



# UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

**Département de Mathématiques**

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** Fondamentales et Appliquées

**Par**

HAMOUDI RACHIDA

**Sujet**

**Espaces modulo les polynômes**

**Soutenu le: 28/05/2013 devant le jury composé de**

**Promoteur :** MOUSSAI MADANI Professeur M'sila

**Président :** DJRIOU AISSA Professeur M'sila

**Examineur :** MAZOUZ AHMAD Professeur M'sila

**Promotion: 2012/2013**

## *Remerciement*

Ce travail a été réalisé sous l'excellente direction de Monsieur M. Moussai professeur à l'université de M'sila .Je tiens à vous exprimer toute mes immenses gratitudes pour avoir encadré, orienté et suivi le travail pendant la durée d'élaboration et de rédaction de ce mémoire, aussi pour m'avoir accordé votre confiance.

Je tiens à vous remercier très chaleureusement pour m'avoir donné l'occasion de travailler sur un sujet d'un tel intérêt et pour le temps qu'il a pu me consacrer .Ses compétences scientifiques ses remarques et sa patience m'ont été d'un grand secours dans la réalisation de ce mémoire.

J'exprime enfin mes remerciements honorables aux membres de jury de soutenance Messieurs Djriou .A et Mazouz .A de l'université de M'sila.

Enfin, je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à mes parents, mes deux familles pour leurs encouragements et leur soutien.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près et de loin à réaliser ce travail.

# Tables des matières

Notions	1
Introduction	3
1-Rappel sur la décomposition de Littlewood – Paley	4
1. Rappels de quelques espaces .....	5
2. Inégalités principales .....	7
3. Décomposition de littlewood – Paley .....	11
2-Définition des espaces modulo les polynômes	15
1. Définition et propriétés .....	16
2. Produit de convolution et transformation de Fourier .....	17
3-Applications aux espaces de Sobolev homogènes	18
1. Définition et propriétés de <i>Sobolev</i> homogènes .....	18
2. Réalisation de <i>Sobolev</i> homogènes .....	29
3. Duale de <i>Sobolev</i> homogènes .....	20
4. Quelque Remarque et proposition.....	21
4-Application aux espaces de Besov homogènes	23
1. Définition et propriétés de <i>Besov</i> homogènes .....	23
2. Dualités de <i>Besov</i> homogènes .....	24
3. Quelques Théorèmes et sa prouve .....	25
4. Bibliographies .....	34

## Notations

- Pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$  La dérivée partielle

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \text{ est notée } \partial^\alpha f.$$

- Pour  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  sa transformée de Fourier est :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx \text{ et sa transformation de Fourier inverse est}$$

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \check{f}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(\xi) d\xi.$$

- $x \cdot \zeta = \sum_{i=1}^n x_i \zeta_i$  et le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $f * g(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y) g(y) dy$  est la convolution des fonctions  $f$  et  $g$ .
- Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux espaces, on dit que  $A_1 \hookrightarrow A_2$ , s'il existe  $C > 0$

$$\text{telle que : } \|f\|_{A_1} \leq C \|f\|_{A_2}, \forall f \in A_1$$

- $p'$  l'exposant conjugué de  $p$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ).
- Soit  $k \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\tau_k$  est l'opérateur de translation  $\tau_k f(\cdot) = f(\cdot - k)$ .
- Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\text{supp } f$  est le support de  $f$ .
- $E'$  est l'espace dual de  $E$
- L'entier  $d$  désigne la dimension de l'espace euclidien courant.
- Soient  $0 < p \leq \infty$ ,  $0 < q \leq \infty$  alors :

$$\|f_k\|_{L^q(L^p)} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k(x)\|_p^q \right)^{1/q}$$

$$\|f_k\|_{L^p(L^q)} = \left\| \left( \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|^q \right)^{1/q} \right\|_p$$

- Soit  $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ,  $C^k(\mathbb{R})$  est l'espace de Hölder des fonctions bornées et

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^s} < \infty$$

- $L_p$ : est l'espace des fonctions mesurables  $f$  tels que :

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty$$

- $\ell_p$  : l'espace des suites  $(a_k)_k$  telle que :

$$\| a_k \|_{\ell^p} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} < +\infty$$

- $D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support compact.
- $D'(\mathbb{R}^n)$  est l'espace dual de  $D(\mathbb{R}^n)$ .
- $S(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  à décroissance rapide.
- $S'(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des distributions tempérées.
- $\dot{W}_p^m = \dot{H}_p^s$  : l'espace **de Sobolev homogène**.
- $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ : l'orthogonale de  $\mathcal{P}$  dans  $S(\mathbb{R}^n)$  avec  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des **polynômes**
- $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ : l'espace **de Besov homogène**.

# Introduction

L'objet de ce travail est l'étude des espaces modulo les polynômes qui jouent un rôle important et est un outil moderne dans l'analyse harmonique, la structure des espaces modulo les polynômes permettra de définir plusieurs concepts les espaces de Sobolev et Besov homogènes

Notre travail est organisé en quatre chapitres.

- Dans le premier chapitre on va étudier Littlewood – Paley et on reprendra quelques rappels sur des inégalités classiques et quelques espaces dans l'analyse harmonique.

- Dans le deuxième chapitre, on donne la définition des espaces modulo les polynômes par reprise de la définition et quelques propriétés élémentaires, ainsi que le produit de convolution et la transformation de Fourier.

- Dans le troisième chapitre nous allons appliquer les espaces modulo les polynômes aux espaces de Sobolev homogènes et aussi reprendre la définition et proposition, réalisation et dual de Sobolev homogène avec quelques remarques et théorèmes.

- Dans le quatrième chapitre, on va étudier l'application des espaces modulo les polynômes aux espaces de Besov homogène et on donne quelques théorèmes et propositions avec leurs démonstrations.

# **Chapitre 01**

**Rappel sur la décomposition de Littlewood – Paley**

**Rappel sur la décomposition de Littlewood – Paley :**

Dans ce chapitre on va étudier la Décomposition de **Littlewood – Paley** et reprisent premièrement définitions de quelques notions en analyse Harmonique et quelques rappels sur quelque espace et sur des inégalités classiques.

**1-Rappels de quelques espaces :**

**1-1-Espace de distribution  $\mathcal{D}'$  :**

**1-1-1-Définition :**

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , le support de  $\varphi$  est noté par  $supp \varphi$  et définit comme :

$$supp \varphi = \{ x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0 \}.$$

On note par  $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  à support compact.

