



N° d'ordre :

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère

Spécialité: Mathématique

Option: Mathématique discrète

Par

SAADAOUI Kheir

SUJET

Dualité de Priestley pour les D-treillis flous

Soutenu publiquement le 09/04/2008 devant le jury composé de:

A. BOUDAUD	Professeur à l'université de M'sila	Président
A. AMROUNE	M.C à l'université de M'sila	Rapporteur
A. DAHMANI	Professeur à l'université de Bejaia	Examineur
D. MIHOUBI	M. C à l'université de M'sila	Examineur
L. ZEDAM	C. C à l'université de M'sila	Examineur

Promotion : 2007/2008

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de recherche Monsieur A. AMROUNE. Il a toujours fait preuve d'une grande disponibilité et d'une grande patience pour corriger les différents manuscrits de ce mémoire. De même, il m'a fourni plusieurs preuves (parmi les plus difficiles) que nous avons simplifiées, J'ai apprécié en lui son esprit scientifique, sa rigueur et son souci de précision.

Des remerciements particuliers vont aux membres du jury, Messieurs : le Président Mr. A. BOUDAUD, les enseignants Mr. N. DAHMANI, Mr. D. MIHOUBI et Mr. L. Zedam.

Je remercie ma famille et tout particulièrement mes parents ainsi que ma femme, qui a toujours été pour moi un modèle de persévérance. Je remercie tous mes amis et mes collègues de travail. Finalement, la contribution la plus significative vient sans nul doute de mes enfants.

TABLE DES MATIÈRES

1	GÉNÉRALITÉS SUR LES ENSEMBLES ORDONNÉS	1
1.1	Fonctions caractéristiques	2
1.2	Relations binaires	2
1.2.1	Relation d'ordre	4
1.3	Treillis :	7
1.3.1	Filtres et idéaux dans un treillis	9
1.4	Représentation des treillis distributifs	11
1.4.1	Représentation de Stone	11
1.4.2	Etude par dualité	14
2	ENSEMBLES ORDONNÉS FLOUS	18
2.1	Ensembles flous :	19
2.2	Relations floues :	24
2.2.1	L'inverse de la relation floue	25
2.2.2	Compositions de relations floues	26
2.2.3	Idéaux flous et filtres flous dans un F- lattice	38
3	REPRÉSENTATION DES TREILLIS FLOUS DISTRIBUTIFS FINIS[1]	40
3.1	Théorème de représentation des treillis flous distributifs et finis. .	41
3.1.0.1	Ensemble ordonné flou croissant et ensemble or-	
	donné flou décroissant	42
3.1.0.2	Construction de l'espace de Priestley	42
3.1.1	Dualité de Priestley pour les D- treillis flous finis	42
3.1.2	Théorème de représentation	48

INTRODUCTION

En 1937 Stone a donné une dualité pour les treillis distributifs fermés en topologisant X l'ensemble des idéaux premiers de A (A un treillis distributif fermé), en prenant $\{I_a: a \in A\}$ l'ensemble de tous les idéaux premiers de A contenant a comme une sous base de topologie de l'espace dual de A .

En 1970, H. A Priestley a développé une nouvelle dualité pour les treillis distributifs fermés en remplaçant $\{I_a: a \in A\}$ des idéaux premiers par $\{F_a: a \in A\}$ ou F_a est l'ensemble des 0-1 homomorphismes du treillis A dans la chaîne $\{0,1\}$ non identiquement nuls et qui prennent 1 en a .

Le but de ce mémoire est d'établir une dualité type Priestley pour les treillis flous distributifs fermés.

Ce travail est reparti en trois chapitres.

- Dans le premier chapitre on rappelle des notions relatives aux relations d'ordres et aux ensembles ordonnés, les treillis, les fitres et les édiaux.
- Dans le second chapitre nous introduisons les notions nécessaires aux ensembles flous et aux relations floues (la relation d'ordre flou au sens de Zadeh) qui nous permettra la représentation des treillis flous, et on donne les différentes définitions de la relation d'ordre flou.
- Dans le troisième chapitre nous essayons de trouver une version floue du théorème de représentation de Priestley des treillis flous distributifs fermés dans le cas finis, nous donnons une construction de l'espace dual et le bidual d'un treillis distributif flou fini . et on montre que la catégorie duale des espaces de Priestley finis est isomorphe a la catégorie des treillis flous distributifs fermés et finis.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES ENSEMBLES ORDONNÉS

Résumé

Dans ce chapitre on va rappeler les notions essentielles sur les ensembles ordonnés et les treillis.

Contenu

1.1 Fonctions caractéristiques et ses propriétés

1.2 Relations binaires

1.2.1 Relation d'ordre

1.2.2 Structures ordonnées

1.3 Treillis

1.3.1 Filtre et idéaux dans un treillis

1.1 Fonctions caractéristiques

Définition 1.1

Soit E un référentiel et A un sous-ensemble de E , on définit la fonction caractéristique de A , notée 1_A comme suit :

$$1_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A; \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On note par ailleurs par $\chi(E)$ l'ensemble de toutes les fonctions caractéristiques des sous ensembles de E .

Théorème 1.1 [9]

$\chi(E)$ est en bijection avec $P(E)$.

Théorème 1.2

Soit f une application de E dans $\{0, 1\}$, alors $f \in \chi(E)$.

Propriétés des Fonctions Caractéristiques

Soient A et B deux parties de E .

- $A \subset B \Leftrightarrow 1_A \leq 1_B$
- $A = B \Leftrightarrow 1_A = 1_B$
- $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$
- $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B$
- $1_{A \setminus B} = 1_A - 1_A \cdot 1_B$
- En particulier, $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$.

1.2 Relations binaires

Définition 1.2

Soient A et B deux ensembles non vides, le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble

des paires ordonnées (a_i, b_j) ou $a_i \in A$ et $b_j \in B$.

Définition 1.3

Une relation binaire R est un sous-ensemble non vide de $A \times B$. On note $a R b$ si $(a, b) \in R$.

Si $A = B = X$, nous disons que R est homogène sur X .

Exemple 1.1

$A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{N}$ et $R = \{(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4), \dots\} = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$

Représentation des Relations Binaires

Soient A et B deux ensembles finis de cardinales respectifs m et n et R une relation binaire dans $A \times B$. On peut représenter R par une matrice $M(R)$ de m lignes et n colonnes dont les coefficients sont 0 ou 1. On définit les éléments de la matrice R de la manière suivante :

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i R b_j \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Compositions de relations

Soient $R \subset A \times B$ et $S \subset B \times C$ deux relations. La relation $R \circ S$ est une relation binaire sur $A \times C$ appelée composée de R et S tel que

$$a(R \circ S)c \Leftrightarrow \exists b \in B \text{ tel que } (aRb \wedge bSc)$$

Définition 1.4

Soit $R \subset A \times B$ une relation, la transposée de R est la relation $R^T \subset B \times A$ définie par : $bR^T a$ si et seulement si aRb .

1.2.1 Relation d'ordre

Définition 1.5

Soit E un ensemble. On dit qu'une relation R sur E est une relation d'ordre si et seulement si

- 1) R est réflexive si $\forall a \in E, aRa$;*
- 2) R est antisymétrique si $\forall a, b \in E, (aRb \text{ et } bRa) \implies (a = b)$;*
- 3) R est transitive si $\forall a, b, c \in E, (aRb \text{ et } bRc) \implies (aRc)$.*

Exemple 1.2

La relation de la division sur $\mathbb{N}^$ définie par n/m ssi n divise m , est une relation d'ordre.*

Structures ordonnées

Définition 1.6

Soit X un ensemble non vide et R une relation d'ordre sur X . Alors le couple (X, R) est appelé un ensemble ordonné. Usuellement R est remplacée par le symbole $\leq$.

Ainsi, si X est fini, on peut représenter l'ordre $(X, \leq)$ par un diagramme de Hasse.

Un sous-ensemble Y est une chaîne s'il est totalement ordonné (c'est-à-dire $x \leq y$ ou $y \leq x$, pour tout $x, y \in Y$. Autrement dit x et y sont comparables)

Dans le cas contraire, l'ordre est partiel, et l'ensemble $(X, \leq)$ est dit ensemble partiellement ordonné ("Partially ordered Set" ou "Poset").

On dira que deux éléments x et y de X sont incomparables et on note par $x \parallel y$

si $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$.

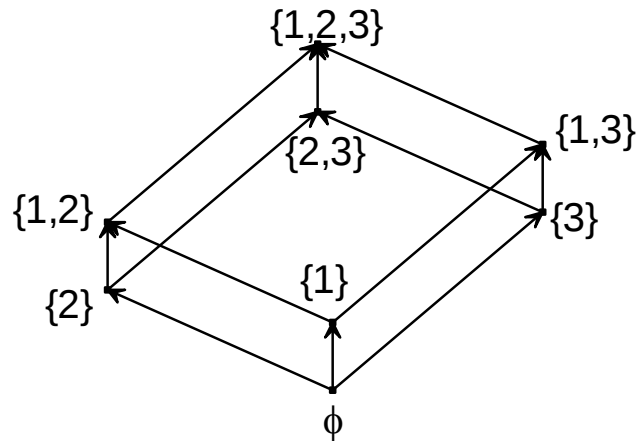
Un ensemble composé d'éléments incomparables entre eux est appelé une anti-chaîne.

Exemple 1.3

L'ensemble $(\mathbb{N}, \leq)$ est totalement ordonné.

$/$ est un ordre partiel dans $\mathbb{N}^*$. On a, par exemple, $3 \parallel 5$.

$\subseteq$ est un ordre partiel dans $P(\{1, 2, 3\})$, par exemple $\{1, 2\} \parallel \{1, 3\}$



Fig(1 - 1)

Eléments Particuliers

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, rappelons certaines notions particulières. Soit

A une partie non vide de E

Majorant :

M est un majorant de A si $\forall a \in A$, on a : $a \leq M$. On dit alors que A est une partie majorée de E .

Minorant :

m est un minorant de A si $\forall a \in A$, on a : $m \leq a$. A est dite partie minorée de E .

Borne supérieure :

s est appelé une borne supérieure de A ($s = \sup A$) si s est un majorant de A et si pour tout majorant M de A , $s \leq M$. La borne supérieure est communément appelée "Le plus petit des majorants".

Borne inférieure :

Un élément $i \in E$ est dit borne inférieure de A si i est un minorant de A et si pour tout minorant m de A , $m \leq i$. La borne inférieure apparaît comme "Le plus grand des minorants".

Élément maximal :

Un élément a de A est dit maximal si :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in A \\ x \in A \text{ et } a \leq x \end{array} \right. \implies x = a$$

Élément minimal :

Un élément b de A est dit minimal si :

$$\left\{ \begin{array}{l} b \in A \\ x \in A \text{ et } x \leq b \end{array} \right. \implies x = b$$

Plus grand élément :

On appelle plus grand élément ("Top") d'un ensemble E , un élément noté $1_E \in$

E tel que pour tout élément $x \in E$, on a : $x \leq 1_E$

Plus petit élément :

On appelle plus petit élément ("Botton") d'un ensemble E , un élément noté $0_E \in E$ tel que pour tout élément $x \in E$, on ait $0_E \leq x$.

1.3 Treillis :

Définition 1.7

Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel chaque paire d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure.

-Un treillis T est dit fermé s'il possède un plus petit élément (noté 0) et plus grand élément (noté 1)

-Soit $a \in T$ le complément de a est un élément a' de T vérifiant $a \wedge a' = 0$ et $a \vee a' = 1$.

-Un treillis est dit complémenté si chaque élément possède un complément.

Exemple 1.4

1- $(\mathbb{N}^*, /, \vee, \wedge)$ est un treillis avec $x \vee y = \text{ppcm}(x, y)$ et $x \wedge y = \text{pgcd}$ (n'est pas fermé).

2- $(P(E), \subset, \cap, \cup)$ est un treillis avec : $x \vee y = x \cup y$, $x \wedge y = x \cap y$ (T . est fermé avec : $0 = \phi$ et $1 = E$).

Toute chaîne est un treillis : $x \vee y = \max(x, y)$ et $x \wedge y = \min(x, y)$.

