

# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Analyse Fonctionnelle

Par

*M'hamdi Abdelmoumene*

Sujet

**Les espaces multi-normés**

Date de soutenance : 18 Juin 2018

**Devant le jury :**

<i>Mr. Tallab Abdelhamid</i>	<i>M.C.B Univ. de M'sila</i>	<i>Président</i>
<i>Mr. Dahia Elhadj</i>	<i>M.C.A Univ. de M'sila</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>Mr. Hraiz Rabah</i>	<i>M.C.B Univ. de M'sila</i>	<i>Examineur</i>

**Promotion : 2017 / 2018**

## إهداء

أهدي ثمرة عملي هذا مجازاً لمن أهدوني حقيقة.

إلى الأبوين الكريمين اللذان لم يبخلوا عليّ ببذل أبداً.

إلى الزوجة الوفية الصابرة التي كانت لي العون في هذا الدرب.

إلى الأساتذة والمعلمين الذين بفضل جهودهم وصلت إلى حيث أنا.

إلى جميع الأهل والأحباب .

إلى زملائي في طريق البحث والطلب.

إلى الصديق الوفي علاء الدين الذي كان المحفز لمواصلة السير في درب الطلب.

عبدالمؤمن

## *Remerciements*

Nous remercions ALLAH le tout puissant pour la force et la patience qu'il nous a donné pour mener à bien ce travail.

Nous témoignons toute notre gratitude à Monsieur *Tallab Abdelhamid*, Maître Conférences à l'Université de M'sila d'accepter de présider ce jury.

Nous exprimons notre vive reconnaissance à Monsieur *Hraiz Rabah*, Maître Conférences à l'Université de M'sila pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Nous avons une attention toute particulière pour Monsieur *Dahia Elhadj*, Maître de Conférences à l'Université de M'sila pour nous avoir encadrés, pour sa disponibilité et son soutien durant la réalisation de ce travail de recherche.

Nous adressons également nos vifs remerciements et nos meilleures pensées à tous nos Professeurs du Département.

Enfin, que toute notre famille, nos amis, nos collègues et toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail, trouve ici l'expression de notre profonde gratitude.

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	2
<b>1</b>	<b>Les axiomes et quelques conséquences</b>	<b>3</b>
1.1	Les axiomes d'une multi-norme et dual multi-norme . . . . .	4
1.1.1	Définition des axiomes . . . . .	4
1.1.2	Indépendance des axiomes . . . . .	5
1.2	Conséquences élémentaires des axiomes . . . . .	9
1.2.1	Résultats pour les normes spéciales . . . . .	9
1.2.2	Résultats pour les multi-normes . . . . .	11
1.2.3	Résultats pour les dual multi-normes . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Dualité dans les espaces multi-normés</b>	<b>16</b>
2.1	Duals de produits des espaces de Banach . . . . .	17
2.2	Dualité dans les espaces normés spéciaux . . . . .	18
2.3	Dualité dans les espaces multi-normés . . . . .	19
2.4	Exemple d'une multi-norme . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Espaces vectoriels multi-topologiques et multi-normes</b>	<b>22</b>
3.1	Espaces vectoriels multi-topologiques . . . . .	23
3.2	Suites multi-convergentes . . . . .	25
3.3	Espaces multi-normés et espaces vectoriels multi-topologiques. . . . .	26
3.4	Opérateurs multi-bornés (multi-continus) . . . . .	29

## 0.1 Introduction

La théorie des espaces multi-normés est développée par H. G. Dales, M. E. Polyakov dans un ouvrage qui contient de manière presque encyclopédique tout ce qui était connu au ce sujet.

L'objectif de notre mémoire est de mettre en évidence quelques résultats de la théorie des espaces multi-normés.

Notre travail se divise en trois chapitres. Dans le chapitre 1 on étudie les axiomes de la définition d'une multi-norme et d'une dual multi-norme plus quelques conséquences de ces axiomes.

Dans le deuxième chapitre, on donne une étude générale sur la dualité dans les espaces multi-normés.

Le troisième chapitre représente la notion des espaces vectoriels multi-topologiques et étudie les suites multi-convergentes et également les manières de détermination des espaces vectoriels multi-topologiques à partir d'un espace multi-normé.

# Chapitre 1

## Les axiomes et quelques conséquences

# 1.1 Les axiomes d'une multi-norme et dual multi-norme

## 1.1.1 Définition des axiomes

Nous commençons avec la définition d'une multi-norme. (on dit que  $\|x\|_1$  est la norme initiale)

**Définition 1.1.1** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé complexe (respectivement, réel). Une multi-norme d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  sur  $\{E^k, 1 \leq k \leq n\}$  est une suite  $(\|\cdot\|_k)_{1 \leq k \leq n}$  telle que  $\|\cdot\|_k$  est une norme sur  $E^k$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ , avec  $\|x\|_1 = \|x\|$  pour tout  $x \in E$ , et que les axiomes suivants  $(A_1)$ - $(A_4)$  sont satisfaits pour chaque  $k$  avec  $2 \leq k \leq n$  :

$(A_1)$  Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{d}_k$  (le groupe de permutations d'indice  $k$ ) et  $x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$ , on

a

$$\|(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})\|_k = \|(x_1, \dots, x_k)\|_k$$

$(A_2)$  Pour tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$  (respectivement, pour tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ ) et  $x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$ , on a

$$\|(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_k x_k)\|_k \leq \left( \max_{1 \leq i \leq k} |\alpha_i| \right) \|x\|_k$$

$(A_3)$  Pour tout  $x_1, \dots, x_{k-1} \in E$ , on a

$$\|(x_1, \dots, x_{k-1}, 0)\|_k = \|(x_1, \dots, x_{k-1})\|_{k-1}$$

$(A_4)$  Pour tout  $x_1, \dots, x_{k-1} \in E$ , on a

$$\|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_{k-1})\|_k = \|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1})\|_{k-1}$$

dans ce cas  $((E^k, \|\cdot\|_k) : 1 \leq k \leq n)$  est dit espace multi-normé d'ordre  $n$ .

Une multi-norme sur  $\{E^k : k \in \mathbb{N}\}$  est une suite  $(\|\cdot\|_k)_{k \geq 1}$  tel que  $(\|\cdot\|_k : 1 \leq k \leq n)$  est une multi-norme d'ordre  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Dans ce cas on dira que  $((E^n, \|\cdot\|_n) : n \in \mathbb{N})$  est un espace multi-normé.

**Remarque 1.1.2** 1) L'axiome  $(A_1)$  proprement dit, pour tout permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ , l'opérateur linéaire  $A_\sigma$  défini de  $(E^k, \|\cdot\|_k)$  dans lui même par

$$A_\sigma((x_i)_i) = (x_{\sigma(i)})_i$$

est une isométrie.

2) L'axiome  $(A_2)$  proprement dit, pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k$  avec  $|\alpha_i| \leq 1$ , on a  $\|M_\alpha\| \leq 1$ . Où  $M_\alpha$  est l'opérateur de multiplication par la suite  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq k}$  défini sur  $E^k$  par  $M_\alpha((x_i)_{1 \leq i \leq k}) = (\alpha_i x_i)_{1 \leq i \leq k}$ . On sait que  $\|M_\alpha\| = \max_{1 \leq i \leq k} |\alpha_i|$ .