**1-1-2-Proposition :**

- (i)-  $\mathcal{D}$  est un espace vectoriel Si  $\varphi \in \mathcal{D}$  alors  $\varphi' \in \mathcal{D}, \varphi'' \in \mathcal{D}, \dots, \varphi^{(n)} \in \mathcal{D}$
- (ii)-Si  $\varphi \in \mathcal{D}, \psi \in C^\infty$  alors  $\varphi\psi \in \mathcal{D}$

**1--1-3-L'espace  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  :**

**Définition :** L'ensemble des toutes les formes linéaires continues définie sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**1-2-Produit de convolution :**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions, on définit le produit de convolution  $h = f * g$  par

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

**Définition :**

On appelle transformation de Fourier de la distribution  $T$ , la distribution  $\widehat{T}$  défini par :

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi}) \text{ pour tout } \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

**1-3-Distributions tempérées :**

On appelle distribution tempérée sur  $\mathbb{R}^n$  une forme linéaire continue sur l'espace vectorielle  $S$ .

L'ensemble des distributions tempérées est noté  $S'$ .

**1-3-1-Proposition :** La transformation de Fourier inverse d'une distribution tempérée  $T$  est égale à  $T$ .

**Preuve :** on pose  $u = \widehat{T}$  et  $\widehat{\varphi} = \psi$  nous allons établir que  $\check{u} = T$  compte tenu de la relation  $\check{\psi} = \varphi$

On en effet  $\check{u}(\psi) = u(\check{\psi}) = u(\varphi) = \widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi}) = T(\psi)$

**1-3-2-Proposition**

$$\forall f \in S', g \in S : \langle \widehat{f}, g \rangle = \langle f, \widehat{g} \rangle \text{ et } \widehat{f^{(m)}} = (i\varepsilon)^m \widehat{f}, \widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$$

**1-4-Rappel sur les espaces  $L_p$  et  $\mathcal{L}_p$  où  $1 < p < +\infty$  :**

**1-4-1-Définition :**

**1- Les espaces  $L_p$  avec  $1 < p < +\infty$  :**

Soit  $f$  une fonction mesurable de  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}$ , on dit que  $f \in L_p$  si

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty & \text{si } p \neq +\infty \\ \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < +\infty & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

On pose alors  $\|f\|_p = (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{1/p}$

On dit que  $f \notin L_p$  si  $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx = +\infty$

Si  $p = +\infty$  alors  $\|f\|_{\infty} = \sup_x |f(x)|$

**Proposition :**

- $L_p$  est un espace de Banach  $\forall p \in [1, +\infty]$ .
- Soient  $p, q \in \mathbb{R}$  telle que  $1 \leq p < q < +\infty$  Si  $\Omega$  est bornée alors  $L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega)$

**2-L'espace  $\mathcal{L}_p$  :**

**Définition :**

Soit  $0 < p \leq +\infty$  on pose  $\mathcal{L}_p = \{ \{f_j\}_{j \geq 0} \subset \mathbb{C} : \|f_j\|_{L_p} < +\infty \}$

$$\text{Avec } \|f_j\|_{\mathcal{L}_p} = \begin{cases} (\sum_{j \geq 0} \|f_j\|_{L_p}^p)^{1/p} < +\infty & \text{si } 0 < p < +\infty \\ \sup_{j \in \mathbb{N}} \|f_j\|_{L_p} < +\infty & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

**Proposition :** Si  $0 \leq p < q \leq +\infty$  alors on a  $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_q$ .

**2-Inégalités principales :**

**2-1-Théorème (Théorème de Riesz – Thorin)**

Soit  $(x, u)$  et  $(y, v)$  deux espaces mesurés et  $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$ ,  
avec  $p_0 \neq p_1$  et  $q_0 \neq q_1$

On suppose que  $T$  est l'opérateur qui envoie  $L_{p_0}(x, u)$  dans  $L_{q_0}(y, v)$  et  
 $L_{p_1}(x, u)$  dans  $L_{q_1}(y, v)$  tel que pour toute fonction simple  $f$  :

$$\|Tf\|_{q_i} \leq C_i \|f\|_{p_i} \quad (i = 0, 1)$$

Alors  $T$ voie  $[L^{p_0}, L^{p_1}] = L^p$  dans  $[L^{q_0}, L^{q_1}] = L^q$  tel que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

De plus  $\|Tf\|_q \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \|f\|_p$

**2-2-Théorème (Inégalité de Young)**

Soit  $p, q, r \in [1, \infty]$  tel que  $\mathbf{1} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$  alors pour toute  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et  
 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$

on a  $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$

et de plus :

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

**Preuve :**

On fixe  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  et on considère l'opérateur  $Tf = f * g$

on a  $\|Tf\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (1)$

car  $\|Tf\|_q \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g(\cdot - y)\|_q dy = \|g\|_q \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy$

par conséquent :  $\|Tf\|_\infty \leq \|g\|_q \|f\|_{q'}$  (2)

Maintenant de (1) et (2) on peut appliquer Théorème (1)

car il est clair que  $T : L^1 \rightarrow L^q$  avec  $c_0 = \|g\|_q$

$$T : L^{q'} \rightarrow L^\infty \text{ avec } c_1 = \|g\|_q$$

Il vient :

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$$

avec :  $\frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}$  ,  $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q}$  ,  $\theta \in [0,1]$

on a  $\frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}$

entraîne  $\frac{1}{p} = \theta + 1 - \frac{1}{q} - \theta + \frac{\theta}{q}$

$$= \theta + (1 - \theta) \left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{q} + \frac{\theta}{q}$$

Ce calcul facile donne la relation demandée

i.e :  $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

**2-3-Théorème ( Inégalité de Hölder )**

Soit  $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 \leq p_i \leq \infty$  ou  $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$

alors  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n \in L^p(\mathbb{R}^n)$

et  $\| f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \dots f_n \|_p \leq \| f_1 \|_{p_1} \| f_2 \|_{p_2} \dots \| f_n \|_{p_n}$

avec  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p}$

**Preuve :**

La démonstration est vraiment classique, elle est basée sur les fonctions convexes.

