$\upuparrows$

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF-M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Option : :Analyse Mathématiques et Numèrique

Par

Salmi Magdouda

THÈME

Sur l'équation de Korteweg-De Vries

Devant le jury composé de :

1)**Mr.Nadir Mostefa Prof. Univ de M'sila Président**

2)**Mr.Abdelkader Gasmi Prof. Univ de M'sila Encadreur**

3)Mr.Bachir Gagui MA/A. Univ de M'sila Examinateur

Dirigé par :
Mr. Abdelkader Gasmi

Année: **2021/2022**

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

Je tiens à remercier sincèrement **Mr.Abdelkader Gasmi**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour les efforts qu'il a consenti tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à tous les membres de jury **Mr,Nadir Mostefa et Mr,Bachir Gagui** qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail : A mes parents

♡Ma bougie de ma vie ma mère et à mon père.

♡ A ma grand-mère, dont j'ai pleuré la perte.

♡A mes Frères et mes Soeurs, à qui je souhaite beacoup de réussite dans leurs vies.

♡A toute ma grande famille .

♡A tous mes amis qui ont une place spéciale dans ma vie et à qui je souhaite beaucoup de bonheur et de réussite.

♡A tous ceux ou celles qui me sont chers et que jai omis involontairement.

♡A tous mes enseignants toute au long de mes études.

♡A tous ceux qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail.

Résumé:

Dans ce mémoire de master on s'intéresse à un problème nonlinéaire à frontière d'un écoulement d'un fluide incompressible et non visqueux, dont on presente quelques propriétés des fluides et e p arle sur les deux discriptions qui decrivent les mouvements des fluides. Ainsi on présente une formulation de ce problème par l'équation de e Korteweg-De Vries(KDV) qui done un modèle mathématiques de ce type des problèmes des vagues pour les écoulements à petit profondeur.

Mots clés :

Masse du fluide , Volume du fluide , Masse volumique , Volume , Densité.

Notations

M **:** masse du fluide (kg).

V: volume du fluide (m^3).

ρ : masse volumique (kg/m^3).

ϖ : Poids volumique (N/m^3).ϖ : Poids volumique en ($N\backslash m^3$)

m : masse en (kg)

g : accélération de la pesanteur en ($m\backslash s^2$)

V : volum en (m^3)

v : Volume massique(m^3/kg).

d : densité.

μ : La viscosité dynamique(kg/ms)

Table des matières

Introduction

t

L'équation KdV est un mdéle mathématiques important avec de nombreuses applications. Les exemples typiques sont largement utilisés dans divers domaines tephls que la physique de l'état solide, la physique des plasmas, la physique des fluides, la théorie des champs quantiques, la mécaniquequantique et l'optique non linéaire.

Le présente mémoire comporte trois chapitres.

Aprés cette introduction on présente dans le premier chapitre, on rappelé les notions de base et apporté des définitions concernant ce type des équations. Des exemples des EDPs on été formulés en utilisant des principes physiques. Ensuite, on explique la méthode de caractéristique et on l'applique sur les équations aux dérivées partielles et en particulier les EDPs order un et deux dans $\mathbb{R}^2$.

On présente dans le second chapitre les notions fondamontale de la mécanique des fluides, tellque on traite propriétés des fluides, étude l'etat des fluides, les types des écoulements et quelque equations de la mécanique des fluides (Bernoulli, continuité,...etc).

Dans le dernier chapitre du memoire nous présentons briévement les principes fondamentaux de la théorie des ondes solitaires et la famille des équation KdV.

Enfin on termine ce travail par une conclusion génerale.

Chapitre 1

Quelques notions préliminaires sur les équations aux dérivées partielles

1.1 Introduction

Pour étudier des phénomènes physique naturels où industriels, on utilise les lois de la physique : mécanique, électromagnétisme, acoustique, thermodynamique, quantique, relativité, etc.

Cette étude est généralement transformée en modélisation mathématique à l'aide d'équations aux dérivées ordinaires ou partielles. Dans ce chapitre on va présenter quelques notions et concepts de base sur ce types des équations.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *(Dérivée partielle) La dérivée partielle d'un fonction u à plusieurs variables $x_1, x_2, ..., x_n$ par rapport à l"une de ces variables x_i est la dérivée de la fonction d'une seule variable réelle*

$x_i \to f(x_1, x_2, .., x_i, .., x_n)$ où $x_j, j = i$ sont considérées comme des variables constantes.

Cette dérivées est notées généralement par l'un de ces notations:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \ , \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ , \ \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \ , \ \partial_x f(x,y)$$

Définition 1.1.2 *(Equations aux dérivées partielles) Une équation aux dérivées partielles (EDP) pour une fonction u est une relation entre u, les variables indépendantes* $(x, y) \in \mathbb{R}$

Définition 1.1.3 *Une équation aux dérivée partielle du premier ordre d'inconnue u de n variables indépendantes* $x_1, ..., x_n$ *est une équation de la forme*

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ...\right) \tag{1.1}$$

Définition 1.1.4 *Une équation aux dérivée partielle du second order dans un domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *et d'inconnue :*

$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$

est une équation de forme générale:

$$F(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \tag{1.2}$$

1.1.2 Dimension et ordre d'une EDP:

- La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendants de a fonction inconnue u.

- Une équation aux dérivées partielles a un ordre qui est la dérivée de plus haut degré présente dans l'équation.