Avant de passer aux définition d'un espace dual multi-normé, on donne un autre axiome  $(B_4)$  comme suit :

$(B_4)$  Pour tout  $x_1, \dots, x_{k-1} \in E$ , on a

$$\|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_{k-1})\|_k = \|(x_1, \dots, x_{k-2}, 2x_{k-1})\|_{k-1}$$

**Définition 1.1.3** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé. Une dual multi-norme d'ordre  $n$  sur  $\{E^k, k \in \mathbb{N}\}$  est une suite  $(\|\cdot\|_k)_k$  des normes  $\|\cdot\|_k$  sur  $E^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , avec

$\|x\|_1 = \|x\|$  pour tout  $x \in E$ , et que les axiomes  $(A_1), (A_2), (A_3)$  et  $(B_4)$  sont satisfaits pour chaque  $k \geq 2$ ,

Dans ce cas on dira que  $((E^k, \|\cdot\|_k) : k \in \mathbb{N}^*)$  est un espace dual multi-normé.

## 1.1.2 Indépendance des axiomes

Nous donnons des exemples pour montrer que les quatre axiomes  $(A_1)$ - $(A_4)$  sont indépendants.

**Exemple 1.1.4** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé. Fixons  $\|x\|_1 = \|x\|$  pour tout  $x \in E$ , et pour tout  $n \geq 2$  et définissons

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_n = \max \left\{ \|x_1\|, \frac{\|x_2\|}{2}, \dots, \frac{\|x_n\|}{2} \right\} \quad \text{pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in E^n.$$

On vérifie immédiatement que  $\|x\|_n$  est une norme sur  $E^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et que la suite  $(\|\cdot\|_n)$  satisfait les axiomes  $(A_2)$ ,  $(A_3)$  et  $(A_4)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Cependant, si on prend  $x \in E$  avec  $\|x\| = 1$  on trouve

$$\|(2x, 3x)\|_2 = 2 \quad \text{et} \quad \|(3x, 2x)\|_2 = 3.$$

Donc  $\|x\|_2$  ne satisfait pas l'axiome  $(A_1)$ .

**Exemple 1.1.5** Dans cet exemple, on pose  $E = \mathbb{C}$ .

Pour  $z \in \mathbb{C}$  on définit  $\|z\|_1 = \|z\|$ . Ensuite, pour  $(z, w) \in \mathbb{C}^2$  on définit

$$r((z, w)) = \frac{1}{2} (|z - w| + |z + w|).$$

Alors  $r$  est une norme sur  $\mathbb{C}^2$ . De plus,

$$r((z, z)) = r((z, 0)) = |z|,$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Et aussi pour tout  $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ ,

$$r((z, w)) = r((w, z)) \geq \max\{|z|, |w|\}.$$

Enfin, pour  $n \geq 2$  et  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  on pose

$$\|(z_1, \dots, z_n)\|_n = \max_{1 \leq i, j \leq n} r((z_i, z_j)).$$

Alors

$$\|(z, w)\|_2 = r((z, w)), \quad \text{pour } (z, w) \in \mathbb{C}^2$$

et pour tout  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\|(z_1, \dots, z_n)\|_n \geq \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$$

Il s'ensuit facilement que  $\|\cdot\|_n$  est une norme sur  $\mathbb{C}^n$  et que la suite  $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie les axiomes  $(A_1)$ ,  $(A_3)$  et  $(A_4)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . D'autre part l'axiome  $(A_2)$  n'a pas lieu pour  $\|\cdot\|_2$ , en effet,

$$\|(1, i)\|_2 = \frac{1}{2} (|1 - i| + |1 + i|) = \sqrt{2} \geq 1 = \|(1, 1)\|_2,$$

d'où le résultat.

L'exemple suivant montre que pour les multi-normes d'ordre 2, l'axiome  $(A_3)$  est indépendant des autres axiomes.

**Exemple 1.1.6** On prend  $E = \mathbb{C}$  et on définit

$$\|z\|_1 = |z| \quad \text{et} \quad \|(z, w)\|_2 = \frac{1}{2} (|z| + |w|),$$

pour tout  $z, w \in \mathbb{C}$ .

Alors  $\|\cdot\|_2$  est une norme sur  $\mathbb{C}^2$  et vérifie les axiomes  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  et  $(A_4)$ . Cependant

$$\|(1, 0)\|_2 = \frac{1}{2} < 1 = \|1\|_1$$

et alors l'axiome  $(A_3)$  n'est pas vérifié pour  $\|\cdot\|_2$ .

**Exemple 1.1.7** Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé non vide et  $p \geq 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  définissons

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_n = \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout  $p \geq 1$ , la fonction  $\|\cdot\|_n$  est une norme sur  $E^n$ , et la suite  $(\|\cdot\|_n)_n$  satisfait les axiomes  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  et  $(A_3)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , mais  $\|\cdot\|_2$  ne satisfait pas l'axiome  $(A_4)$ .

On note que la suite  $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait l'axiome  $(B_4)$  si et seulement si  $p = 1$  alors dans ce cas,  $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un dual multi-norme.

Dans la proposition suivante nous montrons que l'axiome  $(A_3)$  découle des autres axiomes dans le cas où nous avons des normes sur toute la famille  $\{E^n : n \in \mathbb{N}\}$ . Dans la preuve de cette proposition on utilise la notation suivante. Pour  $x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$  on définit  $x^{[n]}$  par

$$x^{[n]} = (x_1, \dots, x_k, x_1, \dots, x_k, \dots, x_1, \dots, x_k) \in E^{nk}$$

tel qu'il existe  $n$  copies du chaque block  $(x_1, \dots, x_k)$ .

**Proposition 1.1.8** *Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé, soit  $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que  $\|\cdot\|_n$  est une norme sur  $E^n$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $\|x\|_1 = \|x\|$  pour tout  $x \in E$ , et tels que les axiomes  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  et  $(A_4)$  sont satisfaits pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une multi-norme sur  $(E^n : n \in \mathbb{N})$ .*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que l'axiome  $(A_3)$  a lieu. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et prend  $x = (x_i)_i \in E^n$ , avec  $\|x\|_n = 1$ . On pose

$$\alpha = \|(x_1, \dots, x_n, 0)\|_{n+1}.$$

Alors par  $(A_2)$  et  $(A_4)$  on obtient  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , par  $(A_1)$  et  $(A_4)$  on trouve

$$x^{[k+1]} \in E^{(k+1)n} \quad \text{et} \quad \|x^{[k+1]}\|_{(k+1)n} = 1.$$

Pour  $i \in \mathbb{N}$  avec  $1 \leq i \leq n+1$  on considère  $B_i$  le sous-ensemble de  $\{0, 1, \dots, (n+1)k\}$  défini par

$$B_i = \{1 + (i-1)k, \dots, ik\}.$$

Soit  $Q_{B_i}$  la projection sur  $B_i^c$ , c-à-d

$$Q_{B_i}(x) = \begin{cases} x_i, & i \notin B_i \\ 0, & i \in B_i \end{cases}$$

Par  $(A_1)$  et  $(A_4)$ , on a

$$\|Q_{B_i}(x^{[k+1]})\|_{(k+1)n} = \alpha.$$

De plus,

$$\sum_{i=1}^{k+1} Q_{B_i}(x^{[k+1]}) = kx^{[k+1]},$$

et donc

$$\begin{aligned} k &= k \|x^{[k+1]}\|_{(k+1)n} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k+1} \|Q_{B_i}(x^{[k+1]})\|_{(k+1)n} = (k+1)\alpha, \end{aligned}$$

d'où  $\alpha \geq \frac{k}{k+1}$ . Cela a lieu pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , donc  $\alpha = 1$ . ■

## 1.2 Conséquences élémentaires des axiomes

Dans la suite nous donnons quelques conséquences immédiates des axiomes pour les espaces multi-normés et les espaces dual multi-normés.

### 1.2.1 Résultats pour les normes spéciales

**Définition 1.2.1** Soit  $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite telle que  $\|\cdot\|_k$  est une norme sur  $E^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|$ . La suite  $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est dite norme spéciale si elle vérifie les axiomes  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  et  $(A_3)$ .

Le couple  $(E^n, \|\cdot\|_n)$  est dit alors espace normé spécial.