3- $(D(6), /)$ l'ensemble des diviseurs de 6 est un treillis fermé ($0_{D(6)} = 1$ et $1_{D(6)} = 6$)

L'ensemble des entiers non nuls muni de la relation de divisibilité est un treillis distributif possédant un élément minimal (à savoir le un), Mais pas d'élément

maximal, et ce n'est donc pas un treillis de Boole.

Lemme 1.5

Soit $(X, \leq)$ un treillis distributif fermé. Alors pour tout élément a de X , il existe au plus un complément.

Définition 1.8

Une algèbre de Boole est un treillis distributif fermé et complémenté.

Proposition 1.6

(i) Soit $(T, \leq)$ un treillis, pour a, b dans T ,

posons $a \vee b = \sup(a, b)$ et $a \wedge b = \inf(a, b)$. Alors $(T, \leq, \vee, \wedge)$ vérifie les lois

$$(1) \quad x \vee x = x, \quad x \wedge x = x.$$

$$(2) \quad x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x.$$

$$(3) \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

$$(4) \quad x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x.$$

De plus, $a \leq b$ est équivalent à $a \vee b = b$ et à $a \wedge b = a$.

(ii) Inversement, supposons que $(T, \vee, \wedge)$ satisfait aux lois précédentes ; pour $a, b \in T$, notons $a \leq b$ pour $a \vee b = b$; alors $(T, \leq)$ est un treillis, et $\vee$ (resp. $\wedge$) en est l'opération sup (resp. inf).

Définition 1.9

Soient E et T deux treillis et f est une application de E dans T on dit que f est un morphisme de treillis si : $a, b \in E$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ et $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ si de plus f est une bijection alors f est dite isomorphisme.

1.3.1 Filtres et idéaux dans un treillis

Définition 1.10

Soit E un treillis, on appelle filtre toute partie non vide F de E vérifiant :

- a) si $x \in F$ et $x \leq y$ alors $y \in F$;
- b) si $x \in F$ et $y \in F$ alors $(x \wedge y) \in F$.

Le filtre F est dit propre si $F \neq E$, et impropre dans le cas contraire.

Et d'une manière duale un idéal est une partie I non vide de E vérifiant :

- a) $x \in I$ et $y \leq x$ alors $y \in I$;
- b) pour tout x, y dans I alors $(x \vee y) \in I$.

Remarque 1.1

- 1) Un filtre F est propre si et seulement si $0 \notin F$.
- 2) Soit $a \in E$, l'ensemble F_a défini par $F_a = \{x \in E / x \geq a\}$ est un filtre engendré par a (filtre principal)

Exemple 1.7

Dans le treillis $D(60)$ le filtre $F = \{6, 12, 30, 60\}$ est principal et l'idéal $I = \{1, 2, 3, 6\}$ est principal

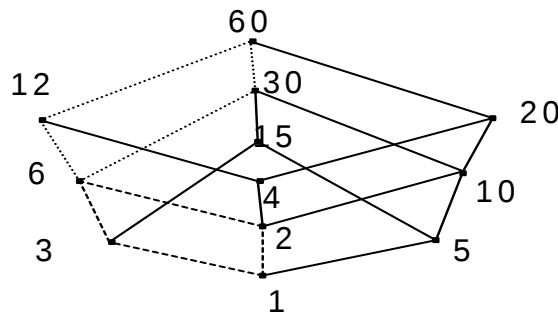


Fig (1 – 2)

3) Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de filtres dans E , alors $\cap \{F_i, i \in I\}$ est un filtre

Filtre engendré par G

C'est l'intersection de tous les filtres contenant G , c'est - à - dire le plus petit filtre (au sens de l'inclusion) contenant G , il sera noté F_G .

La partie vide engendre le filtre $\{1\}$ ($F_\emptyset = \{1\}$) (plus petit filtre de E).

Définition 1.11

Soit F un filtre propre alors :

- 1) F est premier si $\forall a, b \in E$ alors $a \vee b \in F \Rightarrow a \in F$ ou $b \in F$.
- 2) F est irréductible, s'il n'existe pas de filtres propres F_1 et F_2 tels que :

$$F = F_1 \cap F_2 \text{ avec } F \neq F_1 \text{ et } F \neq F_2.$$

Proposition 1.8

- (i) Soit F un filtre propre, alors pour tout $b \notin F$ il existe un filtre irréductible F^* tel que $F \subset F^*$ et $b \notin F^*$
- (ii) Si $a \not\leq b$, alors il existe un filtre irréductible F^* tel que $a \in F^*$ et $b \notin F^*$.

Proposition 1.9

Il existe des filtres propres maximaux pour l'inclusion, ils seront appelés des ultra filtres

Définition 1.12 (Ultrafiltre) :

Soit $(E, \leq, \vee, \wedge)$ un treillis, un ultrafiltre U est un filtre de E qui est maximal c'est-à-dire : s'il existe un filtre F tel que $U \subset F$; alors $U = F$.

Théorème 1.3

Dans un treillis distributif, il y a une équivalence entre filtre premier et filtre irréductible.

Lemme 1.10

Soit B une algèbre de Boole, alors tout filtre propre de B est contenu dans un ultrafiltre. Par suite, tout élément non nul de B appartient au moins à un ultrafiltre.

Lemme 1.11

Soit X un espace topologique. Alors l'ensemble des parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées de X est une sous algèbre de Boole de $P(X)$. Pour tout espace topologique X , notons $ClopX$ (“clopen”) l'algèbre de Boole des Ouverts fermés de X .

1.4 Représentation des treillis distributifs

1.4.1 Représentation de Stone

Théorème 1.4

Toute algèbre Booléenne B est isomorphe à une sous algèbre Booléenne de la forme $P(X)$

Preuve.

Soit B une algèbre de Boole. Soit $X = UltB$, l'ensemble des ultrafiltres de B ;
pour tout $x \in B$

posons $\sigma(x) = \{U \in X \mid x \in U\}$.

σ est un homomorphisme d'algèbre de Boole injectif de B dans $UltB$

$$U \in \sigma(\neg x) \Leftrightarrow \neg x \in U$$

$$\Leftrightarrow x \notin U$$

$$\Leftrightarrow U \notin \sigma(x)$$

$$\Leftrightarrow U \in C_{\sigma(x)}$$

$$\Leftrightarrow \sigma(\neg x) = C_{\sigma(x)}$$

$$\sigma(x \wedge y) = \sigma(x) \cap \sigma(y)$$

$$U \in \sigma(x \wedge y) \Leftrightarrow x.y \in U$$

$$\Leftrightarrow x \in U \text{ et } y \in U$$

$$\Leftrightarrow U \in \sigma(x) \cap \sigma(y)$$

$$\sigma(x \wedge y) = \sigma(x) \cap \sigma(y) \dots (1)$$

De même

$$\sigma(x \vee y) = \sigma(x) \cup \sigma(y) \dots (2)$$

$$\sigma \text{ injectif} \iff \ker \sigma = \phi \dots (3)$$

$$x \in \ker \sigma \Leftrightarrow \sigma(x) = \phi$$

$$\Leftrightarrow C\sigma(x) = X$$

$$\Leftrightarrow \neg x \in U, \forall U \in X$$

$$\Leftrightarrow \neg x \in \bigcap_{U \in X} U = \{1\}$$

$$\Leftrightarrow \neg x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Donc σ est un monomorphisme qu'on appelle monomorphisme de Stone. X est appelé espace de Stone ou l'espace dual de B .

Remarque 1.2

Si B est fini alors σ est une surjection.

Preuve.

$\sigma : B \longrightarrow P(X)$ où $\sigma(x) = \{U \subset X : x \in U\}$,

si F un filtre de B alors F est principale ($F = \uparrow a$) car F est fini, $F = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Soit $a = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k$, on a, $a \in F$ donc $F = B \vee a = \{y \in B : y = x \vee a, x \in B\}$.

Soit $Y \in P(X)$

ou bien $Y = \phi$, donc $Y = \sigma(0)$

ou bien $Y = X$, donc $Y = \sigma(1)$

ou bien $\phi \neq Y$ c'est -à-dire $Y \subsetneq X$, donc $Y = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ tel que $0 < k < n$

$F = \bigcap_{i=1}^k u_i$ alors F est principal, $F = B \vee a$ tel que $a = \min F$.

On démontre que $Y = \sigma(a)$

-Soit

$$u_i \in Y \implies a \in u_i$$

$$\implies u_i \in \sigma(a)$$

$$\implies Y \subset \sigma(a)$$

-Soit

$$v \in \sigma(a) \implies a \in v$$

$$\implies F \subset v$$

$$\implies \bigcap_{i=1}^k u_i \subset v$$

supposons que $v \neq u_i \forall i = 1, 2, \dots, k. \implies \forall i, \exists x_i \in u_i$ et $x_i \notin v$

soit $x = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k$, alors $x > x_i \forall i = 1, 2, \dots, k \implies x \in u_i, \forall i = 1, 2, \dots, k. \implies$

$$x \in \bigcap_{i=1}^k u_i = F \implies x \in F \implies x \in v.$$

mais $x = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k \in v$, donc $\exists i / x_i \in V$ (v est un ultrafiltre), contradiction

$\implies v \in Y$

$\implies \sigma(a) \subset Y$ alors $\sigma(a) = Y$.

donc σ est surjectif.

Conséquences :

1) Le nombre d'éléments d'une algèbre de Boole B finie est de la forme 2^n , où n représente exactement le nombre d'ultrafiltre de B .

Exemple 1.12

$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ $\text{Card}D(6) = 2^2$ donc il y a 2 ultrafiltres

1.4.2 Etude par dualité

Soit X un espace topologique compact

Lemme 1.13 [15]

Il y a une équivalence entre :

a) Pour tout $x \in X$ l'intersection de tout les ofs contenant x est $\{x\}$.

b) Pour $x \neq y$ il existe un of V tel que : $x \in V$ et $y \notin V$.

c) La topologie de X est engendrée par les ofs.

Définition 1.13

On appelle espace Booléen tout espace topologique compact et Vérifiant l'une des propriétés du lemme précédent.

Représentation de Priestley

Définition 1.14 [16]

Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné (poset), et soit E un sous ensemble de P . On

dit que E est croissant si, $\forall x \in E$ on a : $x \leq y \implies y \in E$.

On dit que E est décroissant si, $\forall x \in E$ on a : $y \leq x \implies y \in E$.

Définition 1.15

Un espace ordonné est un triplet $(X, \tau, \leq)$ où X est un ensemble non vide, τ une topologie sur X , $\leq$ une relation d'ordre sur X .

Définition 1.16

Soit $(X, \tau, \leq)$ un espace ordonné, on dit que $(X, \tau, \leq)$ est un espace totalement discontinu si : $\forall x, y \in X$ tel que $x \not\leq y$, il existe un τ -of croissant U et un τ -of décroissant V tel que : $x \in U$, $y \in V$ avec $U \cap V = \emptyset$.

Définition 1.17

Un espace ordonné $(X, \tau, \leq)$ est dit un espace de Priestley s'il est compact et totalement discontinu.

Définition 1.18

1- Si A un treillis distributif fermé alors son espace dual est défini par : $T(A) = (X, \tau, \leq)$, où X est l'ensemble des $0-1$ homomorphismes de A dans la chaîne $\{0, 1\}$, $\leq$ la relation d'ordre définie sur X par :

$$\forall a \in A, f \leq g \iff f(a) \leq g(a)$$

2- Si $\delta = (X, \tau, \leq)$ est un espace de Priestley, alors son espace dual est défini par :

$$L(\delta) = \{Y / Y \subseteq X \text{ et } Y \text{ est un } \tau\text{-of croissant} \}$$

Dualité des treillis distributifs

Lemme 1.14 [16]

1) Si A est un treillis distributif fermé alors son espace dual $T(A) = (X, \tau, \leq)$ est un espace de Priestley.

2) Si $\delta = (X, \tau, \leq)$ est un espace de Priestley, alors son dual $L(\delta)$

$$L(\delta) = \{Y \mid Y \subseteq X \text{ et } Y \text{ est un } \tau\text{-of croissant} \}$$

est un treillis distributif et fermé.