1.1.3 Linéarité et homogénéité

Une équation aux dérivée partielle est dite linéaires, par rapport à la fonction u et ses dérivées partielles si elle peut s'écrit sous la forme suivante:

$$L(u) = f \quad , \tag{1.3}$$

où

L est un opérateur différentiel linéaire et f est une fonction de n variables indépendantes de $\mathbb{R}^n$.

On dit que ll'équation est linéaire homogène si $f \equiv 0$, sinon elle est non-homogène.

1.2 Quelques équations de la physique mathématique

Equation de transport:

Cette équation est souvementt utiliser pour modéliser es phénomènes de la polution de l'air ou les taches et elle est présentée par la formule suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.4}$$

Equation de burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.5}$$

Cette équation est utilisée pour modéliser la dynamique des gaz et parfois même le trafic routier.

Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{1.6}$$

Cette équation modelise des phénomènes instationnaire(de propagation), évoluant avec le temps, comme celle du vague de surface, du son et de la lumier.

Equation de chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Cette équation dite aussi d'évolution car elle modelise en général un phénomène instationnaire.

Equation de Laplace ou du potentiel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.8}$$

On le voit notamment dans:l'astronomie, l'électricité statique,la mécanique des fluides et mécanique quantique.

1.3 EDPs du premier ordre

1.3.1 .EDPs quasi linéaire du premier ordre

On appelle équation aux dérivées partielles quasi linéaire du premier ordre, d'inconnue u ,une équation de la forme:

$$a_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + a_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x_1,...,x_n,u) \tag{1.9}$$

$(x_1, ..., x_n)$ appartient à un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, les coefficients $a_1, ..., a_n$, et le seconde membre f sont des fonctions données.

- En dimension deux, l'équation devient ainsi:

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \tag{1.10}$$

$(x, y) \in \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, les fonctions a, b, c données

1.3.2 La méthode des caractéristique

solution générale

Une solution u de (1.10) peut etre vue comme une fonction associant à un point (x, y) du plan une altitude $z = u(x, y)$,et etre interprétée comme une surface de $\mathbb{R}^3$,on choisit alors de rechrcher les solutions de(1.10) sous forme implicite,i.e.des fonctions φ définissant implicitement solution de (1.10)

$$\varphi(x, y, z) = Cons\tan t \Longleftrightarrow z = u(x, y)$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites,en tout point où $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$,on trouve:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \tag{1.11}$$

u est alors solution de (1.10) si :

$$a(x, y, u(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b(x, y, u(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial y} + c(x, y, u(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{1.12}$$

φ est donc une intégrale premiere du système

$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{dz}{c(x,y,u)} \tag{1.13}$$

Le système (1.13) est appelé système caractéristique de(1.10)

1.3.3 Courbes caractéristiques

a, b, c étant trois fonctions supposées de classe C^1 dans ouvert de $\mathbb{R}^3$,on appelle courbes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du premier order (1.10)

les solutions de son systéme caractéristique

$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{dz}{c(x,y,u)} \tag{1.14}$$

cas de n dimensions:

on appelle courbes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du premier order (), les solutions de son systéme caractéristique

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,...,x_n,u)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1,...,x_n,u} = ... = \frac{dx_n}{a_n(x_1,...,x_n,u)} = \frac{du}{f(x_1,...,x_n,u)} \tag{1.15}$$

1.3.4 Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy sur la courbe(C), est un problème constitué de l'équation

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u) \tag{1.16}$$

dont on cherche une solution vérifiant

$$u(x,y) = g(x,y) \text{ sur } (C)$$

g une fonction analytique sur C.

1.4 Equations aux dérivées partielles du second ordre

1.4.1 Classification des équations

une équation de la forme:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{1.17}$$

où a,b,c sont des fonctions données, et F une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$

Soit $\triangle(x,y)=b^2(x,y)-4a(x,y)c(x,y)$,

on a les cas suivants:

1. On appelle une équation est une équation hyperbolique si: $\triangle(x,y)>0$
2. On appelle une équation est une équation parabolique si :$\triangle(x,y)=0$
3. On appelle une équation est une équation elliptique si:$\triangle(x,y)<0$

1.4.2 Changement de variables

Supposons que nous modifions les variables$(\xi(x,y),\eta(x,y))$, et pour que le jacobia ne disparaisse pas, il faut qu'il soit dérivable deux fois en continu, alors il existe fes fonctions a',b',c' et F' telles que

$$a'(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b'(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+c'(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F'\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{1.18}$$

On dit que quand l'équation (1.9) est que c'est la forme standard ou canonique de l'équation(1.8), de plus on a

$$\triangle'(\xi,\eta) = b'^2(\xi,\eta) - 4a'(\xi,\eta)c'(\xi,\eta) = J^2\triangle(x,y)$$

Form standard ou canonique

Définition 1.4.1 *Une caractéristique de l'équation (1.8) est la courbe satisfait à l'équation différentielle*

$$a\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0 \tag{1.19}$$

Et maintenant, on étudie un cas indépendamment en donnant la forme correspondante.