**Exemple 1.2.2** Les multi-normes et les dual multi-normes sont des exemples de normes spéciales.

Dans le reste de ce paragraphe, supposons que  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace normé complexe, et que  $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une norme spéciale. Ainsi, les résultats s'appliquent à les espaces multi-normés et les espaces dual multi-normés d'ordre  $n$ .

**Lemme 1.2.3** Soient  $k \in \mathbb{N}$  avec  $1 \leq k \leq n - 1$  et  $x_1, \dots, x_{k+1} \in E$ . Alors

$$\|(x_1, \dots, x_k)\|_k \leq \|(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})\|_{k+1} .$$

**Démonstration.** Par  $(A_2)$  et  $(A_3)$ ,

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_k)\|_k &= \|(x_1, \dots, x_k, 0)\|_{k+1} \\ &\leq \|(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})\|_{k+1} \end{aligned}$$

d'où le résultat ■

**Lemme 1.2.4** Soient  $j, k \in \mathbb{N}$  avec  $j + k \leq n$  et  $x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_k \in E$ . Alors

$$\|(x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_k)\|_{j+k} \leq \|(x_1, \dots, x_j)\|_j + \|(y_1, \dots, y_k)\|_k .$$

**Démonstration.**

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_k)\|_{j+k} &= \|(x_1, \dots, x_j, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, y_1, \dots, y_k)\|_{j+k} \\ &\leq \|(x_1, \dots, x_j, 0, \dots, 0)\|_{j+k} + \|(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_k)\|_{j+k} \\ (\text{par } (A_1)) &= \|(x_1, \dots, x_j, 0, \dots, 0)\|_{j+k} + \|(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)\|_{j+k} \\ (\text{par } (A_3)) &\leq \|(x_1, \dots, x_j)\|_j + \|(y_1, \dots, y_k)\|_k \end{aligned}$$

■

**Lemme 1.2.5** Soient  $1 \leq k \leq n$  et  $x_1, \dots, x_k \in E$ . Alors

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq k} \|x_i\| &\leq \|(x_1, \dots, x_k)\|_k \\ &\leq \sum_{i=1}^k \|x_i\| \\ &\leq k \max_{1 \leq i \leq k} \|x_i\| \end{aligned}$$

**Démonstration.** Pour tout  $1 \leq i \leq k$ , par  $(A_1)$  et  $(A_3)$  on a

$$\|x_i\| = \|(0, \dots, x_i, \dots, 0)\|_k.$$

Alors par  $(A_2)$  avec  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  on trouve

$$\|x_i\| = \|(0, \dots, x_i, \dots, 0)\|_k \leq \|(x_1, \dots, x_k)\|_k$$

ce qui entraîne

$$\max_{1 \leq i \leq k} \|x_i\| \leq \|(x_1, \dots, x_k)\|_k.$$

D'autre part par si on applique le Lemme 1.2.4  $k$  fois,

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_k)\|_k &\leq \|x_k\| + \|(x_1, \dots, x_{k-1})\|_{k-1} \\ &\leq \|x_k\| + \|x_{k-1}\| + \|(x_1, \dots, x_{k-2})\|_{k-2} \\ &\leq \|x_k\| + \|x_{k-1}\| + \dots + \|x_1\| \\ &= \sum_{i=1}^k \|x_i\| \leq k \max_{1 \leq i \leq k} \|x_i\| \end{aligned}$$

■

**Corollary 1.2.6** *Si  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach, alors l'espace normé  $(E_k, \|\cdot\|_k)$  est un espace de Banach pour tout  $k \in \mathbb{N}$  ( $1 \leq k \leq n$ ).*

Par le corollaire ci-dessus on peut donner la définition suivante

**Définition 1.2.7** *Soit  $((E^n, \|\cdot\|_n) : n \in \mathbb{N})$  un espace multi-normé. (respectivement, dual espace multi-normé) tel que  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach. Alors  $(E^n, \|\cdot\|_n)_{1 \leq k \leq n}$  est dit un espace multi-Banach (respectivement, espace dual multi-Banach).*

## 1.2.2 Résultats pour les multi-normes

Dans ce paragraphe, supposons que  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace normé complexe, et que  $(E^n, \|\cdot\|_n)_{1 \leq k \leq n}$  un espace multi-normé d'ordre  $n$ , c-à-d la suite  $(\|\cdot\|_k)_{1 \leq k \leq n}$  satisfait les axiomes  $(A_1)$ - $(A_4)$ .

**Lemme 1.2.8** Soient  $k \in \mathbb{N}^*$  avec  $1 \leq k \leq n$  et  $x \in E$ . Alors

$$\|(x, \dots, x)\|_k = \|x\|.$$

**Démonstration.** La preuve est clair par  $(A_4)$ . ■

**Lemme 1.2.9** Soient  $j, k \in \mathbb{N}^*$  avec  $1 \leq j, k \leq n$  et  $x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_k \in E$  tel que  $\{x_1, \dots, x_j\}$  est un sous ensemble de  $\{y_1, \dots, y_k\}$ . Alors

$$\|(x_1, \dots, x_j)\|_j \leq \|(y_1, \dots, y_k)\|_k.$$

**Démonstration.** Par les axiomes  $(A_1)$  et  $(A_4)$  on peut supposer  $j \leq k$  et  $x_i = y_i$  pour  $i \leq j$ . Donc par le Lemme 1.2.3,

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_j)\|_j &= \|(y_1, \dots, y_j)\|_j \\ &\leq \|(y_1, \dots, y_j, y_{j+1}, \dots, y_k)\|_k. \end{aligned}$$

■

**Lemme 1.2.10** Soient  $k \in \{2, \dots, n\}$  et  $x_1, \dots, x_k \in E$ . Si  $x = \alpha x_{k-1} + \beta x_k$  avec  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  et  $\alpha + \beta = 1$ . Alors

$$\|(x_1, \dots, x_{k-2}, x, x)\|_k \leq \|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k)\|_k.$$

**Démonstration.** On pose

$$y = (x_1, \dots, x_{k-2}) \quad \text{et} \quad A = \|(y, x_{k-1}, x_k)\|_k.$$

Alors

$$(y, x, x) = \alpha^2 (y, x_{k-1}, x_{k-1}) + \alpha\beta (y, x_{k-1}, x_k) + \alpha\beta (y, x_k, x_{k-1}) + \beta^2 (y, x_k, x_k).$$

Mais par  $(A_1)$  on a

$$\|(y, x_k, x_{k-1})\|_k = A.$$

Aussi par le Lemme 1.2.9 on a

$$\|(y, x_{k-1}, x_{k-1})\|_k \leq A$$

et

$$\|(y, x_k, x_k)\|_k \leq A.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_{k-2}, x, x)\|_k &\leq (\alpha + \beta)^2 A \\ &= A = \|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k)\|_k. \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.2.11** Soient  $((E^n, \|\cdot\|_n) : n \in \mathbb{N})$  un espace multi-normé et  $\zeta_k = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right)$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$\|(x_1, \dots, x_k)\|_k \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\| \sum_{m=1}^k \zeta_k^{jm} x_m \right\| \quad (1.1)$$

Pour tout  $x_1, \dots, x_k \in E$ .

**Démonstration.** Nous écrivons  $\zeta$  pour  $\zeta_k$ .

Notons d'abord que

$$x_\ell = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^k \zeta^{j(m-\ell)} x_m$$

pour tout  $1 \leq \ell \leq k$ .

