Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes vifs remerciements à monsieur L. MEZRAG pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

J'exprime ici ma profonde gratitude à tous les professeurs de mon jury. Et Je suis spécialement reconnaissant à A. TALAB pour avoir toujours répondu patiemment à mes questions.

Je ne saurais oublier de remercier toutes les personnes ayant contribué de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots des remerciements vont tout naturellement à mes parents pour leur soutient tout au long de mes études. Et ma famille et mes amis.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire on étudie une nouvelle classe d'opérateurs dans la catégorie des opérateurs de Lipschitz; qui est la classe des opérateurs de Lipschitz p-dominés. On commence par rappeler quelques notions concernant d'autres classes, puis on essaye de détailler l'article de chen-zeng [CZ12]. On termine ce mémoire par donner quelques relations entre ces classes.

Ce mémoire comporte de quatre chapitres.

Le premier chapitre qui s'intitule "espace de Lipschitz" contient des définitions et des propriétés. On commencera par un rappel sur les espaces métriques. Puis on étudiera quelques propriétés fondamentales de la classe d'opérateurs lipschitziens. Nous terminerons ce chapitre avec l'espace de Lipschitz $Lip\,(X,Y)$ [Ba72], nous présentons d'abord la construction de l'espace d'Arens et Eells [AE56] noté par Æ(X) pour X un espace métrique pointé.

Dans le deuxième chapitre, on étudiera d'abord la classe des opérateurs Lipschitz p-sommants. Un opérateur T est Lipschitz p-sommant, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \subset X$ et $\forall\,(a_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathbb{R}^+$, on a

$$\sum_{n=1}^{k} a_i d_Y\left(T\left(x_i\right) - T\left(y_i\right)\right)^p \leq C^p \sup_{f\in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} a_i \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p .$$

La plus petite constante C vérifiant l'inégalité précédente est notée par $\pi_p^L\left(T\right)$, qui est un norme dans $\pi_p^L(X,Y)$ si Y est un Banach l'espace de tous les opérateurs Lipschitz p-sommants. On donnera le théorème de domination/factorisation de Pietsch. En étudiera aussi dans ce chapitre la classe des opérateurs Lipschitz p-intégrals [FJ09]. Un opérateur T est Lipschitz p-intégral, s'il existe un probabilité μ et deux opérateures lipschitziennes

$A : X \longrightarrow L_\infty(\mu)$ et $B : L_p(\mu) \longrightarrow \left(Y^\#\right)^*$. Tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & \left(Y^\#\right)^* \\ A\downarrow & & & & \uparrow B \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & & L_p(\mu) \end{array}$$

On définit la norme Lipschitz p-intégral par $\iota_p^L(T) = \inf\{Lip(A).Lip(B)\}$ dans $\mathcal{I}_p^L(X,Y)$ l'espace de tous les opérateurs Lipschitz p-intégrals.

Le contenu du troisième chapitre concernent la classe des opérateurs Lipschitz fortement p-intégrals. Un opérateur T est Lipschitz fortement p-intégral, s'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \sum, \mu)$, un application lipshitzienne $A : L_p(\mu) \longrightarrow Y^{**}$. et un opérateur linéaire bornée $B : X \longrightarrow L_\infty(\mu)$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J_Y} & Y^{**} \\ B\downarrow & & & & \uparrow A \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{i_p} & & L_p(\mu) \end{array}$$

On définit la norme Lipschitz fortement p-intégral par $s\iota_p^L(T) = \inf\{Lip(A)\|B\|\}$. Puis dans la deuxième section on étudiera la classe des opérateurs Lipschitz p-dominés [CZ12]. Un opérateur T est Lipschitz p-dominé pour $(1 \leq p < \infty)$ s'il existe un espace de Banach Z et $L \in \pi_p(E,Z)$ tel que

$$\|Tx - Ty\| \leq \|Lx - Ly\|, \forall x,y \in E.$$

La classe de tous les opérateurs Lipschitz p-dominés est notée par $\mathcal{D}_p^L(E,F)$.

Nous consacrions le dernier chapitre aux relations entre les précédentes classes. Ce chapitre est divisé en deux parties. la première sera consacrée à la relation entre les opérateurs Lipschitz p-sommants et les opérateurs Lipschitz p-intégrals. La deuxième partie, à la relation entre les opérateurs Lipschitz fortement p-intégrals et les opérateurs Lipschitz p-dominés.

Chapitre 1

Espaces de Lipschitz

1.1 Espace métrique

Un espace métrique est la donnée d'un ensemble dont les éléments sont considérés comme des points et d'une application qui permet de mesurer si deux points sont proches éloignés (Voir [Dri03] et [SV06] pour plus de détails).

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1 *(Distance) Soit X un ensemble non vide quelconque. Une distance sur X est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes*

1-$\forall x, y \in X \ d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (séparation),

2-$\forall x, y \in X \ d(x, y) = d(y, x)$ (symétrique),

3-$\forall x, y, z \in X \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Remarque 1.1.1 (*Propriétés fondamentales d'une distance d*)

4-$\forall x, y, z \in X : |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ (seconde inégalité triangulaire),

5-$\forall x_1, ..., x_p \in X : d(x_1, x_p) \leq \sum_{k=1}^{p-1} d(x_k, x_{k+1})$ (inégalité triangulaire généralisée).

Définition 1.1.2 *(Distance équivalentes) Soient d_1, d_2 deux distances sur un ensemble X. On dit que d_1 et d_2 sont équivalentes s'il existe deux réelles α et β strictement positifs tels que*

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$$

Définition 1.1.3 *(Espace métrique) Un espace métrique est un couple* (X, d) *où* X *est un ensemble et* d *est une distance sur* X.

Exemple 1.1.1 *1-Soit* $(\mathbb{R}, |.|)$ *l'ensemble des nombres réels, muni de la distance*

$d(x, y) = |x - y|$ *est un espace métrique.*

2-Soit X *un ensemble muni de la distance suivante*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y, \\ 1 & si\ x \neq y, \end{cases}$$

est un espace métrique discret.

3-Sur l'espace $X = \mathbb{R}^n$*, on peut définir plusieurs distances.*

Soient $x = (x_1, ..., x_n)$ *et* $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$*, on définit les distances suivants*

$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ *(distance euclidienne)*.

$d_\infty(x, y) = \max \{|x_i - y_i|,\ i = 1, ..., n\}$.

4-N'importe quel espace vectoriel normé est un espace métrique par la définition

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Remarque 1.1.2 *Les distances* d_1*,* d_2 *et* d_∞ *de* $\mathbb{R}^n$ *sont équivalentes.*

Définition 1.1.4 *(Distance entre deux parties) Soit* (X, d) *un espace métrique et soient* A *et* B *deux parties de* X *non vide, on appelle distance de* A *à* B *le réel* $d(A, B)$ *définir par*

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Définition 1.1.5 *(Distance de Hausdorff) Soient* A *et* B *deux sous-ensembles de* X*, on appelle distance de Hausdorff entre* A *et* B *la quantité*

$$d_H = \max \{\sup \{d(a, B) : a \in A\} ; \sup \{d(A, b),\ b \in B\}\}.$$

Proposition 1.1.1 *Soit* (X, d_X) *un espace métrique, pour* $0 < \alpha < 1$ *alors* (X^α, d_X^α) *est un espace métrique muni de la distance*

$$d^\alpha(x, y) = (d(x, y))^\alpha.$$

S'appelle espace métrique de Hōlder.

Les espaces métriques de Hōlder ne jouent pas un rôle vraiment fondamental dans la théorie générale, mais ils sont d'un intérêt particulier en liaison avec les espaces de Lipschitz.

Théorème 1.1.1 *(Bolzano-Weierstrass) Un espace métrique X est compact si et seulement si toute suite de X admet une sous-suite convergente.*

Plusieurs espaces importants ne sont pas compacts mais admettent une propriété importante qui est une version locale de la compacité.

Définition 1.1.6 *Soient $(X_1, d_1), ..., (X_n, d_n)$ des espaces métriques et soit X le produit cartésien $X_1 \times ... \times X_n$, L'application δ_∞ définie ci-dessous est une distance sur X, ainsi (X, δ_∞) est un espace métrique*

$$\begin{aligned} \delta_\infty : X \times X &\to \mathbb{R}_+ \\ (x\ ,\ y) &\mapsto \max_{1\leq i\leq n} \{d_i(x_i, y_i)\}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.3 *L'application $\delta_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$ est une distance et (X, δ_1) est un espace métrique.*

L'application $\delta_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une distance et (X, δ_2) est un espace métrique.

