$$

Avec

$$\|g(u)\|_{V'_s} \leq c \|u\|_{(L^p(\Omega))^N}^2. \quad (2.30)$$

**Lemme 2.5** : Soit  $u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ , Alors

$$u \in L^2(0, T, (L^p(\Omega))^N). \quad (2.31)$$

**Lemme 2.6** Si  $N = 2$  il existe une constante  $c(\Omega)$  telle que

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq c(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (2.32)$$

**Théorème 2.2** : Toute solution  $u$  du problème  $PV_1$  vérifie, lorsque  $n = 2$

$$u' \in L^2(0, T, V'). \quad (2.33)$$

**Théorème 2.3** : Toute solution du problème  $PV_1$  vérifie

$$u' \in L^2(0, T, V'_s), \quad s = \frac{n}{2}. \quad (2.34)$$

**démonstration du théorème :**

La démonstration du théorème se fait en plusieurs étapes.

**a)Solution approchée :**

On introduit une suite  $(w_n)$  de fonction ayant les propriétés suivantes :

- $\forall j, w_j \in V \cap (L^N(\Omega))^N$
- La famille  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  est linéairement indépendante
- L'espace  $V_m = span \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  engendré par la famille  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  est dense  $V \cap (L^N(\Omega))^N$ .

Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  on note  $(PV_{1m})$  le problème suivant : trouver  $u_m = u_m(t)$  dans  $V_m$ , sous la forme

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{jm}(t)w_j. \tag{2.35}$$

$$\begin{cases} (u'_m(t), w_j) + va(u_m(t), w_j) + b(u_m(t), u_m(t), w_j) = (f(t), w_j), 1 \leq j \leq m, \\ u_m(0) = u_{0m} \in \{w_1, w_2, \dots, w_m\}. \end{cases} \tag{2.36}$$

Où

$$u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ dans } H. \tag{2.37}$$

Ce système d'équation différentielles en les  $g_{jm}$  défini  $u_m(t)$  dans  $[0, T]$  on veer au point suivant que l'on peut prendre  $t_m = T$ .

**b) Estimations à priori :**

On multiplie l'équation (2.36) d'indice  $j$  par  $g_{jm}(t)$  et l'on somme en  $j$ , comme (lemme)  $b(u_m, u_m, u_m) = 0$ , il vient

$$(u'_m(t), u_m(t)) + va(u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)). \tag{2.38}$$

On a si

$$w' \in L^2(0, T, V), w' \in L^2(0, T, V').$$

$$(u'_m(t), u_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 \text{ et } a(u_m(t), u_m(t)) = \|u_m(t)\|^2. \tag{2.39}$$

En utilisant (2.38) dans (2.39) devient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \mu \|u_m(t)\|^2 \leq \|f(t)\|_{V'} \|u_m(t)\|. \tag{2.40}$$

Grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz, de (2.40) on conclut que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \mu \|u_m(t)\|^2 \leq \|f(t)\| \|u_m(t)\|. \tag{2.41}$$

En utilisant inégalités  $ab \leq \frac{\mu a^2}{2} + \frac{b^2}{2\mu}$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \mu \|u_m(t)\|^2 \leq \frac{\mu}{2} \|u_m(t)\|^2 + c \|f(t)\|^2, \text{ avec } c = \frac{1}{2\mu}, \tag{2.42}$$

inégalités (2.42) sur  $t$ , en gardant à l'esprit que

$$u_m(0) = u_{0m}.$$

$$|u_m(t)|^2 + \mu \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq |u_{0m}|^2 + c \int_0^t \|f(\sigma)\|^2 d\sigma. \tag{2.43}$$

Puisque  $f \in L^2(0, T, V')$

$$|u_m(t)|^2 + \mu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leq C, \text{ (indépendant de } m). \tag{2.44}$$