Et comme

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k \zeta^{j(m-\ell)} x_m = k, & m = \ell \\ \sum_{j=1}^k \zeta^{j(m-\ell)} x_m = 0, & m \neq \ell \end{cases},$$

alors

$$\|(x_1, \dots, x_k)\|_k \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\| \left( \sum_{m=1}^k \zeta^{j(m-1)} x_m, \dots, \sum_{m=1}^k \zeta^{j(m-k)} x_m \right) \right\|_k.$$

Pour tout  $1 \leq j \leq k$  on définit  $y_j = \sum_{m=1}^k \zeta^{jm} x_m$ . Alors

$$\left\| \left( \sum_{m=1}^k \zeta^{j(m-1)} x_m, \dots, \sum_{m=1}^k \zeta^{j(m-k)} x_m \right) \right\|_k = \|(\zeta^{-j} y_j, \dots, \zeta^{-kj} y_j)\|_k.$$

Mais  $\|(\zeta^{-j} y_j, \dots, \zeta^{-kj} y_j)\|_k = \|y_j\|_k$  Pour tout  $1 \leq j \leq k$  par  $(A_2)$  et le lemme 1.2.8, et donc

$$\|(x_1, \dots, x_k)\|_k \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left\| \sum_{m=1}^k \zeta_k^{jm} x_m \right\|.$$

■

### 1.2.3 Résultats pour les dual multi-normes

Nous avons maintenant quelques lemmes élémentaires sur les espaces dual multi-normés. Dans le reste de cette section, nous supposons que  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace normé et  $((E^k, \|\cdot\|_k) : k \in \mathbb{N}^*)$  est un espace dual multi-normé c-à-d la suite  $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  satisfait les axiomes  $(A_1)$ - $(A_3)$  et  $(B_4)$ .

**Lemme 1.2.12** Soient  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_k \in E$ . Alors

$$\|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1} + x_k)\|_{k-1} \leq \|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k)\|_k.$$

**Démonstration.** Par  $(B_4)$  on a

$$\|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1} + x_k)\|_{k-1} = \left\| \left( x_1, \dots, x_{k-2}, \frac{(x_{k-1} + x_k)}{2}, \frac{(x_{k-1} + x_k)}{2} \right) \right\|_k = (*)$$

Puisque  $\|\cdot\|_k$  est une norme sur  $E^k$  et par  $(A_1)$  on obtient

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2} \|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) + (x_1, \dots, x_{k-2}, x_k, x_{k-1})\|_k \\ &\leq \|(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k)\|_k \end{aligned}$$

■

**Lemme 1.2.13** Soient  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ , et  $x \in E$ . Alors

$$\|(\alpha_1 x, \dots, \alpha_k x)\|_k = \left( \sum_{j=1}^k |\alpha_j| \right) \|x\|.$$

**Démonstration.** Par lemme 1.2.5

$$\|(\alpha_1 x, \dots, \alpha_k x)\|_k \leq \left( \sum_{j=1}^k |\alpha_j| \right) \|x\|.$$

Mais aussi

$$\begin{aligned} \|(\alpha_1 x, \dots, \alpha_k x)\|_k &= \|(|\alpha_1| x, \dots, |\alpha_k| x)\|_k \quad \text{par l'axiome } (A_2) \\ &\geq \left\| \sum_{j=1}^k |\alpha_j| x \right\| = \left( \sum_{j=1}^k |\alpha_j| \right) \|x\| \quad \text{par lemme 1.2.12.} \end{aligned}$$

■

## Chapitre 2

# Dualité dans les espaces multi-normés

## 2.1 Duals de produits des espaces de Banach

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé et  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur l'espace vectoriel  $E^k$  vérifier

$$\|\|x\|\| \geq \max \{\|x_i\| : 1 \leq i \leq k\}, \quad (x = (x_i)_i \in E^k). \quad (2.1)$$

Et

$$\|\|(0, \dots, x_i, \dots, 0)\|\| = \|x_i\|, \quad (x_i \in E, 1 \leq i \leq k). \quad (2.2)$$

Maintenant, pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in E^*$ , on définit  $\lambda : E^k \rightarrow \mathbb{K}$  par

$$\lambda(x) = \langle x, \lambda \rangle = \sum_{i=1}^k \langle x_i, \lambda_i \rangle, \quad (2.3)$$

pour tout  $x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$ .

Alors  $\lambda$  est une forme linéaire sur  $E^k$  et

$$\begin{aligned} |\langle x, \lambda \rangle| &\leq \left( \sum_{i=1}^k \|\lambda_i\| \right) \max_{1 \leq i \leq k} \|x_i\| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^k \|\lambda_i\| \right) \|\|x\|\|, \end{aligned}$$

pour tout  $x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$ . Donc  $\lambda \in (E^k, \|\cdot\|)^*$  avec

$$\max_{1 \leq i \leq k} \|\lambda_i\| \leq \|\|\lambda\|\|^* \leq \sum_{i=1}^k \|\lambda_i\|,$$

où  $\|\cdot\|^*$  est la norme dual de  $\|\cdot\|$ . De plus, chaque élément de  $(E^k, \|\cdot\|)^*$  se présente de cette manière.

Ainsi, nous pouvons considérer  $(E^*)^k$  comme un espace de Banach pour la norme  $\|\cdot\|^*$ , identifier  $\lambda \in (E^k, \|\cdot\|)^*$  avec  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (E^*)^k$ .

Dans ce cas, on voit facilement que  $\|\cdot\|^*$  est une norme sur  $(E^*)^k$  satisfait aussi les équations (2.1) et (2.2).

Dans cette section, nous justifierons le terme "espace dual multi-normé".

## 2.2 Dualité dans les espaces normés spéciaux

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé,  $k \in \mathbb{N}^*$ , et  $\|\cdot\|_k$  une norme sur l'espace  $E^k$ . Comme précédemment, la norme dual sur l'espace  $(E^*)^k$  est indiquée par  $\|\cdot\|_k^*$ , de sorte que, explicitement,

$$\|(\lambda_1, \dots, \lambda_k)\|_k^* = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^k \langle x_j, \lambda_j \rangle \right| : \|(x_1, \dots, x_k)\|_k \leq 1 \right\}$$

pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in E^*$  prenant le supérieur sur  $x_1, \dots, x_k \in E$ .

Soit  $((E^n, \|\cdot\|_n) : n \in \mathbb{N}^*)$  un espace normé spécial, c-à-d  $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est vérifier les axiomes  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  et  $(A_3)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Ensuite, il résulte de Lemme 1.2.5 et l'axiome  $(A_3)$  que chaque norme  $\|\cdot\|_k$  satisfait les équations (2.1) et (2.2) (avec  $\|\cdot\|_k$  au lieu de  $\|\cdot\|$ ), et ainsi  $((E^k)^*, \|\cdot\|_k^*)$  est homéomorphe à  $(E^*)^k$  (avec la topologie de produit de  $E^*$ ). Ainsi, nous avons défini une suite  $(\|\cdot\|_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\|\cdot\|_k^*$  est une norme sur  $(E^k)^*$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Clairement  $\|\lambda\|_1^* = \|\lambda\|$  pour tout  $\lambda \in E^*$ .

**Proposition 2.2.1** *Soit  $((E^k, \|\cdot\|_k) : k \in \mathbb{N}^*)$  un espace normé spicial. Alors  $((E^k)^*, \|\cdot\|_k^*) : k \in \mathbb{N}^*)$  est un espace de Banach spécial.*

**Démonstration.** Les axiomes  $(A_1)$  et  $(A_2)$  pour  $((E^k, \|\cdot\|_k) : k \in \mathbb{N}^*)$  implique les axiomes  $(A_1)$  et  $(A_2)$  (respectivement) pour  $((E^k)^*, \|\cdot\|_k^*) : k \in \mathbb{N}^*)$ .