Définition 1.1.7 *(Isométrique) Soient (X, d_1) et (Y, d_2) deux espaces métriques et une application $f : X \to Y$. On dit que f est une isométrie si elle conserve la distance, c'est à dire*

$$\forall x, y \in X : d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y).$$

On dit alors que X et Y sont isométriques.

Théorème 1.1.2 *Soient (X, d_1),(Y, d_2) deux espaces métriques, Soit D un sous ensemble dense de X et $f : D \to Y$. Si*

1-Y est complet,

2-f est uniformément continue sur D,

alors il existe un unique prolongement uniformément continu $\tilde{f}$.

Notation 1.1.1 *Soit (X, d_X, e) un espace métrique pointé (i.e. e un élément neutre, on prend 0 si X est normé). On note par*

$\mathcal{M}_2 = \{$*Espaces métriques complets de diamètre au plus 2*$\}$,

$$\dim(X) = \sup_{x,y \in X} d_X(x, y) \leq 2.$$

$\mathcal{M}_0 = \{$*Espaces métrique complets pointés*$\}$.

Proposition 1.1.2 *a) Soit $X \in \mathcal{M}_0$, il existe une isométrie de X dans $\ell_\infty(X)$.*

b) Soit $X \in \mathcal{M}_2$, il existe une isométrie de X dans la sphère unité de $\ell_\infty(X)$.

1.1.2 Produit d'espaces métriques

Pour terminer cette section, on donnera le produit des espaces métriques qui est aussi un espace métrique.

Définition 1.1.8 *Soit $\left\{(X_i, d_{X_i})_{i \in I}\right\}$ une famille dans $\mathcal{M}_2$. On définit $(\prod X_i, d)$ par*

$$d(x, y) = \sup_{i \in I} d_{X_i}(x_i, y_i).$$

Soit $\left\{(X_i, d_{X_i}, e_i)_{i \in I}\right\}$ une famille dans $\mathcal{M}_0$. On définit $(\prod^\infty X_i, d, e)$ par

$$\left\{x : \sup_{i \in I} d_{X_i}(x_i, e_i) < \infty \text{ avec } d(x, y) = \sup_{i \in I} d_{X_i}(x_i, y_i),\ e = (e_i)\right\}.$$

Remarque 1.1.4 *a) Soit $\{X_i : i \in I\}$ une famille des espaces métriques dans $\mathcal{M}_2$ alors $\prod X_i$ appartient aussi à $\mathcal{M}_2$.*

b) Soit $\{X_i : i \in I\}$ une famille des espaces métriques dans $\mathcal{M}_0$ alors $\prod^\infty X_i$ appartient aussi à $\mathcal{M}_0$.

1.2 Les applications lipschitziennes

Les opérateurs naturels entre les espaces métriques sont les opérateurs lipschiziens, comme les opérateurs linéaires dans les espaces de Banach.

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1 *Soient* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *deux espace métriques. L'application* $f : X \longrightarrow Y$ *est dite lipschitzienne, s'il existe* $C > 0$ *telle que*

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y). \tag{1.2.1}$$

Pour l'application f *on définit la constante de Lipschitz* C *par*

$$\|f\|_{Lip} = Lip(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} = \inf\{C : C \text{ vérifiant l'inégalité } (1.2.1)\}.$$

Si $C = 1$, on dit que f est non expansive, et si $C < 1$, on dit que f est strictement contractante.

On notera par $Lip_C(X, Y)$ l'ensemble des applications lipschitziennes de rapport C définies de X dans Y, et $Lip(X, Y)$ la réunion de ces ensembles.

Remarque 1.2.1 *On dit que* $f : X \longrightarrow Y$ *entre deux espaces métriques est bi-lipschitzienne si*

1-f *est bijective,*

2-f *et* f^{-1} *sont lipschiziennes.*

On dit que aussi f *est bi-lipschitzienne, s'il existe un constant* $C \geqslant 1$ *tel que*

$$\forall x, y \in X : \frac{1}{C} d_X(x, y) \leqslant d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y).$$

Dans ce cas sont dits, quasi-isométrique (Weaver 1999 [Wea99]), Lipschitz isomorphes ou Lipschitz homéomorphe (Kalton 2003 [KG03]).

Exemple 1.2.1 *La fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f = \dfrac{x}{1+|x|}$ *est lipschizienne*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right| = \left| \frac{x + x|y| - y - |x|y}{(1+|x|)(1+|y|)} \right|$$

Si $x, y \geqslant 0$ $|f(x) - f(y)| = \left|\dfrac{x-y}{(1+x)(1+y)}\right| \leqslant |x-y|$
Si $x, y \leq 0$ $|f(x) - f(y)| = \left|\dfrac{x-y}{(1-x)(1-y)}\right| \leqslant |x-y|$
Alors f *est Lipschitz sur* $\mathbb{R}$ *et* $Lip(f) \leq 2$.

Proposition 1.2.1 *Soit* (X, d_X) *un espace métrique et* $C \subset X$ *une partie fermée, alors la fonction* $f(x) = d_X(x, C)$ *est une fonction lipschitzienne.*

Preuve. On a la fonction $f : X \longrightarrow Y$ définie par

$$f(x) = d_X(x, C)$$

d'aprés la seconde inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in X : |f(x) - f(y)| = |d_X(x, C) - d_X(y, C)| \leqslant d_X(x, y).$$

Donc f est une fonction lipschitzienne et $Lip(f) \leq 1$. ■

Proposition 1.2.2 *a) Soient* X, X_i *des espaces métrique dans* $\mathcal{M}_2$ *pour tout* $i \in I$,
$f_i : X \longrightarrow X_i$ *une fonction lipschizienne alors le produit* $f : X \longrightarrow \prod\limits_{i \in I} X_i$ *satisfait*

$$Lip(f) = \sup_{i \in I} Lip(f_i).$$

b) Soient X, X_i *des espaces métrique dans* $\mathcal{M}_0$ *pour tout* $i \in I$, $f_i : X \longrightarrow X_i$ *une fonction lipschitzienne qui préserve l'élément distingue* $(f(e) = 0)$ *supposons que* $\sup\limits_{i \in I} Lip(f_i) < \infty$ *alors le produit* $f : X \longrightarrow \prod\limits_{i \in I}^{\infty} X_i$ *satisfait*

$$Lip(f) = \sup_{i \in I} Lip(f_i).$$

Preuve. a) Par définition de la distance sur l'espace produit on a

$$d(f(x), f(y)) = \sup_{i \in I} d_{X_i}(f_i(x), f_i(y)).$$

On divise par $d_X(x, y)$, on aura

$$\forall x \neq y : \frac{d(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} = \sup_{i \in I} \frac{d_{X_i}(f_i(x), f_i(y))}{d_X(x, y)}$$

et donc

$$\sup_{x\neq y}\frac{d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)}{d_X\left(x,y\right)}=\sup_{i\in I}\sup_{x\neq y}\frac{d_{X_i}\left(f_i\left(x\right),f_i\left(y\right)\right)}{d_X\left(x,y\right)}=\sup_{i\in I}Lip\left(f_i\right).$$

De la même façon que (a), on a

$$d_{X_i}\left(f_i\left(x\right),f_i\left(e\right)\right)\leq Lip\left(f_i\right)d_X\left(x,e\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}\sup_{i\in I}d_{X_i}\left(f_i\left(x\right),f_i\left(e\right)\right) &\leq \sup_{i\in I}Lip\left(f_i\right)d_X\left(x,e\right),\\ &\leq \infty.\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire 1.2.1 *Si X est un espace compact et $f : X \longrightarrow Y$ une application lipschitzienne inversible, alors f^{-1} est lipschitzienne.*

Corollaire 1.2.2 *Soit f lipschitzienne réelle. Il en est de même des fonctions f_+, f_- et $|f|$. De plus $Lip(f)$ majore les trois nombres $Lip(f_+), Lip(f_-), Lip(|f|)$.*

Proposition 1.2.3 *Soient X, Y deux espaces métriques, et f, f_n des fonctions lipschitziennes de X dans Y. Supposons que $f_n \longrightarrow f$ alors*

$$Lip\left(f\right)\leq\sup_n Lip\left(f_n\right).$$

Proposition 1.2.4 *Soit X un espace métrique et Soient f, g et f_n $\{n\in N\}$ des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$. Alors*

1-$Lip(\lambda f) = |\lambda|.Lip(f)$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$.

2-$Lip(f+g)\leq Lip(f)+Lip(g)$.

3-Si $\sum f_n$ converge simplement alors $Lip\left(\sum f_n\right)\leq\sum Lip(f_n)$.