Théorème 1.5 [10]

(1) Soit A un treillis distributif, l'application $F_A : A \longrightarrow L(T(A))$ définie par :

$F_A(a) = \{f \in X \mid f(a) = 1\}$ est un isomorphisme de treillis.

(2) Si $\delta = (X, \tau, \leq)$ est un espace de Priestley alors l'application $G_\delta : \delta \longrightarrow T(L(\delta))$ définie par

$$G_\delta(x)(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Y; \\ 0 & \text{si } x \notin Y. \end{cases} \quad \text{pour tout } Y \in L(\delta)$$

est un isomorphisme d'espaces de Priestley (i.e une bijection continue et croissante).

(3) Si $f : A_1 \longrightarrow A_2$ est un homomorphisme de treillis alors l'application $T(f) :$

$T(A_2) \longrightarrow T(A_1)$ définie par :

$T(f)(g) = g \circ f$ est un homomorphisme d'espace de Priestley (i.e une application continue et croissante).

(4) Si $h : \delta_1 \longrightarrow \delta_2$ est un homomorphisme d'espace de Priestley alors l'application $L(h) : L(\delta_2) \longrightarrow L(\delta_1)$

définie par : $L(h)(y) = h^{-1}(y)$ pour tout $y \in L(\delta_2)$, est un homomorphisme de treillis.

(5) Si f et h sont définis comme dans (3) et (4) alors les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & & \xrightarrow{f} & A_2 & & \delta_1 & \xrightarrow{h} & \delta_2 \\
 F_{A_1} \downarrow & & & \downarrow F_{A_2} & & G_{\delta_1} \downarrow & & \downarrow G_{\delta_2} \\
 L(T(A_1)) & \xrightarrow{L(T(f))} & A_2 & & T(L(\delta_2)) & \xrightarrow{T(L(h))} & T(L(\delta_1))
 \end{array}$$

sont commutatifs.

CHAPITRE 2

ENSEMBLES ORDONNÉS FLOUS

Résumé

Dans ce chapitre, on étudiera les ensembles flous et les relations floues et on donnera quelques propriétés des relations floues, relation d'ordre flou. Puis on étudiera les treillis flous

Contenu

- 2.1. Historique
- 2.2. Ensembles flous
- 2.3. Relations floues
- 2.4. Relation d'ordre flou
- 2.5. Ensembles ordonnés flous
- 2.6. Treillis flous
- 2.7. Idéaux flous et filtres flous dans un F- lattice

Historique[12]

Au début des années 30, le logicien Łukasiewicz a développé le système logique avec trois valeurs. En 1965 Lotfi Zadeh a publié l'article "*fuzzy sets*"[19], dans le quel il a développé la théorie des symboles flous et introduit le terme fuzzy dans la littérature technique. C'est le début des tentatives de modélisation de systèmes par des relations floues. Les premières investigations de zadeh étaient l'utilisation de la logique floue pour représenter le langage naturel. Il a été le premier à formaliser les règles floues (fuzzy rules) et à suggérer une approche "Système expert" au réglage automatique, et la règle de commande est remplacée par des règles floues.

2.1 Ensembles flous :

Définition 2.1 [19]

Soit un ensemble de référence (ou univers) U , on définit un ensemble flou A dans U par la donnée d'une application μ_A de U dans l'intervalle réel $[0, 1]$, qui à tout élément $x \in U$ fait associer une valeur $\mu_A(x)$ telle que

$$0 \leq \mu_A(x) \leq 1.$$

L'application μ_A est appelée fonction d'appartenance de l'ensemble flou A généralisant ainsi le concept d'appartenance et donc la notion de fonction caractéristique. À tout élément x de U la valeur $\mu_A(x)$ associée n'est pas nécessairement égale à 0 ou à 1, elle est à priori quelconque et désigne le degré d'appartenance de x à l'ensemble A . On peut distinguer trois cas pour tout élément x dans U

- $\mu_A(x) = 0$, x n'appartient pas à A
- $\mu_A(x) = 1$, x appartient à A
- $\mu_A(x) \neq 0$ et 1 dans ce cas le degré d'appartenance $\mu_A(x)$ est une valeur intermédiaire entre le 0 et le 1. On dit que x appartient partiellement à l'ensemble flou A .

Notation 2.1

On note par $\{(x; \mu_A(x), x \in A)\}$ l'ensemble flou $\bar{A}$ et dans le cas discret par :

$$\sum_{i=1}^{i=N} \mu_A(x_i)/x_i$$

Où N désigne le cardinal de U et dans le cas infini

$$A = \int_U \mu_A(x)/x$$

Support d'un ensemble flou

Soit un ensemble flou A dans l'univers U . Le support de l'ensemble flou A noté $supp(A)$ est un sous-ensemble ordinaire de U dont chacun des éléments a un degré d'appartenance non nul, par rapport à A . D'où

$$supp(A) = \{x \in U / \mu_A(x) \neq 0\}.$$

Noyau d'un ensemble flou

Le noyau d'un ensemble flou A dans U est un sous-ensemble ordinaire de U dont chaque élément a un degré d'appartenance égale à 1. On note :

$$Ker(A) = \{x \in U; \mu_A(x) = 1\}.$$

Lorsque le noyau n'est pas vide. C'est-à-dire $Ker(A) \neq \phi$, on dit que l'ensemble flou A est normal ou normalisé si A est net, $Ker(A) = A$

HAUTEUR D'UN SOUS-ENSEMBLE FLOU

La hauteur d'un ensemble flou A dans U est la valeur maximum de la fonction d'appartenance, c'est le plus grand degré d'appartenance à A .

$$H(A) = \max(\mu_A(x); x \in U)$$

ENSEMBLES FLOUS DISCRETS

Remarque 2.1 [11]

Si le support d'un ensemble flou est fini, il est possible de donner la fonction d'appartenance par l'énumération de ses valeurs, ainsi par exemple dans le référentiel $E = \{a, b, c, d\}$, on note habituellement

$$A = \{a/0.1, b/0.5, c/0.3, d/0\}$$

(ou en couples, en indices ou encore avec les «deux points»). Le sous-ensemble flou formellement défini par les degrés d'appartenance :

$$\mu(a) = 0.1, \mu(b) = 0.5, \mu(c) = 0.3 \text{ et } \mu(d) = 0.$$

INCLUSION

L'inclusion d'un ensemble flou dans un autre est définie par une inégalité entre les fonctions d'appartenance :

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in U, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

UNION, INTERSECTION

Définition 2.2

On définit l'union et l'intersection de deux ensembles flous A et B , comme respectivement le plus petit ensemble flou contenant A et B , et le plus grand ensemble flou contenu dans A et dans B d'autre part. En d'autres termes :

$$\mu_{A \cup B} = \max(\mu_A, \mu_B), \quad \mu_{A \cap B} = \min(\mu_A, \mu_B).$$

Le complémentaire :

Définition 2.3

Le complémentaire d'un ensemble flou est défini par :

$$\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A.$$

Toutes les propriétés de treillis distributifs et les relations de De Morgan demeurent vrais, ainsi l'indépendance

$$A \cup A = A, A \cap A = A.$$

La commutativité

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

L'associativité :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Les distributivités mutuelles

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Les relations de De Morgan

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

Et les lois d'absorption

$$A \cap (A \cup B) = A$$

et

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

La démonstration de ces propriétés est issue des propriétés analogues pour min, max et le complément à 1.

Cependant, certaines propriétés vérifiées dans le cas binaire sont perdues dans le cas flou, comme le tiers exclu $A \cup \neg A = U$, et la non contradiction $A \cap \neg A = \phi$. En effet, on a en général :

$$A \cup \neg A \neq U$$

et

$$A \cap \neg A \neq \phi.$$

Il faut remarquer que tout ensemble «vraiment flou» c'est à dire n'est pas net est défini par une fonction d'appartenance continue, coupera toujours son complémentaire à la hauteur $\frac{1}{2}$.

On justifie les choix de min et de max par le fait que ce sont les seules opérations possèdent les propriétés de commutativité, idempotence, associativité, distributivités mutuelles, continues, mais vérifiant également :

$$\mu_{A \cap B} \leq \mu_A$$

$$\mu_B \leq \mu_{A \cup B}$$

ainsi que $\min(1, 1) = 1$ et $\max(0, 0) = 0$.

2.2 Relations floues :

Définition 2.4 [19]

Une relation floue R entre n ensembles de référence $X_1, X_2, \dots, X_n$ est un sous ensemble flou de $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ de fonction d'appartenance μ_R .

Une relation floue R entre deux ensemble de référence X et Y est un sous ensemble flou de $X \times Y$, de fonction d'appartenance μ_R .

Cas particuliers : *Si $X = Y$, une relation floue R , définie sur les deux univers X et Y est une relation binaire floue définie sur X .*

Si X et Y sont finis, une relation floue R , définie sur les deux univers X et Y , peut être décrite par la matrice $M(R)$ des valeurs de sa fonction d'appartenance, les coefficients de $M(R)$ indiqués sur la ligne x et la colonne y ayant pour valeur

$\mu_R(x, y)$, pour tout x de X et y de Y .

Exemple 2.2

On considère deux univers $X = \{a, b, c, d\}$ et $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. On définit la relation floue suivante :

$$R = \{0.3/(a, 1), 0.3/(a, 2), 0.2/(b, 2), 0.2/(b, 3), 0.1/(c, 3), 0.1/(c, 4), 0.4/(d, 4)\}$$

Cette relation peut être représentée par la matrice floue suivante :

μ_R	1	2	3	4
a	0.3	0.3	0	0
b	0	0.2	0.2	0
c	0	0	0.1	0.1
d	0	0	0	0.4

Remarque 2.2 les relations floues étant des cas particuliers de sous ensembles flous, toutes les propriétés et définitions qui concernent les ensembles flous leur sont applicables, ainsi par exemples définition de la hauteur, le support ou le noyau d'une relation floue.

2.2.1 L'inverse de la relation floue

Définition 2.5

L'inverse de la relation floue R entre X et Y est la relation floue R^{-1} entre Y et X définie par :

$$\forall x \in X, \forall y \in Y; R^{-1}(x, y) = R(y, x)$$

Cas particuliers : Si X et Y sont finis, la matrice $M(R^{-1})$ associé à l'inverse de la relation floue R et la transposé de la matrice $M(R)$.

2.2.2 Compositions de relations floues

Définition 2.6

La composition de deux relations R sur $X \times Y$ et S sur $Y \times Z$ définit une relation floue $S \circ R$ sur $X \times Z$ de fonction d'appartenance définie par :

$$\mu_{S \circ R}(x, z) = \sup_y (\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))).$$

Exemple 2.3

Soit R la relation définie par la fonction d'appartenance

μ_R	x_1	x_2	x_3
x_1	0.2	1	0.5
x_2	0	0.6	0.3
x_3	0	0.9	0.4

Le calcul des éléments de $R \circ R$ similaire à celui d'un produit matriciel ordinaire en remplaçant le produit de deux termes par leur minimum, et l'addition par leur maximum. A titre d'exemple, voici le calcul détaillé du premier élément de $R \circ R$

$$\mu_{R \circ R}(x_1, x_1) = \max[\min(\mu_R(x_1, y), \mu_R(y, x_1))]$$

$$\text{On a : } \min(\mu_R(x_1, x_1), \mu_R(x_1, x_1)) = \min(0.2, 0.2) = 0.2$$

$$\min(\mu_R(x_1, x_2), \mu_R(x_2, x_1)) = \min(1, 0) = 0$$

$$\min(\mu_R(x_1, x_3), \mu_R(x_3, x_1)) = \min(0.5, 0) = 0$$

D'où $\mu_{R \circ R}(x_1, x_1) = \max[0.2, 0, 0] = 0.2$

En utilisant le même procédé pour les autres éléments, on a :

$\mu_{R \circ R}$	x_1	x_2	x_3
x_1	0.2	0.6	0.4
x_2	0	0.6	0.3
x_3	0	0.6	0.4

Définition 2.7 [20] :

Soit X un ensemble non vide, la relation d'ordre flou dans X est un ensemble flou

R de $X \times X$ satisfait les conditions suivantes :

- (i) $\forall x \in X, \quad R(x, x) = 1$ (F -réflexivité) ;
- (ii) $\forall (x, y) \in X^2, (\mu_R(x, y) > 0 \text{ et } x \neq y) \implies (\mu_R(y, x) = 0)$ (F -antisymétrie) ;
- (iii) $\forall (x, z) \in X^2, \mu_R(x, z) \geq \max_{y \in X} [\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z))]$ (F -transitivité).