D'où l'indépendance de  $t_m$  par rapport à  $m$

En utilisant (2.44) pour conclure  $u_m$  demeure dans un borné de

$$L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H). \quad (2.45)$$

**c) Estimation a priori 2 :**

Nous allons maintenant montrer le point principal, que c'est

$$u'_m \text{ demeure dans un bornée de } L^2(0, T, V'_s). \quad (2.46)$$

Soit en effet  $P_m$  le projecteur de  $H \rightarrow [w_1, \dots, w_m]$

donc

$$P_m h = \sum_{i=1}^m (h, w_i) w_i. \quad (2.47)$$

Avec les théorème 2.3.3 on déduit de (2.29) que

$$u'_m = -P_m (g(u_m)) - \mu P_m A u_m + P_m f. \quad (2.48)$$

Mais  $\| P_m \|_{L(V_s, V_s)} \leq 1$  (grâce au choix de  $w_j$ ), donc par transposition (et comme  $P_m^* = P_m$ ) :

$$\| P_m \|_{L(V'_s, V'_s)} \leq 1. \quad (2.49)$$

On déduit de (2.46) (2.30) (2.31) que  $g(u_m)$  demeure dans un bornée de  $L^2(0, T, V'_s)$ , et donc  $P_m (g(u_m))$  demeure dans un bornée de  $L^2(0, T, V'_s)$ .

Alors comme  $A u_m$  demeure dans un bornée de  $L^2(0, T, V')$  donc de  $L^2(0, T, V'_s)$ , (2.46) résulte de (2.48).

**d) Passage à la limite**

De (2.35), (2.46) on déduit qu'on peut extraire une suite  $(u_\mu)$  de  $(u_m)$  telle que

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T, V'_s) \text{ faible}, \quad (2.50)$$

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T, H) \text{ faible étoile}, \quad (2.51)$$

$$u'_\mu \rightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T, V'_s) \text{ faible}. \quad (2.52)$$

On utilise le théorème de compacité avec

$$B_0 = V, p_0 = 2,$$

$$B_1 = V'_s, p_1 = 2,$$

$$B_0 = H,$$

nous obtenons

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T, H) \text{ fort et } p.p \text{ dans } Q \text{ étoile}. \quad (2.53)$$

On déduit de (2.50) (2.52) que  $u_\mu(0) \rightarrow u(0)$  dans  $V'_s$  faible (par exemple) et donc que

$$u(0) = u_0.$$

D'après le lemme (2.3.3)  $u_{\mu i} u_{\mu j}$  est borné dans  $L^2(0, T, L^{\frac{p}{2}}(\Omega))$  et on peut donc supposer que

$$u_{\mu i} u_{\mu j} \rightarrow \chi_{ij} \text{ dans } L^2(0, T, L^{\frac{p}{2}}(\Omega)) \text{ faible}. \quad (2.54)$$

On a

$$\chi_{ij} = u_i u_j. \quad (2.55)$$

bien noter que  $u_{\mu i} u_{\mu j} \rightarrow u_i u_j$  dans  $\mathcal{D}'(Q)$ , en effet

$$\int_{\Omega} u_{\mu i} u_{\mu j} \varphi dx dt \rightarrow \int_{\Omega} u_i u_j \varphi dx dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q). \quad (2.56)$$

Car  $u_{\mu i} \rightarrow u_i$  dans  $L^2(Q)$  faible et  $u_{\mu j} \varphi \rightarrow u_j \varphi$  dans  $L^2(Q)$  fort).

On déduit de (2.54) (2.55) que

$$b(u_\mu, u_\mu, w_j) \rightarrow b(u, u, w_j) \text{ dans } L^2(0, T). \quad (2.57)$$

En effet si  $\Phi \in L^2(0, T)$ , on a :

$$\int_0^T b(u_\mu, u_\mu, w_j) \Phi dt = - \int_0^T b(u_\mu, w_j, u_\mu) \Phi dt,$$

et on passe à la limite en utilisant (2.54)

par ailleurs

$$(u'_\mu, w_j) \rightarrow (u', w_j) \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T) \text{ par exemple,}$$

et donc (2.36) (pour  $m = \mu$ ) donne à la limite

$$(u', w_j) + \mu a(u, w_j) + b(u, u, w_j) = (f, w_j),$$

et cela  $\forall j$

On en déduit (2.25)  $\forall \mu \in V_s$ , puis  $\forall \mu \in V(L^N(\Omega))^N$ .