Preuve. a) Si λ est dans $\mathbb{R}$, pour tout (x,y) dans X^2

$$\begin{aligned}Lip\left(\lambda f\right) &= \sup_{x\neq y}\frac{\left|\lambda f\left(x\right)-\lambda f\left(y\right)\right|}{d_X(x,y)}\\ &= \sup_{x\neq y}\frac{\left|\lambda\right|\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|}{d_X(x,y)}\\ &= \left|\lambda\right|Lip\left(f\right).\end{aligned}$$

Donc λf est une fonction lipschizienne et

$$Lip\,(\lambda f) = |\lambda|\, Lip\,(f)\,.$$

b) Soient f et g deux fonctions lipschiziennes de X dans $\mathbb{R}$ On a pour tout $(x, y) \in X^2$

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq (Lip(f) + Lip(g))\, d_X(x, y). \end{aligned}$$

Donc $f + g$ est une fonction lipschizienne et

$$Lip(f+g) \leq Lip(f) + Lip(g).$$

c) Soient $g_n = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n$, $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ alors g_n converge simplement vers f.
Ce qui donne par la proposition 1.2.3, on a

$$Lip\,(f) \leq \sup_n Lip\,(g_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} Lip(f_n).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

1.3 Espace de Lipschitz

Nous donnerons dans cette section quelques propriétés utiles concernant l'espace de tous les fonctions lipschitziennes.(voir [Ba72]).

L'espace $Lip(X, Y)$

Définition 1.3.1 *Soit X un espace métrique et Y un espace de Banach. On note par $Lip(X, Y)$ l'espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de X dans Y.*

$$Lip\,(X, Y) = \{\textit{fonctions lipschitziennes bornées } f : X \longrightarrow Y\}\,.$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{Lip(X,Y)} = \{\max \|f\|_\infty\,,\ Lip\,(f)\}\,.$$

Si $Y = \mathbb{R}$ en écrit $Lip\,(X, \mathbb{R}) = Lip\,(X)$.

Proposition 1.3.1 *L'espace $Lip(X)$ est complet pour tout espace métrique X.*

Preuve. Soit (f_n) une suite de Cauchy d'éléments de $Lip(X)$, alors il existe N, tel que, si n et m sont plus grands que N, on a $\|f_n - f_m\|_{Lip} \leq \varepsilon$. Ceci implique que les deux normes suivantes sont finies

$$Lip(f_n - f_m) < \infty \text{ et } \|f_n - f_m\|_\infty < \infty.$$

Lorsque m tend vers l'infini. Pour n supérieur à N on obtient

$$\|f_n - f\|_{Lip} = \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_{Lip}.$$

Alors

$$Lip(f_n - f) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0.$$

On démontre que la suite (f_n) converge vers f pour les deux normes précédentes. Il en résultera que la suite (f_n) converge vers f pour la norme Lip. Donc l'espace de Lipschitz $Lip(X)$ est complet. ■

Proposition 1.3.2 *1-L'ensemble $Lip(X, E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions uniformément continues sur X à valeurs dans E.*

2-L'application $Lip(.)$ est une semi-norme sur $Lip(X, E)$.

3-L'ensemble $Lip_k(X, E)$ est une partie convexe de $Lip(X, E)$.

4-Si f et g sont deux fonctions bornées de $Lip(X, E)$, alors fg appartient à $Lip(X, E)$.

Preuve. 1-Soit f et g dans $Lip(X, E)$. On a, pour tout (x, y) dans X^2

$$\|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| + \|g(x) - g(y)\| \leq Lip(f)d(x,y) + Lip(g)d(x,y).$$

Donc $f + g$ est dans $Lip(X, E)$ et $Lip(f + g) \leq Lip(f) + Lip(g)$.

Si λ est dans k, on a aussi, $\forall (x, y) \in X^2$

$$\|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)\| = |\lambda| \, \|f(x) - f(y)\| \leq |\lambda| Lip(f) d(x,y).$$

Donc λf est dans $Lip(X, E)$ et $Lip(\lambda f) \leq |\lambda| Lip(f)$. Alors $Lip(X, E)$ est sous-espace vectoriel.

2-Si λ est nul, on a

$$Lip(\lambda f) = |\lambda| Lip(f) = 0.$$

Si λ n'est pas nul

$$Lip(f) = Lip(\frac{1}{\lambda}(\lambda f)) \leq \frac{1}{|\lambda|}Lip(\lambda f).$$

Ce qui donne

$$|\lambda|Lip(f) \leq Lip(\lambda f).$$

Finalement, on a bien

$$Lip(\lambda f) = |\lambda|Lip(f).$$

Donc Lip est une semi-norme sur $Lip(X, E)$. Et on a $Lip(f)$ est nulle si et seulement si f est constante. Ce n'est donc pas une norme.

3-Soit λ dans $[0, 1]$. Alors, si f et g sont dans $Lip_k(X, E)$, on a

$$Lip(\lambda f + (1 - \lambda)g) \leq |\lambda|Lip(f) + (1 - \lambda)Lip(g) \leq |\lambda|k + (1 - \lambda)k \leq k.$$

Donc $\lambda f + (1 - \lambda)g$ appartient à $Lip_k(X, E)$ qui est bien convexe.

4-on a

$$\|(fg)(x) - (fg)(y)\| \leq \|f(x)\| \|g(x) - g(y)\| + \|g(y)\| \|f(x) - f(y)\|.$$

Donc

$$\|(fg)(x) - (fg)(y)\| \leq (\|f\|_\infty Lip(g) + \|g\|_\infty Lip(f))d(x, y)$$

et alors

$$Lip(fg) \leq \|f\|_\infty Lip(g) + \|g\|_\infty Lip(f).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Proposition 1.3.3 *[Wea99]Soient (X, d_X),(Y, d_Y)et (Z, d_Z) trois espaces métriques, si f est dans $Lip(X, Y)$ et g dans $Lip(Y, Z)$, alors gof est dans $Lip(X, Z)$ et*

$$Lip(gof) \leq Lip(g)Lip(f).$$

Preuve. Si f est dans $Lip(X, Y)$ et g dans $Lip(Y, Z)$, alors

$$\begin{aligned} d_Z(gof(x), gof(y)) &\leq Lip(g)d_Y(f(x), f(y)) \\ &\leq Lip(g)Lip(f)d_X(x, y). \end{aligned}$$

Ce qui implique que gof est dans $Lip(X, Z)$ et

$$Lip(gof) \leq Lip(g)Lip(f).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

L'espace $Lip_0(X,Y)$

Définition 1.3.2 *Soit* (X, d_X, e) *un espace métrique pointé. Pour espace de Banach* Y*, on note par* $Lip_0(X,Y)$ *l'espace de toutes les applications lipschitziennes de* X *dans* Y *est nulles au point* e*.*

$$Lip_0(X,Y) = \{\text{fonctions lipschitziennes } f : X \longrightarrow Y \ f(e) = 0\}.$$

Muni de la norme

$$Lip_0(f) = \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d_X(x,y)}.$$

Si $Y = \mathbb{R}$ *en écrit* $Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0(X)$*.*

Exemple 1.3.1 *On munit l'intervalle* $[0,1]$ *de la métrique usuel avec comme élément distingué* 0*. Pour toutes* $f \in L_\infty[0,1]$ *on définit* $F(t) = \int_0^t f(s)ds$*, alors pour tous* $a, b \in [0,1]$ *et* $a \leq b$ *on a*

$$|F(a) - F(b)| = \left| \int_a^b f(s)ds \right| \leq \|f\|_\infty (b-a).$$

Alors

$$F \in Lip_0([0,1]) \text{ (comme } F(0) = 0\text{) et } Lip(F) \leq \|f\|_\infty.$$

Proposition 1.3.4 *L'espace* $Lip_0(X)$ *est complet pour tout espace métrique* X*.*

1.3.1 Espace dual

Définition 1.3.3 *Soit* X *un espace métrique pointé. On appelle dual de Lipschitz et on le note par* $X^\#$ $\{$*l'espace de Banach des formes lipschitziennes sur* X*.*$\}$

$$X^\# = Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0(X).$$

Muni de la norme

$$Lip(x^\#) = \sup_{x \neq y} \frac{\left|x^\#(x) - x^\#(y)\right|}{d_X(x,y)}.$$

1.3.2 Espace de Arens-Eells

L'espace des molécules

Définition 1.3.4 *Soit* (X, d_X) *un espace métrique. Une molécule sur* X *est une fonction* $m : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *à support fini* $(\sigma(m) = \{x \in X : m(x) \neq 0\})$ *qui satisfait* $\sum_{x\in\sigma(m)} m(x) = 0$. *Désignons par* $M(X)$ *l'espace des molécules sur* X. *On peut écrire*

$$m = \sum_{x\in\sigma(m)} m(x)\, 1_{\{x\}} = \sum_{i=1}^{n} m(x_i)\, 1_{\{x_i\}}$$

où $1_{\{x\}}$ *désigne la fonction caractéristique du singleton* $\{x\}$.