Définition 2.8

Soit X un ensemble net. La relation préordre flou dans X est un sous ensemble

flou R dans $X \times X$ satisfait Les propriétés suivantes :

- (i) pour tout $x \in X, \mu_R(x, x) = 1$, (F -réflexivité) ;
- (ii) pour tout $(x, y, z) \in X^3, \mu_R(x, z) \geq \max_y [\min \{\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)\}]$, (F -transitivité).

Si de plus on a la F -antisymétrie, alors R est une relation d'ordre flou.

Exemple 2.4

1) Soit $X = \{a, b, c, d\}$ et R la relation définie sur X par sa fonction d'apparte-

nance :

$$R =$$

μ_R	a	b	c	d
a	1	0.6	0.8	0.8
b	0	1	0	0.2
c	0	0.6	1	0.4
d	0	0	0	1

i) $\mu_R(a, a) = \mu_R(b, b) = \mu_R(c, c) = \mu_R(d, d) = 1$ donc R est réflexive....(2-1-1)

ii)

$$\mu_R(a, b) > 0 \implies \mu_R(b, a) = 0$$

$$\mu_R(a, c) > 0 \implies \mu_R(c, a) = 0$$

$$\mu_R(a, d) > 0 \implies \mu_R(d, a) = 0$$

$$\mu_R(b, d) > 0 \implies \mu_R(d, b) = 0$$

$$\mu_R(c, b) > 0 \implies \mu_R(b, c) = 0$$

$$\mu_R(c, d) > 0 \implies \mu_R(d, c) = 0$$

On en déduit que la relation R est une relation antisymétrique...(2-1-2)

iii) Une relation floue R est transitive si et seulement si :

$$\forall x \in X, \forall z \in X \quad \mu_R(x, z) \geq \max_{y \in X} (\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z))).$$

Ce qui est équivalent à $R \circ R \subseteq R$ ou en terme de fonction d'appartenance

$$\mu_{R \circ R} \leq \mu_R.$$

La fonction d'appartenance $\mu_{R \circ R}$ peut être déterminée ainsi :

$$\mu_{R \circ R}(a, a) = \max \left\{ \begin{array}{l} \min \mu_R(a, a), \mu_R(a, a), \min (\mu_R(a, b), \mu_R(b, a)), \\ \min (\mu_R(a, c), \mu_R(c, a)), \min (\mu_R(a, d), \mu_R(d, a)) \end{array} \right\}$$

$$= \max \{ \min (1, 1), \min (0.6, 0), \min (0.8, 0), \min (0, 0.8) \} = \max \{ 1, 0, 0, 0 \} = 1$$

$$\mu_{R \circ R}(a, b) = \left\{ \begin{array}{l} \max \min (\mu_R(a, a), \mu_R(a, b)), \min (\mu_R(a, b), \mu_R(b, b)), \\ \min (\mu_R(a, c), \mu_R(c, b)), \min (\mu_R(a, d), \mu_R(d, b)) \end{array} \right\}$$

$$= \max \{ \min (1, 0.6), \min (0.6, 1), \min (0.8, 0.6), \min (0.8, 0) \} = \max \{ 0.6, 0.6, 0.6, 0 \} = 0.6.$$

Le calcul se fait de la même façon pour tous les autres éléments de l'ensemble

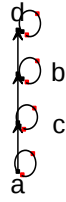
$X \times X$, nous obtenons ainsi la fonction d'appartenance $\mu_{R \circ R}$ décrite par le tableau

$\mu_{R \circ R}$	a	b	c	d
a	1	0.6	0.8	0.8
b	0	1	0	0.2
c	0	0.6	1	0.4
d	0	0	0	1

On vérifie facilement que $\mu_{R \circ R} \leq \mu_R$.

D'où l'on en déduit que R est une relation floue transitive.....(2-1-3), de (2-1-1),

(2-1-2) et (2-1-3) R est une relation d'ordre flou



fig(2-1)

2) $E = [0, 1]$, R est relation floue définie sur E par la fonction

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y; \\ \frac{y-x+1}{2} & \text{si } x < y; \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

i) R est réflexive par définition,

ii) si $x < y : \mu_R(x, y) > 0 \implies y > x, \mu_R(y, x) = 0,$

si $x > y : \mu_R(y, x) > 0 \implies \mu_R(x, y) = 0;$

si $x \parallel y$ dans $\mu_R(x, y) = 0$ et l'implication est vraie

R est antisymétrique.

iii) $\forall (x, y, z) \in E^3, \mu_R(x, z) \stackrel{?}{\geq} \max_y [(\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)))]$

$x \leq z$	$x \leq y$	$y \leq z$
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

1) si $x \not\leq z$, $x \not\leq y$ et $y \not\leq z$ on a $\mu_R(x, z) = 0$, $\mu_R(x, y) = 0$

par conséquent $\mu_R(x, z) \geq \max(\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)))$;

2) si $x \not\leq z$, $x \not\leq y$ et $y \leq z$ on a $\mu_R(x, z) = 0$, $\mu_R(x, y) = 0$,

par conséquent $\mu_R(x, z) \geq \max(\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)))$;

3) si $x \not\leq z$, $x \leq y$ et $y \not\leq z$ on a $\mu_R(x, z) = 0$, $\mu_R(y, z) = 0$

par conséquent $\mu_R(x, z) \geq \max(\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)))$,

4) si $x \not\leq z$, $x \leq y$ et $y \leq z$ cas impossible ;

5) si $x \leq z$, $x \not\leq y$ et $y \not\leq z$ on a $\mu_R(x, z) = \frac{y-x+1}{2}$, $\mu_R(x, y) = 0$

par conséquent $\mu_R(x, z) \geq \max(\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)))$;

6) si $x \leq z$, $x \not\leq y$ et $y \leq z$ on a $\mu_R(x, z) = \frac{y-x+1}{2}$, $\mu_R(x, y) = 0$

par conséquent $\mu_R(x, z) \geq \max(\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)))$

7) si $x \leq z$, $x \leq y$ et $y \not\leq z$ on a $\mu_R(x, z) = \frac{y-x+1}{2}$, $\mu_R(y, z) = 0$

donc $\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)) = 0$ par conséquent $\mu_R(x, z) \geq \max(\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)))$

8) si $x \leq z$, $x \leq y$ et $y \leq z$ on a $\mu_R(x, z) = \frac{z-x+1}{2}$, $\mu_R(x, y) = \frac{y-x+1}{2}$ et $\mu_R(y, z) = \frac{z-y+1}{2}$

$y \leq z \implies \frac{y-x+1}{2} \leq \frac{z-x+1}{2}$ i.e. $\mu_R(x, z) \geq \mu_R(x, y)$

$x \leq y \implies -y \leq -x$ donc $\frac{z-y+1}{2} \leq \frac{z-x+1}{2}$ alors $\mu_R(x, z) \geq \mu_R(y, z)$

On déduit que. $\mu_R(x, z) \geq \max \min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z))$.

La relation binaire floue R est donc transitive,

Par conséquent R est une relation d'ordre.

Définition 2.9 [18]

Soit X un ensemble classique et R une relation d'ordre flou dans X le couple (X, R) s'appelle un ensemble ordonné flou (fuzzy ordered sets) (fuset).

Définition 2.10

Un fuset C est dit une (fuzzy) chaîne si pour tous $x, y \in C$ ou bien $\mu(x, y) \succ 0$, ou bien $\mu(y, x) \succ 0$. Si $x \neq y$ et par l'antisymétrie de l'ordre forcément une seule propriété satisfaite.

Notation 2.5

Soit (X, R) un ensemble ordonné flou, μ_R est la fonction d'appartenance de R et soit $x \in X$, $\downarrow x$ désigne l'ensemble flou de X défini par : $(\downarrow x)(y) = \mu_R(y, x)$, pour tout $y \in X$, et $\uparrow x$ désigne l'ensemble flou de X défini par $(\uparrow x)(y) = \mu_R(x, y)$ pour tout $y \in X$. Si A est un sous ensemble classique dans X alors :

$$\uparrow A = \bigcup_{x \in A} \uparrow x,$$

et

$$\downarrow A = \bigcup_{x \in A} \downarrow x.$$

Définition 2.11

Soit A un sous ensemble net dans le fuset X . L'ensemble des majorants de A est un sous ensemble flou de X noté $U(A)$ défini par :

$$U(A)(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_R(x, y) = 0, \text{ pour tout } x \in A; \\ \bigwedge_x \mu_R(x, y), & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

L'ensemble des minorants de A est un sous ensemble flou de X noté $L(A)$ défini par :

$$L(A)(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_R(y, x) = 0, \text{ pour tout } x \in A; \\ \bigwedge_x \mu_R(y, x), & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On dit que z est une borne supérieure de A (et on écrit $z = \sup(A)$) si

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \ z \in U(A); \\ \text{et} \\ (ii) \ \text{si } y \in U(A) \text{ alors } y \in U(z). \end{array} \right.$$

On dit que z est une borne inférieure de A (on écrit $z = \inf(A)$) si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \ z \in L(A); \\ \text{et} \\ (ii) \ \text{si } x \in L(A) \text{ alors } y \in L(z). \end{array} \right.$$

Notation 2.6

Pour un sous ensemble flou S d'un foiset X . $U(S)$ est noté $U(\sup S)$ et $L(S)$ est noté par $L(\inf S)$.

Notation 2.7

On note par : $x \vee_R y = \sup \{x, y\}$ et $x \wedge_R y = \inf \{x, y\}$

Exemple 2.8

1- Soit $X = \{0, 1, 2\}$ et R la relation d'ordre défini sur X par :

$$\mu_R(0, 0) = \mu_R(1, 1) = \mu_R(2, 2) = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R(0, 2) = 0.55 \\ \mu_R(2, 0) = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mu_R(2, 1) = 0 \\ \mu_R(1, 2) = 0.6 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mu_R(1, 0) = 0 \\ \mu_R(0, 1) = 0.7 \end{array} \right\},$$

μ_R	0	1	2
0	1	0.7	0.55
1	0	1	0.6
2	0	0	1

donc, $\inf_R(X) = 0$ et $\sup_R(X) = 2$.

2- On considère la relation d'ordre flou R définie sur $X = \{0, 1, 2\}$ par :

$$\mu_R(0, 0) = \mu_R(1, 1) = \mu_R(2, 2) = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R(0, 2) = 0.6 \\ \mu_R(2, 0) = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mu_R(2, 1) = 0 \\ \mu_R(1, 2) = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mu_R(1, 0) = 0 \\ \mu_R(0, 1) = 0.55 \end{array} \right\},$$

μ_R	0	1	2
0	1	0.55	0.6
1	0	1	0
2	0	0	1

dans ce cas $\inf_R(X) = 0$, mais $\sup_R(X)$ n'existe pas dans X

3- Soit R une relation d'ordre flou dans $X = \{0, 1, 2\}$ définie par :

$$\mu_R(0, 0) = \mu_R(1, 1) = \mu_R(2, 2) = 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R(0, 2) = 0.65 \\ \mu_R(2, 0) = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mu_R(2, 1) = 0 \\ \mu_R(1, 2) = 0.7 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mu_R(1, 0) = 0 \\ \mu_R(0, 1) = 0 \end{array} \right\},$$

μ_R	0	1	2
0	1	0	0.65
1	0	1	0.7
2	0.65	0	1

donc $\sup_R(X) = 2$ et $\inf_R(X)$ n'existe pas dans X .