**2-4-Théorème ( Inégalité de Bernstein )**

Soient  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,

Il existe une constante  $C_0 = C(\alpha, p, q, n) > 0$  tel que pour toute  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

avec  $\text{supp } f \subset \{ \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R \}$

on a  $\| f^{(\alpha)} \|_q \leq C_0 R^{|\alpha| + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \| f \|_p$  (3)

**Preuve :**

Soit  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\phi(\xi) = 1$  pour  $|\xi| \leq 1$

On pose  $\phi_R(\xi) = \phi(\frac{\xi}{R})$

Alors :  $\hat{f} = \phi_R f$

et par conséquent  $f^{(\alpha)} = (\mathcal{F}^{-1} \phi_R) * f$

par l'inégalité de Young on obtient :

$$\| f^{(\alpha)} \|_q \leq \| \mathcal{F}^{-1} \phi_R \|_r \| f \|_p$$

avec 
$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

D'autre part : comme pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  on a :

$$(\mathcal{F}^{-1} \phi_R)^\alpha(x) = \mathbf{R}^n (\mathcal{F}^{-1} \phi)^\alpha(\mathbf{R}x)$$

Il vient : 
$$\| (\mathcal{F}^{-1} \phi_R)^\alpha \|_r = \mathbf{R}^{n+|\alpha|+\frac{n}{r}} \| \mathcal{F}^{-1} \phi^{(\alpha)} \|_r$$

Ce qui donne le résultat.

### 2-5-Théorème ( Riemann – Lebesgue )

a)- Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  alors :

(i)- Son image de Fourier  $f$  est une fonction continue bornée sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\| f \|_\infty \leq \| f \|_1$ .

(ii)-  $\hat{f}$  tend vers 0 quand  $|\xi|$  tend vers  $\infty$ . C'est-à-dire  $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ .

b)- Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $L^1$  à valeur réelles alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx.$$

c)- La transformation de Fourier échange la translation en multiplication exponentielle :

$$\widehat{\mathbf{T}_a f} = e^{ia\xi} \hat{f}.$$

d)- (i)- Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $|\alpha| \leq k$  alors  $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$

De plus on a :  $D^\alpha(\hat{f}) = (-2i\pi)^\alpha f$ .

(ii)- Si  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ , avec  $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  et  $|\alpha| \leq K$

alors  $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**3-Décomposition de Littlewood – Paley :**

**3-1-Définition:** On dit qu'une fonction  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est la décroissance rapide si pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m \varphi(x) = 0$ , On dit que la fonction

$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors appartient à l'espace  $S(\mathbb{R}^n)$  de Schwarz si pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $\partial^\alpha \varphi$  est à décroissance rapide, Il est équivalent à dire que les quantités suivants :

$$N_p(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq p, |B| \leq p} \sup |x^\alpha \partial^B \varphi(x)|$$

Sont finies pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

**3-2-Remarque :** On peut démontrer que  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  si seulement si

$$\|\varphi\|_k = \sup_{|\alpha| \leq k, x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^k |\partial^\alpha \varphi(x)| < \infty.$$

**3-3-Définition:**

Une forme linéaire  $T$  définie sur l'espace  $S(\mathbb{R}^n)$  est une distribution tempérée, C'est-à-dire  $T \in S'(\mathbb{R}^n)$  si 'l existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que pour tout

$$\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \text{ on a } |\langle T, \varphi \rangle| \leq C N_p(\varphi).$$

**3-4-Théorème :**

La transformation de Fourier envoie l'espace  $S(\mathbb{R}^n)$  dans lui même et il existe une constante  $C_p$  tel que :

$$N_p(\hat{\varphi}) \leq C N_{p+n+1}(\varphi), \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

**3-5- Définition : ( décomposition de Littlewood – Paley )**

Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tels que :

(i)- $\text{supp } \varphi \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2 \right\}$ .

(ii)- $\varphi(\xi) \geq 0$  pour  $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$ .

(iii)- $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1$  , pour  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

On pose :  $\psi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi)$  , on obtient une fonction  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

telle que  $\text{supp } \psi \subset \{ \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2 \}$ .

alors pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  on a :  $\psi(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\xi) = 1$  (1)

la relation (1) est appelé la partition de l'unité, a cette partition on associe une suite d'opérateurs de convolution

$$\Delta_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

et  $Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

telle que : 
$$\begin{cases} (\Delta_k f)(x) = \mathcal{F}^{-1} \left( \varphi(2^{-k}\xi) \right) * f & (k \in \mathbb{N}^*) \\ (Q_j f)(x) = \mathcal{F}^{-1} \left( \psi(2^{-j}\xi) \right) * f & (j \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}) \end{cases}$$

Ou bien 
$$\begin{cases} (\widehat{\Delta_k f})(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi) \hat{f}(\xi) & k \geq 1 \\ (\widehat{Q_j f})(\xi) = \psi(2^{-j}\xi) \hat{f}(\xi) & j \geq 0 \end{cases}$$

avec la notation  $\Delta_0 = Q_0 = \varphi(\xi) \hat{f}(\xi) = \psi(\xi) \hat{f}(\xi)$

écrivons la relation au point  $2^{-j}\xi$  alors :

$$\psi(2^{-j}\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = 1$$

en multipliant par  $\hat{f}$

$$\text{donc } \psi(2^{-j}\xi)\hat{f} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi)\hat{f} = \hat{f} \quad (2)$$

pour  $j=0$  on obtient

$$\psi(\xi)\hat{f} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi)\hat{f} = \hat{f}$$

i.e

$$\mathbf{Q}_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k f = f$$

et alors :

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k f$$

On applique l'application  $\mathcal{F}^{-1}$  sur (2) on obtient :

$$\mathbf{Q}_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = f$$

alors

$$\mathbf{Q}_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = \sum_{k=0}^j \Delta_k f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f$$

donc

$$\mathbf{Q}_j f = \sum_{k=0}^j \Delta_k f \quad (3)$$

La série (3) est la décomposition de Littlewood – Paley et cette série converge aux sens des distributions tempérées.

**3-6-Remarque :**

Les deux opérateurs  $Q_j$  et  $\Delta_k$  sont définies sur  $S'(\mathbb{R}^n)$ .

(i)-Si  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_k f$  est la série de Littlewood-Paley homogène

(ii)-Si  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  la série  $Q_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k f$  est la série de Littlewood – Paley inhomogènes .

(iii)-les séries de Littlewood – Paley ont des versions continues .

**3-7-Remarque :**

Les opérateurs  $Q_j$  et  $\Delta_k$  sont bornés uniformément sur  $L_q(\mathbb{R}^n)$ .

# **Chapitre 02**

## **Définition des espaces modulo les polynômes**

**Rappel sur les espaces modulo les polynôme**

Dans ce chapitre est consacré aux espaces modulo les polynômes et aussi representent les notions et quelque définitions.