Remarque 1.3.1 *On peut montrer que tout* $m \in M(X)$, m *s'écrit sous la forme*

$$m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(1_{\{x_i\}} - 1_{\left\{x_i'\right\}}\right).$$

Cette écriture n'est pas unique.

Proposition 1.3.5 *Soit* (X, d_X) *un espace métrique. Munissons l'espace des molécules* $M(X)$ *de la norme suivante*

$$\|m\|_{M(X)} = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\, d_X\left(x_i, x_i'\right) : m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(1_{\{x_i\}} - 1_{\left\{x_i'\right\}}\right)\right\}.$$

Alors notons $\text{Æ}(X)$ *[AE56] de la complété de l'espace normé* $\left(M(X), \|.\|_{M(X)}\right)$ *et parfois l'espace* $\text{Æ}(X)$ *s'appelle l'espace de Lipschitz libre de* X *et on note aussi par* $\mathcal{F}(X)$.

Théorème 1.3.1 *Soit* X *un espace métrique pointé* $(X \in \mathcal{M}_0)$ *alors*

$$\text{Æ}(X)^* = Lip_0(X).$$

Preuve. On définit l'application suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \text{Æ}(X)^* &\longrightarrow Lip_0(X) \\ \varphi \quad &\longmapsto \mathcal{S}(\varphi)(x) = \varphi\left(1_{\{x\}} - 1_{\{e\}}\right) \end{aligned}$$

$\forall x, y \in X$ on a

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{S}(\varphi)(x) - \mathcal{S}(\varphi)(y)\right| &= \left|\varphi\left(1_{\{x\}} - 1_{\{e\}}\right) - \varphi\left(1_{\{y\}} - 1_{\{e\}}\right)\right| \\ &= \left|\varphi\left(1_{\{x\}} - 1_{\{y\}}\right)\right| \\ &\leq \|\varphi\| \, d_x(x,y). \end{aligned}$$

Ainsi $Lip(\mathcal{S}\varphi) \leq \|\varphi\|$. D'autre par on a $(\mathcal{S}\varphi)(e) = \varphi(0) = 0$, alors $\mathcal{S}\varphi \in Lip_0(X)$.

Nous conclusions que $\mathcal{S}$ est une application linéaire nonexpansive à partir de $Æ(X)^*$ à $Lip_0(X)$.

Maintenant on définit l'application suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : Lip_0(X) &\longrightarrow Æ(X)^* \\ f &\longmapsto \mathcal{R}(f)(m) = \sum_x m(x) f(x) \end{aligned}$$

$\forall m \in Æ(X)$ on a

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{R}(f)(m)\right| &= \left|\sum_x m(x) f(x)\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(1_{\{x_i\}} - 1_{\{x'_i\}}\right)(x) f(x)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \left|f(x_i) - f(x'_i)\right| \\ &\leq Lip(f) \, \|m\|_{Æ}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{R}f \in Æ(X)^*$ et $\|\mathcal{R}f\| \leq Lip(f)$.

Alors nous concluons que $\mathcal{R}$ est une application linéaire nonexpansive à partir de $Lip_0(X)$ à $Æ(X)^*$.

Ce qui donne que

$$Æ(X)^* = Lip_0(X).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire 1.3.1 *Soit X un espace métrique pointé.*

1-Pour toute molécule m, nous avons

$$\|m\|_{Æ} = \sup_{f \in B_{X^\#}} \left|\langle m, f \rangle\right|.$$

2-$\|.\|_{Æ}$ *est une norme sur l'espace de molécule qui satisfait*

$$\forall x, y \in X : \left\|1_{\{x\}} - 1_{\{y\}}\right\|_{Æ} = d_x (x, y).$$

3-$\|.\|_{Æ}$ *est la plus grande semi-norme sur l'espace de molécule qui satisfait*

$$\forall x, y \in X : \left\|1_{\{x\}} - 1_{\{y\}}\right\|_{Æ} \leq d_x (x, y).$$

Remarque 1.3.2 *Soit* X *un espace métrique. L'application* $i_X : X \longrightarrow Æ(X)$ *définie par*

$$i_X = \left(1_{\{x\}} - 1_{\{e\}}\right)$$

est un injection isométrique de X *dans* $Æ(X)$*. En effet d'apré le corollaire* 1.3.1 (2) *on a*

$$\begin{aligned} \|i_X (x) - i_X (y)\|_{Æ} &= \left\|1_{\{x\}} - 1_{\{y\}}\right\|_{Æ} \\ &= d_x (x, y). \end{aligned}$$

Théorème 1.3.2 [*Wea99*] *Soient* X *un espace métrique pointé,* Y *un espace de Banach et* $f : X \longrightarrow Y$ *une fonction lipschitzienne qui préserve le point de base* $(f (e) = 0)$.

Alors il existe une unique opérateur linéaire bornée $u : Æ(X) \longrightarrow Y$ *telle que*

$$f = u \circ i_X \text{ et } \|u\| = Lip (f).$$

$$\begin{array}{ccc} Æ(X) & & \\ i_X \uparrow & \overset{u}{\searrow} & \\ X & \underset{f}{\longrightarrow} & Y \end{array}$$

Chapitre 2

Les opérateurs Lipschitz p-sommants et Les opérateurs Lipschitz p-intégrals

2.1 Les opérateurs Lipschitz p-sommants

On commence cette chapitre par définitions des opérateurs lipschitz p-sommants et Les opérateurs lipschitz p-intégrals et quelques résultats connus. On rappelle qu'une application lipschitzienne d'un espace métrique (X, d_X) dans un espace métrique (Y, d_Y). Pour plus d'information voir [FJ09] et [Bri13].

Définition 2.1.1 *[FJ09] Soit $T : X \to Y$ un opérateur lipschitzien entre deux espaces métriques. On dit que T est un opérateur Lipschitz p-sommant pour $1 \leq p < +\infty$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in N, \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \subset X$ et $\forall (a_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}^+$, on a*

$$\sum_{n=1}^{k} a_i d_Y (T(x_i) - T(y_i))^p \leq C^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p . \tag{2.1.1}$$

La classe des opérateures Lipschitz p-sommants de X dans Y notée par

$$\pi_p^L(X, Y) = \{T : X \to Y : T \text{ est Lipschitz p-sommants}\}.$$

Muni de la norme

$$\pi_p^L(T) = \inf \{C,\ C \text{ vérifiant l'inégalité } (2.1.1)\}.$$

Soient $(\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}$ et $(x_i)_{i=1}^n, (x'_i)_{i=1}^n \in X$

On note la p-norme faible lipschitzienne par

$$w_{Lip}^p((\lambda_i, x_i, x'_i)_i)^{-1} = \sup_{f \in X^\#} \left(\sum_{i=1}^n \left| \lambda_i (f(x_i) - f(x'_i))^p \right|^{\frac{1}{p}} \right).$$

Remarque 2.1.1 *1-On peut prendre les $a_i = 1$.*

2-Si T est linéaire alors $\pi_p^L(T) \leq \pi_p(T)$.

Proposition 2.1.1 *Si Y est un espace de Banach, alors l'espace $\left(\pi_p^L(X,Y), \pi_p^L(.)\right)$ est un espace de Banach.*

Preuve. On montrons que $\pi_p^L(.)$ est une norme.

Il est clair que pour tout T dans $\pi_p^L(X,Y)$ on a $\pi_p^L(T) \geqslant 0$.