4- Soit R une relation d'ordre flou dans $X = \{0, 1, 2\}$ définie par :

$$\mu_R(0, 0) = \mu_R(1, 1) = \mu_R(2, 2) = 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R(0, 2) = 0.8 \\ \mu_R(2, 0) = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mu_R(2, 1) = 0 \\ \mu_R(1, 2) = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mu_R(1, 0) = 0 \\ \mu_R(0, 1) = 0 \end{array} \right\},$$

μ_R	0	1	2
0	1	0	0.8
1	0	1	0
2	0	0	1

dans ce cas $\inf_R(X)$ et $\sup_R(X)$ n'existent pas dans X .

Proposition 2.9

dans un ensemble ordonné flou on a les Propriétés suivantes :

i- $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$. (idempotence)

ii- $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$. (commutativité)

iii- $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$. (absorption)

iv- $\mu_R(x, y) > 0$, si et seulement si $x \wedge y = x$ si et seulement si $x \vee y = y$.

Définition 2.12

On dit qu'un fuset P est un F -lattice si tout sous ensemble fini de P ayant un $\sup$, et un $\inf$.

Théorème 2.1

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes $x \vee y$, et $x \wedge y$, tels que : 1) chaque loi est idempotente, commutative et associative. 2) On a les lois d'absorption, c'est-à-dire quels que soit x et y :

$$x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y).$$

Alors on peut définir sur E une relation d'ordre flou R telle que (E, R) soit un treillis flou, avec $\sup_E(x, y) = x \vee y$ et $\inf_E(x, y) = x \wedge y$.

Cette relation d'ordre flou est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu_R(x, y) = 1 & \text{si } x = y; \\ \mu_R(x, y) = \alpha / 0 \prec \alpha \prec 1 \text{ et } \mu_R(y, x) = 0 & \text{si } x \vee y = y; \\ \mu_R(x, y) = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{array} \right.$$

et R' définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu_{R'}(x, y) = 1 & \text{si } x = y; \\ \mu_{R'}(x, y) = \alpha / 0 \prec \alpha \prec 1 \text{ et } \mu_R(y, x) = 0 & \text{si } x \wedge y = x; \\ \mu_{R'}(x, y) = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{array} \right. .$$

Preuve.

R est une relation d'ordre flou :

i) $\mu_R(x, x) = 1$, R est réflexive

ii) si $x \neq y$ on distingue trois cas :

1) $x \vee y = y$ et dans ce cas $\mu_R(x, y) > 0 \implies \mu_R(y, x) = 0$

2) $x \vee y = x$ et dans ce cas $\mu_R(x, y) = 0$ et l'implication est vraie

3) $x \parallel y$ et dans ce cas aussi $\mu_R(x, y) = 0$ et l'implication est vraie

On en déduit que la relation R est une relation antisymétrique

iii) Pour la transitivité on utilise le table de vérité suivante :

$x < z$	$x < y$	$y < z$	$\mu_R(x, z)$	$\mu_R(x, y)$	$\mu_R(y, z)$	$\max(\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)))$
1	1	1	α	α	α	α
1	1	0	α	α	0	0
1	0	1	α	0	α	0
1	0	0	α	0	0	0
0	1	1	Cas impossible			
0	1	0	0	α	0	0
0	0	1	0	0	α	0
0	0	0	0	0	0	0

La relation binaire floue R est donc transitive, R est donc une relation d'ordre flou.

2.2.3 Idéaux flous et filtres flous dans un F- lattice

Définition 2.13

Un sous ensemble D d'un fuset P est dit un ensemble dirigé si pour tout sous ensemble fini F de D , $D \cap U(F) \neq \phi$.

-Un idéal dans un fuset est un sous ensemble dirigé I qui satisfait la propriété suivante

$$\text{Si } x \in I \text{ et } \mu_R(y, x) \succ 0 \text{ alors } y \in I.$$

- Un filtre dans un fuset est un sous ensemble F qui satisfait les propriétés,

i) Pour tout sous ensemble fini E de F , on a $F \cap L(E) \neq \phi$;

ii) Si $x \in F$ et $\mu_R(x, y) \succ 0$ alors $y \in F$.

Exemple 2.10

Le treillis $(E, R, \wedge, \vee)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$ et la relation d'ordre flou R dans E définie par sa fonction d'appartenance μ_R tel que :

μ_R	a	b	c	d
a	1	0.6	0.6	0.6
b	0	1	0.4	0.7
c	0	0	1	0.8
d	0	0	0	1

$1 = d$, et $0 = a$, est un treillis flou distributif et fermé, E est un filtre flou impropre,

$F_1 = \{b, c, d\}$ et $F_2 = \{c, d\}$ sont des filtres flous, $\{d\}$ est un filtre principal flou,

E est un idéal impropre, $\{a\}, \{a, b\}$ sont des idéaux.

$\vee$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	c	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

$\wedge$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	a	b	b
c	c	a	a	c
d	d	a	b	d

CHAPITRE 3

REPRÉSENTATION DES TREILLIS FLOUS

DISTRIBUTIFS FINIS[1]

Résumé :

Dans ce chapitre on va établir une dualité type Priestley pour les treillis flous distributifs finis.

Contenu :

- 3-1.Ensemble ordonné flou croissant et ensemble ordonné flou décroissant
- 3-2.Construction de l'espace de Priestley
- 3-3.Dualité de Priestley pour les D- treillis flou fini
- 3-4.Construction de l'espace bidual de Priestley
- 3-5.Théorème de représentation des treillis distributifs flous et finis.

3.1 Théorème de représentation des treillis flous distributifs et finis.

Définition 3.1

Soit R une relation binaire floue définie sur un ensemble non vide X . On note $DomR$ le domaine de R , l'ensemble flou dont la fonction d'appartenance définie par : $\mu_{DomR}(x) = \bigvee_{y \neq x} \mu_R(x, y)$, $x \in X$ et le rang de R noté $ranR$ défini par :

$$\mu_{ranR}(y) = \bigvee_{x \neq y} \mu_R(x, y), \quad x \in X.$$

La hauteur de R noté $h(R)$, avec $h(R) = \bigvee_x \bigvee_{y \neq x} \mu_R(x, y)$.

Exemple 3.1

Soit R une relation binaire floue sur X définie par :

μ_R	a	b	c	d
a	1	0.6	0.6	0.6
b	0	1	0.4	0.7
c	0	0	1	0.8
d	0	0	0	1

$$\mu_{DomR}(a) = \bigvee_{y \neq a} \mu_R(a, y) = 0.6, \mu_{DomR}(b) = \bigvee_{y \neq b} \mu_R(b, y) = 0.7, \mu_{DomR}(c) = \bigvee_{y \neq c} \mu_R(c, y) = 0.8,$$

$$\mu_{DomR}(d) = \bigvee_{y \neq d} \mu_R(d, y) = 0$$

$$\mu_{ranR}(a) = \bigvee_{x \neq a} \mu_R(x, a) = 0, \mu_{ranR}(b) = \bigvee_{x \neq b} \mu_R(x, b) = 0.6, \mu_{ranR}(c) = \bigvee_{x \neq c} \mu_R(x, c) = 0.6,$$

$$\mu_{ranR}(d) = \bigvee_{x \neq d} \mu_R(x, d) = 0.8$$

$$h(R) = \bigvee_x \bigvee_{y \neq x} \mu_R(x, y) = 0.8.$$

3.1.0.1 Ensemble ordonné flou croissant et ensemble ordonné flou décroissant

Définition 3.2

(a) Soit (X, R) un ensemble ordonné flou . Un sous ensemble Y de X est dit croissant (increasing) si $x \in Y$ et $y \in X$, $\mu_R(x, y) > \mu_R(y, x)$ implique $y \in Y$.

Un sous ensemble décroissant est défini dualement .

(b) Un espace ordonné flou est un triplet (X, τ, R) tel que X est un ensemble non vide, τ est une topologie sur X et R est une relation d'ordre flou sur X .

(c) Pour un sous ensemble $A \subset X$, la borne supérieure de A est un élément $x \in X$ satisfaisant $\mu_R(y, x) > \mu_R(x, y)$. Quelque soit y dans A . La borne inférieure est définie dualement

3.1.0.2 Construction de l'espace de Priestley

Définition 3.3

(a) Un espace ordonné flou (X, τ, R) est dit totalement discontinu si, $x, y \in X$ et $\mu_R(x, y) = 0$, il existe un τ -of (ouvert-fermé) croissant U et un τ -of décroissant V tel que $U \cap V = \emptyset$ avec $x \in U$ et $y \in V$.

(b) Un espace ordonné flou (X, τ, R) s'appelle un espace de Priestley s'il est compact et totalement discontinu.

3.1.1 Dualité de Priestley pour les D- treillis flous finis

Tout au long de cette section tous les treillis flous seront finis (en abrégé F-D-treillis) et les homomorphismes préservent le 0 et le 1.

Si $(A, \vee_R, \wedge_R, R)$ un F-D-treillis flou, alors son espace dual est défini par : $T(A) =$

(X, τ, R_1) , avec X est l'ensemble des 0-1 homomorphismes de A dans la chaîne $\{0, 1\}$, τ est la topologie produit induite par celle de $\{0, 1\}^A$ et R_1 est une relation d'ordre flou sur X .

Si $\delta = (X, \tau, r)$ est un espace de Priestley flou et fini alors l'ensemble $(L(\delta), \vee_{r_1}, \wedge_{r_1}, r_1)$ avec $L(\delta) = \{Y \subset X / Y \text{ est un } \tau\text{-}of \text{ croissant}\}$, et r_1 est une relation d'ordre flou convenablement choisie est un treillis distributif fermé.

Lemme 3.2 [15]

(a) Si $(A, \vee_R, \wedge_R, R)$ un F - D -treillis flou fini alors il existe deux relations d'ordres flous R_1, R_2 tel que

(i) $T(A) = (X, \tau, R_1)$, est un espace de Priestley.

(ii) $(L(T(A)), \vee_{R_2}, \wedge_{R_2}, R_2)$ est un F - D -treillis .

(b) Si $\delta = (X, \tau, r)$ est un espace de Priestley fini alors il existe deux relations d'ordres flous r_1, r_2 tel que

(i) $(L(\delta), \vee_{r_1}, \wedge_{r_1}, r_1)$ est un F - D -treillis.

(ii) $(T(L(\delta)), \tau, r_2)$ est un espace de Priestley

Preuve.

(a)(i) On prend la relation floue R_1 tel que :

$$\mu_{R_1}(f, g) = \begin{cases} \mu_R(\wedge_R g^{-1}(1), \wedge_R f^{-1}(1)) & \text{si } f^{-1}(1) \subset g^{-1}(1); \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

On montre que R_1 est une relation d'ordre flou, $\mu_{R_1}(f, f) = \mu_R(\wedge_R f^{-1}(1), \wedge_R f^{-1}(1)) = \mu_R(a, a) = 1$ pour tout f dans X (R_1 est réflexive).

pour tous $(f, g) \in X^2$, $(\mu_{R_1}(f, g) > 0 \text{ et } f \neq g) \implies \mu_{R_1}(g, f) = 0$?

Si $\mu_{R_1}(f, g) > 0$ et $f \neq g$ on a $\mu_{R_1}(f, g) = \mu_R(\wedge_R g^{-1}(1), \wedge_R f^{-1}(1)) = \mu_R(a, b) > 0$

et $a \neq b$ car $(f = g)$ d'où $\mu_R(b, a) = 0$. i.e $\mu_R(\wedge_R f^{-1}(1), \wedge_R g^{-1}(1)) = \mu_{R_1}(g, f) = 0$

donc R_1 est antisymétrique.

Pour tous $(f, g, h) \in X^3$ on montre que

$$\mu_{R_1}(f, h) \geq \max_g [\min(\mu_{R_1}(f, g), \mu_{R_1}(g, h))]$$

Par la transitivité de R^{-1} on a pour tous a, c dans A ,

$$\mu_{R^{-1}}(a, c) \geq \max_b [\min(\mu_{R^{-1}}(a, b), \mu_{R^{-1}}(b, c))], \text{ donc } \mu_R(c, a) \geq \max_b [\min(\mu_R(b, a), \mu_R(c, b))]$$

$$\implies \mu_R(\wedge_R h^{-1}(1), \wedge_R f^{-1}(1)) \geq \max_b [\min(\mu_R(\wedge_R g^{-1}(1), \wedge_R f^{-1}(1)), \mu_R(\wedge_R h^{-1}(1), \wedge_R g^{-1}(1)))]$$

ce qui est vrai pour tout $b \in A$ alors pour tous $(f, g, h) \in X^3$

$$\mu_{R_1}(f, h) \geq \max_g [\min(\mu_{R_1}(f, g), \mu_{R_1}(g, h))]$$

et R_1 est une relation d'ordre flou.