### 2.4.2 Unicité de la solution (le cas la dimenion d'espace 2)

On va donner dans ce paragraphe un résultat nouveau concernant l'unicité de la solution du problème considéré, Ce résultat consiste à démontrer l'unicité de la solution en avec la condition

$$N = 2.$$

: Soient  $u$  et  $u^*$  deux solutions du problème  $PV_1$ , au sens du théorème (2.4.1) En posant  $w = u - u^*$ , alors w doit vérifier le système suivant :

$$\begin{aligned} (w', v) + \nu a(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) &= 0 \\ \forall v \in V \subset (L^2(\Omega))^2 = V \quad (\text{car } V \subset (L^2(\Omega))^2). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Puisque l'on sait, d'après (2.33) que  $w' \in L^2(0, T; V')$  on peut prendre dans (2.58)  $v = w(t)$  et intégrer sur  $[0, t]$  on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |w(t)|^2 + \mu \int_0^t a(w, w) d\sigma \\ + \int_0^t (b(w, u, w) + b(u, w, w) + b(w, w, w)) d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

On a  $b(u, w, w) = 0, b(w, w, w) = 0$  avec (2.59) donne

$$\frac{1}{2} |w(t)|^2 + \mu \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma = - \int_0^t b(w, u, w) d\sigma. \quad (2.60)$$

Or

$$\left| \int_0^t b(w, u, w) d\sigma \right| \leq c \int_0^t \|w(\sigma)\|_{(L^4(\Omega))^2}^2 \|u(\sigma)\| d\sigma. \quad (2.61)$$

Par (2.32)

$$\left| \int_0^t b(w, u, w) d\sigma \right| \leq c \int_0^t |w(\sigma)| \|w(\sigma)\| \|u(\sigma)\| d\sigma. \quad (2.62)$$

En utilisant l'inégalité  $ab \leq \frac{1}{2} \left( 2\mu a^2 + \frac{1}{2\mu} b^2 \right)$  on obtient

$$\left| \int_0^t b(w, u, w) d\sigma \right| \leq \mu \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma + c \int_0^t |w(\sigma)|^2 \|u(\sigma)\|^2 d\sigma. \quad (2.63)$$

Donc (2.60) donne

$$|w(\sigma)|^2 \leq 2c \int_0^t \|u(\sigma)\|^2 |w(\sigma)|^2 d\sigma,$$

On utilise le lemme de Gronwall  
d'où

$$w = 0.$$

# Une application à l'équations de Navier-Stokes pour les fluide incompressible

Dans cette partie on commence par décrire la loi de comportement de mouvement pour un fluide, puis on s'intéresse aux différentes conditions aux limites.

Finalement, on donne la formulation mathématique des problèmes que seront étudiés dans ce mémoire[3].

## 3.1 Position de problème

L'objet de la mécanique des milieux continus est l'étude du mouvement des corps si les distances relatives entre ses points sont variables.

Le principe fondamental de la mécanique est

$$\sum F_i = \rho u. \quad (3.1)$$

Cette équation s'appelle équation Newton du mouvement,  $F_i$  est la force totale sur  $i$  direction, un volume  $V(t)$  ayant pour frontière fermée  $S(t)$  avec comme vecteur normal unitaire  $n$ , ou  $\rho$  représente la densité de masse et  $u$  représente l'accélération. D'après la seconde loi de Newton

$$\frac{dP}{dt} = \sum F_{ext}. \quad (3.2)$$

La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un système est égale à la somme des forces extérieures est

$$\sum F_{ext} = \sum F_{vol} + \sum F_{surf}. \quad (3.3)$$

Maintenant on voudrait considérer un fluide plus générale qu'un fluide idéal, dans cette optique considérons un petit élément de surface  $A$  ayant vecteur position  $x$  et de superficie  $\delta S$ .

On définit le vecteur contrainte  $sn(x, t)$  en imposant que la force exercée au temps  $t$  sur l'élément  $A$  par le fluide à l'extérieur de  $v(t)$  est  $sn.\delta S$ .

La force totale sur toute la surface  $S$  est alors

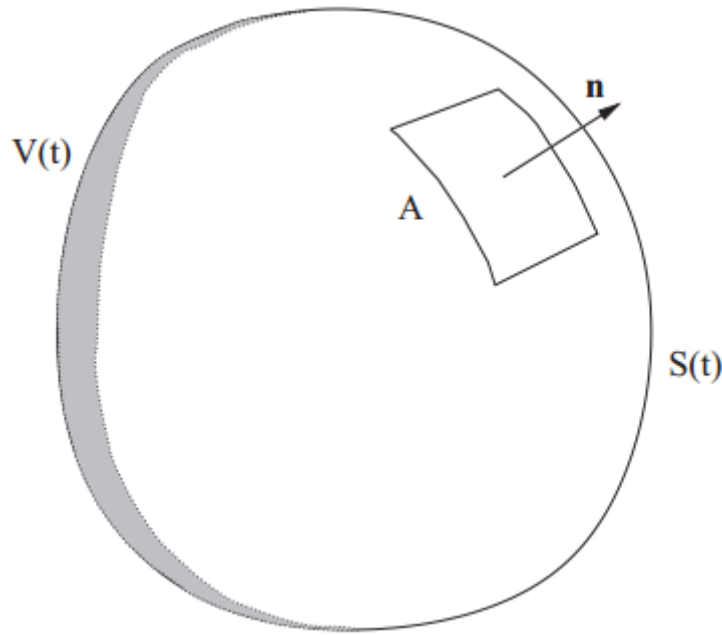
$$F_{surf} = \int_{S(t)} S_n dS. \quad (3.4)$$