Posons

$$\|T(x_i) - T(y_i)\|_p = (\sum_{n=1}^k d_Y(T(x_i), T(y_i))^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout scalaire λ on a

$$\begin{aligned} \pi_p^L(\lambda T) &= \sup_{x_i, y_i} \|\lambda T(x_i) - \lambda T(y_i)\|_p \, w_L^p((x_i, y_i)_i) \\ \pi_p^L(\lambda T) &= \sup_{x_i, y_i} |\lambda| \, \|T(x_i) - T(y_i)\|_p \, w_L^p((x_i, y_i)_i) \\ \pi_p^L(\lambda T) &= |\lambda| \, \pi_p^L(T). \end{aligned}$$

Soient $T_1, T_2 \in \pi_p^L(X,Y)$ on a

$$\begin{aligned} \|(T_1 + T_2)(x_i) - (T_1 + T_2)(y_i)\|_p &\leq \|T_1(x_i) - T_1(y_i)\|_p + \|T_1(x_i) - T_2(y_i)\|_p \\ &\leq \pi_p^L(T_1) w_L^p((x_i, y_i)_i) + \pi_p^L(T_2) w_L^p((x_i, y_i)_i) \\ &\leq \left(\pi_L^P(T_1) + \pi_L^P(T_2)\right) w_L^p((x_i, y_i)_i). \end{aligned}$$

Donc $T_1 + T_2 \in \pi_p^L(X,Y)$ et on a

$$\pi_p^L(T_1 + T_2) \leq \pi_p^L(T_1) + \pi_p^L(T_2).$$

Maintenant, soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\pi_p^L(X,Y)$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n, m \geqslant N_\varepsilon : \pi_p^L(T_n - T_m) \leq \varepsilon.$$

D'où $\forall n \in N, \forall x, y \subset X$ on a

$$\|(T_n - T_m)(x_i) - (T_n - T_m)(y_i)\|_p \leq \varepsilon \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum |f(u(x_i)) - f(u(y_i))|^p.$$

La suite (T_n) est de Cauchy dans l'espace de Banach $Lip(X, Y)$ avec $Lip(T) \leq \pi_p^L(T)$. Alors T_n converge dans $Lip(X, Y)$ vers un opérateur T. Donc $\forall m \leq N$.

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \|(T_n - T_m)(x_i) - (T_n - T_m)(y_i)\|_p &= \|(T_n - T)(x_i) - (T_n - T)(y_i)\|_p \\
&\leq \pi_p^L(T_n - T) \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum |f(u(x_i)) - f(u(y_i))|^p.
\end{aligned}$$

D'où l'opérateur $T_n - T$ est Lipschitz p-sommant de X dans Y, il est donc un élément de $\pi_p^L(X, Y)$, avec la condition $\pi_p^L(T_n - T) < \varepsilon$

Donc la convergence de T_n vers T dans $\pi_p^L(X, Y)$ et $T \in \pi_p^L(X, Y)$. ■

Proposition 2.1.2 (*Propriété d'idéale des opérateurs Lipschitz p-sommants*) *Soient X, Y, E et F des espaces métriques. Soient $T \in \pi_p^L(X, Y)$, $u \in Lip(E, X)$ et $v \in Lip(Y, F)$, alors pour $1 \leq p < \infty$ on a*

$$v \circ T \circ u \in \pi_p^L(E, F) \ \textit{et}\ \pi_p^L(v \circ T \circ u) \leq Lip(v)\pi_p^L(T)Lip(u).$$

Preuve. Soient $(x_i)_{1\leq i\leq n}, (y_i)_{1\leq i\leq n} \subset X$, On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} d_F\left((v \circ T \circ u)(x_i) - (v \circ T \circ u)(y_i)\right)^p &\leq Lip(v)^p \sum_{i=1}^{n} d_Y\left((T \circ u)(x_i) - (T \circ u)(y_i)\right)^p \\
&\leq Lip(v)^p\, \pi_p^L(T)^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} |f(u(x_i)) - f(u(y_i))|^p \\
&\leq Lip(v)^p\, \pi_p^L(T)^p\, Lip(u)^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} \left|\tfrac{(f\circ u)}{Lip(u)}(x_i) - \tfrac{(f\circ u)}{Lip(u)}(y_i)\right|^p \\
&\leq \left(Lip(v)\, \pi_p^L(T)\, Lip(u)\right)^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(y_i)|^p.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $v \circ T \circ u$ est Lipschitz p-sommant $\left(v \circ T \circ u \in \pi_p^L(E, F)\right)$, et

$$\pi_p^L(v \circ T \circ u) \leq Lip(v)\pi_p^L(T)Lip(u).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

2.1.1 Le théorème de domination/factorisation de Pietsch

Théorème 2.1.1 *Soit $T : X \to Y$ un opérateur lipschitzien entre deux espaces métriques pointés X, Y, Soit C une constante positive. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1-L'opérateur T est Lipschitz p-sommant et $\pi_p^L(T) \leq C$.

2-Il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{X^\#}$ telle que

$$\forall x, y \in X,\ d_Y(T(x), T(y)) \leq C(\int\limits_{B_{X^\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f))^{\frac{1}{p}}.$$

3-Pour toute isométrie J de Y dans un espace injectif Z, on a la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & Z \\ A \downarrow & & & & \uparrow B \\ L_\infty(B_{X^\#}) & & \xrightarrow{i} & & L_p(B_{X^\#}) \end{array}$$

Avec $Lip(A)Lip(B) < \infty$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que $\pi_p^L(T) = 1$.

Soit Q le cône convexe dans $C(B_{X^\#})$ de toutes les combinaisons linéaires positives des fonctions de la forme

$$d_Y(T(x), T(y))^p - C^p|f(x) - f(y)|^p, \forall x, y \in X.$$

Soit P un sous-ensemble convexe ouvert de $C(B_{X^\#})$ de la forme

$$P = (F \in C(B_{X^\#}) | F(f) > 0, \forall f \in X^\#).$$

L'ensemble Q est un cône convexe dans $C(B_{X^\#})$ et P est un cône convexe ouvert de $C(B_{X^\#})$.

Comme $Q \cap P = \emptyset$ (car T est Lipschitz p-sommant), d'après le théorème de Hahn Banach forme géométrique et le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure de

Baire μ sur $B_{X^\#}$ et un nombre réel C tels que pour tout $G \in Q$ et $F \in P$ on a

$$\int\limits_{B_{X^\#}} G d\mu \leq C < \int\limits_{B_{X^\#}} F d\mu.$$

Comme $0 \in Q$ et toutes les constantes positives sont dans P, on a $C = 0$, et

$\int\limits_{B_{X^\#}}$ est positif sur le cône positif P, la mesure signée μ est une mesure positive.

On suppose que μ est une mesure de probabilité de Radon. Donc

$$\int\limits_{B_{X^\#}} d_Y(T(x),T(y)) - C(|f(x)-f(y)|^p d\mu(f))^{\frac{1}{p}} \leq 0$$

alors

$$d_Y(T(x),T(y))^p \leq C^p \int\limits_{B_{X^\#}} |f(x)-f(y)|^p d\mu(f).$$

(2) $\Rightarrow$ (3). D'après le lemme 1.1 dans ([BL00] page 11) Chaque espace métrique se plonge dans $\ell_\infty(I)$ pour un certain ensemble I, et d'après le théorème non linéaire de Hahn-Banach, $\ell_\infty(I)$ est un injectif. Soit $A : X \to L_\infty(\mu)$ le plongement isométrique se composant de l'identité de $C(B_{X^\#})$ dans $L_\infty(\mu)$, c'est-à-dire

$$A : X \xrightarrow{i_p} C(B_{X^\#}) \xrightarrow{j_\infty} L_\infty(\mu).$$

Alors (2) indique que la norme lipschitzienne $Lip(B)$ restreinte à i_pAX est bornée par C.

(3) $\Rightarrow$ (1). On a

$\pi_p^L(T) = \pi_p^L(JT) \leq Lip\,(A)\,\pi_p^L(i_p)Lip\,(B) = Lip\,(A)\,Lip\,(B)$

et par conséquent

$$\pi_p^L(T) \leq C$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Théorème 2.1.2 *Soient X, Y deux espace métrique et $T : X \to Y$ un opérateur Lipschitz p-sommant et $1 \leq p < q < \infty$ alors*

$$\pi_p^L(X,Y) \subset \pi_q^L(X,Y) \text{ et } \pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T).$$

Preuve. Soit $T \in \pi_p^L(X,Y)$ et $p < q$, d'ou $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$, donc il existe $r \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$.