Soit  $k \geq 2$  est  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \in E^*$ . Pour tout  $x_1, \dots, x_k \in E$ , par Lemme 1.2.3 on a

$$\|(x_1, \dots, x_{k-1})\|_{k-1} \leq \|(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)\|_k,$$

et alors

$$\|(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, 0)\|_k^* \geq \|(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})\|_{k-1}^*.$$

D'où l'axiomes  $(A_3)$  pour  $((E^k)^*, \|\cdot\|_k^* : k \in \mathbb{N}^*)$ . ■

## 2.3 Dualité dans les espaces multi-normés

Supposons que  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(F, \|\cdot\|)$  sont des espaces normés.

**Théorème 2.3.1** *Soit  $((E^k, \|\cdot\|_k) : k \in \mathbb{N}^*)$  un espace multi-normé. Alors  $((E^*)^k, \|\cdot\|_k^* : k \in \mathbb{N}^*)$  est un espace dual multi-Banach.*

*Dans ce cas  $((E^*)^k, \|\cdot\|_k^* : k \in \mathbb{N})$  est dit le dual de l'espace multi-normé  $((E^k, \|\cdot\|_k) : k \in \mathbb{N})$ .*

**Démonstration.** Par la proposition 2.2.1, il suffit de montrer que  $((E^*)^k, \|\cdot\|_k^* : k \in \mathbb{N})$  vérifie  $(B_4)$ .

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \in E^*$  et on pose

$$A = \|(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}, \lambda_{k-1})\|_k^*$$

et

$$B = \|(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2}, 2\lambda_{k-1})\|_{k-1}^*.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$  choisissons  $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$  tel que  $\|(x_1, \dots, x_k)\|_k \leq 1$  avec

$$\left| \sum_{j=1}^{k-2} \langle x_j, \lambda_j \rangle + \langle x_{k-1}, \lambda_{k-1} \rangle + \langle x_k, \lambda_{k-1} \rangle \right| > A - \varepsilon.$$

On pose  $x = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ . Par le Lemme 1.2.10 et  $(A_4)$  on a  $(x_1, \dots, x_{k-2}, x) \in E^{k-1}$  tel que  $\|(x_1, \dots, x_{k-2}, x)\|_{k-1} \leq 1$ , et donc

$$\begin{aligned} B &\geq \left| \sum_{j=1}^{k-2} \langle x_j, \lambda_j \rangle + \langle x, 2\lambda_{k-1} \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{k-2} \langle x_j, \lambda_j \rangle + \langle x_{k-1}, \lambda_{k-1} \rangle + \langle x_k, \lambda_{k-1} \rangle \right| > A - \varepsilon. \end{aligned}$$

Deuxièmement, choisissons  $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in E^{k-1}$  tel que  $\|(x_1, \dots, x_{k-1})\|_{k-1} \leq 1$  avec

$$\left| \sum_{j=1}^{k-2} \langle x_j, \lambda_j \rangle + \langle x_{k-1}, 2\lambda_{k-1} \rangle \right| > B - \varepsilon.$$

Alors par  $(A_4)$  on obtient  $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k-1}) \in E^k$  tel que  $\|(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k-1})\|_k \leq 1$ . Et donc

$$A \geq \left| \sum_{j=1}^{k-2} \langle x_j, \lambda_j \rangle + \langle x_{k-1}, 2\lambda_{k-1} \rangle \right| > B - \varepsilon.$$

Les deux inégalités ci-dessus sont valables pour chaque  $\varepsilon > 0$  et donc  $A = B$ .

Ainsi, la suite  $(\|\cdot\|_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$  satisfait l'axiome  $(B_4)$  et nous avons donc montré que le couple  $\left( (E^*)^k, \|\cdot\|_k^* \right) : k \in \mathbb{N}$  est un espace dual multi-Banach. ■

## 2.4 Exemple d'une multi-norme

### La multi-norme minimale

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  définissons  $\|\cdot\|_k^{\min}$  sur  $E$  par

$$\|(x_1, \dots, x_k)\|_k^{\min} = \max_{1 \leq i \leq k} \|x_i\|.$$

Pour tout  $x_1, \dots, x_k \in E$ .

Il est immédiat que  $\|\cdot\|_k^{\min}$  est une norme sur  $E^k$  pour chaque  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$  la suite  $\left( \|\cdot\|_k^{\min} \right)_{1 \leq k \leq n}$  est une multi-norme d'ordre  $n$  (dite multi-norme minimale d'ordre  $n$ ). Il s'ensuit que  $\left( E^k, \|\cdot\|_k^{\min} \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est un espace multi-normé.

La suite  $\left( \|\cdot\|_n^{\min} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite la multi-norme minimale.

Soit  $E$  un espace normé. On voit facilement que le dual de la multi-norme minimale sur  $\{E^n : n \in \mathbb{N}\}$  est  $(\|\cdot\|_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\|\cdot\|_n^*$  est défini par

$$\|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_n^* = \sum_{j=1}^n \|\lambda_j\|$$

pour tout  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E^*$ .

**Proposition 2.4.1** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La multi-norme minimale d'ordre  $n$  est l'unique multi-norme d'ordre  $n$  définie sur  $\{\mathbb{C}^k, 1 \leq k \leq n\}$ .*

**Démonstration.** Soit  $(\|\cdot\|_k : 1 \leq k \leq n)$  une multi-norme d'ordre  $n$  sur  $\{\mathbb{C}^k, 1 \leq k \leq n\}$ . On prend  $k$  avec  $1 \leq k \leq n$ . Par le Lemme 1.2.8 on a  $\|(1, \dots, 1)\|_k = 1$ . Maintenant soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k$ . Par  $(A_2)$  on a

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|_k \leq \max_{1 \leq i \leq k} |\alpha_i| \|(1, \dots, 1)\|_k = \max_{1 \leq i \leq k} |\alpha_i|,$$

et alors par le Lemme 1.2.5,  $\max_{1 \leq i \leq k} |\alpha_i| \leq \|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|_k$ . Enfin,

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|_k = \max_{1 \leq i \leq k} |\alpha_i|.$$

■

## Chapitre 3

# Espaces vectoriels multi-topologiques et multi-normes

### 3.1 Espaces vectoriels multi-topologiques

Soit  $E$  un espace vectoriel et considérons  $E^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel de toutes les suites  $(x_i)_i$  d'éléments de  $E$ . Définir

$$\begin{aligned} i : E &\rightarrow E^{\mathbb{N}} \\ x &\mapsto (x) \end{aligned}$$

avec  $(x)$  est une suite d'un seul élément  $x$  donc  $i(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $E^{\mathbb{N}}$ .

Pour un sous-ensemble non vide  $S$  de  $\mathbb{N}^*$ , pour tout  $x = (x_i)_i \in E^{\mathbb{N}}$  on pose

$$P_S(x) = \begin{cases} x_i, & i \in S \\ 0, & i \notin S \end{cases} \quad \text{et} \quad Q_S(x) = \begin{cases} x_i, & i \notin S \\ 0, & i \in S \end{cases}$$

Alors  $P_S$  est la projection sur  $S$  et  $Q_S$  est la projection sur  $S^c$ .

Pour  $x = (x_i)_i \in E^{\mathbb{N}}$  et  $y = (y_i)_i \in E^{\mathbb{N}}$  on définit  $x \amalg y \in E^{\mathbb{N}}$  par

$$x \amalg y = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots).$$

Et pour  $k \in \mathbb{N}^*$  on définit  $x \amalg_k y \in E^{\mathbb{N}}$  par

$$x \amalg_k y = \left( \overbrace{x_1, \dots, x_1}^k, \overbrace{x_2, \dots, x_2}^k, \dots \right).$$

**Définition 3.1.1** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E^{\mathbb{N}}$  avec  $i(E) \subset F$ . Un sous-ensemble  $B$  de  $F$  est une base si

(T<sub>1</sub>)  $A_\sigma(B) = B$  pour tout  $\sigma \in \delta_{\mathbb{N}}$ ;

(T<sub>2</sub>)  $M_\alpha(B) \subset B$  pour tout  $\alpha = (\alpha_i)_i \in \mathbb{C}$  avec  $|\alpha_i| < 1$ ;

(T<sub>3</sub>) Pour tout  $x \in F$  on a

$$x \in B \iff x \amalg x \in B ;$$

(T<sub>4</sub>) Pour tout  $x \in F$  on a

$$x \in B \iff P_{\{1, \dots, n\}}(x) \in B .$$

**Définition 3.1.2** Soit  $\tau$  une topologie sur  $F$ . Alors on dit que  $E$  est un espace vectoriel multi-topologique (par rapport à  $(F, \tau)$ ) si  $(F, \tau)$  est un espace vectoriel topologique séparé avec une base locale  $\mathcal{B}$  constituée d'ensembles de base et tout les voisinage de 0.