**1-les espaces distributions modulo les polynômes :**

**1-1-définition :**

On désigne par  $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$  le sous-espace de  $S'(\mathbb{R}^n)$  constitué de tous les polynômes.

Pour  $m \in \mathbb{N}$  on pose  $\mathcal{P}_m$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur  $m$ , avec  $\mathcal{P}_0 = \{0\}$ .

On note  $S_\infty(\mathbb{R}^n)$  le sous-espace de  $S(\mathbb{R}^n)$  constitue des fonctions  $u$  vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha u(x) dx = 0 \quad , \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

$S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  est le dual  $S_\infty(\mathbb{R}^n)$ , cet espace s'identifie à  $S'(\mathbb{R}^n) / \mathcal{P}_\infty$ .

**1-2-Définition :**

Notons  $S_\infty$  l'ensemble des fonctions de classe Schwartz tous les moments

Sont nuls, le dual de cet espace  $S'_\infty$  est l'espaces des distributions tempérées modulo les polynômes.

**1-3-Proposition:**

(i)- $S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ .

(ii)- $S_\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}^\perp(\mathbb{R}^n) \in S(\mathbb{R}^n)$  est l'orthogonale de  $\mathcal{P}$  dans  $S(\mathbb{R}^n)$

(iii)- $S_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Preuve :**

Soit  $S_\infty(\mathbb{R}^n) = F'$  et  $S'_\infty(\mathbb{R}^n) = E'$

(i)- on pose E et F deux espaces et  $E \subset F$  alors  $F' \subset E'$

Soit  $T \in F' : |\langle T, f \rangle| < +\infty, \forall f \in F$

et  $g \in E$  alors  $|\langle T, g \rangle| < +\infty$  et  $E \subset F$

donc  $g \in F$  et on obtient  $T \in E'$

et  $S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'_\infty(\mathbb{R}^n)$

**1-5-Proposition :**

L'application qui à la classe d'équivalence d'une distribution  $u$  associe la restriction de  $u$  à  $S_m(\mathbb{R}^n)$  est un isomorphisme de  $S'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$  sur  $S'_m(\mathbb{R}^n)$

**1-5-Définition :**

L'espace  $S'_m(\mathbb{R}^n)$  est appelé l'espaces des distributions modulo les polynômes de degrés inférieure à  $m$ .

**3-Produit de convolution et transformation de Fourier :**

**3-1- Produit de convolution :**

La convolution de  $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  avec  $g \in S_m(\mathbb{R}^n)$  est définie par la formule suivante :

$$(f * g)(x) = \langle f, T_x(g) \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On a  $f * g$  est une fonction de classe à croissant et que :  $f * g \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$   
Si  $f \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ .

**3-2-1-Théorème :**

Soit  $T_1$  et  $T_2$  deux distributions dans  $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  on a :

$$\text{si } T_1 = T_2 \in S'_\infty(\mathbb{R}^n) \text{ alors } \text{supp} \mathcal{F}(T_1 - T_2) = \{0\}$$

**Preuve :**

**Ex :** Soit  $T_1$  et  $T_2$  deux distribution

et  $T_1 = T_2 \in S'_\infty(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{N}$  et  $T_1 = T_2 = x^\alpha \in \mathcal{P}$

Pour la transformation de Fourier  $\mathcal{F}(T_1 = T_2) = \mathcal{F}(x^\alpha)$  et  $\forall \varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$

On a  $\langle \mathcal{F}(x^\alpha), \varphi \rangle = \langle x^\alpha, \widehat{\varphi} \rangle$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha \widehat{\varphi} \, dx \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i0x} x^\alpha \widehat{\varphi}(x) \, dx \\ &= \partial_\varepsilon^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i0x} \widehat{\varphi}(x) \, dx \\ &= \langle \delta, \widehat{\varphi}^\alpha(\mathbf{x}) \rangle = (-1)^\alpha \langle \delta^{(\alpha)}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{F}(x^\alpha) = (-1)^\alpha \delta^{(\alpha)}$  avec la fonction  $\delta = \begin{Bmatrix} 0 \\ \infty \end{Bmatrix}$  et  $\text{supp } \delta = \{0\}$

On résulte  $\text{supp } \mathcal{F}(x^\alpha) = \{0\} = \text{supp } \mathcal{F}(T_1 - T_2)$ .

# **Chapitre 03**

**Application aux espaces de Sobolev homogènes**

## Application aux espaces de Sobolev homogènes

Dans ce chapitre nous allons rappeler l'application des espaces modulo les polyômes aux l'espace de **sobolev** homogènes et premièrement reprisent définitions et quelques propriétés, la réalisation et dual de **sobolev** homogènes et aussi certain théorème.

### 1-L'espace Sobolev homogène :

#### 1-1-Définition :

On général l'espace **Sobolev** homogène noté par  $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$  et définit comme :

$$\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) : f^{(\alpha)} \in L_p(\mathbb{R}^n), |\alpha| = m\}.$$

muni de la norme suivant :

$$\sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_p$$

#### 1-2-Définition :

Soit  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}, 1 < p < +\infty$  l'espace **sobolev** homogène noté aussi par  $\dot{H}_p^s$  est un espaces des distributions modulo les polyômes définir par :

$$\|f\|_{\dot{H}_p^s} = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} \|\Delta_j f\|_p^2 \right)^{1/2} \leq +\infty$$

$\dot{H}_p^s$  est un sous-espace de  $S'(\mathbb{R}^n)$ .

#### 1-3-Proposition :

1.  $\dot{H}_p^s$  est un espace de Banach.
2.  $\dot{H}^s = \dot{B}_2^{s,2} = \dot{H}_p^s$  avec des normes équivalentes.
3.  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$

**1-4-Proposition :**

Si  $f$  est un polynôme alors

$$\Delta_j f = 0 \quad \text{donc} \quad \|f\|_{\dot{H}^s} = 0, \forall j \in \mathbb{Z}.$$

**Prouve :**

On pose  $f = x^\alpha$  est un polynôme, et  $\mathcal{F}(x^\alpha) = 0$

et on a  $\Delta_j x^\alpha = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}\xi)) * x^\alpha$

On multiplie par transformation de Fourier

$$\mathcal{F}((\Delta_j x^\alpha)(\xi)) = \varphi(2^{-j}\xi) \mathcal{F}(x^\alpha) = 0$$

donc  $\Delta_j f = 0$  et  $\|\Delta_j f\|_2 = 0$

$$\left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} \|\Delta_j f\|_2 \right)^{1/2} = 0 \leq +\infty$$

En fini  $\|f\|_{\dot{H}^s} = 0$  et  $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$

**2-Réalisation des Sobolev homogènes :****2-1-Définition :**

Soit  $E$  un sous-espace de  $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  muni d'une structure d'espace de Banach telle que l'injection canonique de  $E \rightarrow S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  soit continue.