D'apré le théorème 2.1.1 on a

$$\forall x,y \in X,\ d_Y(T(x),T(y)) \leq \pi_p^L(T)(\int\limits_{B_{X^\#}} (|f(x)-f(y)|^p.1^p)\,d\mu(f))^{\frac{1}{p}}$$

On utilise l'inégalité de Hōlder on trouve

$$\begin{aligned} d_Y(T(x),T(y)) &\leq \pi_p^L(T)(\int_{B_{X\#}} (|f(x)-f(y)|^q.1^q)\,d\mu(f))^{\frac{1}{q}}.\left(\int_{B_{X\#}} 1^r d\mu(f)\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \pi_p^L(T)(\int_{B_{X\#}} (|f(x)-f(y)|^q.1^q)\,d\mu(f))^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

D'où $T \in \pi_q^L(X,Y)$ et $\pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T)$. ■

2.2 Les opérateurs Lipschitz p-intégrals

Définition 2.2.1 *Supposons que $1 \leq p \leq \infty$, un application linéaire $T : X \to Y$ entre deux espaces de Banach est un opérateur p-intégral, s'il existe un probabilité μ et deux opérateurs linéaires bornée $A : X \longrightarrow L_\infty(\mu)$ et $B : L_p(\mu) \longrightarrow Y^{**}$, ce qui donne le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{K_Y} & Y^{**} \\ A\downarrow & & & & \uparrow B \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & & L_p(\mu) \end{array}$$

Où $I_{\infty,p} : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_p(\mu)$ est l'identité et $K_Y : Y \longrightarrow Y^{**}$ est l'injection canonique

La classe de toutes les opérateurs p-intégrals de X dans Y est noté par

$$\mathcal{I}_p(X,Y).$$

On définit la norme p-intégral par

$$\iota_p(T) = \inf\{\|A\|.\|B\|\}.$$

Définition 2.2.2 *Supposons que $1 \leq p \leq \infty$, un application Lipschitz $T : X \to Y$ entre deux espaces métriques est un opérateur Lipschitz p-intégral, s'il existe un probabilité μ et deux opérateurs lipschitziens $A : X \longrightarrow L_\infty(\mu)$ et $B : L_p(\mu) \longrightarrow (Y^\#)^*$, ce qui donne le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & (Y^\#)^* \\ A\downarrow & & & & \uparrow B \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & & L_p(\mu) \end{array}$$

Où $I_{\infty,p} : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_p(\mu)$ est l'identité et $J : Y \longrightarrow \left(Y^{\#}\right)^*$ est l'application canonique à valeurs dans $Y^{\#}$.

La classe de toutes les opérateurs lipschitziens p-intégrals de X dans Y est noté par

$$\mathcal{I}_p^L(X,Y).$$

On définit la norme Lipschitz p-intégral par

$$\iota_p^L(T) = \inf\{Lip(A).Lip(B)\}.$$

Proposition 2.2.1 *Soient X et Y sont des espaces de Banach on a $\mathcal{I}_p^L(X,Y)$ un espace de Banach.*

Proposition 2.2.2 *Soit $1 < p \leq q \leq \infty$, Si $T : X \to Y$. Un opérateur entre deux espaces métriques est Lipschitz p-intégral alors T est Lipschitz q-intégral et*

$$\iota_q^L(T) \leq \iota_p^L(T)$$

Preuve. Supposons que T est Lipschitz p-intégral alors on a le diagramme de factorisation suivant

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & \left(Y^{\#}\right)^* \\ A\downarrow & & & & \uparrow B \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & & L_p(\mu) \end{array}$$

Avec

$$\iota_p^L(T) = \inf\{Lip(A).Lip(B)\}.$$

On note que $I_{\infty,p}$ est obtenues par composition $I_{q,p}$ avec $I_{\infty,q}$ c'est-à-dire $I_{\infty,p} = I_{q,p} \circ I_{\infty,q}$ alors on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & \left(Y^{\#}\right)^* \\ I_{\infty,q}\downarrow & & & & \uparrow \tilde{B} \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & & L_p(\mu) \\ A\downarrow & & \overset{I_{q,p}}{\nearrow} & & \\ L_q(\mu) & & & & \end{array}$$

Le diagramme ci-dessus devient maintenant

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & \left(Y^{\#}\right)^{*} \\ A\downarrow & & & & \uparrow\tilde{B} \\ L_{\infty}(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,q}} & & L_{q}(\mu) \end{array}$$

Avec

$$\tilde{B} = B \circ I_{q,p}.$$

Donc, T un opérateur Lipschitz q-intégral et

$$\begin{aligned} \iota_q^L(T) &\leq Lip(A)\, Lip\left(\tilde{B}\right) \\ &= Lip(A)\, Lip(B \circ I_{q,p}) \\ &\leq Lip(A)\, Lip(B)\, \pi_p^L(I_{q,p}) \\ &= Lip(A)\, Lip(B) \end{aligned}$$

On passe à l'infinimum, on a

$$\iota_q^L(T) \leq \inf\{Lip(A)\, Lip(B)\} = \iota_p^L(T).$$

D'ou le résultat demandé. ■

Proposition 2.2.3 *Soit $1 \leq p < \infty$. Si $T : X \to Y$ un opérateur linéaire p-intégral entre deux espaces de Banach, alors T est Lipschitz p-intégral et*

$$\iota_p^L(T) \leq \iota_p(T).$$

Preuve. Supposons que T un opérateur p-intégral alors on a la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{K_Y} & Y^{**} \\ A\downarrow & & & & \uparrow B \\ L_{\infty}(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & & L_{p}(\mu) \end{array}$$

avec

$$\iota_p(T) = \inf \|A\|\,\|B\|.$$

Puisque Y^{**} est un norme complété dans $\left(Y^{\#}\right)^{*}$ via la projection P donc on a la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{K_Y} & Y^{**} & \xrightarrow{P_{|Y^{**}}} & \left(Y^{\#}\right)^{*} \\ A\downarrow & & & & \uparrow B & \nearrow_{\tilde{B}} & \\ L_{\infty}(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & & L_{p}(\mu) & & \end{array}$$

Le diagramme ci-dessus est équivalent à

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & \left(Y^{\#}\right)^{*} \\ A\downarrow & & & & \uparrow\tilde{B} \\ L_{\infty}(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,q}} & & L_{p}(\mu) \end{array}$$

avec

$$\tilde{B} = P_{|Y^{**}} \circ B \text{ et } J = P_{|Y^{**}} \circ K_{Y}.$$

Donc, T un opérateur Lipschitz p-intégral et

$$\begin{aligned} \iota_{p}^{L}(T) &\leq \|A\| \left\|\tilde{B}\right\| \\ &= \|A\| \left\|P_{|Y^{**}} \circ B\right\| \\ &= \|A\| \left\|P_{|Y^{**}}\right\| \|B\| \\ &= \|A\| \|id_{Y^{**}}\| \|B\| \\ &= \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

On passe à l'infinimum, on aura

$$\iota_{q}^{L}(T) \leq \inf \|A\| \|B\| = \iota_{p}(T).$$

D'ou le résultat. ■

Proposition 2.2.4 *(Propriété d'idéale des applications Lipschitz p-intégrals) Soit $v : X \longrightarrow Y$ un opérateur Lipschitz p-intégral, $w : X_0 \longrightarrow X$ et $u : Y \longrightarrow Y_0$ des opérateurs lipschitziens entre deux espaces métriques alors $u \circ v \circ w : X_0 \longrightarrow Y_0$ un opérateur Lipschitz p-intégral et*

$$\iota_{q}^{L}(u \circ v \circ w) \leq Lip(u)\, \iota_{q}^{L}(v)\, Lip(w).$$

Preuve. Comme v est un opérateur Lipschitz p-intégral, donc on a la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccccccc} & & X & \xrightarrow{v} & Y & \xrightarrow{J_Y} & \left(Y^{\#}\right)^{*} \\ & \overset{w}{\nearrow} & A\downarrow & & & & \uparrow B \\ X_0 & \xrightarrow{A_0} & L_{\infty}(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & & L_{p}(\mu) \end{array}$$

Avec

$$A_0 = A \circ w \text{ et } \iota_{p}^{L}(v) = \inf \left\{Lip(A) .Lip(B)\right\}.$$

On prend note que le diagramme suivant est toujours commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{J_Y} & \left(Y^{\#}\right)^{*} \\ u\downarrow & & \downarrow\left(u^{\#}\right)^{*} \\ Y_0 & \xrightarrow{J_{Y_0}} & \left(Y_0^{\#}\right)^{*} \end{array}$$

puisque $J_{Y_0} \circ u = \left(u^{\#}\right)^{*} \circ J_Y$, on aura la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xrightarrow{u\circ v\circ w} & Y_0 & \xrightarrow{J_{Y_0}} & \left(Y_0^{\#}\right)^{*} \\ A_0\downarrow & & & & \uparrow\tilde{B} \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & & L_p(\mu) \end{array}$$

avec

$$A_0 = A \circ w \text{ et } \tilde{B} = \left(u^{\#}\right)^{*} \circ B.$$

Donc, $u \circ v \circ w$ un opérateur Lipschitz p-intégral et

$$\begin{aligned} \iota_p^L(u \circ v \circ w) &\leq Lip(A_0)\, Lip\left(\tilde{B}\right) \\ &= Lip(A_0 \circ w)\, Lip\left(\left(u^{\#}\right)^{*} \circ B\right) \\ &\leq Lip(A)\, Lip(w)\, Lip\left(\left(u^{\#}\right)^{*}\right) Lip(B) \\ &= Lip(A)\, Lip(w)\, Lip(u)\, Lip(B). \end{aligned}$$

On passe à l'infinimum, on aura

$$\begin{aligned} \iota_p^L(u \circ v \circ w) &\leq \inf\left(Lip(A)\, Lip(B)\, Lip(u)\, Lip(w)\right) \\ &= Lip(u)\, \iota_p^L(v)\, Lip(w). \end{aligned}$$

D'ou la conclusion. ■

Chapitre 3

Les opérateurs Lipschitz p-dominés

On s'intéressé dans ce chapitre aux opérateurs Lipschitz fortement p-intégrals et Lipschitz p-dominés. On expose les résultats connus. On pourra consulter [CZ12].