Cas hyperbolique On appelle une équation est une équation hyperbolique si:$b^2-4ac > 0$, alors l'équation (1.10) admet deux solutions séparées, et nous en concluons qu'il exist deux courbes

caractéristiques réelles des équations $\psi_1(x,y) = c_1$ et $\psi_2(x,y) = c_2$ pour l'équation (1.10)

Les équation des courbes caractéristiques sont données par

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En posant $\xi = \psi_1(x,y)$ et $\eta = \psi_2(x,y)$, la forme canonique de $(1.8)_h$s'écrit :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = G(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial\xi},\frac{\partial v}{\partial\eta})$$

cas parabolique On appelle une équation est une équation barabolique si:$b^2 - 4ac = 0$, alors alors l'équation (1.10) admet deux solutions confondues, et nous en concluons qu'il exist deux courbes caractéristiques réelles des équations $\psi_1(x, y) = c_1$ pour l'équation (1.10)

Les équation des courbes caractéristiques sont données par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}$$

En posant

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi_1(x, y) \\ \eta &= \varphi_2(x, y) \end{aligned}$$

où φ_2 satisfait $J(\xi, \eta) \neq 0$, la forme canonique de $(1.8)_p$ s'écrit

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = G(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta})$$

cas elliptique On appelle une équation est une équation elliptique si:$b^2 - 4ac < 0$,alors alors l'équation (1.10) admet deux solutions complexes, et nous en concluons qu'il exist deux courbes caractéristiques sont définies à parties réelle et imaginaire des solutions.

Soit φ une solution de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La forme canonique de $(1.8)_e$s'écrit

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = G(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta})$$

et (ξ, η) sont données par

$$\begin{cases} \xi = \operatorname{Re}\varphi \\ \xi = \operatorname{Re}\varphi \end{cases}$$

1.4.3 Probléme de Cauchy

Le problème de Cauchy sur la courbe(C), est un problème qui consiste à résoudre l'équation suivant:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{1.20}$$

qui vérifie

$$u(x,y) = g(x,y) \text{ sur } (C)$$

et

$$\frac{du}{dn}(x,y) = h(x,y) \text{ sur } (C)$$

1.5 Méthode de séparation des variables

Situation du problème

$$\begin{cases} a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(t)\frac{\partial u}{\partial t} + (a_3(x) + b_3(t))u(x,t) = F(x,t), (\ x,t) \in I \times J \\ u(x,0) = h(x), x \in I = [a,b] : \text{Condition initiale} \\ \text{Condition aux limites} \end{cases} \tag{1.21}$$

Condition aux limites

Condition de Dirichlet u est fixé sur I

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

Condition de Neumann La dérivée normale de u est fixé sur I

$$u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$$

Condition de Robin ou mixtes

$$c_1(x)u(a,t) + c_2(x)u_x(b,t) = 0$$

Condition périodiques

$$u(a,t) = u(b,t) \text{ et } u_x(a,t) = u_x(b,t)$$

Les étapes suivantes sont nécessaires:

1. Soit $u(x,t) = X(x)T(t)$ la forme spéciale des solution discrètes de l'équation (1.21), où $X(t)$ et $Y(t)$ deux fonctions qui ont au moins des dérivées premières et secondes continues.

2. On résout l'équation en $X(x)$ avec condition aux limites correspondantes, Il faut alors obtenir une suite innie de couples de solutions $X_n(x)\lambda_n$, dites valeurs et fonctions propres de problème.

3. On résout l'équation en $T(t)$ pour les valeurs λ_n trouvées, ce qui nous donne une suite de solution $T_n(t)$ étant défini à un certain nombre de constante prés(qui dépend de l'ordre de l'équation en $T(t)$.

4. On écrit la solution générale de l'équation sous la forme $u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n(x)T_n(t)$

1.6 Quelques opérateurs

1.6.1 Opérateurs gradient

Elle est notée grad ou ∇, qui relie la fonction f au vecteur de toutes ses dérivées partielles. Par exemple si $f(x,y,z)$, alors:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

1.6.2 Opérateurs divergence

Il est noté div ou $\nabla.$,qui relie le vecteur u à la somme des dérivées partielles de ses composantes. Par exemple si nous écrivons

$$u = (a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z)),$$

alors:

$$\operatorname{div} u = \nabla.u = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

1.6.3 Opérateurs laplacien

L'opérateur laplacien est un opérateur différentiel du second ordre qui convertit un champ scalaire en un autre champ scalaire, et est souvent appliqué aux champs scalaires .

$$\triangle f(x,y,z) = \nabla.\nabla f = \frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} + \frac{\partial f^2}{\partial z^2},$$

1.6.4 La irrotationnel

$$rot\ \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ \\ v \\ \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Chapitre 2

Equation de la mecanique des fluides

2.1 Les fluides

Une fluide est un crops matériel non solide et déformable, l'une de ses principales caractéristiques est qu'il subit des changements de forme importants sous l'influence de forces sont faibles ,plus les forces extérieures, et plus les forces sont faibles, plus les changements de forme sont lents.

2.1.1 Les états de la matiére

Les trois étas de la matiére:

Etat solid:

dans un solid, les particules sont rigidement liées les unes aux autres, contrairement à un fluid.

Etat liquide:

Dans cet état, la matiére n'a pas a une forme propre, elle a un volume propre, on ne peut pas changer son volum, elle est incompressible.

Etat gazeux:

La matiére à l'état gazeux n'a pas de forme propre,elle occupe tout le corps disponible comme un ballon, et le corps dans ce cas est étirable et donc compressible, car son volume peut changer.