X est fermé dans la topologie induite par la topologie par celle de $\{0, 1\}^A$, qui est

compact, donc X est compact, on démontre que $T(A)$ est totalement discontinu :

soit $f, g \in X$ tel que $\mu_{R_1}(f, g) = 0$ donc $\mu_R(\wedge_R g^{-1}(1), \wedge_R f^{-1}(1)) = 0$, alors il existe

$a \in A$ tel que $f(a) = 0$ et $g(a) = 1$, l'ensemble $U = \{h \in X / h(a) = 1\}$ est un

τ -of croissant contenant g et l'ensemble $V = X - U = \{h \in X / h(a) = 0\}$ est

un τ -of décroissant contenant f et on a $U \cap V = \emptyset$, et par [15] $T(A) = (X, \tau, R_1)$,

est un espace de Priestley.

(ii) On définit R_2 par :

$$\mu_{R_2}(H, D) = \begin{cases} 1 & \text{si } H = D; \\ \mu_R \left(\bigwedge_R \bigcap_{f \in H} f^{-1}(1), \bigwedge_R \bigcap_{g \in D} g^{-1}(1) \right) & \text{si } H \subset D \text{ et } H \neq \phi; \\ \mu_R \left(0_A, \bigwedge_R \bigcap_{g \in D} g^{-1}(1) \right) & \text{si } H = \phi \text{ t.q } (0_A \text{ est le plus petit élément du treillis } A; \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On montre que R_2 est une relation d'ordre flou,

$$\mu_{R_2}(A, A) = 1 \text{ (F-réflexive)(3-1-1)}$$

$\mu_{R_2}(A, B) > 0$ et $A \neq B$ implique $A \subset B$ et $B \not\subseteq A$ alors $\mu_{R_2}(B, A) = 0$ et R_2 est

une relation antisymétrique floue ;.....(3-1-2)

$\mu_{R_2}(A, C) \geq \max_B [\min (\mu_{R_2}(A, B), \mu_{R_2}(B, C))]$ (F-transitive) , on utilise le ta-

bleau suivant

$A \subseteq C$	$A \subseteq B$	$B \subseteq C$	D
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	cas impossible
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Si $A \not\subseteq C$, $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq C$ on a $\mu_{R_2}(A, C) = \mu_{R_2}(A, B) = \mu_{R_2}(B, C) = 0$

Si $A \not\subseteq C$, $A \not\subseteq B$ et $B \subset C$ on a $\min (\mu_{R_2}(A, B), \mu_{R_2}(B, C)) = 0$

Si $A \not\subseteq C$, $A \subset B$ et $B \not\subseteq C$ on a $\min(\mu_{R_2}(A, B), \mu_{R_2}(B, C)) = 0$

Si $A \subset C$, $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq C$ on a $\min(\mu_{R_2}(A, B), \mu_{R_2}(B, C)) = 0$

Si $A \subset C$, $A \not\subseteq B$ et $B \subset C$ on a $\min(\mu_{R_2}(A, B), \mu_{R_2}(B, C)) = 0$

Si $A \subset C$, $A \subset B$ et $B \not\subseteq C$ on a $\min(\mu_{R_2}(A, B), \mu_{R_2}(B, C)) = 0$

Dans tous les cas précédents on a $\mu_{R_2}(A, C) \geq \max[\min(\mu_{R_2}(A, B), \mu_{R_2}(B, C))]$

Si $A \subset C$, $A \subset B$ et $B \subset C$ tel que $A \neq \phi$ on a

$$\begin{aligned}\mu_{R_2}(A, C) &= \mu_R \left(\bigwedge_R \bigcap_{f \in A} f^{-1}(1), \bigwedge_R \bigcap_{h \in C} h^{-1}(1) \right), \\ \mu_{R_2}(A, B) &= \mu_R \left(\bigwedge_R \bigcap_{f \in A} f^{-1}(1), \bigwedge_R \bigcap_{g \in B} g^{-1}(1) \right) \\ \mu_{R_2}(B, C) &= \mu_R \left(\bigwedge_R \bigcap_{g \in B} g^{-1}(1), \bigwedge_R \bigcap_{h \in C} h^{-1}(1) \right) \\ A \subset B \subset C &\implies \bigcap_{h \in C} h^{-1}(1) \subset \bigcap_{g \in B} g^{-1}(1) \subset \bigcap_{f \in A} f^{-1}(1) \\ &\implies \mu_R \left(\bigwedge_R \bigcap_{f \in A} f^{-1}(1), \bigwedge_R \bigcap_{h \in C} h^{-1}(1) \right) \geq \max \\ &\left[\min \left(\mu_R \left(\bigwedge_R \bigcap_{f \in A} f^{-1}(1), \bigwedge_R \bigcap_{g \in B} g^{-1}(1) \right), \mu_R \left(\bigwedge_R \bigcap_{g \in B} g^{-1}(1), \bigwedge_R \bigcap_{h \in C} h^{-1}(1) \right) \right) \right] \\ \text{alors } \mu_{R_2}(A, C) &\geq \max[\min(\mu_{R_2}(A, B), \mu_{R_2}(B, C))] \text{ et } R_2 \text{ est transitive....(3-1-3)}\end{aligned}$$

par suite R_2 est une relation d'ordre flou.

Finalement la borne supérieure et la borne inférieure de A et B notées respectivement $A \vee_{R_2} B$, $A \wedge_{R_2} B$ sont respectivement $A \cup B$ et $A \cap B$.

Alors $(L(\delta), \vee_{R_2}, \wedge_{R_2}, R_2)$ est un F-D-treillis.

(b)

(i) Si $h(r) = \vee_x \vee_y \mu_r(x, y) = 0$, donc X est une antichaîne et on peut prendre r_1

définie par

$$\mu_{r_1}(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = B; \\ 1 - \frac{\text{card}A}{\text{card}B} & \text{si } A \subset B; \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

r_1 est une relation d'ordre floue et $A \vee_{r_1} B = A \cup B$ et $A \wedge_{r_1} B = A \cap B$ pour tous A et B de $L(\delta)$

donc $(L(\delta), \vee_{r_1}, \wedge_{r_1}, r_1)$ est un F-D-treillis.

Si $h(r) = \vee_x \vee_y \mu_r(x, y) \neq 0$ donc X n'est pas un antichaîne, on prend

$$m_0 = \wedge_x \wedge_y \{\mu_r(x, y) \mid x \neq y \text{ et } \mu_r(x, y) > 0\}$$

Donc $m_0 \neq 0$, et on peut prendre la relation floue r_1 tel que :

$$\mu_{r_1}(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = B; \\ \max(m_0, \vee_{a \in A, b \in B} \mu_r(a, b)) & \text{si } A \subset B; \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

D'après (a) (ii) r_1 est une relation d'ordre floue et on peut prendre $A \vee_{r_1} B = A \cup B$ et $A \wedge_{r_1} B = A \cap B$ pour tous A et B de $L(\delta)$, et $(L(\delta), \vee_{r_1}, \wedge_{r_1}, r_1)$ est un F-D-treillis.

(ii) $(T(L(\delta)), \tau, r_2)$ est un espace flou de Priestley, on prend

$$\mu_{r_2}(f, g) = \begin{cases} 1 & \text{si } f = g; \\ \mu_r \left(\bigwedge_{A \in f^{-1}(1)} \bigwedge_{r_1} A, \bigwedge_{B \in g^{-1}(1)} \bigwedge_{r_1} B \right) & \text{si } f^{-1}(1) \subset g^{-1}(1); \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Premièrement r_2 est bien définie, $a = \bigwedge_{A \in f^{-1}(1)} \bigwedge_r \bigwedge_{r_1} A$ est existe car $L(\delta)$ est un treillis et $b = \bigwedge_{B \in g^{-1}(1)} \bigwedge_r \bigwedge_{r_1} B$ est le premier élément de $f^{-1}(1)$ Donc s'il y un autre élément b n'est pas minimal de $f^{-1}(1)$. [15]

Alors $(T(L(\delta)), \tau, r_2)$ est un espace flou de Priestley.

3.1.2 Théorème de représentation

Théorème 3.1

(a) Soit A un F - D -treillis, l'application $F_A : A \rightarrow L(T(A))$ définie par :

$$F_A(a) = \{f \in X \mid f(a) = 1\} \text{ est un isomorphisme des treillis flous.}$$

(b) Si $\delta = (X, \tau, r_1)$ un espace de Priestley alors l'application $G_\delta : \delta \rightarrow T(L(\delta))$

définie par :

$$G_\delta(x)(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Y; \\ 0 & \text{si } x \notin Y. \end{cases}$$

pour tout $Y \in L(\delta)$, est un isomorphisme d'espaces flous de Priestley (i.e bijection continu et croissant).

(c) Si $f : A_1 \rightarrow A_2$ est un homomorphisme de treillis flous alors $T(f) : T(A_2) \rightarrow T(A_1)$ définie par : $T(f)(g) = g \circ f$ est un homomorphisme d'espaces de Priestley (i.e application continue et croissante)

(d) Si $h : \delta_1 \rightarrow \delta_2$ est un homomorphisme d'espaces flous de Priestley alors l'application :

$L(h) : L(\delta_2) \rightarrow L(\delta_1)$ définie par $L(h)(y) = h^{-1}(y)$ pour tout $y \in L(\delta_2)$ est un homomorphisme de treillis flou.

(e) Si f et h comme (c) et (d) alors les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccccc}
A_1 & & \xrightarrow{f} & A_2 & & \delta_1 & \xrightarrow{h} & \delta_2 \\
F_{A_1} \downarrow & & & \downarrow & F_{A_2} & G_{\delta_1} \downarrow & & \downarrow & G_{\delta_2} \\
L(T(A_1)) & \xrightarrow{L(T(f))} & A_2 & & T(L(\delta_2)) & \xrightarrow{T(L(h))} & T(L(\delta_1))
\end{array}$$

Sont commutatifs.

Preuve.

$F_A(a) = \{f \in X \mid f(a) = 1\}$ est un isomorphisme de treillis flous

a) $\mu_R(x, y) \leq \mu_{R_2}(F_A(x), F_A(y))$ avec

$$\mu_{R_2}(F_A(x), F_A(y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } F_A(x) = F_A(y); \\ \mu_R\left(\bigwedge_{f \in F_A(x)} f, \bigwedge_{g \in F_A(y)} g\right) & \text{si } F_A(x) \subset F_A(y); \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On remarque que si $\mu_R(x, y) > 0$ implique $F_A(x) \subset F_A(y)$ et donc $\mu_{R_2}(F_A(x), F_A(y)) = \mu_R(x, y)$.

par suite $\mu_R(x, y) \leq \mu_{R_2}(F_A(x), F_A(y))$ [16] alors l'application

$F_A : A \rightarrow L(T(A))$ définie par $F_A(a) = \{f \in X \mid f(a) = 1\}$ est un isomorphisme de treillis flou

$$\begin{aligned}
F_A(x \vee_R y) &= \{f \in X \mid f(x \vee_R y) = 1\} \\
&= \{f \in X \mid f(x) = 1 \text{ ou } f(y) = 1\} \\
&= \{f \in X \mid f(x) = 1\} \cup \{f \in X \mid f(y) = 1\} \\
&= F_A(x) \cup F_A(y).
\end{aligned}$$

de même pour $F_A(x \wedge_R y) = F_A(x) \cap F_A(y)$

b)[16] $G_\delta : \delta \longrightarrow T(L(\delta))$ définie par

$$G_\delta(x)(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Y; \\ 0 & \text{si } x \notin Y. \end{cases} \quad \text{pour tout } Y \in L(\delta) \text{ est un isomorphisme d'espaces}$$

floos de Priestley (i.e bijection continue et croissante).