Et la force totale subie par le fluide qui occupe  $V(t)$  va être

$$\sum F_{ext} = \sum F_{vol} + \sum F_{surf} = \int_{S(t)} S_n dS + \int_{V(t)} \rho g dV. \quad (3.5)$$

Où  $g$  désigne une force par unité de masse.

On présente dans cette thèse, les lois de comportement de deux catégories de matériau mouvement pour un fluide.


 FIGURE 3.1 – Le volume matériel  $V(t)$ 

### 3.1.1 Conservation de la quantité de mouvement (Euler 1752)

La conservation de la quantité de mouvement donne

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v dV = \int_{S(t)} S_n dS + \int_{V(t)} \rho g dV. \quad (3.6)$$

En faisant passer la dérivée temporelle du membre de gauche de (3.6) dans l'intégrale par le théorème du transport de Reynolds, et en utilisant l'équation de conservation de la masse, on a

$$\int_{V(t)} \rho \frac{Dv}{Dt} dV = \int_{S(t)} S_n(x, t) dS + \int_{V(t)} \rho g dV. \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Conservation du moment.

Une autre loi de la mécanique due à Euler (1755) stipule le principe de conservation du moment. En appliquant cette loi au volume  $V(t)$  on obtient, en supposant que le couple est seulement dû à la contrainte  $S_n$  et à la force massique  $g$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} (x \times \rho v) dV = \int_{S(t)} (x \times S_n) dS + \int_{V(t)} (x \times \rho g) dV. \quad (3.8)$$

En utilisant à nouveau le théorème de transport de Reynolds qui nous permet de transférer la dérivée matérielle à l'intérieur de l'intégrale du membre de gauche, et en utilisant, on obtient

$$\int_{V(t)} \left( x \times \rho \frac{Dv}{Dt} \right) dV = \int_{S(t)} (x \times S_n) dS + \int_{V(t)} (x \times \rho g) dV. \quad (3.9)$$

### 3.1.3 Le tenseur des contraintes (Cauchy 1822)

Les lois d'Euler appliquées à un fluide conduit aux équations (3.7) et (3.9). Nous allons tout d'abord utiliser les équations (3.7) et (3.9) pour démontrer l'existence d'un tenseur des contraintes  $\sigma(x, t)$  ayant la propriété suivante :

$$S_n(x, t) = \sigma \cdot n.$$

Et ensuite la symétrie du tenseur des contraintes.

**Théorème 3.1** : Soit  $\mathcal{D}$  une région fermée et bornée de  $\mathbb{R}^3$  et  $S_n(x, t)$  le vecteur contrainte introduit ci-dessus et défini dans  $\mathcal{D}$ . Alors il existe un tenseur de second ordre  $\sigma(x, t)$  tel que dans  $\mathcal{D}$  on ait :

$$S_n = \sigma \cdot n.$$

### 3.1.4 Tenseurs isotropes :

Un tenseur cartésien est dit isotrope si toutes ses composantes restent inchangées dans tout système de coordonnées cartésiennes.

Tenseurs du second ordre

Soit  $U$  un tenseur isotrope du second ordre. Donc

$$u_{pq} = L^P l_{qj} u_{ij}. \quad (3.10)$$

On considère premièrement une rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $Ox_3$ . Pour cette rotation

$$l_{11} = l_{22} = -1, l_{33} = 1 \text{ et } l_{ij} = 0 \text{ autrement.} \quad (3.11)$$

Et, par conséquent

$$\begin{aligned} u_{13} &= l_{1i} l_{3j} u_{ij} = l_{11} l_{33} u_{13} = -u_{13}, \\ \implies u_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De la même manière

$$\begin{aligned} u_{23} &= l_{2i} l_{3j} u_{ij} = l_{22} l_{33} u_{23} = -u_{23}, \\ u_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