On appelle réalisation de  $E$  une application linéaire et continue de  $E$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$  telle que la classe d'équivalence de  $\sigma(f)$  est égale à  $f$  pour tout  $f \in E$ .

**2-2-Proposition:**

1. Pour  $s > 0$ ,  $s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ , l'espace  $\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)$  admet une seule réalisation  $\sigma$  invariante par dilatation vérifiant :

$$\sigma(u(\lambda x)) = \sigma(u)(\lambda x), \forall \lambda > 0, \forall u \in \dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n).$$

2. pour  $s - \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ , l'espace  $\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)$  n'admet aucune réalisation invariante par dilatation

(i)-si  $s < \frac{n}{2}$  la réalisation consiste à choisir le représentant de  $u \in \dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)$

appartenant à  $L^q(\mathbb{R}^n)$  avec  $\frac{n}{q} = \frac{n}{2} - s$

(ii)-si  $s > \frac{n}{2}$ ,  $s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ , la réalisation consiste à choisir le représentant de

$u \in \dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)$  appartenant à  $\dot{\mathcal{C}}^{s-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$  et vérifiant :

$$\partial^\alpha u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \forall \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq \mathbf{E}(s - \frac{n}{2})$$

Ce résultat pour  $\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)$  défini comme sous-espace distribution modulo les polynôme constant.

**2-3-Proposition :**

Pour  $s \geq 0$ ,  $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$  est sous-espace de  $S'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{E(s-\frac{n}{p})}$ , avec  $f$  une

distribution qui vérifie la condition suivant :

$$\left( \int |\varepsilon|^{2s} |\hat{f}(\varepsilon)|^2 d\varepsilon \right)^{1/2} < +\infty$$

et  $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$  est isomorphe à  $\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)$

Alors on définit l'espace  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  par :

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha f\|_{L^2} < +\infty \right\} / \mathcal{P}_{s-1}$$

#### 2-4-Proposition :

Soit  $s \geq 0$  et  $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$  alors  $\exists c > 0 : \forall f \in \dot{H}_{\text{real}}^s(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{f}(x)|^2}{|x|^{2s}} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s}^2$$

#### 3-Duale de Sobolev homogène :

Le dual de  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$  et  $1 < p < +\infty$ , pour le produit scalaire de  $L^p$  est l'espace  $\dot{H}_p^{-s}$  est défini par

$$\dot{H}_p^{-s}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \int \frac{|\hat{f}(\varepsilon)|^2}{|\varepsilon|^{2s}} d\varepsilon < +\infty \right\}$$

#### 4-Lemme :

$\forall f \in S(\mathbb{R}^n) : \|f(\lambda \cdot)\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{s-\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{H}^s}, \forall \lambda > 0, \forall s \in \mathbb{R}^n$

$$\|fg\|_{\dot{H}^s} \leq C(\|f\|_{\infty} \|g\|_{\dot{H}^s} + \|g\|_{\infty} \|f\|_{\dot{H}^s}), \forall s \geq 0$$

$$\|f\|_{\dot{H}^s} \leq C \|f\|_{H^s}, \forall s \geq 0$$

**5-Remarque :** pour toute distribution  $f$  de  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  s'écrit de façon unique  $f = g + \mathcal{P}$  où :

1. si  $s < \frac{n}{2}$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , et  $\frac{n}{q} = \frac{n}{2} - s$  et  $\mathcal{P}$  un polynôme.
2. si  $s > \frac{n}{2}$ ,  $g \in \dot{C}^{s-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , et  $\mathcal{P} = \sum_{|\alpha| \geq E(s-\frac{n}{2})+1} C_\alpha x^\alpha$

L'espace  $\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)$  devient un espace de distribution modulo les **polynôme** de degré inférieur ou égale à  $\mathbf{E}\left(s - \frac{n}{2}\right)$  si  $s \geq \frac{n}{2}$ .

### 6-Remarque :

Rappelons qu'un produit scalaire sur  $\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)$  et donnée par :

$$s \in \mathbb{N} : \langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha|=s} \int_{-\infty}^{\infty} \partial^\alpha f(x) \partial^\alpha g(x) dx .$$

### 7-Proposition :

Soit  $\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} = \|(-\Delta)^{s/2} f\|_p < +\infty$  (1)

1. si  $\frac{-n}{p} < s < \frac{n}{p}$  l'espace **sobolev homogène**  $\dot{W}^{s,p}$  sera le complet de l'espace  $\mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$  pour la norme (1) et cette complet abstrait est bien un espace de distribution tempérées.
2. **si**  $s < \frac{-n}{p}$ , nous avons un problème même qui tous les **môments** de  $f$  est une fonction de test, on a  $\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} = +\infty$ , à moins que tous les **môments** de  $f$  d'ordre inférieur où égale a  $|s + \frac{n}{p}|$  ne soient nuls. On part donc de espace  $S_0(\mathbb{R})$  que l'on complet pour la norme (1) ici encore  $\dot{W}^{s,p}$  est un espace des distributions tempérées.
3. si  $\frac{n}{p} + k \leq s \leq \frac{n}{p} + k + 1$  ou  $k$  un entier alors on définit l'espace **sobolev homogène** d'indices  $(s, p)$  comme un espace distribution modulo les **polynômes** de degrés inférieurs où égales  $k$ , ce n'est donc de plus un espace fonctionnel observons finalement qui :

Si  $s$  est un entier positif nous avons la fonction

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} = \sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha f\|_p \quad (1 < p < +\infty)$$

# **Chapitre 04**

## **Application aux espaces de Besov homogènes**

## Application aux espaces de Besov homogènes

Dans ce dernière chapitre on va donner l'application des espaces modulo les **polynômes** aux espace **Besov** homogène

Alors on donne définition et quelques propriétés de Besov homogènes avec la démonstration et dualité de **Besove**, aussi certain théorème et théorème (*Triebel*).