2.2

priétés des fluides

Tous les fluides possèdenttdes caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

2.2.1 Masse volumique

C'est la quantité de substance contenue dans une unité de volum, désignée par le symboleρ, et est calculée par la relation suivante:

2.2.2

$$\rho = \frac{Masse}{Vol\,\mathrm{m}} = \frac{M}{V}$$

M : masse du fluide (kg)

V : volume du fluide (m^3)

ρ : masse volumique ($\mathrm{kg/m}^3$)

2.2.3 Densité relative:

Le rapport de densité d'une substance est la mass par unité de volume de cette substance, et est noté d,et est calculé par la relation suivants:

$$d = \frac{\text{mass volumique du fluide}}{\text{mass volumique d'un fluide de réference}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

2.2.4 Poids volumique:

Le poids d'une unité de volume, c'est-à-dire la force gravitationnelle exercée par la terre sur une unité de volume, et est noté ϖ, et est calculé par relation suivante:

$\varpi = \frac{W}{V} \frac{poids}{volume} \left[\frac{N}{m^3}\right]$

Sachant que: $w = m.g = \rho V g$

Il vient:

$$\varpi = \frac{W}{V} = \frac{m.g}{V} = \frac{\rho V g}{V} = \rho g$$

ϖ : Poids volumique en (N\m^3)

m : masse en (kg)

g : accélération de la pesanteur en (m\s^2)

V : volum en (m^3)

2.2.5 Viscosité

C'est une mesure du frottement interne qui fait qu'un fluide résiste à l'écoulement lorsque'il est soumis à l'application d'une force, c'est-à-dire que les fluides à haute viscosité résistent à l'écoulement et que les fluides à faible viscosité s'écoulent facilement, est on écrit alors:

$$\tau = \mu \frac{d\mu}{dy}$$

Le facteur de proportionnalité$\ll \mu \gg$ est appelé le coefficient de viscosité dynamique.

Dans le système SI, la viscosité dynamique, μ,a pour unité: $[kg/ms]$

Viscosité dynamique $v = \frac{u}{\rho}$ a pour l'unité: $[m^2/s]$.

ρ : masse volumique (kg/m^3).

μ : viscosité dynamique (kg/ms).

2.3 Classifacationb des écoulement des fluides

Les flux sont toujours présents dans nos vies,la circulation de l'oxygéne dans notre corps est une exemple de l'importance du flux dans nos vies, et il existe de nombreux exemple de flux tels que tsunamis, les ouragans et les volcans, mais parfois ils présentent des dangers pour l'humanité.

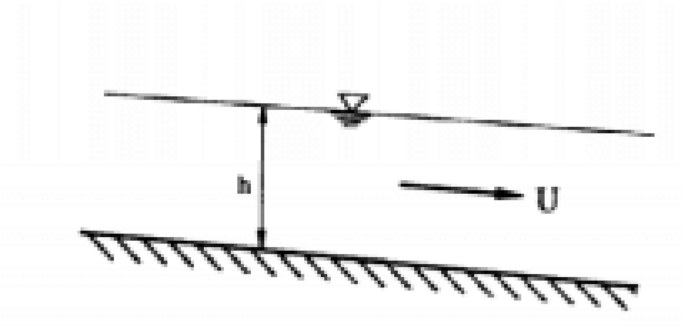
Il existe de nombreux critéres qui distinguent les flux fluides autres que les flux visqueux, et non visquex, et compressibles et non compressibles.

2.3.1 Ecoulement uniforme:

Les écoulements sont uniformes s'ils ont une vitesse constante.

2.3.2 Ecoulement permanent:

On dit d'un écoulement qu'il est constant et toujours, si les composants de sa vitesse sont indépendantes de la variable de temps.



igure 1.1: Représentation de la vitesse dans

un ecoulement permanent

2.3.3 Ecoulement incompressible:

un fluid est dit que incompressible lorsque son volume reste approximativement constant lors d'un mouvement sous l'influence d'une pression extérieure.

$$\nabla \overrightarrow{u} = 0$$

2.3.4 Ecoulement irrotationnel:

On dit que l'écoulement est irrotationnel si:

$$rot\ \overrightarrow{v} = 0$$

(v la vitesse d'écoulement)

2.3.5 Ecoulement parfait:

un liquide est dit parfait si on peut décrire son mouvement sans tenir compte des effets de la viscosité.

2.3.6 La viscosité:

La viscosité est définie comme la résistance du fluide au mouvement et à la déformation,et la viscosité détermine la vitesse du mouvement, plus le fluide est visqueux,plus le fluide est visqueux, plus mouvement est lent.