En prenant des rotations de  $\pi$  autour des axes  $Ox_1$  et  $Ox_2$  on obtiendra

$$u_{21} = u_{31} = u_{12} = u_{32} = 0.$$

Une rotation de  $\pi/2$  autour de l'axe  $Ox_3$  a les cosinus directeurs

$$l_{12} = l_{33} = 1, l_{21} = -1 \text{ et } l_{ij} = 0 \text{ autrement.} \quad (3.14)$$

De la même façon que ci-dessus on obtiendrait immédiatement le résultat  $u_{11} = u_{22}$  et en faisant une rotation autour de l'axe  $Ox_1$  on conclut que

$$u_{11} = u_{22} = u_{33} \text{ avec } u_{ij} = 0 \text{ autrement.} \quad (3.15)$$

En conclusion le tenseur isotrope du second ordre le plus général est

$$U = \lambda \delta.$$

Où  $\lambda$  est un invariant scalaire.

Tenseurs d'ordre 4

Le tenseur isotrope du quatrième ordre  $U$  le plus général est

$$u_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu \delta_{ik} \delta_{jm} + \nu \delta_{im} \delta_{jk}.$$

Où  $\lambda, \mu$  et  $\nu$  sont des invariants scalaires.

**Définition 3.1 (Fonction tensorielle isotrope)** : Soit  $A$  et  $B$  des tenseurs du second ordre dont les composantes relatives aux axes  $Ox_1 x_2 x_3$  sont  $a_{km}$  et  $b_{ij}$ , respectivement. Supposons que chacune des composantes de  $B$  soit en fonction des composantes de  $A$ . écrivons la relation entre les composantes de  $B$  et de  $A$  sous la forme

$$b_{ij} = F_{ij}(a_{km}). \quad (3.16)$$

Relatives aux nouveaux axes  $Ox'_1 x'_2 x'_3$ , supposons que les composantes de  $A$  et  $B$  soient  $a'_{km}$  et  $b'_{ij}$ , respectivement, et que maintenant

$$b'_{ij} = F_{ij}(a'_{km}). \quad (3.17)$$

La relation entre les composantes de  $B$  et de  $A$  est donc invariante sous une rotation des axes, et nous disons que  $B$  est une fonction isotrope de  $A$ .

### 3.2 Le fluide newtonien

Pour dériver une forme explicite du tenseur des contraintes, on écrit

$$\sigma = -pI + T. \quad (3.18)$$

Où  $p$  est la pression et  $T$  est appelé le tenseur des extra-tensions ou le déviateur des contraintes. La forme fonctionnelle de  $T$  peut être déduite des trois hypothèses suivantes :

1.  $T$  est une fonction linéaire du gradient de la vitesse  $\nabla v$
2.  $T = 0$  lorsqu'il n'y a pas de déformation des éléments du fluide
3. a relation entre  $T$  et le gradient de la vitesse  $\nabla v$  est isotrope, c'est à dire, identique pour tout repère cartésien rectangulaire, telle que le déviateur des contraintes engendré dans un élément de fluide est indépendant de l'orientation de l'élément. Des deux premières hypothèses on peut écrire

$$\begin{aligned} T_{ij} &= A_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \\ &= \frac{1}{2} A_{ijkl} \dot{\gamma}_{kl} - \frac{1}{2} A_{ijkl} \Omega_{kl}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Où  $A$  est un tenseur de quatrième ordre et les tenseurs  $\dot{\gamma}$  et  $\Omega$  sont définis, respectivement, comme suit :

$$\dot{\gamma} = \nabla v + \nabla v^T \text{ (tenseur de vitesse de déformation ou des taux de déformation)}. \quad (3.20)$$

$$\Omega = \nabla v^T - \nabla v. \quad (3.21)$$

De la troisième hypothèse on constate qu'il faut utiliser un tenseur  $A$  isotrope, dont la forme la plus générale (voir feuilles séparées) est en fonction des tenseurs delta

$$A_{ijkm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \nu \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (3.22)$$

Où  $\lambda$ ,  $\eta$  et  $\nu$  sont des coefficients scalaires. Puisque  $T$  est symétrique,  $A$  doit être symétrique dans ses deux premiers indices et par conséquent  $\nu = \eta$ . Mais on observe de (3.22) que  $A$  est aussi symétrique par rapport à ses deux derniers indices  $k$  et  $l$  qui nécessite (rappellent que le tenseur  $\Omega$  est antisymétrique) que le deuxième terme du membre de droite de (3.19) est nul. En tenant compte des remarques faites ci-dessus on peut écrire