### 1-Espace de Besov homogène :

#### 1-1-Définition :

On définit pour  $s \in [-\infty, +\infty]$  et  $p, q \in [1, +\infty]$  l'espace de Besov homogène est l'ensemble des fonctions :

$$f \in S'_{\infty}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \quad \text{si } q < +\infty$$

et

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|\Delta_j f\|_p < +\infty \quad \text{si } q = +\infty.$$

#### 1-3-Proposition :

(i)- $\dot{B}_p^{s,q}$  est un espace de Banach pour  $p, q \in [1, +\infty]$ .

(ii)- $\dot{B}_p^{s,q} = \dot{C}^s$  pour  $s \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{N}$ .

(iii)- $\dot{B}_2^{s,2} = \dot{H}^s$  est espace **sobolev** homogène.

#### 1-4-Proposition :

(i)  $\dot{B}_p^{s,q} \hookrightarrow \dot{B}_p^{s,q_1}$  pour  $q \leq q_1$

(ii)  $\dot{B}_p^{t,q} \hookrightarrow \dot{B}_{p_1}^{s,q}$  pour  $t - \frac{n}{p} = s - \frac{n}{p_1}$  et  $p \leq p_1$

**Preuve :**

(i)-On obtient cette inclusion car  $L^q \subset L^{q_1}$ .

(ii)-Pour démontrer (ii) on applique l'inégalité de **Bernstien** on a :

$$\| \Delta_j f \|_{p_1} \leq C 2^{j(\frac{n}{p} - \frac{n}{p_1})} \| \Delta_j f \|_p$$

donc

$$\| f \|_{\dot{B}_{p,q}^t(\mathbb{R}^n)} \leq \| f \|_{\dot{B}_{p_1,q}^s(\mathbb{R}^n)}$$

alors

$$\dot{B}_p^{t,q} \hookrightarrow \dot{B}_{p_1}^{s,q}$$

**2-Dualité :**

La fermeture de  $S_\infty(\mathbb{R}^n)$  dans  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ , que nous noterons  $\dot{\mathbf{b}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$  est le dual de  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$  et un espace de Banach distribution dans  $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$

L'ensemble des  $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  pour les quelles il existe une constant  $C = C(\mathbb{R}^n)$

Telle que :

$$| \langle f, g \rangle | \leq C \| g \|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}, \forall g \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$$

**2-1-Théorème :** En tant que E.D.B l'espace de **Besov**  $\dot{B}_{p,q}^{-s}(\mathbb{R}^n)$  n'est autre que le dual de  $\dot{\mathbf{b}}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ .

**2-2-Corollaire :** si  $p < +\infty, q < +\infty$  on a :  $(\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))' = \dot{B}_{p',q'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$  avec  $p', q'$  sont les conjugué de  $p, q$

**4-Lemme :**

Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $0 < a < b$  et soit  $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite de  $S'(\mathbb{R}^n)$

Telle que

$-v = v(s, p, q, n)$  est un entier définit par :

$$* v = \max\left(\left[s - \frac{n}{p}\right] + 1, 0\right), s - \left(\frac{n}{p}\right) \notin \mathbb{N}, q > 1$$

$$* v = s - \frac{n}{p}, \text{ si } s - \left(\frac{n}{p}\right) \in \mathbb{N}, q = 1$$

$-\hat{u}_j$  est portée pour la couronne  $2^{js}a \leq |\varepsilon| \leq b2^{js}$

$$- A = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} \|u_j\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq +\infty$$

Alors la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j$  converge dans  $S'_v(\mathbb{R}^n)$  et on a

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j \right\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq C(s, a, b)A$$

- Si  $s > 0$ , la même conclusion est vérifiée pour  $a = 0$
- Si  $s < 0$ , la même conclusion est vérifiée pour  $b = 0$

**Preuve :**

(i)-convergence dans  $S'_v(\mathbb{R}^n)$ , soit  $f \in S'_v(\mathbb{R}^n)$

1-Le cas  $s > 0$  : on pose  $\hat{u}_j$  est portée par  $|\varepsilon| \leq b2^j, \forall j \in \mathbb{Z}$ , il existe  $m$  ne dépendant que  $b$

$$S_{j+m}(\hat{u}_j) = \hat{u}_j, \forall j \in \mathbb{Z} \text{ et donc } \langle \hat{u}_j, f \rangle = \langle \hat{u}_j, S_{j+m}f \rangle$$

$$\text{et } \|S_{j+m}f\|_{p'} \leq c(f) \min\left(1, 2^{j\left(v + \left(\frac{n}{p}\right)}\right)\right), \forall j \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

par définition de  $v$  on obtient :

$$\left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{-js} \|S_{j+m}f\|_{p'})^{q'} \right)^{1/q'} \leq +\infty$$

et donc

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle \hat{u}_j, f \rangle| \leq +\infty$$

2-Le cas  $s < 0$  on suppose  $\hat{u}_j$  est portée par l'ensemble  $|\varepsilon| \geq a2^j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$

ne dépendant que de  $a$  telle que :

$$S_{j+m}(\hat{u}_j) = 0, \forall j \in \mathbb{Z} \text{ et donc } \langle \hat{u}_j, f \rangle = \langle \hat{u}_j, S_{j+m}f - f \rangle$$

et donc on tiré les estimations suivant :

$$\|S_{j+m}f - f\|_{p'} \leq c(f) \min(1, 2^{jv}), \forall j \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Si on pose  $N > -s$ , on déduit:

$$\left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{-js} \|S_{j+m}f\|_{p'})^{q'} \right)^{1/q'} \leq +\infty, j \in \mathbb{Z}$$

et donc

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle \hat{u}_j, f \rangle| \leq +\infty$$

3-Le cas  $s = 0$  :

Par hypothèse sur le support de  $\hat{u}_j$ , il exist  $m_1, m_2$  ne dépendant que  $a$  et  $b$  tels que  $\Delta_k(\hat{u}_j) = 0$  Sauf  $m_1 < j - k < m_2$

donc

$$\langle \hat{u}_j, f \rangle = \sum_{m_1 < m < m_2} \langle \hat{u}_j, \Delta_{j-m} f \rangle$$

$$\| \Delta_{j-m} f \|_{p'} \leq c \xi_N(f) \min \left( 2^{-j}, 2^{j \left( v + \left( \frac{n}{p} \right) \right)} \right), j \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

et on a

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} | \langle \hat{u}_j, f \rangle | \leq +\infty$$