**Proposition 3.1.3** Soit  $E$  un espace vectoriel multi-topologique par rapport à  $(F, \tau)$  et soit  $B$  un ensemble de base dans  $F$ .

- (i) Soient  $x \in F$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Alors  $x \in B$  si et seulement si  $x\Pi_k x \in B$ .
- (ii) Soit  $x \in F$ . Alors  $x \in B$  si et seulement si  $x\Pi 0 \in B$ .
- (iii) Soit  $(x_i) \in F$ . Alors  $(x_i) \in B$  si et seulement si  $(0, x_1, x_2, \dots) \in B$ .
- (iv) Soit  $x, y \in B$ . Alors  $x\Pi y \in B + B$ .
- (v) Soient  $x = (x_i) \in B$  et  $(k_n)_n$  est strictement croissante dans  $\mathbb{N}$ . Alors  $(x_{k_n}) \in B$ .

**Démonstration.**

- (i) Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $2^j \geq k$ . Par  $(T_3)$ ,  $x \in B$  si et seulement si  $x\Pi_{2^j} x \in B$ . On prend  $m \geq k$ . Par  $(T_4)$ ,  $x\Pi_m x \in B$  si et seulement si  $P_{\{1, \dots, n\}}(x\Pi_m x) \in B$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par  $(T_2)$  et  $(T_1)$  ceci est vrai si et seulement si  $P_{\{1, \dots, n\}}(x\Pi_k x) \in B$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par  $(T_4)$  à nouveau, ceci est vrai si et seulement si  $x\Pi_k x \in B$ . D'où le résultat.
- (ii) Supposons que  $x \in B$ . Alors  $x\Pi x \in B$  par  $(T_3)$ , puis  $x\Pi 0 \in B$  par  $(T_2)$ . Supposons que  $x\Pi 0 \in B$ . Il s'ensuit par  $(T_4)$  que  $P_{\{1, \dots, 2n\}}(x\Pi 0) \in B$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par  $(T_1)$ ,  $P_{\{1, \dots, n\}}(x) \in B$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et donc  $x \in B$  par  $(T_4)$ .
- (iii) C'est immédiat de  $(T_1)$  et  $(T_4)$ .
- (iv) Par (ii),  $x\Pi 0, y\Pi 0 \in B$ . Par  $(T_1)$ ,  $0\Pi y \in B$ . Ainsi

$$x\Pi y = x\Pi 0 + 0\Pi y \in B + B.$$

- (v) Par  $(T_2)$ ,  $(0, \dots, 0, x_{k_1}, 0, \dots, 0, x_{k_2}, 0, \dots) \in B$ . Par  $(T_1)$  on a  $(x_{k_n})\Pi 0 \in B$  par (ii),  $(x_{k_n}) \in B$ .

■

## 3.2 Suites multi-convergentes

Soit  $E$  un espace vectoriel multi-topologique. Nous pouvons définir une notion de convergence dans  $E$  comme suit.

**Définition 3.2.1** Soit  $E$  un espace vectoriel multi-topologique par rapport à  $(F, \tau)$  tel que  $(F, \tau)$  a une base locale  $\mathcal{B}$  de sous-ensembles de base de  $F$  et soit  $(x_i)_i$  une suite d'éléments dans  $E$ . On dira que la suite  $(x_i)_i$  est multi-nulle et on écrit  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$  (dans  $E$ ) si

$$\forall B \in \mathcal{B}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \in B.$$

De plus, soit  $x \in E$ . La suite  $(x_i)_i$  est dite multi-convergente vers  $x$  et écrit  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$  (dans  $E$ ) si la suite  $(x_i - x)_i$  est multi-nulle dans  $E$ .

Les collections de suites multi-convergentes et multi-nulles dans  $E$  sont notées respectivement par  $C_m(E)$  et  $C_{m,0}(E)$ .

**Définition 3.2.2 (Suite multi-Cauchy)** Une suite  $(x_i)_i \in E^{\mathbb{N}}$  est une suite multi-Cauchy si pour chaque  $B \in \mathcal{B}$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in B \quad (n \geq m \geq n_0).$$

Maintenant on définit la multi-fermeture d'une partie d'un espace vectoriel multi-topologique.

**Définition 3.2.3 (Multi-fermeture)** Soient  $E$  un espace vectoriel multi-topologique par rapport à  $(F, \tau)$  et  $S$  un sous-ensemble de  $E$ . La multi-fermeture de  $S$  est l'ensemble des éléments  $x$  dans  $E$  tel qu'il existe une suite  $(x_i)_i$  d'éléments de  $S$  multi-convergente vers  $x$  (c-à-d  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ ).

**Remarque 3.2.4** Les quatre axiomes  $(T_1)$ - $(T_4)$  de la Définition 3.1.1 ont une interprétation immédiate et naturelle en termes de convergence. Ainsi :

$(T_1)$  Indique que chaque permutation d'une suite multi-nulle est une suite multi-nulle.

$(T_2)$  Indique que  $M_\alpha(x)$  est une suite multi-nulle chaque fois que  $\alpha = (\alpha_i)$  est une suite bornée dans  $\mathbb{C}$  et  $x$  est une suite multi-nulle.

$(T_3)$  Indique que  $x\Pi x$  est une suite multi-nulle si et seulement si  $x$  est une suite multi-nulle.

$(T_4)$  est un «critère de Cauchy» pour les suites multi-nulles. Alors par  $(T_4)$ , une suite est une suite multi-nulle si et seulement si, elle est multi-Cauchy.

La proposition suivante montre que la notion de suite multi-nulle peut dépendre du choix de l'espace  $F$ .

**Proposition 3.2.5** Soit  $E$  un espace vectoriel multi-topologique par rapport à  $(F, \tau)$ .

(i) Chaque sous-suite d'une suite multi-nulle dans  $E$  est une suite multi-nulle.

(ii) Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et  $(x_i)_i, (y_i)_i \in E^{\mathbb{N}}$  deux suites multi-convergentes dans  $E$ , telles que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y.$$

Alors la suite  $(\alpha x_i + \beta y_i)_i$  est multi-convergente dans  $E$ , et de plus

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha x + \beta y.$$

(iii) Les collections  $c_m(E)$  et  $c_{m,0}(E)$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E^{\mathbb{N}}$ .

### 3.3 Espaces multi-normés et espaces vectoriels multi-topologiques.

Nous étudions maintenant la relation entre les espaces vectoriels multi-topologiques et les espaces multi-normés.

**Définition 3.3.1** Soient  $((E^n, \|\cdot\|_n) : n \in \mathbb{N}^*)$  un espace multi-normé et  $x = (x_i) \in E^{\mathbb{N}}$ .