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{\lambda}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} \dot{\gamma}_{kl} + \frac{\eta}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \dot{\gamma}_{kl} \\ &= \frac{\lambda}{2} \delta_{ij} \dot{\gamma}_{kk} + \eta \dot{\gamma}_{ij}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

On note que  $\dot{\gamma}_{kk} = 2\nabla \cdot v$ , de sorte que pour un fluide incompressible

$$T = \eta \dot{\gamma}. \quad (3.24)$$

Où la constante  $\eta$  maintenant désigne la viscosité du fluide.

On note aussi que pour un fluide incompressible la pression s'exprime par la valeur moyenne des contraintes normales :

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \quad (3.25)$$

Considérons ensuite le tenseur  $\dot{\gamma}$  pour un écoulement bidimensionnel. Selon la figure il apparaît que, pendant l'intervalle de temps  $\delta t$ , l'élongation du côté  $AB$  de la particule dans la direction  $e_1$  est égale à

$$(v_1(x_1 + \delta x_1) - v_1(x_1)) \delta t \approx \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta x_1 \delta t. \quad (3.26)$$

Par conséquent, le taux d'élongation dans la direction  $e_1$  devient  $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$ . De la même manière on voit que  $\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$  représente le taux d'élongation du côté  $AC$  dans la direction  $e_2$ . Ces termes correspondent aux éléments diagonaux du tenseur  $\dot{\gamma}$ . En ce qui concerne les termes non diagonaux, on voit d'après la figure que, pendant l'intervalle de temps  $\delta t$ , les deux côtés de la particule centrés au point  $A$  ont accompli une rotation  $\delta\alpha$  et  $\delta\beta$  dans le même sens. Ces rotations correspondent donc à une déformation par cisaillement de la particule. Cependant, les angles  $\delta\alpha$  et  $\delta\beta$  sont exprimés par

$$\begin{aligned}\delta\alpha &\approx \text{tag}\delta\alpha = \frac{\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\delta x_1\delta t + \dots}{\delta x_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\delta x_1\delta t + \dots} \approx \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\delta t \\ \delta\beta &\approx -\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\delta t.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Il s'en suit que le taux de déformation par cisaillement s'exprime dans le plan  $x_1x_2$  par

$$(\delta\alpha - \delta\beta)(\delta t)^{-1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}.\quad (3.28)$$

La somme des deux termes diagonaux a aussi une signification physique. Puisque  $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$  représente le taux d'élongation dans la direction  $e_1$ , la longueur de la particule dans cette même direction devient, après un intervalle de temps  $\delta t$ ,  $\delta x_1 \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\delta t + \dots\right)$  (projection de la distance  $AB$  sur l'axe  $x_1$ ). Par conséquent, la superficie de la particule après  $\delta t$  est égal à

$$\delta x_1 \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\delta t + \dots\right) \delta x_2 \left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\delta t + \dots\right) = \delta x_1 \delta x_2 \left(1 + \nabla \cdot V \delta t + O(\delta t)^2\right).\quad (3.29)$$

Le taux de changement de la superficie de la particule est traduite donc par la divergence du vecteur vitesse  $V$ .

### 3.2.1 Les équations de mouvement pour un fluide newtonien

D'après (3.14) les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma$  sont alors données par

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + T_{ij} = -P\delta_{ij} + \eta\dot{\gamma}_{ij}.\quad (3.30)$$

Le stage final pour la dérivation de l'équation de mouvement pour un fluide newtonien est d'injecter (3.26) dans l'équation de mouvement pour obtenir

$$\begin{aligned}\rho \frac{DV_i}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) + \rho g_i \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} + \rho g_i.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Car

$$\frac{\partial^2 V_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot V) = 0.$$

Donc sous forme vectorielle les équations de Navier-Stokes pour un fluide :

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \eta \nabla^2 V + \rho g.\quad (3.32)$$

L'écoulement est dans le plan  $(xy)$  et unidirectionnel selon  $x$ , on peut donc admettre que les composantes de vitesse selon  $y$  et  $z$  sont nulles. D'autre part l'écoulement est incompressible donc

$$\nabla \cdot V = 0 = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Les équations de Navier-Stokes avec le champ de pression est uniforme en tout point et égal à la pression atmosphérique  $P_0$  et que  $V_x(y) = V_y/h$  :

$$\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \eta \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right),$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_y}{\partial t} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \eta \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right),$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \eta \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right).$$