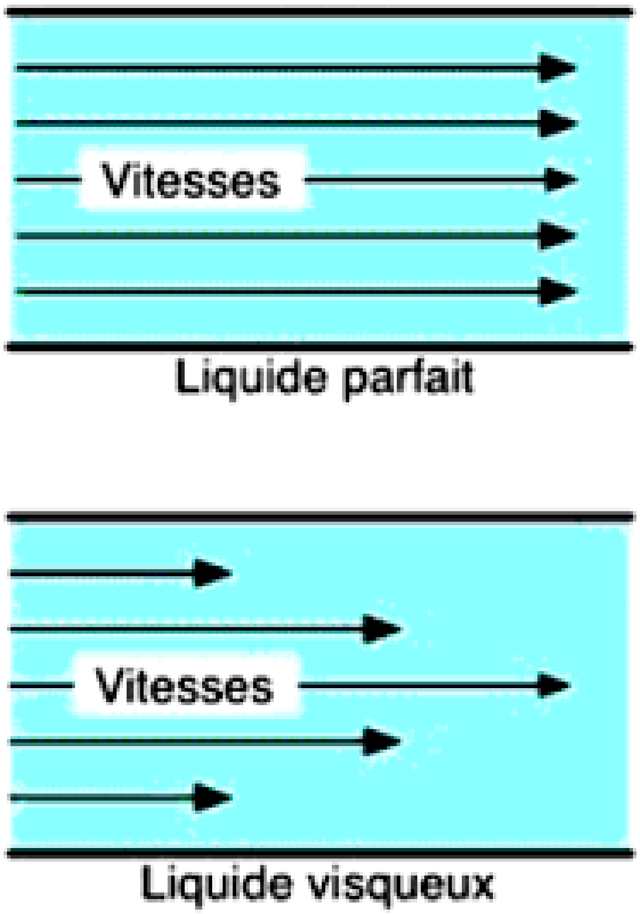


Figure 1.2: Représentation de la vitesse dans

un ecoulement parfait et visque

2.3.7 Ecoulement potentiel:

On dit que une écoulement est potentiel si sa vecteur vitesse est dirivé d'un potentiel-à-dire:

$$\begin{array}{rcl} \exists\varnothing & : & \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varnothing = \overrightarrow{V} = u\,\overrightarrow{i} + v\,\overrightarrow{j} \\ v & = & \nabla\varnothing \\ u & = & \dfrac{\partial\varnothing}{\partial x}, v = \dfrac{\partial\varnothing}{\partial y} \end{array}$$

2.3.8 Potentiel complexe:

L'écoulement planaire conservatif et irrationnel peut etre décrit par la fonction complexe $f(z)$, il a une partie réelle correspondant au potentiel de vitesse $\varnothing(x, y)$, et il aussi une partie imaginaire correspondant à la fonction courante $\Psi(x, y)$ on defini ainsi:

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy \\
f(z) &= \varnothing + i\Psi
\end{aligned}
$$

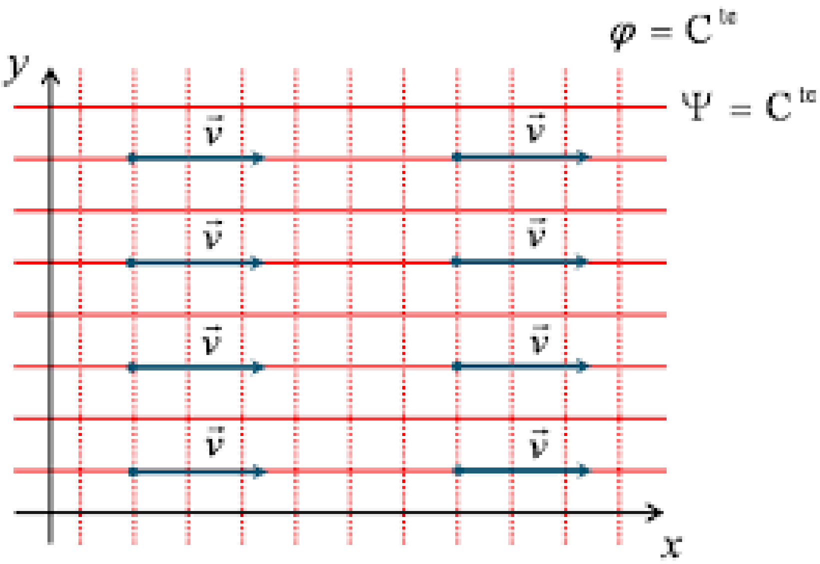


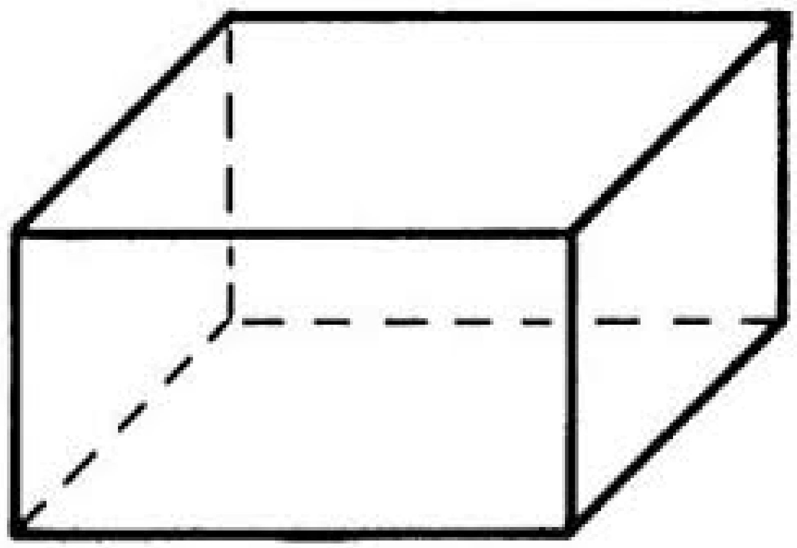
Figure 1.1: Représentation de la vitesse dans

un ecoulement Potentiel complexe:

2.4 Quelque équations de la mécaniques des fluides

2.4.1 Equation de la continuite:

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse selon lequel l'augmentation de masse pendant une certaine période t d'un élément du volume du fluide $d = dx\ dy\ dz$ doit etre égale à la somme des masses du fluide y pénétrant,diminuée de la masse du fluide sortant fluide ou liquide. On considère alors un élément de volume liquide $d\Omega$