(ii)- $\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  On a  $u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j$

alors

$$\Delta_k u = \sum_{k+m_1 < j < k+m_2} \Delta_k(u_j)$$

On a  $m_1 = +\infty$  si seulement si  $b = +\infty$  et de même  $m_2 = +\infty$  si seulement si  $a = 0$  et  $\Delta_j$  étant uniformément bornés sur  $L_p$

Il vient

$$2^{ks} \| \Delta_k u \|_p < c \sum_{k+m_1 < j < k+m_2} 2^{(k-j)s} 2^{ks} \| u_j \|_p$$

Et de tous les cas on a

$$B = \sum_{m_1 < i < m_2} 2^{-is} < +\infty$$

Donc pour appliquer l'inégalité de Young dans  $L_p(\mathbb{Z})$  ce qui donne :

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-is} (2^{ks} \| \Delta_k u \|_p)^q \right)^{1/q} \leq cAB$$

En établissant que  $\nu$  est le plus petit entier qui permette la convergence de la série de Littlewood-Paley

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \text{ dans } S'_\nu(\mathbb{R}^n), \text{ Pour tout } f \in \dot{\mathbf{B}}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$$

### 5-Proposition

Soit  $\mathbf{I}_s : S'_\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  l'identité de  $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\text{Et } \langle \mathbf{I}_s f, g \rangle = \langle f, \mathbf{I}_s g \rangle, \widehat{\mathbf{I}_s f} = |\varepsilon|^{-s} \hat{f}(\varepsilon) \quad \text{et } g \in S(\mathbb{R}^n)$$

Soit  $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  alors  $f \in \dot{\mathbf{B}}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  si seulement si  $\mathbf{I}_s f \in \dot{\mathbf{B}}_{p,q}^{s+s'}(\mathbb{R}^n)$  de plus l'expression équivalent à la norme de  $\dot{\mathbf{B}}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est  $\| \mathbf{I}_s f \|_{\dot{\mathbf{B}}_{p,q}^{s+s'}(\mathbb{R}^n)}$

**6-Théorème :**  $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n), 1 < p, q < +\infty, s \in \mathbb{R}^n$

$$\text{Si } \| \Delta_j f \|_p = 0 \text{ alors } \| f \|_{\dot{\mathbf{B}}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = 0 \quad \text{et } f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

**Preuve :**

$$\text{EX : } x^\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \mathcal{F}(x^\alpha) = 0, \Delta_j x^\alpha \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{on a } \mathcal{F}(\Delta_j x^\alpha) = \phi(2^{-j}\varepsilon)\mathcal{F}(x^\alpha) = 0 \text{ alors } \Delta_j x^\alpha = 0$$

$$\text{donc } \| \Delta_j x^\alpha \|_p = 0$$

$$\left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} \| \Delta_j f \|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} = 0 \text{ alors } \| f \|_{\dot{\mathbf{B}}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = 0$$

et le zéro (0) dans  $\dot{\mathbf{B}}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est représentant un **polynôme** .

**7-Théorème :**

$$\forall \lambda > 0 \text{ on a } \| f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \|_{\dot{\mathbf{B}}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \sim \lambda^{\frac{n}{p}-s} \| f \|_{\dot{\mathbf{B}}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned}\Delta_j \left( f \left( \frac{x}{\lambda} \right) \right) (x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{js} \mathcal{F}^{-1} \varphi(2^{-j}(x-y)) f \left( \frac{x}{\lambda} \right) dy \\ &= \lambda^n \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{js} \mathcal{F}^{-1} \varphi \left( 2^{-j} \left( \frac{x}{\lambda} - z \right) \right) f(z) dz \quad \text{pour on pose } z = \frac{x}{\lambda}\end{aligned}$$

Et aussi  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda \rightarrow 2^k$  et  $\frac{1}{c} 2^{k-1} < \lambda < 2^k c$  on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_j \left( f \left( \frac{\cdot}{2^k} \right) \right) (x) &= 2^{nk+js} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{-1} \varphi \left( 2^{j+k} \left( \frac{x}{2^k} - z \right) \right) f(z) dz \\ &= \Delta_{j+k} f \left( \frac{x}{2^k} \right)\end{aligned}$$

donc  $\Delta_j \left( f \left( \frac{\cdot}{2^k} \right) \right) (x) = \Delta_{j+k} f \left( \frac{x}{2^k} \right)$

et  $\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{j+k} f \left( \frac{x}{2^k} \right)|^p dx \right)^{1/p} = \|\Delta_j \left( f \left( \frac{\cdot}{2^k} \right) \right)\|_p$

$$\begin{aligned}&= \left( 2^{kn} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{j+k} f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= 2^{\frac{kn}{p}} \|\Delta_{j+k} f\|_p\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\|f \left( \frac{x}{\lambda} \right)\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} &= \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} \|\Delta_{j+k} f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (j+k \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{R}^n) \\ &= 2^{\frac{knq}{p} - ksq} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{(j+k)s} \|\Delta_{j+k} f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (2^k)^{\frac{n}{p} - s} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{-sd} \|\Delta_d f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

On résultat

$$\|f(\frac{x}{\lambda})\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \sim \lambda^{\frac{n}{p}-s} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$$

### 8-Théorème :

Soit  $s > 0$ ,  $f = Q_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j f$  si  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  ou  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  et

$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$  si  $f \in S_{\infty}(\mathbb{R}^n)$  ou  $f \in S'_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

alors

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} \sim \|f\|_p + \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{Preuve : } \begin{cases} (1) - \|f\|_{B_{p,q}^s} \leq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \\ (2) - \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{B_{p,q}^s} \end{cases}$$

$$1) - \|f\|_{B_{p,q}^s} \leq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$$

On a

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^s} &= \|Q_j f\|_p + \left( \sum_{j=1}^{\infty} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{1/q} \\ &\leq \|Q_j f\|_p + \left( \sum_{j=-\infty}^0 (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{1/q} + \\ &\quad \left( \sum_{j=1}^{\infty} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{1/q} + \left( \sum_{j=1}^{\infty} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{1/q} \\ &\leq \|f\|_p + \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{1/q} \\ &\leq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

$$2)- \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{B_{p,q}^s}$$

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} < \left( \sum_{j=-\infty}^0 (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{1/q} + \left( \sum_{j=1}^{\infty} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{1/q}$$

$$\text{et} \quad \|\Delta_j f\|_p < C_0 \|f\|_p, \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

avec on a  $j = -d$  alors

$$\sum_{d=0}^{\infty} 2^{-dsq} = \sum_{d=0}^{\infty} 2^{(-sq)^d} = \frac{1}{1 - 2^{-sq}} = \alpha$$

et on déduire donc

$$\left( \sum_{j=-\infty}^0 (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{1/q} \leq \alpha C_0 \|f\|_p$$

et

$$\begin{aligned} \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} &\leq \alpha C_0 \|f\|_p + \left( \sum_{j=1}^{\infty} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{1/q} + \|f\|_p \\ &\leq (\alpha C_0 + 1) \left[ \|f\|_p + \left( \sum_{j=1}^{\infty} (2^{js} \|\Delta_j f\|_p)^q \right)^{1/q} \right] \\ &\leq (\alpha C_0 + 1) \|f\|_{B_{p,q}^s} \leq \|f\|_{B_{p,q}^s} \end{aligned}$$