Il reste a démontrer que G_δ est croissant, il suffit de montrer que $\mu_{R_2}(G_\delta(x), G_\delta(y)) \geq$

$$\mu_R(x, y).$$

Si $x \neq y$ il ya deux possibilités : (i) $\mu_R(x, y) = 0$ donc on a $\mu_{R_2}(G_\delta(x), G_\delta(y)) \geq$

$$\mu_R(x, y)$$

(ii) $\mu_R(x, y) > 0$ on obtient que y est un τ -of de x donc $Z_0 \subset Z_1$ et on a

$$\mu_{R_2}(G_\delta(x), G_\delta(y)) = \mu_{R_2}(\wedge_r Z_0, \wedge_r Z_1) = \mu_R(x, y)$$

(c) Si $f : A_1 \rightarrow A_2$ est un homomorphisme de treillis floos alors $T(f) : T(A_2) \rightarrow$

$T(A_1)$ défini par

$T(f)(g) = g \circ f$ est un homomorphisme des espaces de Priestley (i.e continue et application croissant)

Soit y un τ -of de $T(A_1) \implies y = F_{A_1}(a)$ tel que $a \in A_1$

$$\begin{aligned} T(f)^{-1}(F_{A_1}(a)) &= \{g \in T(A_2) / T(f)(g) \in F_{A_1}(a)\} \\ &= \{g \in T(A_2) / g \circ f(a) = 1\} \\ &= \{g \in T(A_2) / g(f(a)) = 1\} \\ &= F_{A_2}(f(a)) \text{ donc } T(f) \text{ est continue} \end{aligned}$$

On démontre que $T(f)$ est croissant

Soit g_1 et $g_2 \in T(A_2)$

$$\mu_{R_1}(g_1, g_2) = \begin{cases} \mu_R(\wedge_R g_2^{-1}(1), \wedge_R g_1^{-1}(1)) & \text{si } g_1^{-1}(1) \subset g_2^{-1}(1); \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

$$T(f)(g_1) = g_1 \circ f, \quad T(f)(g_2) = g_2 \circ f$$

$$\mu_{R_1}(T(f)(g_1), T(f)(g_2))$$

$$= \begin{cases} \mu_R(\wedge_R (g_2 \circ f)^{-1}(1), \wedge_R (g_1 \circ f)^{-1}(1)) & \text{si } (g_1 \circ f)^{-1}(1) \subset (g_2 \circ f)^{-1}(1); \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \mu_R(\wedge_R (g_2 \circ f)^{-1}(1), \wedge_R (g_1 \circ f)^{-1}(1)) &= \mu_R(\wedge_R (f^{-1} \circ g_2^{-1})(1), \wedge_R (f^{-1} \circ g_1^{-1})(1)) \\ &= \mu_R(\wedge_R (f^{-1}((g_2^{-1}(1)))) , \wedge_R (f^{-1}(g_1^{-1}(1)))) \end{aligned}$$

et $\mu_R(\wedge_R g_2^{-1}(1), \wedge_R g_1^{-1}(1)) \leq \mu_R(\wedge_R (f^{-1}((g_2^{-1}(1)))) , \wedge_R (f^{-1}(g_1^{-1}(1))))$ d'où

$$\mu_{R_1}(g_1, g_2) \leq \mu_{R_1}(T(f)(g_1), T(f)(g_2))$$

(d) Si $h : \delta_1 \rightarrow \delta_2$ est un homomorphisme d'espace flou de Priestley alors l'application :

$L(h) : L(\delta_2) \rightarrow L(\delta_1)$ définie par $L(h)(y) = h^{-1}(y)$ (3-2-1) pour tout

$y \in L(\delta_2)$ est un homomorphisme de treillis flou

(e) Supposons que f et h sont comme (c) et (d) et on démontre que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 \\ F_{A_1} \downarrow & & \downarrow F_{A_2} \quad (3-3-1) \text{ est commutatif} \\ L(T(A_1)) & \xrightarrow{L(T(f))} & A_2 \end{array}$$

Soit $a \in A_1$

$$(L(T(f)) \circ F_{A_1})(a) = L(T(f))(F_{A_1}(a)) \text{ et d'après (3-2-1)}$$

$$= T^{-1}(f)(F_{A_1}(a))$$

$$= \{g \in T(A_2) \mid T(f)(g) \in F_{A_1}(a)\}$$

$$= \{g \in T(A_2) \mid g \circ f \in F_{A_1}(a)\}$$

$$= \{g \in T(A_2) \mid g(f)(a) = 1\}$$

$$= F_{A_2}(f(a))$$

$$= (F_{A_2} \circ f)(a), \text{ donc le diagramme (3-3-1) est commutatif.}$$

On démontre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \delta_1 & \xrightarrow{h} & \delta_2 \\ G_{\delta_1} \downarrow & & \downarrow G_{\delta_2} \quad (3-3-2) \\ T(L(\delta_2)) & \xrightarrow{T(L(h))} & T(L(\delta_1)) \end{array}$$

Soit $f \in \delta_1$

$$(T(L(h)) \circ G_{\delta_1})(f) = T(L(h))(G_{\delta_1}(f))$$

$$= (G_{\delta_1}(f)) \circ L(h) \text{ car } T(f)(g) = g \circ f$$

On a

$$\begin{aligned} (T(L(h)) \circ G_{\delta_1})(f)(y) &= (G_{\delta_1}(f)) \circ L(h)(y) \\ &= (G_{\delta_1}(f))(h^{-1}(y)) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } f \in h^{-1}(y) \\ 0 & \text{si } f \notin h^{-1}(y) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } h(f) \in y \\ 0 & \text{si } h(f) \notin y \end{cases} \\ &= G_{\delta_2}(h(f))(y) \\ &= (G_{\delta_2} \circ h)(f)(y) \end{aligned}$$

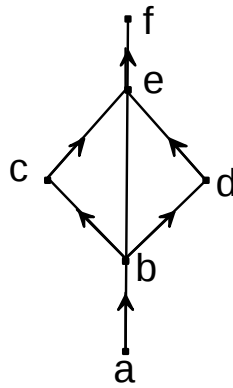
alors le diagramme (3-3-2) est commutatif.

Conclusion 3.1 *La catégorie des espaces flous finis de Priestley est équivalente à la catégorie des D -treillis flous finis.*

Exemple 3.3 *Soit $(A, \vee_R, \wedge_R, R)$ un F - D -treillis tel que :*

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ et R est une relation floue définie par

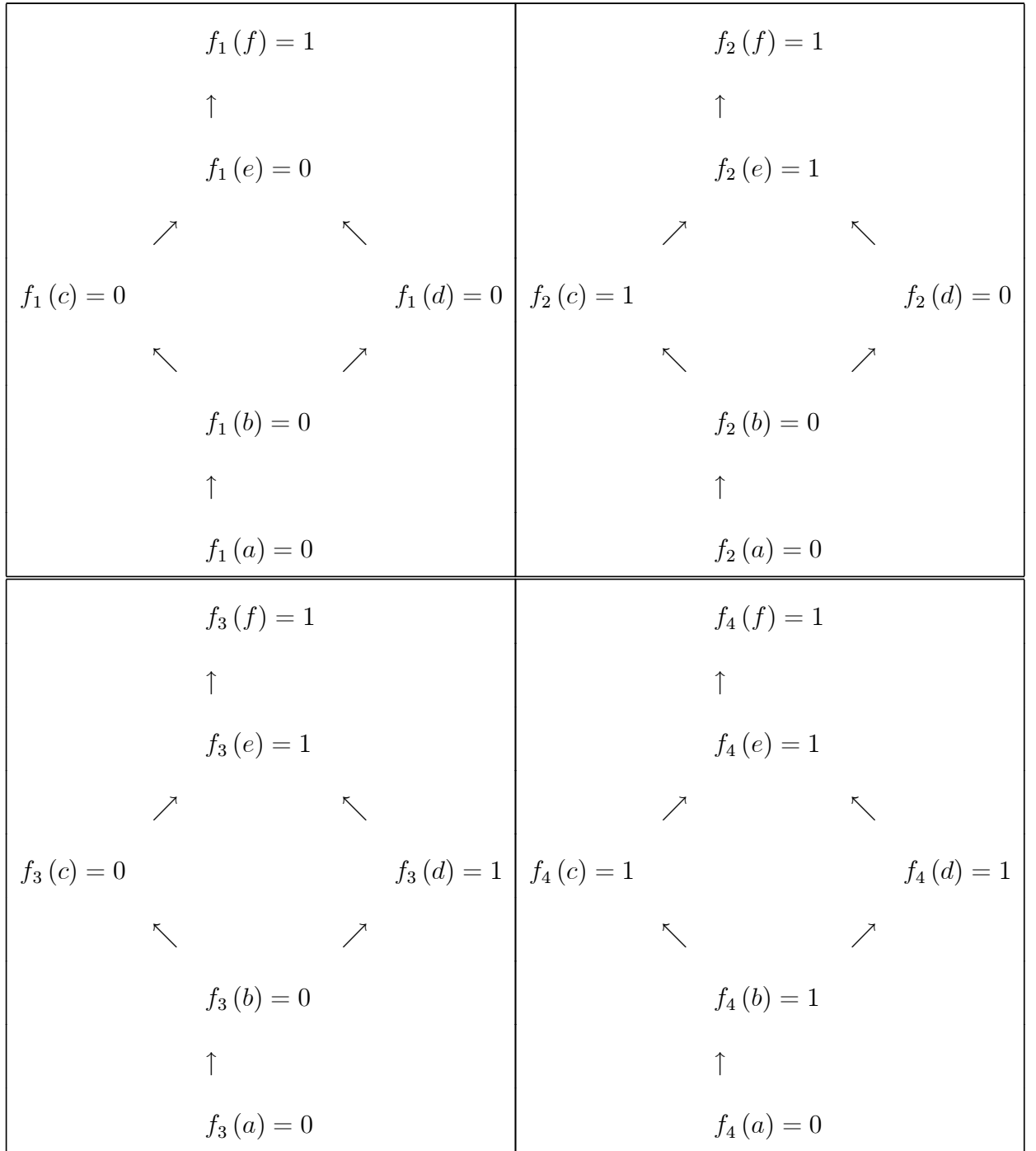
R	a	b	c	d	e	f
a	1	0.1	0.3	0.3	0.5	0.7
b	0	1	0.2	0.2	0.4	0.6
c	0	0	1	0	0.2	0.3
d	0	0	0	1	0.2	0.3
e	0	0	0	0	1	0.2
f	0	0	0	0	0	1



fig(3-1)

$$T(A) = \{0\text{-}1 \text{ homomorphismes de } A \text{ dans } \{0, 1\} \}$$

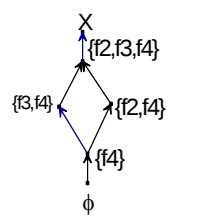
$$T(A) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \text{ tel que}$$



A	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
a	0	0	0	0
b	0	0	0	1
c	0	1	0	1
d	0	0	1	1
e	0	1	1	1
f	1	1	1	1

$$f_1^{-1}(1) = \{f\}, \; f_2^{-1}(1) = \{c, e, f\}, f_3^{-1}(1) = \{d, e, f\}, f_4^{-1}(1) = \{b, c, d, e, f\}.$$

μ_{R_1}	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	1	0.3	0.3	0.6
f_2	0	1	0	0.2
f_3	0	0	1	0.6
f_4	0	0	0	1



Fig(3-2)

$$L(T(A)) = \{\phi, \{f_4\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}, \{f_2, f_3, f_4\}, X\}$$

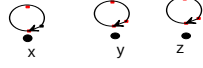
μ_{R_2}	ϕ	$\{f_4\}$	$\{f_2, f_4\}$	$\{f_3, f_4\}$	$\{f_2, f_3, f_4\}$	X
ϕ	1	0.1	0.3	0.3	0.5	0.7
$\{f_4\}$	0	1	0.2	0.2	0.4	0.7
$\{f_2, f_4\}$	0	0	1	0	0.2	0.6
$\{f_3, f_4\}$	0	0	0	1	0.2	0.3
$\{f_2, f_3, f_4\}$	0	0	0	0	1	0.3
X	0	0	0	0	0	1