Donc

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2},$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y},$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z},$$

les deux dernières égalités nous disent que la pression ne dépend que  $x$  et comme la vitesse ne dépend de  $y$ , la première égalité nous dit que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = K, \quad K \text{ est une constante.} \quad (3.33)$$

Ceci conduit à  $P(x) = Kx + C$ , ( $C$  est une constante).  $P = P_0$  en  $x = 0$  et  $x = l$ . On déduit que  $K = 0$  et  $P = P_0$ .

Les conditions d'adhérence du fluide

$$V_x(y = 0) = 0,$$

$$V_x(y = h) = V.$$

La relation précédente s'intègre sous la forme

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = 0, \quad \Rightarrow V_x = ay + b, \quad (3.34)$$

on trouve les constantes  $a$  et  $b$  avec les conditions d'adhérences du fluide aux parois

$$V_x(y) = V_y/h. \quad (3.35)$$

# CONCLUSION

Dans ce travail, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Navier-Stokes régularisée, tel que nous avons conclu lorsque l'opérateur est monotone, la méthode de la monotonie est mieux adaptée à l'étude des problèmes non linéaires, car elle nécessite moins d'estimations que la méthode de compacité. Et une application pour les fluide incompressible.

# Bibliographie

- [1] Boyer, F. & Fabrie, P. (2012). *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models* (Vol. 183). Springer Science & Business Media.
- [2] Brezis, H. (1992). *Analyse Fonctionnelle. Théorie, Méthodes et Applications*.
- [3] Christodoulou, D. (2007). The Euler equations of compressible fluid flow. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 44(4), 581-602.
- [4] Djetoui, F. (2018). Existence d'une solution faible pour l'écoulement d'un fluide micropolaire (Doctoral dissertation, FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE Département des Mathématiques).
- [5] Fields Institute, Ecole Normal Supérieure de paris and Université de paris, September 2020.
- [6] Munnier, A. (2007). *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*. Institut élie Cartan Université Henri Poincaré, Nancy, 1, 2007-2008.
- [7] NADIR, M. *Cours d'analyse fonctionnelle*, Université de M'sila Algérie 2004.
- [8] Raviart, P. A. Thomas, J. M. *Introduction à l'Analyse Numérique l'Analyse des équations aux dérivées partielles*, Masson (1988).
- [9] Temam, R. (2001). *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis* (Vol. 343). American Mathematical Soc.
- [10] Wei-hui, S., Xiao-zuo, F. (1994). Stability of navier-stokes equation (II). *Applied Mathematics and Mechanics*, 15(10), 929-933.
- [11] R. Herbin, Université Aix-Marseille 1, 3 novembre 2010.
- [12] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Paris, Dunod (1969).
- [13] P. A. Raviart, J. M. Thomas. *Introduction à l'Analyse Numérique l'Analyse des équations aux dérivées partielles*, Masson (1988).
- [14] V. Mikhailov, *Equations aux dérivées partielles*, Editions Mir (1980).

## ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة وجود ووحدانية الحلول الضعيفة للمعادلات الغير الخطية ، في فضاء دالي.

المستوحى من كتاب (Loins) [8] وهذا حتى يصبح العمل واضح يراعى فيه الطرح المنهجي  
والمفصل للبراهين

### الكلمات المفتاحية:

معادلات نافير-ستوكس، طريقة فادو-كالاركين، خاصية الاكتناز، طريقة الرتبة.

## Résumé

Ce travail vise principalement à étudier l'existence et l'unicité des solutions faibles des équations non linéaires de Navier Stokes dans un espace des fonctions.

Inspiré du livre (Loins) [8], c'est pour que le travail devienne clair, compte tenu de la présentation systématique et détaillée des preuves.

### les mots clés:

Équations de Navier-Stokes, méthode de Faedo-Galerkin, propriété de compacité, méthode de monotonie.

## Abstract

This work mainly aims to study the existence and unicity of weak solutions of Navier Stokes nonlinear equations in a function space.

Inspired by the book (Loins) [8], this is so that the work becomes clear, taking into account the systematic and detailed presentation of the proofs.

### key words:

the Navier-Stokes equation, the Faedo-Galerkin method, lemma of compactness, the method of monotony.