$d\Omega = dx\ dy\ dz$

2.4.2 Equation d'Euler

On écrit l'équation d'Euler en considérant un fluide parfait (non visqueux):

$$\rho\left(\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} + (\overrightarrow{V}.\nabla)\overrightarrow{V}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P + \overrightarrow{F}_{champ}$$

2.4.3 Equation de Bernoulli

L'équation de bernoulli peut etre considérée comme un énoncé du principe de conservation de l'ènergie pour l'écoulement d'un fluide, et lorsqu'un fluide se déplace d'un point à un autre, il est affecté par un action spécifique pour lui, et cela est égal au changement d'énergie mécanique, et dans le cas d'un fluide visqeuex et incompressible, on obtient la relation suivante:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \triangle p_{1,2}$$

où P_i est la pression aux points A_i où $i = 1, 2$.Si le fluide non visqueux dans ce cas $\triangle pi$, l'équation de bernoulli se réduit à:

$$p\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = const$$

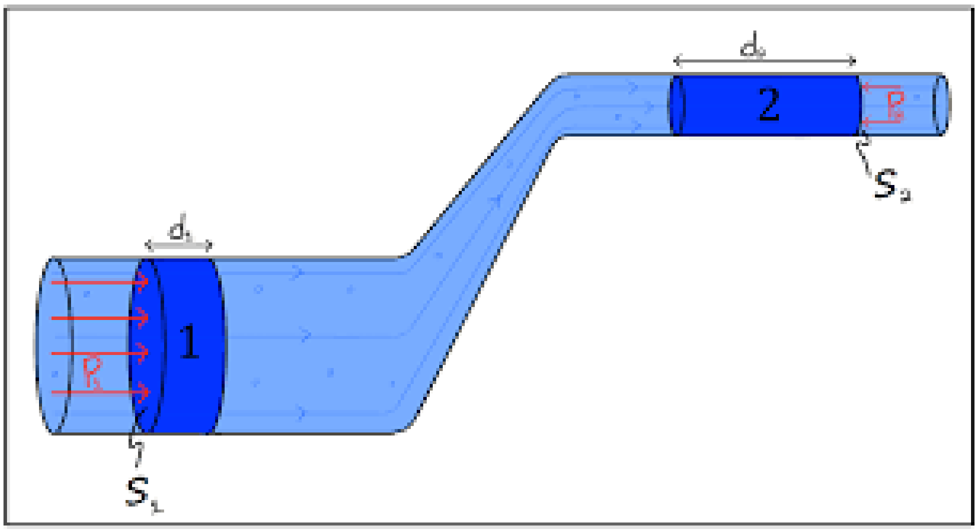


Figure : théoréme de bernoulli

Chapitre 3

Sur l'équation de Korteweg-De Vries

3.1 Définition:

L'équation KdV est une équation aux dérivées partielles non linéaire et dispersive pour une fonction de deux variables réelles sans dimension, x et t, qui sont respectivement proportionnelles à l'espace et au temps.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.1}$$

où ∂x et ∂t représentent les dérivées partielles par rapport à x et t.

3.2 Solution d'ondes progressives

Nous cherchons une solution d'onde progressive droite de la forme:

$$u(\xi) = u(x - ct)$$

Le substituer dans l'équation KdV donne l'équation différentielle ordinaire

$$u_{\xi\xi\xi} + 6\,\mathrm{u}u_{\xi} - cu_{\xi} = 0$$

Une intégration par rapport à ξ donne

$$u_{\xi\xi} = -3u^2 + cu + c_1$$

où c_1 est une constante d'intégration. Depuis $u \longrightarrow 0$, $u_{\xi} \longrightarrow 0$ et $u_{\xi\xi} \longrightarrow 0$ comme $\xi \longrightarrow +\infty$, $c_1 = 0$. A second integration yields

$$\frac{1}{2}u_{\xi}^2 = -u^3 + \frac{1}{2}cu^2 + c_2.$$

où $c_2 = const = 0$. C'est-à-dire que la derniére équation peut s'écrire

$$d\xi = \frac{du}{u\sqrt{c-2u}},$$

qui peut être intégré, ce qui donne

$$u(\xi) = \frac{c}{2}\sec h^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}(\xi - \xi_0)\right),$$

où ξ_0 est un constant arbitraire. En coordonnées (x,t) la solution d'onde progressive se lit u

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\sec h^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - x_0 - ct)\right), \tag{3.2}$$

L'équation décrit une solution d'une onde progressive locale d'amplitude négative, appelée soliton, qui est une onde unique qui se propage sans distorsion dans un milieu non linéaire et dispersé.