3.1 Les opérateurs Lipschitz fortement p-intégrals

Définition 3.1.1 *Un opérateur lipschitzien T entre deux espaces métriques X et Y est Lipschitz fortement p-intégrals $(1 \leq p \leq \infty)$ s'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \sum, \mu)$ normaux, un application lipshitzienne $A : L_p(\mu) \longrightarrow Y^{**}$. et un opérateur linéaire bornée $B : X \longrightarrow L_\infty(\mu)$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J_Y} & Y^{**} \\ B\downarrow & & & & \uparrow A \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{i_p} & & L_p(\mu) \end{array}$$

On définit la norme Lipschitz fortement p-intégral par

$$s\iota_p^L(T) = \inf\{Lip(A)\,\|B\|\}.$$

Théorème 3.1.1 *[CZ12] Soit $(1 \leq p \leq \infty)$ Une application lipschitzienne $T : X \longrightarrow Y$ est Lipschitz fortement p-intégral si et seulement si pour sont *-faible compact K de B_{X^*}, il existe une mesure de Borel μ sur K et une application lipschitzienne $\tilde{T} : L_p(\mu) \longrightarrow Y^{**}$*

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J_Y} & Y^{**} \\ i_X \downarrow & & & & \uparrow \tilde{T} \\ C(K) & & \xrightarrow{j_p} & & L_p(\mu) \end{array}$$

où j_p *et* i_X *sont des applications canoniques. Dans ce cas,* $s\iota_p^L(T) = \inf Lip\left(\tilde{T}\right).$

3.2 Les opérateurs Lipschitz p-dominés

Définition 3.2.1 *Une application lipschitzienne* T *entre deux espaces de Banach* E *et* F *est Lipschitz p-dominés* $(1 \leq p < \infty)$ *s'il existe un espace de Banach* Z *et* $L \in \pi_p(E, Z)$ *tel que*

$$\|Tx - Ty\| \leq \|Lx - Ly\|, \forall x, y \in E.$$

La classe de tous les opérateurs Lipschitz p-dominés de E *dans* F *est notée par* $\mathcal{D}_p^L(E, F)$.

Pour $T \in \mathcal{D}_p^L(E, F)$ *on pose*

$$d_p^L(L) \leq \pi_p(L).$$

Théorème 3.2.1 *Pour une application lipschitziénne* $T : E \longrightarrow F$ *les propriétés suivantes sont équivalentes*

i) $T \in \mathcal{D}_p^L(E, F)$.

ii) Il existe une constante $C > 0$ *telle que pour tout* $\{x_i\}_{i=1}^n$ *et* $\{y_i\}_{i=1}^n$ *dans* E *on a,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i - Ty_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x \in B_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x^*, x_i - y_i\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

iii) Il existe une constante $C > 0$ *et une mesure de probabilité sur* B_{E^*} *tel que*

$$\forall x, F \in E : \|Tx - TF\| \leq C \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x^*, x - F\rangle|^p d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans ce cas

$$d_p^L(T) = \inf\{C : C \text{ comme dans (ii)}\} = \inf\{C : C, \mu \text{ comme dans (iii)}\}.$$

Preuve. $(i) \Longrightarrow (ii)$ On choisit $L \in \pi_p(E, Z)$ tel que

$$\|Tx - Ty\| \leq \|Lx - Ly\|, \forall x, y \in E.$$

Alors, pour une suite finie $\{x_i\}_{i=1}^n$ et $\{y_i\}_{i=1}^n$ dans E on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i - Ty_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|Lx_i - Ly_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq \pi_p(L) \sup_{x \in B_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x^*, x_i - y_i \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\inf \{C : C \text{ comme dans } (ii)\} \leq \pi_p(L).$$

Et que

$$\inf \{C : C \text{ comme dans } (ii)\} \leq d_p^L(T).$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. On fixe $x, y \in E$ et on définit

$$\begin{array}{cccc} g_{\{x,y\}} : B_{E^*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x^* & \longmapsto & \|Tx - Ty\|^p - C^p |\langle x^*, x - y \rangle|^p. \end{array}$$

Soit Q le cône convexe positif

$$Q = \left\{ \sum_i \lambda_i g_{\{x,y\}} : \sum_i \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \right\}$$

et soit

$$P = \{F \in C(B_{E^*}, \mathbb{R}) : F(x^*) > 0, \forall x^* \in B_{E^*}\}.$$

D'aprés (ii) et $P \bigcap Q = \emptyset$, on a du théorème de séparation de $H.B$ et le théorème de représentation de Riesz qu'il existe une mesure régulière signée finie μ sur B_{E^*} et un nombre réel c tel que

$$\int_{B_{E^*}} g d\mu \leq c \leq \int_{B_{E^*}} F d\mu \quad \forall g \in Q, \forall F \in P.$$

Puisque $0 \in Q$ et toutes les constantes positives sont dans P, on constante que $c = 0$ et μ est une mesure positif, qu'on peut le prendre une mesure de probabilité. En particulier pour $g_{\{x;y\}}$ on a

$$\|Tx - Ty\|^p - C^p \int_{B_{E^*}} |\langle x^*, x - y\rangle|^p \, d\mu \leq 0.$$

De plus

$$\inf \{C : C \ \mu \text{ comme dans } (iii)\} \leq \inf \{C : C \text{ comme dans } (ii)\}.$$

$(iii) \Longrightarrow (ii)$ On définit

$$\begin{array}{rcl} L : E & \longrightarrow & L_p(B_{E^*}, \mu) \\ x & \longmapsto & (Lx)(x^*) = \langle x^*, x\rangle, \forall x^* \in B_{E^*} \end{array}$$

donc

$$\|Tx - Ty\| \leq C \|Lx - Ly\|, \forall x, y \in E$$

et

$$\pi_p(L) \leq 1.$$

On conclut que

$$d_p^L \leq \pi_p(C.L) \leq C.$$

Et le théorème est montré. ■

Théorème 3.2.2 *Soit $T : E \longrightarrow F$ une application lipschitzienne et K une partie *-faiblement compact de B_{E^*}. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) $T \in \mathcal{D}_p^L(E, F)$;

(ii) Ils existe une mesure de probabilité régulière de Borel μ sur K, un sous espace E_p dans $L_p(\mu)$ et une application lipschitzienne $\hat{T} : E_p \longrightarrow F$ tel que

a) $j_p i_E(E) \subset E_p$;

b) $\hat{T} j_p i_E = T$. En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ i_E \downarrow & & \uparrow \hat{T} \\ i_E(E) & \xrightarrow{j_p/i_E(E)} & E_p \\ \bigcap & & \bigcap \\ C(K) & \xrightarrow{j_p} & L_p(\mu); \end{array}$$

iii) Ils existent une mesure de probabilité régulière de Borel μ sur K et une application lipschitzienne $\tilde{T} : L_p \longrightarrow \ell_\infty (B_{F^*})$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{T} & F & \xrightarrow{i_F} & \ell_\infty (B_{F^*}) \\ i_E \downarrow & & & & \uparrow \tilde{T} \\ C(K) & & \xrightarrow{j_p} & & L_p(\mu) ; \end{array}$$

iv) Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \sum, \mu)$, une application lipshitzienne $\tilde{u} : L_p(\mu) \longrightarrow L_\infty(B_{F^*})$ et un opérateur linéaire $v : E \longrightarrow L_\infty(\mu)$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{T} & F & \xrightarrow{i_F} & L_\infty (B_{F^*}) \\ v \downarrow & & & & \uparrow \tilde{u} \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{i_p} & & L_p(\mu) \end{array}$$

De plus, on peut choisir μ et $\hat{T}$ dans (ii) ou bien μ et $\tilde{T}$ dans (iii) de sorte que

$$Lip\left(\hat{T}\right) = Lip\left(\tilde{T}\right) = d_p^L(T) \text{ dans } (iv),$$

on peut arranger que $\|v\| = 1$ et $Lip(\tilde{u}) = d_p^L(T)$.