On définit

$$\begin{aligned} \sup x &= \sup (x_i) \\ &= \sup \{ \|(x_{k_1}, \dots, x_{k_n})\|_n : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \}. \end{aligned}$$

**Remarque 3.3.2** Il résulte de  $(A_1)$ ,  $(A_4)$  et Lemme 1.2.3 que  $(\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante, alors

$$\begin{aligned} \sup x &= \sup \{ \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_n : n \in \mathbb{N} \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_n. \end{aligned}$$

**Définition 3.3.3** On définit

$$F = \{x \in E^{\mathbb{N}} : \sup x < \infty\}.$$

Et pour chaque  $\varepsilon > 0$ ,

$$B_\varepsilon = \{x \in F : \sup x < \varepsilon\}.$$

Et alors on pose

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$$

**Théorème 3.3.4** Soient  $((E^n, \|\cdot\|_n) : n \in \mathbb{N})$  un espace multi-normé et  $F, \mathcal{B}$  comme ci-dessus. Alors  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E^{\mathbb{N}}$  avec  $i(E) \subset F$  et  $E$  est un espace vectoriel multi-topologique par rapport à  $(F, \tau)$ . Où  $(F, \tau)$  admet  $\mathcal{B}$  comme base locale. En outre, chaque ensemble  $B_\varepsilon$  est convexe et borné.

**Démonstration.** Il est clair que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E^{\mathbb{N}}$ . Par le Lemme 1.2.8,  $i(E) \subset F$ .

Montrons que  $\mathcal{B}$  est une base locale à 0 dans  $F$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , nous avons  $B_{\frac{\varepsilon}{2}} + B_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset B_\varepsilon$ . Si  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ , nous avons  $B_\varepsilon \subset B_{\varepsilon_1} \subset B_{\varepsilon_2}$  pour  $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ . Si  $x \in B_\varepsilon$ , nous avons  $\sup x < \varepsilon$ , et donc  $x + B_\eta \subset B_\varepsilon$  pour  $\eta = \varepsilon - \sup x$ . Ainsi  $\mathcal{B}$  est une base locale à 0 dans

$F$  ce qui implique que,  $\mathcal{B}$  définit une topologie  $\tau$  telle que  $(F, \tau)$  est un espace vectoriel topologique. Puisque  $\cap \{B_\varepsilon : \varepsilon > 0\} = \{0\}$ , la topologie  $\tau$  est séparée.

Il est clair que les axiomes  $(T_1)$ ,  $(T_2)$  et  $(T_4)$  sont satisfaits. Supposons que  $x \in B_\varepsilon$ , où  $\varepsilon > 0$  et on prend  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$ . Par  $(A_1)$  et  $(A_4)$  on trouve

$$\|((x\Pi x)_{k_1}, \dots, (x\Pi x)_{k_n})\|_n = \|(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})\|_m,$$

pour certains  $m \leq n$  et  $j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}^*$  et nous avons donc  $x\Pi x \in B_\varepsilon$ . l'inverse est immédiat, et ainsi  $(T_3)$  est satisfait. Ainsi, chaque  $B_\varepsilon$  est un ensemble de base dans  $F$ . ■

**Définition 3.3.5** *La topologie  $\tau$  définie sur  $F$  dans le théorème ci-dessus est celle déterminée par l'espace multi-normé  $((E^n, \|\cdot\|_n) : n \in \mathbb{N})$ .*

Alors nous considérons  $(F, \tau)$  comme l'espace déterminé par un espace multi-normé  $((E^n, \|\cdot\|_n) : n \in \mathbb{N})$  sans mention explicite.

Nous interprétons maintenant le concept de «suite multi-nulle» dans les notations ci-dessus.

**Théorème 3.3.6** *Soient  $((E^n, \|\cdot\|_n) : n \in \mathbb{N})$  un espace multi-normé et  $(x_i)_i \in E^{\mathbb{N}}$ . Alors  $(x_i)_i$  est une suite multi-nulle dans  $E$  si et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^*} \|(x_{n+1}, \dots, x_{n+k})\|_k < \varepsilon, \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

**Remarque 3.3.7** *Soit  $(x_i)_i$  une suite multi-convergente avec  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ . Il s'ensuit que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \|(x_{n+1}, \dots, x_{n+k})\|_k = \|x\|. \quad (3.1)$$

**Proposition 3.3.8** *Soit  $((E^n, \|\cdot\|_n) : n \in \mathbb{N})$  un espace multi-normé. Les assertions suivantes sont équivalents,*

- a) *Toute suite nulle dans  $(E, \|\cdot\|)$  est une suite multi-nulle*
- b) *Il existe une topologie  $\sigma$  sur  $E$  telle que les suites multi-nulles sont précisément les suites convergentes dans  $(E, \sigma)$ .*

### 3.4 Opérateurs multi-bornés (multi-continus)

**Définition 3.4.1** (*n-amplification d'un opérateur*) Soient  $T \in L(E_1, E_2)$  un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels et  $n \in \mathbb{N}^*$ . La *n-amplification* de  $T$  est l'opérateur linéaire  $T^{(n)} : E_1^n \longrightarrow E_2^n$  défini par

$$T^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (T(x_1), \dots, T(x_n)) \quad (3.2)$$

**Proposition 3.4.2** Soient  $E_1, E_2$  deux espaces vectoriels et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1) Si  $T \in L(E_1, E_2)$ , alors  $T$  est injectif (respect. surjectif) si et seulement si  $T^{(n)}$  est injectif (respect. surjectif)

2) Si  $S, T \in L(E_1)$ , alors

$$(S \circ T)^{(n)} = S^{(n)} \circ T^{(n)} \quad (3.3)$$

**Remarque 3.4.3** Soit  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  un opérateur linéaire borné (continu). Si  $(E_1^n, \|\cdot\|_n)$  et  $(E_2^n, \|\cdot\|_n)$  sont deux espaces multi-normés, par le Lemme 1.2.5 on a

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|T(x_i)\| \leq \|(T(x_1), \dots, T(x_n))\|_n \leq \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|.$$

Donc,  $T^{(n)}$ , la *n-amplification* de  $T$ , est un opérateur linéaire borné de  $(E_1^n, \|\cdot\|_n)$  dans  $(E_2^n, \|\cdot\|_n)$  avec

$$\|T\| \leq \|T^{(n)}\| \leq n \|T\|. \quad (3.4)$$

Cependant, la norme est dépend de  $n$ .

**Définition 3.4.4** (*Opérateur multi-borné*) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(E_1^n, \|\cdot\|_n)$  et  $(E_2^n, \|\cdot\|_n)$  deux espaces multi-normés et  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  un opérateur linéaire borné. On dira que  $T$  est multi-borné de norme  $\|T\|_{mb}$  si

$$\|T\|_{mb} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|T^{(n)}\| < \infty. \quad (3.5)$$

L'espace de tout les opérateurs multi-borné de  $(E_1^n, \|\cdot\|_n)$  dans  $(E_2^n, \|\cdot\|_n)$  est noté par  $\mathcal{M}(E_1, E_2)$ .