3.3 Traitement numérique

Considérez l'équation KdV (3.1) sur l'intervalle $x \in [-\pi, \pi]$ avec la condition initiale sous forme de superposition de deux solitons de vitesses c_1 et c_2.

$$u(x,0) = \frac{c1}{2} \sec h^2 \left(\frac{c_1(x+2)}{2} \right) + \frac{c_2^2}{2} \sec h^2 \left(\frac{c_2(x+1)}{2} \right),$$

Selon les condtions aux frontières périodiques. On observe que l'équation (3.1) se traduit par la rigidité du terme u_{xxx} et apparaît comme une oscillation linéaire rapide des motifs à nombre d'onde élevé, ce qui rend l'équation rigid. Pour cela, nous créons la solution numérique àl'équivalent en utilisant la méthode d'intégration. L'équation KdV est réécrite comme

$$u_t + 3(u)_x^2 + u_{xxx} = 0,$$

Et en utilisant la transformée de fourier

$$\hat{u}_t + 3ik\mathcal{F}\left[u^2\right] - ik^3\hat{u} = 0.$$

Maintenant, nous avons frappé le facteur d'intégration e^{-ik^3t} et nous obtenons

$$e^{-ik^3t}\hat{u}_t + 3ike^{e^{-ik^3t}t}\mathcal{F}\left[u^2\right] - ik^3e^{-ik^3t}\hat{u} = 0.$$

Nous utilisons le changement de variable suivant

$$\text{Œ}= e^{-ik^3t}\hat{u}.$$

La dernière relation est équivalent à

$$U_T + ik^3U + 3ike^{k^3t}\ \mathcal{F}\left[u^2\right] - ik^3U = 0$$

i.e.,

$$U_T + 3ike^{k^3t}\ \mathcal{F}\left[u^2\right] = 0$$

En nous en concluons que dans l'espace de fourier, nous pouvons réécrire l'équation KdV (3.1) comme suit

$$U_T + 3ike^{k^3t}\ \mathcal{F}\left[(\mathcal{F}^{-1}(e^{ik^3t}U))^2\right] = 0$$

3.4 Certains types de solutions à ondes progressives

3.4.1 Ondes solitaires et solitons

Les ondes solitaires sont des ondes de déplacement localisées qui se propagent à des vitesses et des formes constantes, et se des ondes gravitationnelles qui maintiennent la cohérence. Les solitons sont un type particulier d'ondes solitaires.

3.4.2 Ondes périodiques

Les ondes périodiques sont des ondes d'indroduction dans lesquelles le mouvement de la source est périodique, se répétant après un temps t .

L'onde standard $u_{tt} = u_{xx}$ offre des solutions périodiques.

3.4.3 Kinks

Les kinks sont des ondes solitaires qui montent ou descendent d'un état asymptotique à un autre.

L'équation de Burgers standard $u_t + \mathrm{u}u_x = \rho u_{xx}$, est un équation bien connue qui donne des solutions de kinks.

3.4.4 Peakons

Les peakons sont des longueurs d'onde individuelles avec des pointes, les solutions de l'onde progressive sont une série à l'excption d'un point sur l'un des coins de ses peakons, et les peakons sont les points auxquels les dérivées spatiales changent.

Les équation intégrables

$$u_t - u_{xxt} + (b+1)\,\mathrm{u}u_x = bu_x u_{xx} + \mathrm{u}u_{xxx}.$$

Pour b=2 et b=3 respectivement, trouve par la solution du peakons.

3.5 La famille des équations KdV

Les équations KdV apparaissent sous trois, cinq, sept ou plusieurs formes d'ordre, l'équation KdV de base est une équation non linéaire du troisiéme ordre.

3.5.1 La famille des équations KdV du $3^{ème}$ ordre

Ce type d'équation KdV est de la forme:

$$u_t + f(u)u_x + u_{xxx} = 0. \tag{3.3}$$

où $u(x,t)$ est une fonction de la variable spatiale x et de variable temporelle t. Le term $f(u)$ se présente sous les formes suivantes:

$$f(u) = \begin{cases} \alpha u \\ \alpha u^2 \\ \alpha u^n \\ \alpha u_x \\ 2\alpha u - 3\beta u^2 \\ \alpha u^n - \beta u^{2n} \end{cases}$$

L'équation KdV

Pour $f(u) = \alpha u$, l'équation (3.3) est appelée l'équation universelle de KdV

$$u_t + a\,\mathrm{u} u_x + u_{xxx} = 0. \tag{3.4}$$

où le paramétre a est un nombre réel, les valeurs couramment utilisées $a = \pm 1$ ou $a = \pm 6$.

L'équation KdV modifiée

Pour $f(u) = 6u^2$, l'équation (3.3) est appelée l'équation KdV modifiée (mKdV) donnée par

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \tag{3.5}$$

L'équation KdV généralisée

Pour $f(u) = \alpha u^n$, $n \geqslant 3$, l'équation (3.3) est appelée l'équation KdV généralisée (gKdV) donnée par

$$u_t + \alpha u^n u_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.6}$$

L'équation KdV potentielle

Pour $f(u) = \alpha u_x$, l'équation (3.3) est appelée l'équation KdV potentielle donnée par

$$u_t + \alpha(u_x)^2 + u_{xxx} = 0 \tag{3.7}$$

L'équation de gardner

Pour $f(u) = 2\alpha u - 3\beta u^2$ où α, $\beta > 0$, l'équation (3.3) est appelée l'équation KdV gardner donnée par

$$u_t + (2\alpha u - 3\beta u^2)u_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.8}$$

L'équation KdV généralisée avec deux non-linéarités de puissance

Pour $f(u) = \alpha u^n - \beta u^{2n}$, l'équation (3.3) est appelée l'équation KdV généralisée avec deux non-linéarités de puissance (gKdV) donnée par

$$u_t + (\alpha u^n - \beta u^{2n})u_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.9}$$

3.6 L'équation k(n,n)

C'est donné comme ça

$$u_t + a(u^n)_x + b(u^n)_{xxx} = 0. \tag{3.10}$$

L'équilibre entre $(u^n)_x$ et $(u^n)_{xxx}$ conduit à ce qu'on appelle l'onde combinée, qui est une onde solitaire.

où $(u^n)_x$ est le terme véritablement non linéaire et $(u^n)_{xxx}$ est le terme réellement non linéaire de dispersion.