Preuve. $(i) \Longrightarrow (ii)$ D'aprés le Théorème 3.2.1,il existe une mesure de probabilité régulière de Borel μ sur K tel que pour tout $x, y \in E$, on a

$$\|Tx - Ty\| \leq d_p^L(T) \left(\int_{B_{E^*}} | \langle x^*, x - y \rangle |^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit une application lipschitzienne $u : j_p i_E (E) \longrightarrow F$ par $u (j_p i_E (E)) = T(x), x \in E$. Donc

$$Lip(u) \leq d_p^L(T).$$

On note par E_p la fermeture de $j_p i_E(E)$ dans $L_p(\mu)$ et $\hat{T}$ est l'extension de u à E_p. Alors

$$Lip\left(\hat{T}\right) \leq d_p^L(T) \text{ et } \hat{T} j_p^E i_E = T.$$

Pour l'inverse

$$d_p^L(T) = d_p^L(\hat{T} j_p^E i_E) \leq Lip\left(\hat{T}\right).$$

Ainsi

$$d_p^L(T) = Lip\left(\hat{T}\right).$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Soient μ, E_p et $\hat{T}$ comme dans (ii). Puisque $l_\infty(B_{F^*})$ est 1-retrect absolu, il existe une extension $\tilde{T}$ de $i_F\hat{T}$ à $L_p(\mu)$ avec

$$Lip\left(\tilde{T}\right) = Lip\left(i_F\hat{T}\right).$$

$(iii) \Longrightarrow (iv)$. Soit μ et $\tilde{T}$ comme dans (iii). On note que

$$j_p = i_p j_\infty : C\left(K\right) \xrightarrow{j_\infty} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_p} L_p(\mu).$$

Soit $u = j_\infty i_E$, on a

$$i_F T = \tilde{T} i_p u.$$

Soit $v = \dfrac{u}{\|u\|}$ et $\tilde{u} = \|u\|\,\tilde{T}$. Ceci implique que

$$i_F T = \tilde{u} i_p v.$$

De plus

$$Lip\left(\tilde{u}\right) \leq Lip\left(\tilde{T}\right) = d_p^L(T)$$

et

$$\begin{aligned} d_p^L(T) &= d_p^L(i_F T) \\ &= d_p^L(\tilde{u} i_p v) \\ &\leq Lip\left(\tilde{u}\right) \pi_p\left(i_p v\right) \\ &\leq Lip\left(\tilde{u}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|v\| = 1 \text{ et } Lip\left(\tilde{u}\right) = d_p^L(T).$$

$(iv) \Longrightarrow (i)$. Cette implication s'ensuit du Théorème 3.2.1 et le fait que $i_p v$ est p-sommant et i_F est l'injection isométrique. ■

Corollaire 3.2.1 *Soit K un espace compact de Hausdorff .Une application lipschitzienne $T : C(K) \longrightarrow F$ est Lipschitz p-dominé si et seulement s'ils existent une mesure de probabilité régulière μ sur un borélien Ket une application lipschitzienne $\tilde{T} : L_p(\mu) \longrightarrow F$ tel que $\tilde{T} j_p = T$. De plus, on peut s'arranger à avoir*

$$Lip\left(\tilde{T}\right) = d_p^L(T).$$

Corollaire 3.2.2 *Une application lipschitzienne $T : C(K) \longrightarrow F$ est lipschitz $2-$dominé si et seulement s'il existe une mesure de probabilité régulière μ sur B_{E^*} et une application lipschitzienne $\tilde{T} : L_2(\mu) \longrightarrow F$ tel que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ i_E \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\ C(B_{E^*}) & \xrightarrow{j_2} & L_2(\mu) \end{array}$$

De plus, on peut prendre

$$Lip\left(\tilde{T}\right) = d_p^L(T).$$

Chapitre 4

Relation entre les précédentes classes

4.1 La relation entre les opérateurs Lipschitz p-sommants et les opérateurs Lipschitz p-intégrals

Proposition 4.1.1 *Soit $1 \leq p < \infty$. Supposons $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur lipschitzien p-intégral entre deux espaces métriques alors T est un opérateur Lipschitz p-sommant et*

$$\pi_p^L(T) \leq \iota_p^L(T).$$

Preuve. Comme T est un opérateur Lipschitz p-intégral alors on a la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & \left(Y^{\#}\right)^* \\ A\downarrow & & & & \uparrow B \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & & L_p(\mu) \end{array}$$

puisque $I_{\infty,p}$ est Lipschitz p-sommant d'aprés la Remarque1.2.4 (voir [Bri13] page 5) avec $\pi_p^L(I_{\infty,p}) = 1$ alors on a d'aprés la propriété d'idéal non-linéaire JT Lipschitz p-sommant

et comme J est une isométrie alors par l'injectivité de π_p^L, T est toujours Lipschitz p-sommant et

$$\begin{aligned} \pi_p^L(T) &= \pi_p^L(JT) = \pi_p^L(B \circ I_{\infty,p} \circ A) \\ &\leq Lip(B)\,\pi_p^L(I_{\infty,p})\,Lip(A) \\ &= Lip(A)\,Lip(B). \end{aligned}$$

On passe maintenant à l'infinimum, on aura

$$\pi_p^L(T) \leq \inf\{Lip(A)\, Lip(B)\} = \iota_p^L(T).$$

D'où la proposition. ■

4.2 La relation entre les opérateurs Lipschitz fortement p-intégrals et les opérateurs Lipschitz p-dominés

Théorème 4.2.1 *Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur Lipschitz fortement p-intégral alors, il est Lipschitz p-dominé avec*

$$d_p^L(T) \leq s\iota_p^L(T).$$

Preuve. On utilise la factorisation des opérateurs Lipschitz fortement p-intégrals

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J_Y} & Y^{**} \\ B\downarrow & & & & \uparrow A \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{i_p} & & L_p(\mu) \end{array}$$

comme i_p est p-sommant et B est linéaire, il s'ensuit de propriété d'idéale des opérateurs Lipschitz p-dominés que $j_Y T$ est Lipschitz p-dominé.

Donc T est Lipschitz p-dominé et

$$\begin{aligned} d_p^L(T) &= d_p^L(j_Y T) \\ &= d_p^L(A i_p B) \\ &= Lip(A)\,\|B\|. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$d_p^L(T) \leq s\iota_p^L(T).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

En combinant les résultats précédents, nous avons les deux corollaires suivants.

Corollaire 4.2.1 *[CZ12] Les opérateurs Lipschitz 2-dominés sont Les opérateurs Lipschitz fortement 2-intégrals et on a*

$$d_2^L(T) = s\iota_2^L(T).$$

Corollaire 4.2.2 *[CZ12] Soit $1 \leq p < \infty$. Si K un espace compact de Hausdorff , alors tout opérateur $T : C(K) \longrightarrow Y$ lipschitz p-dominé est lipschitz fortement p-intégral et*

$$d_p^L(T) = s\iota_p^L(T).$$

Bibliographie

[AE56] R. F. Arens and J. Eels, *On embedding uniform and topological space*, Pactific J.Math, **6** (1956), 397-403.

[Ba72] L. Bahadur, *Banach spaces of vector-valued Lipschitz function* , **6** (2) (1972), 147-150.

[BL00] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis,* Proc. Amer. Math. Soc. **1** (48). Providence, RI 2000

[Bri13] C. N. Brian, *Extension of results about p-summing operators to Lipschitz p-summing maps and their respective relatives*, thèse de magister en sciences, Université de Pretoria, 2013.

[CZ12] D. Chen and B. Zeng, *Lipschitz p-integral operators and Lipschitz p-nuclear operators*, Nonlinear Analysis **75** (2012), 5270-5282.

[Dri03] B. K. Driver, *AnalysisTools with Applications,* Springer Berlin Heidelbeg, New York Hong London Milan Paris 2003.

[FJ09] Jeffrey D. Farmer and William B. Johnson, *Lipschitz p-Summing Operators,* Proc. Amer. Math. Soc. **137** (9) (2009), 2989-2995.

[KG03] N. J. Kalton and G. Godefory, *Lipschitz free Banach spaces,* Studia Math. **69**, (2003) , 121-141.

[SV06] S. Shirali and H. L. Vasudeva, *Metric spaces*, Springer-Verlag London Limited 2006.

[Wea99] N. Weaver, *Lipschitz Algebras*, World Scientific, singrapore 1999.