$F_A : A \rightarrow L(T(A))$ définie par

A	$F_A(a_i)_{i=1,\dots,6}$
a	ϕ
b	$\{f_4\}$
c	$\{f_2, f_4\}$
d	$\{f_3, f_4\}$
e	$\{f_2, f_3, f_4\}$
f	X

Exemple 3.4 Soit (X, τ, r) un espace de Priestley avec $X = \{x, y, z\}$ et r définie par :

μ_r	x	y	z
x	1	0	0
y	0	1	0
z	0	0	1



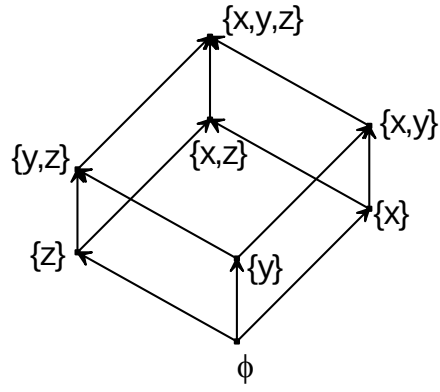
$fig(3-3)$

Donc $L(X) = \{\phi, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, X\}$ et r_1 définie par :

$$\mu_{r_1}(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = B; \\ 1 - \frac{\text{card}A}{\text{card}B} & \text{si } A \subset B; \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

donc r_1 donnée par la matrice

μ_{r_1}	ϕ	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{x, y\}$	$\{x, z\}$	$\{y, z\}$	X
ϕ	1	1	1	1	1	1	1	1
$\{x\}$	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$
$\{y\}$	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\{z\}$	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\{x, y\}$	0	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$
$\{x, z\}$	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$
$\{y, z\}$	0	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$
X	0	0	0	0	0	0	0	1



Fig(3-4)

et $T(L(X)) = \{0-1 \text{ homomorphismes de } L(X) \text{ dans } \{0,1\}\}$,

$$T(L(X)) = \{f_1, f_2, f_3\}$$

$L(X)$	$f_1(X_i)$	$f_2(X_i)$	$f_3(X_i)$
ϕ	0	0	0
$\{x\}$	1	0	0
$\{y\}$	0	1	0
$\{z\}$	0	0	1
$\{x,y\}$	1	1	0
$\{x,z\}$	1	0	1
$\{y,z\}$	0	1	1
X	1	1	1

$$f_1^{-1}(1) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, X\}, f_2^{-1}(1) = \{\{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}, X\}, f_3^{-1}(1) = \{\{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}, X\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \wedge_{r_1} A = \{x\} \Rightarrow \wedge_r \wedge_{r_1} A = x, & \wedge_{r_1} B = \{y\} \Rightarrow \wedge_r \wedge_{r_1} B = y, & \wedge_{r_1} C = \{z\} \Rightarrow \wedge_r \wedge_{r_1} C = z \\ A \in f_1^{-1}(1) & A \in f_1^{-1}(1) & B \in f_2^{-1}(1) & B \in f_2^{-1}(1) & C \in f_3^{-1}(1) & C \in f_3^{-1}(1) & C \in f_3^{-1}(1) \end{array}$$

et r_2 est donnée par

r_2	f_1	f_2	f_3
f_1	1	0	0
f_2	0	1	0
f_3	0	0	1

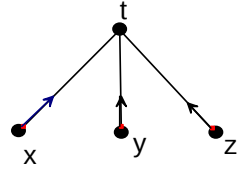
et l'isomorphisme G_x est défini par $G_x : X \rightarrow T(L(X))$ et donné par

X	$G_x(X_i), X_i \in X$
x	f_1
y	f_2
z	f_3

Exemple 3.5

Soit (X, τ, r) un espace de Priestley tel que $X = \{x, y, z, t\}$ et r est donnée par

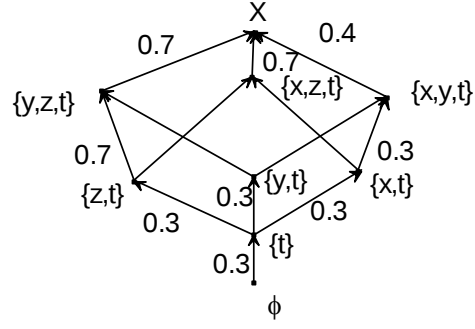
r	x	y	z	t
x	1	0	0	0.3
y	0	1	0	0.4
z	0	0	1	0.7
t	0	0	0	1



Fig(3-5)

et $L(X) = \{\phi, \{t\}, \{x, t\}, \{y, t\}, \{z, t\}, \{x, y, t\}, \{x, z, t\}, \{y, z, t\}, X\}$ et r_1 donnée par

r_1	ϕ	$\{t\}$	$\{x, t\}$	$\{y, t\}$	$\{z, t\}$	$\{x, y, t\}$	$\{x, z, t\}$	$\{y, z, t\}$	X
ϕ	1	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$\{t\}$	0	1	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$\{x, t\}$	0	0	1	0	0	0.3	0.3	0.3	0.3
$\{y, t\}$	0	0	0	1	0	0.4	0	0.4	0.4
$\{z, t\}$	0	0	0	0	1	0	0.7	0.7	0.7
$\{x, y, t\}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0.4
$\{x, z, t\}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0.7
$\{y, z, t\}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0.7
X	0	0	0	0	0	0	0	0	1



Fig(3 – 6)

et $T(L(X)) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ où

$L(X)$	$f_1(X_i)$	$f_2(X_i)$	$f_3(X_i)$	$f_4(X_i)$
ϕ	0	0	0	0
$\{t\}$	0	0	0	1
$\{x, t\}$	1	0	0	1
$\{y, t\}$	0	1	0	1
$\{z, t\}$	0	0	1	1
$\{x, y, t\}$	1	1	0	1
$\{x, z, t\}$	1	0	1	1
$\{y, z, t\}$	0	1	1	1
X	1	1	1	1

$$f_1^{-1}(1) = \{\{x, t\}, \{x, y, t\}, \{x, z, t\}, X\}, f_2^{-1}(1) = \{\{y, t\}, \{x, y, t\}, \{x, z, t\}, \{y, z, t\}, X\},$$

$$f_3^{-1}(1) = \{\{z, t\}, \{x, z, t\}, \{y, z, t\}, X\},$$

$$f_4^{-1}(1) = \{\{t\}, \{x, t\}, \{y, t\}, \{z, t\}, \{x, y, t\}, \{x, z, t\}, \{y, z, t\}, X\}$$

$$\begin{aligned} \bigwedge_{r_1} A = \{x, t\} &\implies \bigwedge_r \bigwedge_{r_1} A = \bigwedge_r \{x, t\} = x, & \bigwedge_{r_1} B = \{y, t\} &\implies \bigwedge_r \bigwedge_{r_1} B = \\ A \in f_1^{-1}(1) & & A \in f_1^{-1}(1) & & B \in f_2^{-1}(1) & & B \in f_2^{-1}(1) \\ \bigwedge_r \{y, t\} &= y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigwedge_{r_1} C = \{z, t\} &\implies \bigwedge_r \bigwedge_{r_1} C = \bigwedge_r \{z, t\} = z, & \bigwedge_{r_1} D = \{t\} &\implies \bigwedge_r \bigwedge_{r_1} D = \\ C \in f_3^{-1}(1) & & C \in f_3^{-1}(1) & & D \in f_4^{-1}(1) & & D \in f_4^{-1}(1) \\ \bigwedge_r \{t\} &= t \end{aligned}$$

μ_{r_2}	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	1	0	0	0.3
f_2	0	1	0	0.4
f_3	0	0	1	0.7
f_4	0	0	0	1

et l'isomorphisme G_x défini par

$G_x : X \rightarrow T(L(X))$ donné par

X	$G_x(X_i), X_i \in X$
x	f_1
y	f_2
z	f_3
t	f_4

Conclusion

Dans ce travail nous avons établi une dualité type Priestley pour les treillis distributifs flous dans le cas fini.

Et on a montré qu'on peut étendre d'une manière naturelle la dualité des treillis distributifs fermés au treillis distributif flous finis.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.AMROUNE, Priestley duality for finite fuzzy distributive lattices, soumis
- [2] I. Beg, A general theorem on selectors of fuzzy multifunctions, *J. Fuzzy Math.*, 9(1)(2001), 97-101.
- [3] I. Beg, Extension of fuzzy Zorn's lemma to nontransitive fuzzy relations, *J. Fuzzy Math.*, 10(3)(2002),681-685.
- [4] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, 3rd edition, Coll. Publication, XXV, American Mathematical Society, Providence, R. I, 1967.
- [5] B. M. Bouchon, *Logique floue*, CÉPADUÈS-ÉDITION,Toulouse-France1998
- [6] B. M. Bouchon, *La logique floue et ses applications*, Addison Wesley France, 1995.
- [7] J. C. CARREGA, D. PONASSE, *Algèbre boolienne et logique algébrique*, université de Lyon I
- [8] B. A. Davey, H.A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, Cambridge University Press, Cambridge, NEW YORK 1990.
- [9] B. DUSHNIK et E. W. Miller, partially ordered sets. *Amer. J. math.*, **63**,1941, p. 600-610

- [10] A. Filipiou, Representation of Łukasiewicz algebras by means of ordered stone spaces, *Discrete Mathematics* 30(1980), 111-116
- [11] L. Gacogne, *Éléments de logique floue* Hermes, Paris, 1997.
- [12] J. Godjevac, *Idées nettes sur la logique floue*, EPFL-Centre Midi, Suisse 1999
- [13] A. Kaufmann, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous à l'usage des ingénieurs*, Masson, 1973-1975
- [14] N. Permingeat et D. Glaudei, *Algèbre de Boole Théorie, Méthodes de Calcul, Applications*, Masson, 1991.
- [15] H. A. PRIESTLEY, Representation of distributive lattices by Means of ordered stone spaces, *Bull London Math. soc.*2 (1970) 186-190.
- [16] H. A. PRIESTLEY, Ordered set and duality for distributive lattices , *Ann. Discrete Math.* 23(1984), 39-60
- [17] J. Raphaël Tong-Tong, *la logique floue*, Hermès Paris, 1995
- [18] P.Venugopalan, fuzzy ordered sets, *Fuzzy Sets and Systems* 46 (1992) 221-226
- [19] L.A.Zadeh, fuzzy sets, *Inform. and control.*, 8(1965), 338-353.
- [20] L.A.Zadeh, Similarity relation and fuzzy ordering *Inform. Sci.*, 1971, 177-200.

ملخص المذكرة باللغة العربية

في هذه المذكرة نتناول ثنوية بریتسلي بالنسبة للشبكات الضبابية وفراغات بریتسلي الضبابية وقد تناولنا بعض الخواص المتعلقة بالعلاقات الضبابية والعمليتين الداخليتين ٨، ٧ خصوصا العملية التجميعية التي لا تكون دوما صحيحة في المجموعات المرتبة ترتيبا ضبابيا (foset) بينما تكون صحيحة في الشبكات الضبابية (treillis flous) ثم تطرقنا إلى تمثيل الشبكات الضبابية المنتهية وفراغات بریتسلي الضبابية.

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à la dualité de PRIESTLEY pour les treillis flous distributifs fermés et fini (un treillis est un ensemble ordonné dans le quel chaque partie finie admet un sup. et un inf) quant l'ordre en question est flou le treillis est dit treillis flou.

En particulier au chapitre 2 on a introduit la notion d'ordre flou ou parmi plusieurs approches on a opté pour celui de Zedah parce qu'il utilise la norme triangulaire la plus forte.

Dans le chapitre 3 on a réussi à donner une dualité type PRIESTLEY pour les treillis flous distributifs fermés et fini. Enfin on a montré que la catégorie des treillis flous distributifs fermés et fini est isomorphe à la catégorie duale des espaces de PRIESTLEY finis.

Abstract

In this study, we give some fuzzy versions of the Priestley representation theorems of distributifs lattices [15] in the finite case.

We use the definition of fuzzy order due to L. A. ZADEH [19]

Key words. Fuzzy order relation, Fuzzy ordered sets, Fuzzy lattices, Fuzzy Priestley spaces.