**Remarque 3.4.5** De façon générale si  $T \in \mathcal{M}(E_1, E_2)$ , pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E_1^n$  on a

$$\|(T(x_1), \dots, T(x_n))\|_n \leq \|T\|_{mb} \|(x_1, \dots, x_n)\|_n. \quad (3.6)$$

Explicitement,

$$\|T\|_{mb} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sup \left\{ \frac{\|(T(x_1), \dots, T(x_n))\|_n}{\|(x_1, \dots, x_n)\|_n} : (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0) \right\} < \infty \quad (3.7)$$

**Exemple 3.4.6** Soient  $(E_1^n, \|\cdot\|_n)$  et  $(E_2^n, \|\cdot\|_n)$  deux espaces multi-normés,  $y_0 \in E_2$  et  $\varphi_0 \in E_1^*$ . L'opérateur  $T : E_1 \longrightarrow E_2$  défini par  $T(x) = \langle x, \varphi_0 \rangle y_0$  est multi-borné. De plus on a  $\|T\|_{mb} = \|\varphi_0\| \|y_0\|$ . En effet,  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  de norme  $\|y_0\| \|\varphi_0\|$  car

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|\langle x, \varphi_0 \rangle y_0\| \\ &= \|y_0\| \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, \varphi_0 \rangle| \\ &= \|\varphi_0\| \|y_0\| < \infty. \end{aligned}$$

Pour tout  $x_1, \dots, x_n \in E_1^n$ ,

$$\begin{aligned} \|(T(x_1), \dots, T(x_n))\|_n &= \|\langle x_1, \varphi_0 \rangle y_0, \dots, \langle x_n, \varphi_0 \rangle y_0\|_n \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |\langle x_i, \varphi_0 \rangle| \|(y_0, \dots, y_0)\|_n \\ &\leq \|y_0\| \|\varphi_0\| \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \\ &\leq \|y_0\| \|\varphi_0\| \|(x_1, \dots, x_n)\|_n. \end{aligned}$$

Alors, d'après (3.4) on obtient

$$\|T\| \leq \|T\|_{mb} \leq \|y_0\| \|\varphi_0\| = \|T\|.$$

Enfin  $T \in \mathcal{M}(E_1, E_2)$  et  $\|T\|_{mb} = \|y_0\| \|\varphi_0\|$ .

**Définition 3.4.7 (Opérateur multi-continu)** Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux espaces vectoriels multi-topologiques par rapport à  $(F_1, \tau_1)$  et  $(F_2, \tau_2)$  respectivement et soit  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . On dit que  $T$  est multi-continu si la suite  $(T(x_i))_i$  est multi-nulle dans  $E_2$  pour toute suite  $(x_i)_i$  multi-nulle dans  $E_1$ .

Dans le théorème suivant on a un critère très simple et très utile de continuité comme le cas des espaces normés.

**Théorème 3.4.8** *Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux espaces vectoriels multi-topologiques par rapport à  $(F_1, \tau_1)$  et  $(F_2, \tau_2)$  respectivement et soit  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Alors  $T$  est multi-continu si et seulement si, il est multi-borné.*

**Démonstration.** Supposons que  $T$  est multi-borné et soit  $(x_i)_i$  une suite multi-nulle dans  $E_1$ . Par le Théorème 3.3.6, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^*} \|(x_{n+1}, \dots, x_{n+k})\|_k < \frac{\varepsilon}{\|T\|_{mb}}, \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Alors par (3.6) on obtient

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^*} \|(T(x_{n+1}), \dots, T(x_{n+k}))\|_k < \varepsilon, \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Par le Théorème 3.3.6 encore une fois, cette inégalité implique que la suite  $(T(x_i))_i$  est multi-nulle dans  $E_2$ . Alors  $T$  est multi-continu.

Inversement, supposons que  $T$  n'est pas multi borné. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  il existe  $x_{1,n}, \dots, x_{k_n,n} \in E_1$  tels que

$$\|(x_{1,n}, \dots, x_{k_n,n})\|_{k_n} < \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \|(T(x_{1,n}), \dots, T(x_{k_n,n}))\|_{k_n} > 1.$$

On peut supposer que  $k_n \geq n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et considérons la suite

$$(y_i)_i = (x_{1,1}, \dots, x_{k_1,1}, x_{1,1}, \dots, x_{k_2,2}, \dots, x_{1,n}, \dots, x_{k_n,n}).$$

$(y_i)_i$  est une suite multi-nulle dans  $E_1$ , en effet, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $j \in \mathbb{N}^*$  telle que  $\sum_{i=j}^{+\infty} \frac{1}{i^2} < \varepsilon$  et alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|(x_{1,j}, \dots, x_{k_j,j}, \dots, x_{1,j+n}, \dots, x_{k_{j+n},j+n})\|_{k_j+\dots+k_{j+n}} \leq \varepsilon.$$

D'autre part, il est clair que la suite  $(T(y_i))_i$  n'est pas multi-nulle dans  $E_2$ . Alors  $T$  n'est pas multi-continu. ■

**Proposition 3.4.9** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(E_1^n, \|\cdot\|_n)$  et  $(E_2^n, \|\cdot\|_n)$  deux espaces multi-normés avec  $E_2$  est de Banach. Alors  $\mathcal{M}(E_1, E_2)$  est un espace de Banach avec la norme  $\|\cdot\|_{mb}$ .

**Démonstration.** Soit  $(T_k)_k$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{M}(E_1, E_2)$ . Cette suite est de Cauchy dans l'espace de Banach  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ , alors il existe  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|T_k - T\| = 0$$

D'autre part, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $j, k \geq k_0$  on a

$$\|T_j - T_k\|_{mb} < \varepsilon.$$

D'après 3.7  $T - T_k \in \mathcal{M}(E_1, E_2)$  et  $\|T - T_k\|_{mb} < \varepsilon$  pour tout  $k \geq k_0$ , ce qui entraîne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|T_k - T\|_{mb} = 0.$$

Alors l'espace  $(\mathcal{M}(E_1, E_2), \|\cdot\|_{mb})$  est de Banach. ■

**Proposition 3.4.10** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(E_1^n, \|\cdot\|_n)$  et  $(E_2^n, \|\cdot\|_n)$  deux espaces multi-normés et  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Alors  $T$  est multi-borné si et seulement si l'opérateur adjoint  $T^* : E_2^* \rightarrow E_1^*$  et aussi multi-borné par rapport à  $((E_1^*)^n, \|\cdot\|_n^*)$  et  $((E_2^*)^n, \|\cdot\|_n^*)$ . Dans ce cas on a  $\|T^*\|_{mb} = \|T\|_{mb}$ .

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$\|(T^*)^{(n)}\| = \|(T^{(n)})^*\| = \|(T^{(n)})\|.$$

Alors  $T$  est multi-borné si et seulement si  $T^*$  est multi-borné. De plus  $\|T^*\|_{mb} = \|T\|_{mb}$ .

■

# Bibliographie

- [1] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, MASSON Paris, New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [2] H. G. Dales, Multi-norms, Acta et Commentat. Univ. Tartuensis de Mathematica, 18(2014), 159-184.
- [3] H. G. Dales, F. K. Dashiell, A. T-M. Lau, and D. Strauss, Banach spaces of continuous functions as dual spaces, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics, Springer-Verlag, 2016.
- [4] H. G. Dales, M. Daws, H. L. Pham, and P. Ramsden, Multi-norms and the injectivity of  $L^p(G)$ , J. London Math. Society (2), 86 (2012), 779-809.
- [5] H. G. Dales and M. E. Polyakov, Multi-normed spaces, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 488 (2012), 165 pp.
- [6] E. G. Effros and Z. J. Ruan, Operator spaces, London Mathematical Society Monographs, Volume 23, Clarendon Press, Oxford, 2000.

## ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو تسليط الضوء على بعض المفاهيم حول نظرية الفضاءات المتعددة النظميات حيث قمنا بدراسة البديهيات العامة لتعريف النظميات المتعددة وكذا دراسة الثنوية في هذه الفضاءات. في الأخير قدمنا مفهوم فضاء شعاعي متعدد الطوبولوجيا ونظرية المؤثرات متعددة الإستمرار.

## Résumé

L'objectif de notre mémoire est de mettre en évidence quelques résultats de la théorie des espaces multi-normés. Tel que on étudie les axiomes de la définition d'une multi-norme et d'une dualmulti-norme. On donne une étude générale sur la dualité dans les espaces multi-normés et sur la notion des espaces vectoriels multi-topologiques et la fin nous donnons le concept de la multi-continuité.

## Abstract

The objective of our work is to highlight some results of the theory of multi-normed spaces. As we study the axioms of the definition of a multi-norm and a dual multi-norm, and more we give a general study on duality in multi-normed spaces. In the end we give the notion of multi-topological vector spaces and Multi-continuous operators.