**9-Théorème(Triebel):**

$$s > 0 \text{ alors (i) } -\|f\|_{B_{p,q}^s} \sim \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$$

$$(ii) - B_{p,q}^s = L_p \cap \dot{B}_{p,q}^s$$

**10-Remarque :**

$$\forall s > 0 : \frac{1}{(\alpha C_0 + 1)} \left( \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \right) \leq \|f\|_{B_{p,q}^s} \text{ alors } B_{p,q}^s \subset L_p \cap \dot{B}_{p,q}^s$$

$$\forall s : \|f\|_{B_{p,q}^s} \leq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \text{ alors } L_p \cap \dot{B}_{p,q}^s \subset B_{p,q}^s$$

**12-2-Théorème :**

Si  $0 < s < \frac{n}{p}$  et  $\lambda > 0$  alors  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{p}-s}} \|f(\frac{\cdot}{\lambda})\|_{B_{p,q}^s} = \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ ,  $\forall f \in \dot{B}_{p,q}^s$

**Preuve :**  $\forall \lambda > 0$

$$\|f(\frac{\cdot}{\lambda})\|_{B_{p,q}^s} = \|f(\frac{\cdot}{\lambda})\|_p + \|f(\frac{\cdot}{\lambda})\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$$

$$\|f(\frac{\cdot}{\lambda})\|_{B_{p,q}^s} = \lambda^{\frac{n}{p}} \|f\|_p + \lambda^{\frac{n}{p}-s} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$$

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{p}-s}} \|f(\frac{\cdot}{\lambda})\|_{B_{p,q}^s} = \frac{1}{\lambda^{-s}} \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$$

On pose  $F(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{p}-s}} \|f(\frac{\cdot}{\lambda})\|_{B_{p,q}^s}$  donc  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(\lambda) = \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$

**13-Théorème :** Soit  $\in \mathbb{R}^n$ ,  $1 < p, q < \infty$ ,  $0 < a < b$ ,  $(f_j)$  une suite de  $S(\mathbb{R}^n)$

avec  $\text{supp } \hat{f}_j \subset \{\xi : a2^j \leq \xi \leq b2^j\} = A_j$

Alors

$$\|\sum_{j \in \mathbb{N}} f_j\|_{B_{j,q}^s} \leq c (\sum_{j=0}^{\infty} (2^{js} \|f_j\|_p)^q)^{1/q}$$

Et  $C > 0$  dépend de  $p, q, a$  et  $b$  Si  $s > 0$  alors on peut remplacer la couronne  $A_j$  par  $B_j = \{\xi : |\xi| \leq b2^j\}$ .

**Remarque :**

$$\xi_j > 0 \quad \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j \leq k} 2^{j-k} \xi_j \right)^q \right)^{1/q} \leq C \left( \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^q \right)^{1/k}$$

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j \geq k} 2^{-j+k} \xi_j \right)^q \right)^{1/q} \leq C \left( \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^q \right)^{1/k}$$

## Bibliographies

- [1] A.YOUSSFI : continuité – Sobolev de certains opérateurs Paradifférentiels (1990).
- [2] B.VEDEL : Règlement de la divergence INFRA-ROUGE dans des bases d'ondelettes adaptées (2004).
- [3] B.CHAMORRO : Inégalités de GAGLIARDO-NIRENBERG précisées sur le groupe de Heisenberg(2006).
- [4] F.MARCHAND: Application de techniques d'analyse harmonique réels à l'étude d'une classe d'équations quasi-géostrophiques (2006).
- [5] G.BOURDAUD : Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov , 18 novembre 2009 .
- [6] G.BOURDAUD, MEYER , Y. : Le calcul fonctionnel sous-linéaire dans les espace de Besov homogènes (2004)
- [7] G.BOURDAUD : Ondelettes et espace Besov (1995).
- [8] H. BAHOURI, PATRICK, G., JIANGXU, CH. : Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg
- [9] M.MOUSSAI: Thèse Master, sur les espaces de Lizorkin – Triebel , université de M'sila 2011/2012.
- [10] M. MOUSSAI: les espaces de Besov , Thèse Master, université de m'sila 2011/2012 .
- [11] M.MOUSSAI : Analyse harmonique, cours Msila 2013.
- [12] M.MOUSSAI : Thèse Master sur la multiplication ponctuelle des espaces de Besov , université de M'sila 2011/2012 .
- [13] M.EL SAFADI : Application de la Décomposition de littlewood – Paley à la régularité pour des équations cinétiques de type Boltzmann(2005).

- [14] **M.MOUSSAI: Continuité de certains opérateurs intégraux singulières sur les espaces potentiel de Bessel , Thèse Magister ,université de M'sila 2001.**
- [15] **P.GERMAIN : solutions Fortes, solutions Faibles d'équations aux dérivées partielles d'évolution(2005).**

## *Résumé*

*L'objet de ce travail est l'étude des espaces modulo les polynômes qui jouent un rôle important et est un outil moderne dans l'analyse harmonique, la structure des espaces modulo les polynômes permettra de définir plusieurs concepts les espaces de sobolev et Besov homogènes.*

### *ملخص*

الغرض من هذا العمل هو دراسة المساحات النمطية متعددة الحدود التي تلعب دورا هاما وهي أداة حديثة في التحليل التوافقي فإن هيكل المساحات النمطية متعددة الحدود يسمح بتعريف عدة مفاهيم مثل مسافات Besov و sobolev المتجانسة.

## *Summary*

*The purpose of this work is the study of spaces modulo. Polynomials play an important role and are a modern tool in harmonic analysis, the structure of spaces modulo polynomials will define several concepts spaces of sobolev and homogeneous Besov.*