3.7 La famille des équation KdV des ordres supérieurs

3.7.1 Equation KdV du $5^{éme}$ ordre

Les équation KdV du $5^{éme}$ ordre sont données comme suit

$$u_t + u_{xxxxx} + a\,\mathrm{u}u_{xxx} + bu_x u_{xx} + cu^2 u_x = 0 \tag{3.11}$$

où a, b et c sont des paramètres réels arbtraires non nuls, et $u = u(x,t)$ est une fonction suffisamment souvent différeciable. L'un des équations fKdV les plus célèbres:

L'équation de Lax

$$u_t + u_{xxxxx} + 10\,\mathrm{u}u_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x = 0 \tag{3.12}$$

L'équation de Sawada-Kotera

$$u_t + u_{xxxxx} + 5\,\mathrm{u}u_{xxx} + 5u_x u_{xx} + 5u^2 u_x = 0 \tag{3.13}$$

L'équation de Caudrey-Dodd-Gibbon

$$u_t + u_{xxxxx} + 30\,\mathrm{u}u_{xxx} + 30u_x u_{xx} + 180u^2 u_x = 0 \tag{3.14}$$

L'équation de Kaup-Kuperschmidt

$$u_t + u_{xxxxx} + 10\,\mathrm{u}u_{xxx} + 25u_x u_{xx} + 20u^2 u_x = 0 \tag{3.15}$$

L'équation de Ito

$$u_t + u_{xxxxx} + 3\,\mathrm{u}u_{xxx} + 6u_x u_{xx} + 2u^2 u_x = 0 \tag{3.16}$$

3.7.2 Equations KdV du $7^{éme}$ ordre

Une équation KdV du $7^{éme}$ ordre (sKdV) donnée par une forme généralisée

$$u_t + au^3 u_x + bu_x^3 + c\,\mathrm{u}u_x u_{2x} + du^2 u_{3x} + eu_{2x} u_{3x} + fu_x u_{4x} + g\,\mathrm{u}u_{5x} + u_{7x} = 0 \tag{3.17}$$

où a, b, c, d, e, f et g sont des paramètres non nuls, et $u_{kx} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$, a, b, c, d, e, f et g sont des variables qui peuvent prendre des valeurs aléatoires.Cependant, il existe trois cas particuliers bien connus.

L'équation de Sawada-Kotera-Ito du $7^{éme}$ ordre

$$u_t + 252u^3 u_x + 63u_x^3 + 378\,\mathrm{u}u_x u_{2x} + 126u^2 u_{3x} + 63u_{2x} u_{3x} + 42u_x u_{4x} + 21\,\mathrm{u}u_{5x} + u_{7x} = 0 \tag{3.18}$$

L'équation de Lax du $7^{éme}$ ordre

$$u_t + 140u^3 u_x + 70u_x^3 + 280\,\mathrm{u}u_x u_{2x} + 70u^2 u_{3x} + 70u_{2x} u_{3x} + 42u_x u_{4x} + 14\,\mathrm{u}u_{5x} + u_{7x} = 0 \tag{3.19}$$

L'équation de Kaup-Kuperschmidt $7^{éme}$ ordre

$$u_t + 2016u^3 u_x + 630u_x^3 + 2268\,\mathrm{u}u_x u_{2x} + 504u^2 u_{3x} + 252u_{2x} u_{3x} + 147u_x u_{4x} + 42\,\mathrm{u}u_{5x} + u_{7x} = 0 \tag{3.20}$$

3.7.3 Equations KdV du $9^{éme}$ ordre

L'équation de Sawada-Kotera du $9^{éme}$ ordre est la suivante

$$u_t+45u_xu_{6x}+45\,\mathrm{u}u_{7x}+210u_{3x}u_{4x}+210u_{2x}u_{5x}+1575u_x(u_{2x})^2+3150\,\mathrm{u}u_{2x}u_{3x}+1260\,\mathrm{u}u_xu_{4x}+630u^2u_{5x}+9450u^2 \tag{3.21}$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié un problème d'écoulement bidimensionnelnonlinéaire et à surface libre dans un milieu de profondeur petit. Dans cette étude, on a présenté une modélisation de ce problème par l'équation de Korteweg-De Vries et qui joue un role très important dans des nombreuses applications.

De plus, pour des perspectives de notre travail , on peut considérer autre effets qui donne à cette étude une généralisation. et proposé quelques methodes numériques pour les traiter.

Bibliographie

[1] Abdelkarim KELLECHE,Equation de la physique mathématique,10 October2020.

[2] Dr Souhila Sabit, Notions sur les équations aux dérivées partielles.

[3] Mame Souhila,Application de la technique des transformations conforme à un problème d'écoulement d'un fluide,2015/2016.

[4] Christophe Ancey,Mécanique des fluides.

[5] M'hamed BERIACHE,Mecanique des fluides ,2019.

[6] Hedli Riadh, Quelque Méthodes des Résolution des Equations aux Dérivées Partielles Non Linéaires,2020.